

# **Elementos De Máquinas**

**-Teoría**

**Jordi Viñolas Prat**

Dr. Ingeniero Industrial

**Juan Martín Egaña Azurmendi**

Ingeniero Industrial

**Xabier Carrera Akutain**

Ingeniero Industrial

Octubre 2002

# ÍNDICE

|  |            |
|--|------------|
| <b>1. INTRODUCCION A LA LUBRICACIÓN .....</b>                        | <b>7</b>   |
| 1.1 BREVE RECORDATORIO HISTÓRICO .....                               | 7          |
| 1.2 OBJETIVOS Y CAMPOS DE APLICACIÓN .....                           | 8          |
| 1.3 TIPOS DE LUBRICACIÓN .....                                       | 9          |
| 1.4 VISCOSIDAD .....   | 10         |
| 1.5 LEY DE PETROFF. ....   | 12         |
| 1.6 ESTABILIDAD DE LA LUBRICACIÓN. CURVA DE STRIBECK. ....           | 13         |
| 1.7 COJINETE CON LUBRICACIÓN PERFECTA. ....                          | 15         |
| <b>2. COJINETES HIDRODINÁMICOS.....</b>                              | <b>18</b>  |
| 2.1 TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA. ....                     | 18         |
| 2.2 GENERALIZACIÓN DE LA EC. DE REYNOLDS UNIDIMENSIONAL .....        | 20         |
| 2.3 SOLUCIÓN DE LA EC. DE REYNOLDS EN CASOS PARTICULARES.....        | 22         |
| 2.4 FACTORES DE DISEÑO. ....   | 24         |
| 2.5 RELACIÓN ENTRE LAS VARIABLES DE DISEÑO.....                      | 25         |
| 2.6 ORIENTACIÓN AL DISEÑO DE COJINETES. ....                         | 27         |
| 2.7 LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA CON ALIMENTACIÓN A PRESIÓN. ....       | 29         |
| <b>3. COJINETES DE FRICCIÓN .....</b>                                | <b>35</b>  |
| 3.1 CONDICIONES EN LAS QUE SE PRODUCE LUBRICACIÓN LÍMITE.....        | 35         |
| 3.2 CLASIFICACIÓN DE LOS LUBRICANTES. ....                           | 36         |
| 3.3 ORIENTACIONES DE DISEÑO. ....                                    | 37         |
| 3.4 EJEMPLOS DE COJINETES DE FRICCIÓN COMERCIALES .....              | 40         |
| <b>4. LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA.....</b>                              | <b>46</b>  |
| 4.1 INTRODUCCIÓN. ....   | 46         |
| 4.2 EJEMPLO: ESTUDIO DEL APOYO AXIAL SIMPLE.....                     | 48         |
| 4.3 COMPENSADORES .....  | 50         |
| 4.4 ACCIÓN DE LOS COMPENSADORES .....                                | 52         |
| 4.5 GUÍA PLANA CON LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA. ....                    | 53         |
| <b>5. COJINETES DE RODAMIENTO .....</b>                              | <b>73</b>  |
| 5.1 INTRODUCCIÓN .....   | 73         |
| 5.2 TIPOS DE RODAMIENTOS .....                                       | 74         |
| 5.3 DURACIÓN O VIDA ÚTIL DE UN RODAMIENTO .....                      | 77         |
| 5.4 CARGA EN LOS RODAMIENTOS .....                                   | 78         |
| 5.5 SELECCIÓN DE RODAMIENTOS DE BOLAS Y DE RODILLOS CILÍNDRICOS..... | 79         |
| 5.6 SELECCIÓN DE COJINETES DE RODILLOS CÓNICOS .....                 | 81         |
| 5.7 COMENTARIOS SOBRE LAS DISTINTAS OPCIONES DE COJINETES.....       | 83         |
| <b>6. FRENOS Y EMBRAGUES.....</b>                                    | <b>87</b>  |
| 6.1 INTRODUCCIÓN .....   | 87         |
| 6.2 ANÁLISIS DE UN EJEMPLO SENCILLO.....                             | 88         |
| 6.3 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS. ....                                | 90         |
| 6.4 EMBRAGUES Y FRENOS CON ZAPATAS INTERIORES.....                   | 92         |
| 6.5 EMBRAGUES Y FRENOS DE TAMBOR CON ZAPATAS EXTERIORES. ....        | 95         |
| 6.6 EMBRAGUES Y FRENOS DE CINTA O BANDA. ....                        | 98         |
| 6.7 EMBRAGUES CÓNICOS DE ACCIÓN AXIAL. ....                          | 100        |
| 6.8 EMBRAGUES DE DISCO DE ACCIÓN AXIAL.....                          | 103        |
| 6.9 MATERIALES DE FRICCIÓN. ....                                     | 106        |
| 6.10 EJEMPLOS DE FRENOS Y EMBRAGUES.....                             | 107        |
| <b>7. VOLANTES DE INERCIA.....</b>                                   | <b>112</b> |
| 7.1 INTRODUCCIÓN. ....   | 112        |
| 7.2 ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO. ....                                    | 113        |

|           |  |                                     |
|-----------|--|-------------------------------------|
| 7.3       | CÁLCULO DE UN VOLANTE DE INERCIA.....                      | 115                                 |
| <b>8.</b> | <b>TORNILLOS Y UNIONES ATORNILLADAS.....</b>               | <b>119</b>                          |
| 8.1       | INTRODUCCIÓN .....   | 119                                 |
| 8.2       | MECÁNICA DE LOS TORNILLOS DE FUERZA O POTENCIA. ....       | 121                                 |
| 8.3       | ESFUERZOS EN LA ROSCA.....                                 | 124                                 |
| 8.4       | TORNILLOS Y PERNOS. ....                                   | 126                                 |
| 8.5       | PRECARGA DE PERNOS: CARGA ESTÁTICA Y CARGA DE FATIGA. .... | 129                                 |
| 8.6       | HUSILLOS A BOLAS .....                                     | 131                                 |
|           | ÍNDICE .....   | 142                                 |
| <b>9.</b> | <b>ENGRANAJES RECTOS.....</b>                              | <b>ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.</b> |
| 9.1       | INTRODUCCIÓN. ....   | <b>ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.</b> |
| 9.2       | ANÁLISIS DE FUERZAS.....                                   | <b>ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.</b> |
| 9.3       | ESFUERZOS EN LOS DIENTES.....                              | 150                                 |
| 9.4       | RESISTENCIA A LA FATIGA.....                               | 153                                 |
| 9.5       | DURABILIDAD DE LA SUPERFICIE. FATIGA SUPERFICIAL.....      | 156                                 |

## ***INTRODUCCIÓN A LA LUBRICACIÓN***

|



## INDICE

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. INTRODUCCION A LA LUBRICACIÓN .....</b>              | <b>7</b> |
| 1.1 BREVE RECORDATORIO HISTÓRICO .....                     | 7        |
| 1.2 OBJETIVOS Y CAMPOS DE APLICACIÓN .....                 | 8        |
| 1.3 TIPOS DE LUBRICACIÓN .....                             | 9        |
| 1.3.1 <i>Lubricación hidrodinámica:</i> .....              | 9        |
| 1.3.2 <i>Lubricación límite:</i> .....                     | 9        |
| 1.3.3 <i>Lubricación hidrostática</i> .....                | 9        |
| 1.4 VISCOSIDAD .....                                       | 10       |
| 1.5 LEY DE PETROFF. ....                                   | 12       |
| 1.6 ESTABILIDAD DE LA LUBRICACIÓN. CURVA DE STRIBECK. .... | 13       |
| 1.7 COJINETE CON LUBRICACIÓN PERFECTA. ....                | 15       |

## 1. INTRODUCCION A LA LUBRICACIÓN

### 1.1 Breve recordatorio histórico

El propósito de la lubricación es la separación de dos superficies con deslizamiento relativo entre sí de tal manera que no se produzca daño en ellas: se intenta con ello que el proceso de deslizamiento sea con el rozamiento más pequeño posible. Para conseguir esto se intenta, siempre que sea posible, que haya una película de lubricante de espesor suficiente entre las dos superficies en contacto para evitar el desgaste.

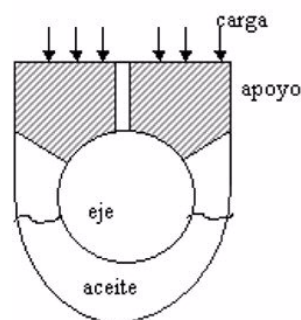
El lubricante en la mayoría de los casos es aceite mineral. En algunos casos se utiliza agua, aire o lubricantes sintéticos cuando hay condiciones especiales de temperatura, velocidad, etc.

Históricamente es interesante señalar que únicamente con la mejora de los procesos de fabricación de elementos metálicos (a partir de la revolución industrial) y el aumento de las velocidades de giro de ejes (por encima de las habituales de un carro o un molino) la *lubricación hidrodinámica* se convierte en el tipo normal de lubricación y empieza a ser estudiada.

La lubricación con grasas (*lubricación límite*) recibió una atención especial desde hace ya muchos años. Un gran número de famosos investigadores realizó experimentos sobre lubricación: Leonardo da Vinci (1508), Amontons (1699), Euler (1748), Coulomb (1809). Amontons y Coulomb hallaron que la fuerza de fricción  $F$  que hay que vencer para mover un cuerpo respecto a otro es proporcional a la carga normal aplicada  $P$ : es decir existe una constancia del cociente  $P/F$ , llamado coeficiente de fricción.

Los primeros trabajos sobre un eje con cojinetes trabajando en condiciones hidrodinámicas fueron realizados por Pauli (1849) y Hirn (1854). Estos trabajos fueron analizados por el científico ruso Petroff en 1883. Tower entre 1883 y 1885 demostró que se generaban en este tipo de cojinetes unas presiones elevadas: este hecho fue explicado en 1886 por Reynolds que demostró que era necesaria una forma convergente en la película para que se generara un aumento de presión.

Los experimentos de Tower resultaron claves en el desarrollo de esta teoría. Tower estaba encargado de estudiar la fricción en los soportes de los ejes de los carros de ferrocarril y de ver el mejor medio de lubricarlos. En el curso de una de sus investigaciones vio que uno de sus cojinetes parciales tenía un coeficiente de fricción muy bajo (4" de diámetro, 6" de longitud, arco de contacto 157°). Tower practicó un agujero en el apoyo tal como se ve en la figura y vio que la presión que se generaba al girar el eje era elevada. Esto le llevó a hacer un estudio de la distribución de presiones a lo ancho del cojinete.



## 1.2 Objetivos y campos de aplicación

El objetivo de la lubricación es reducir el rozamiento, el desgaste y el calentamiento de las superficies en contacto de piezas con movimiento relativo.

La aplicación típica en ingeniería mecánica es el cojinete, constituido por muñón o eje, manguito o cojinete.

Campos de aplicación:

- cojinetes del cigüeñal y bielas de un motor (vida de miles de km).
- cojinetes de turbinas de centrales (fiabilidad de 100%).

Los factores a considerar en diseño son técnicos y económicos:

- cargas aplicadas y condiciones de servicio.
- condiciones de instalación y posibilidad de mantenimiento.
- tolerancias de fabricación y funcionamiento; vida exigida.
- costo de instalación y mantenimiento.

El estudio de la lubricación está basado en:

- mecánica de fluidos.
- termodinámica y transmisión de calor.
- mecánica de sólidos, materiales.

### 1.3 Tipos de lubricación.

Pueden distinguirse tres formas distintas: lubricación hidrodinámica, límite o de contorno, hidrostática.

#### 1.3.1 Lubricación hidrodinámica:

- las superficies están separadas por una película de lubricante que proporciona estabilidad.
- no se basa en introducir lubricante a presión (puede hacerse), exige un caudal de aceite, la presión se genera por movimiento relativo.
- se habla también de lubricación de película gruesa, fluida, completa o perfecta.

#### 1.3.2 Lubricación límite:

- la película de lubricante es tan fina que existe un contacto parcial metal-metal. La acción resultante no se explica por la hidrodinámica.
- puede pasarse de lubricación hidrodinámica a límite por caída de la velocidad, aumento de la carga o disminución del caudal de aceite.
- en este tipo de lubricación (de película delgada, imperfecta o parcial) mas que la viscosidad del lubricante es más importante la composición química.
- al proyectar un cojinete hidrodinámico hay que tener en cuenta que en el arranque puede funcionar en condiciones de lubricación límite.

#### 1.3.3 Lubricación hidrostática

- se obtiene introduciendo a presión el lubricante en la zona de carga para crear una película de lubricante.
- no es necesario el movimiento relativo entre las superficies.
- se emplea en cojinetes lentos con grandes cargas.
- puede emplearse aire o agua como lubricante.

## 1.4 Viscosidad

La expresión de la resistencia interna del fluido al desplazamiento es la viscosidad (ley de Newton):

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$$

Se explica a partir de la figura, suponiendo flujo laminar y que el fluido en contacto con las placas tiene la velocidad de éstas.

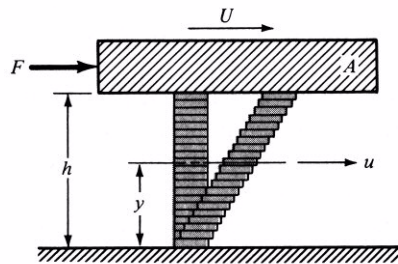


Fig.1.1 Representación esquemática de la resistencia del fluido

$$\begin{aligned}\tau &= \mu \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dy} &= \frac{U}{h} = \text{cste.} \\ \tau &= \frac{F}{A}\end{aligned}$$

La fuerza aumenta con el área y la velocidad

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{U}{h}$$

Las unidades con las que se expresa la viscosidad absoluta  $\mu$  son las siguientes:

- N.s/ m<sup>2</sup> = Pa.s
- libras.s / in<sup>2</sup> = Reynolds
- dina.s / cm<sup>2</sup> = Poise
- 1 Reynolds = 6.9 10<sup>6</sup> centipoises.

El método estándar ASTM para determinar la viscosidad emplea un Viscosímetro Saybolt Universal (VSU). Se mide el tiempo t que tardan 60 ml de lubricante a una temperatura en escurrir por un tubo de 17.6 mm de diámetro y 12.25 mm de longitud. Aplicando la ley de Hagen-Poiseuille se hallan las siguientes relaciones:

- viscosidad cinemática (m<sup>2</sup> /s)
- $$\nu = 0.22 \cdot (VSU) - \frac{180}{(VSU)}$$

- viscosidad dinámica (Pa.s)

$$\mu = \rho \cdot \nu$$

$\rho$  es la densidad (kg/m<sup>3</sup>) a la temperatura del ensayo.

Efecto de la temperatura en la viscosidad:

- la viscosidad disminuye con la temperatura. Se utiliza el índice de viscosidad (VI) y se compara con aceites de susceptibilidades térmicas muy pequeñas y muy grandes.
- para determinar el índice VI de un aceite se sigue el procedimiento de la figura. Se toman aceites con VI=0 y VI=100 que tengan la misma viscosidad a 100°C que el aceite problema.

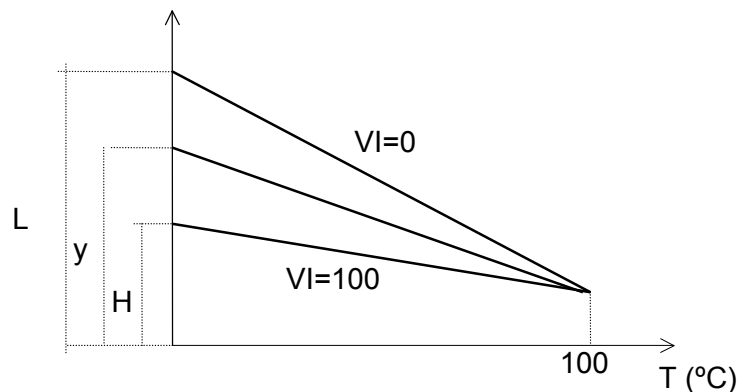


Fig. 1.2 Esquema para calcular el índice VI de un aceite

$$VI(\%) = \frac{L - y}{L - H} \cdot 100$$

- la SAE (American Society of Automotive Engineers) ha dividido los aceites en grados. Algunos aceites con polímeros tienen un comportamiento multigrado (20W/50, etc.).

| SAE<br>viscosity<br>grade | Viscosity, Pa · s | Borderline pumping<br>temperature (max.) |     | Stable pour point<br>(max.) |     | Viscosity at 100 °C<br>(212 °F), mm <sup>2</sup> /s |       |
|---------------------------|-------------------|--|-----|-----------------------------|-----|---|-------|
|                           |                   | °C                                       | °F  | °C                          | °F  | Min   | Max.  |
| 0W                        | 3.25(a)           | −35                                      | −31 | ...                         | ... | 3.8   | ...   |
| 5W                        | 3.50(b)           | −30                                      | −22 | −35                         | −31 | 3.8   | ...   |
| 10W                       | 3.50(c)           | −25                                      | −13 | −30                         | −22 | 4.1   | ...   |
| 15W                       | 3.50(d)           | −20                                      | −4  | ...                         | ... | 5.6   | ...   |
| 20W                       | 4.50(e)           | −15                                      | 5   | ...                         | ... | 5.6   | ...   |
| 25W                       | 6.00(f)           | −10                                      | 14  | ...                         | ... | 9.3   | ...   |
| 20                        | ...               | ...                                      | ... | ...                         | ... | 5.6   | <9.3  |
| 30                        | ...               | ...                                      | ... | ...                         | ... | 9.3   | <12.5 |
| 40                        | ...               | ...                                      | ... | ...                         | ... | 12.5  | <16.3 |
| 50                        | ...               | ...                                      | ... | ...                         | ... | 16.3  | <21.9 |
| 60                        | ...               | ...                                      | ... | ...                         | ... | 21.9  | <26.1 |

(a) At −30 °C (−22 °F). (b) At −25 °C (−13 °F). (c) At −20 °C (−4 °F). (d) At −15 °C (5 °F). (e) At −10 °C (14 °F). (f) At −5 °C (23 °F)

Tabla 1.1 División de los grados de un aceite según SAE.

### 1.5 Ley de Petroff.

El fenómeno del rozamiento fue explicado por primera vez por Petroff. Este análisis da un coeficiente de fricción aceptable y permite introducir parámetros adimensionales de utilidad posterior.

Partiendo de la figura y de la ecuación de la viscosidad se halla el coeficiente de fricción, suponiendo que actúa una carga  $W$  pequeña y llamando  $T$  al par que hay que realizar para hacer girar el eje:

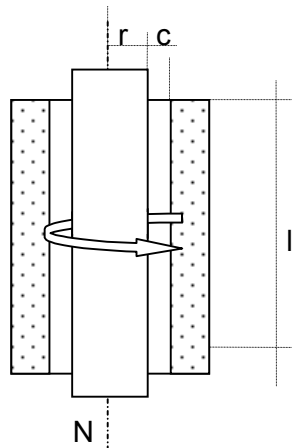


Fig. 1.3 Eje girando a una velocidad de  $N$  rps en un cojinete.

$$\tau = \mu \cdot \frac{U}{h} = \frac{2\pi \cdot \mu \cdot N \cdot r}{c}$$

$$T = (\tau \cdot A) \cdot r = \left( \frac{2\pi \cdot \mu \cdot N \cdot r}{c} \right) \cdot (2\pi \cdot r \cdot l) \cdot r$$

$$T = \frac{4\pi^2 \cdot r^3 \cdot l \cdot \mu \cdot N}{c}$$

Por otro lado utilizando el coeficiente de rozamiento  $f$ , y una nueva variable,  $P$ , carga por unidad de área proyectada ( $P=W/2 \cdot r \cdot l$ )

$$T = f \cdot W \cdot r = f \cdot (2 \cdot r \cdot l \cdot P) \cdot r = 2 \cdot r^2 \cdot f \cdot l \cdot P$$

$$f = 2\pi^2 \frac{\mu \cdot N}{P} \cdot \frac{r}{c}$$

Esta es la ecuación de Petroff publicada en 1883, en la que aparecen dos parámetros adimensionales ( $P$  y  $r/c$ ).

## 1.6 Estabilidad de la lubricación. Curva de Stribeck.

Entre 1900 y 1902 Stribeck realiza experimentos sistemáticos para medir  $f$  en cojinetes en función de la velocidad de giro  $-N-$ , de la carga por unidad de área proyectada  $-P-$  y de la viscosidad. Son la base de la teoría de Sommerfeld.

La curva de Stribeck -aunque hay algunas dudas de que Stribeck la usara exactamente en la forma que se presenta aquí- representa las características generales de superficies lubricadas en movimiento relativo entre sí. La expresión  $\frac{\mu \cdot N}{P}$  es conocida como el número de Sommerfeld. En la Fig 1.4 se mantienen constantes  $N$  y  $P$  para representar la relación existente entre la viscosidad del fluido,  $\mu$ , y el coeficiente de rozamiento,  $f$ .

El gráfico puede dividirse en tres zonas

- zona I: lubricación hidrodinámica y elastohidrodinámica. Las superficies del cojinete están perfectamente separadas con un película gruesa de fluido: no hay contacto directo entre las superficies que deslizan y por tanto prácticamente no hay desgaste. A medida que la viscosidad disminuye, decrece la película hasta el punto C
- zona II: lubricación mixta o elastohidrodinámica parcial.
- zona III: lubricación límite

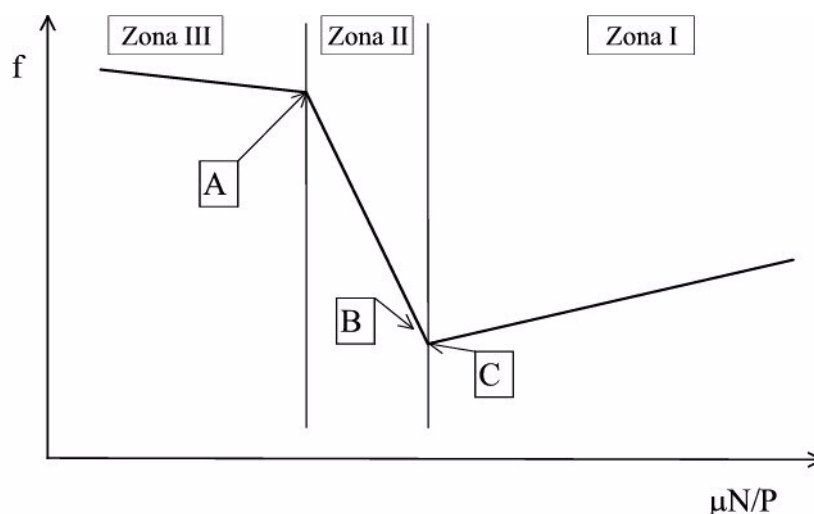


Fig. 1.4 Efecto de la viscosidad en la lubricación. Curva de Stribeck.

De la gráfica se puede deducir:

- Estando en la zona I, a medida que la viscosidad disminuye también decrece el espesor de la película hasta el punto C. Una mayor disminución de la viscosidad hace que pasemos al punto B en el que se produce contacto ocasional entre las dos superficies debido a que la película es de muy pequeño espesor: el rozamiento en B y C es prácticamente igual, aunque en B la viscosidad del fluido es menor la resistencia al desplazamiento se debe en este caso al contacto entre las asperezas.



- El punto C es el punto ideal de funcionamiento -delimita además la zona estable de la inestable- puesto que proporciona un rozamiento mínimo con prácticamente desgaste nulo. En la práctica se prefiere trabajar ligeramente a la derecha de C para tener un margen de seguridad.
- Si en el punto B reducimos ligeramente la viscosidad rápidamente crece el coeficiente de rozamiento hasta el punto A. A partir de este punto la mayor parte de la carga es soportada por las asperidades y por tanto una reducción mayor de la viscosidad tiene muy poca influencia en el coeficiente de rozamiento.

### 1.7 Cojinete con lubricación perfecta.

En la práctica las hipótesis de Petroff no se cumplen. El eje no está centrado respecto del cojinete.

Las figuras que siguen ilustran la puesta en marcha de un cojinete hidrodinámico.

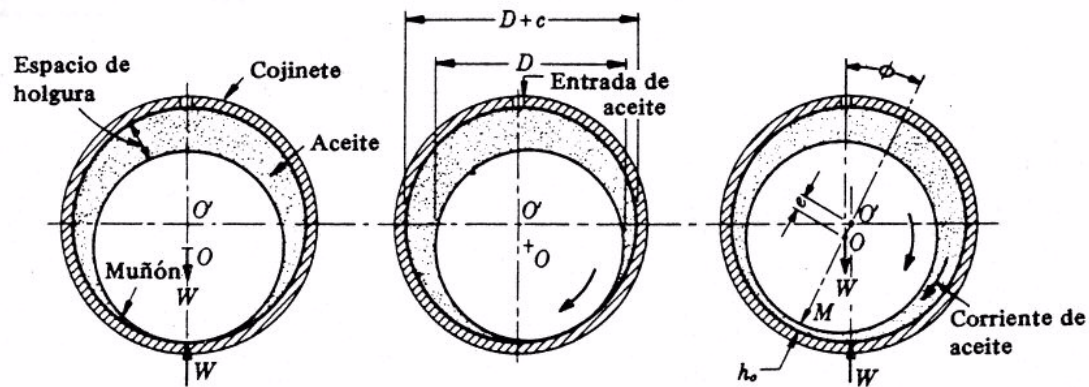


Fig. 1.5 Puesta en marcha de un cojinete

En la siguiente figura se muestra la nomenclatura utilizada

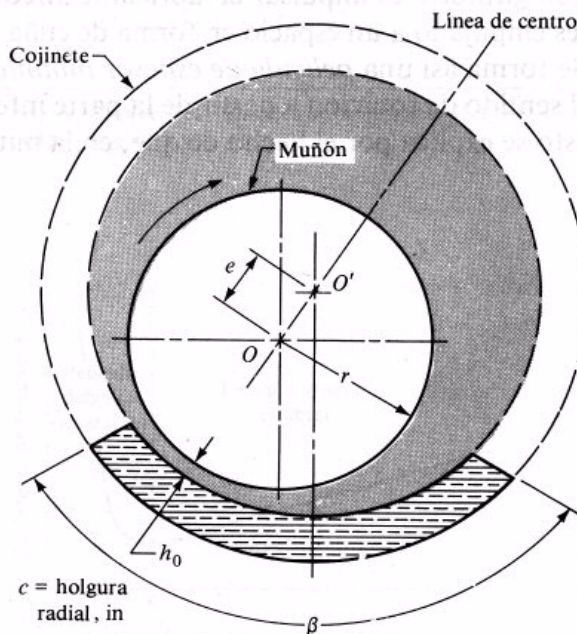


Fig. 1.6. Nomenclatura utilizada para las variables que definen un cojinete.

$h$  = espesor de película  
 $c$  = diferencia radios  
 $\varepsilon = e/c$  relación de excentricidad.

Expresión aproximada  $h = c \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos \theta)$

## ***COJINETES HIDRODINÁMICOS***

## INDICE

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>2.</b> | <b><u>COJINETES HIDRODINÁMICOS.</u></b>                      | <b>18</b> |
| 2.1       | <u>TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA.</u>               | 18        |
| 2.2       | <u>GENERALIZACIÓN DE LA EC. DE REYNOLDS UNIDIMENSIONAL.</u>  | 20        |
| 2.3       | <u>SOLUCIÓN DE LA EC. DE REYNOLDS EN CASOS PARTICULARES.</u> | 22        |
| 2.3.1     | <u><i>Cojinete infinitamente corto.</i></u>                  | 22        |
| 2.3.2     | <u><i>Cojinete infinitamente largo.</i></u>                  | 22        |
| 2.4       | <u>FACTORES DE DISEÑO.</u>                                   | 24        |
| 2.5       | <u>RELACIÓN ENTRE LAS VARIABLES DE DISEÑO.</u>               | 25        |
| 2.5.1     | <u><i>Diagramas de viscosidad.</i></u>                       | 25        |
| 2.5.2     | <u><i>Espesor mínimo de película.</i></u>                    | 25        |
| 2.5.3     | <u><i>Coeficiente de rozamiento.</i></u>                     | 25        |
| 2.5.4     | <u><i>Flujo de lubricante.</i></u>                           | 25        |
| 2.5.5     | <u><i>Presión en la película de lubricante.</i></u>          | 26        |
| 2.5.6     | <u><i>Incremento de temperatura.</i></u>                     | 26        |
| 2.5.7     | <u><i>Balance térmico.</i></u>                               | 26        |
| 2.6       | <u>ORIENTACIÓN AL DISEÑO DE COJINETES.</u>                   | 27        |
| 2.6.1     | <u><i>Orientaciones generales.</i></u>                       | 27        |
| 2.6.2     | <u><i>Técnicas de optimización.</i></u>                      | 28        |
| 2.7       | <u>LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA CON ALIMENTACIÓN A PRESIÓN.</u> | 29        |

## 2. COJINETES HIDRODINÁMICOS.

### 2.1 Teoría de la lubricación hidrodinámica.

La teoría actual de la lubricación hidrodinámica se origina con los experimentos de Tower en 1880 explicados por O. Reynolds. Se resuelve con las siguientes hipótesis:

- $h$  es pequeño frente a  $r$ , se desprecia la curvatura.
- el lubricante cumple la ley de Newton para fluidos viscosos.
- se desprecian las fuerzas debidas a la inercia del lubricante.
- se supone que el lubricante es incompresible.
- la viscosidad es constante en toda la película de lubricante.
- la presión del lubricante no varía en la dirección axial.

En el caso unidimensional se supone además:

- no existe flujo de lubricante en la dirección  $z$ .
- la presión sólo es función de la variable  $x$ .
- la velocidad de una partícula de lubricante es función de  $x$  e  $y$ .

Partiendo del equilibrio de fuerzas sobre diferencial de lubricante se deduce:

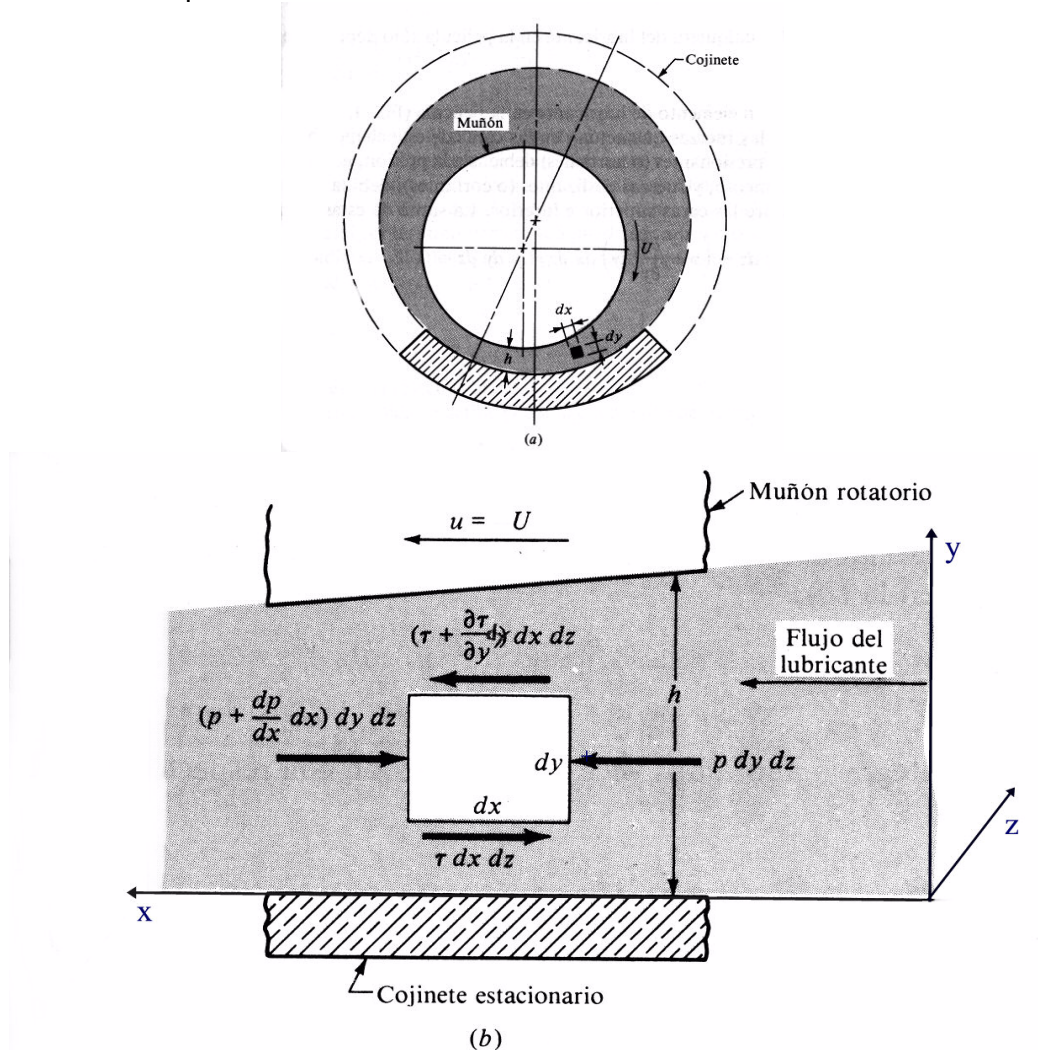


Fig. 2.1 Equilibrio de un diferencial de fluido.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Sustituyendo, integrando y aplicando las condiciones de contorno ( $u=0$  para  $y=0$ ,  $u=U$  para  $y=h$ ).

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (y^2 - h \cdot y) + \frac{U}{h} \cdot y$$

llamando  $Q$  al caudal de lubricante y sabiendo que es incompresible:

$$Q = \int_0^h u \cdot dy$$

$$Q = \frac{U \cdot h}{2} - \frac{h^3}{12 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dx}$$

como  $\frac{dQ}{dx} = 0$  la ecuación de Reynolds unidimensional se expresa:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \right) = 6 \cdot U \cdot \frac{dh}{dx}$$

## 2.2 Generalización de la ec. de Reynolds unidimensional.

Las hipótesis son las mismas exceptuando que hay flujo lateral, y una variación de la presión según x y z. Del equilibrio de los elementos diferenciales de la figura se deduce:

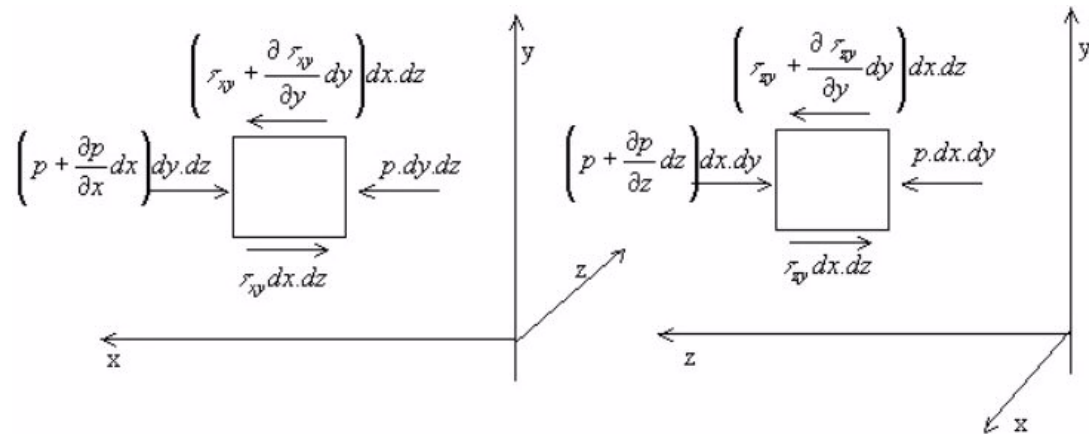


Fig. 2.2 Equilibrio de un diferencial en el caso de flujo bidimensional.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \\ \tau_{zy} &= \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones anteriores se hallan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

y tomando como condiciones:

- para  $y=h$ ,  $u=U1$   $v=V1$
- para  $y=0$ ,  $u=U2$   $v=V2$

se deducen las siguientes expresiones para las velocidades:

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h \cdot y) + \frac{U_1 - U_2}{h} y + U_2$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - h \cdot y) + \frac{V_1 - V_2}{h} y + V_2$$

Estas expresiones permiten deducir los caudales  $q_x$  y  $q_z$

$$q_x = -\frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + (U_1 + U_2) \cdot \frac{h}{2}$$

$$q_z = -\frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + (V_1 + V_2) \cdot \frac{h}{2}$$

la continuidad del flujo exige que:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0$$

y en el caso más normal en el que  $V_1=V_2=U_2=0$  y  $U_1=U$ . La ecuación se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \cdot U \cdot \frac{dh}{dx}$$



## 2.3 Solución de la ec. de Reynolds en casos particulares

### 2.3.1 Cojinete infinitamente corto.

Partiendo de la ec. de Reynolds en 2 dimensiones suponemos que la variación de presión respecto de  $z$  es mucho mayor que respecto de  $x$ :

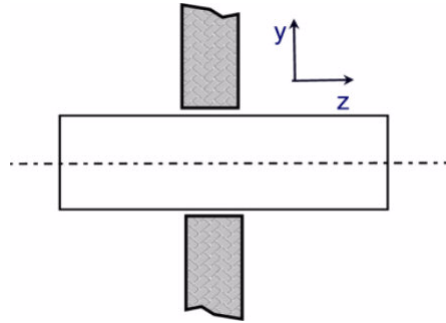


Fig. 2.3 Caso particular. Cojinete infinitamente corto.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \cdot U \cdot \frac{dh}{dx}$$

$h$  no varía con  $z$ , para una  $x$  constante. Tomando  $p=0$  en los extremos ( $z=\pm L/2$ ) y  $dp/dz=0$  en  $z=0$ , se deduce de la expresión anterior:

$$p = \frac{3U \cdot \mu}{h^3} \cdot \left( z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \cdot \frac{dh}{dx}$$

Al cumplirse que  $h = c \cdot (1 + \varepsilon \cdot \cos \theta)$  y  $x = R \cdot \theta$ . La ecuación anterior permite calcular la presión en cualquier punto:

$$p = \frac{3U \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \sin \theta}{c^2 R \cdot (1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \cdot \left( \frac{L^2}{4} - z^2 \right)$$

Esta solución proporciona resultados válidos cuando el cojinete cumple que  $L/D < 1/4$ .

### 2.3.2 Cojinete infinitamente largo.

En este caso se asume que no hay variación de presión con  $z$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{h^3}{\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \right) = 6 \cdot U \cdot \frac{dh}{dx}$$

tomando  $\bar{h}$  como el valor del espesor de película cuando  $dp/dx=0$ , de la expresión anterior se llega a:

$$\frac{dp}{dx} = 6U \cdot \mu \cdot \frac{(h - \bar{h})}{h^3} \quad (\text{otra forma de la ec. de Reynolds})$$

Esta ecuación se puede integrar utilizando la relación entre  $h$  y  $e$ , y con los cambios de variable siguientes:

$$h = c.(1 + \varepsilon.\cos \theta)$$

$$x = R.\theta$$

$$\cos \gamma = \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon.\cos \theta}$$

$$p^* = \frac{c^2.p}{6U.\mu.R}$$

Para la integración de esta ecuación se necesitan además dos condiciones de contorno (ver Tabla 2.1). Se suele tomar  $p=0$  en  $\theta=0$  y la otra condición puede ser:

- $p=0$  en  $\theta=2\pi$  (Sommerfeld).
- $p=0$  en  $\theta>\pi$  (1/2 Sommerfeld).
- $p=0$  cuando  $dp/dx=0$  para  $\theta>\pi$  (Reynolds).

Aplicando la primera condición se puede hallar la presión y la carga que soporta el cojinete.

$$p^* = \frac{\varepsilon.\sin \gamma.(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon.\cos \gamma)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}.(2 + \varepsilon^2)}$$

$$W_x = 0$$

$$W_Y = \frac{\pi.\varepsilon.}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.(1 + \varepsilon^2/2)} \cdot \frac{6U.\mu.L.R^2}{c^2}$$

## 2.4 Factores de diseño.

En el diseño se distinguen dos grupos de variables: independientes y dependientes. Las primeras pueden ser modificadas por el diseñador, algunas impuestas por el proyecto general de máquina:

- la viscosidad  $\mu$ .
- la carga por unidad de área proyectada,  $P$ .
- la velocidad de giro,  $N$ .
- las dimensiones del eje y del cojinete:  $r$ ,  $c$ ,  $L$  y  $\beta$ .

Las segundas (llamadas también factores de diseño) no están directamente controladas por el diseñador pero deben mantenerse dentro de los límites admisibles:

- coeficiente de rozamiento,  $f$ .
- incremento de temperatura,  $\Delta t$ .
- flujo de lubricante,  $Q$ .
- espesor mínimo de película,  $h_0$ .

## 2.5 Relación entre las variables de diseño.

Este apartado se basará en la solución numérica de Raimondi y Boyd publicada en 1958 en 3 artículos de Trans. ASLE. Estos resultados se presentan en forma de 45 diagramas y 6 tablas.

El número característico del cojinete (número de Sommerfeld, todas las variables en Sistema Internacional. y N en rps en) es:

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \cdot \frac{\mu \cdot N}{P}$$

### 2.5.1 Diagramas de viscosidad.

- una hipótesis importante es que la viscosidad es constante para todo el cojinete, se considera a un valor promedio entre la temperatura entre la temperatura de entrada de aceite al cojinete y la de salida.
- al ser el incremento de temperatura normalmente incógnita será necesario un proceso iterativo.
- ver Fig. 12.12 y 12.13.

### 2.5.2 Espesor mínimo de película.

- está relacionado con la excentricidad,  $e$ , y relación de exc. del eje,  $\varepsilon$ :  

$$h_0 = c - e$$

$$\frac{h_0}{c} = 1 - \varepsilon$$
- este valor  $\varepsilon$  da una idea de la carga que está soportando el cojinete.
- entre las innumerables soluciones en un proyecto de cojinetes, Kingsbury demostró que para un arco de apoyo  $\beta$  existe una  $\varepsilon$  que proporciona max. capacidad de carga y otra mínima pérdida por rozamiento. v. Fig. 12.14 y 12.15.

### 2.5.3 Coeficiente de rozamiento.

- conocido el coeficiente de rozamiento,  $f$ , puede determinarse el par necesario para vencer el rozamiento y la potencia perdida:

$$T_{roz} = f \cdot W \cdot r$$

$$Pot_{roz} = f \cdot W \cdot 2\pi \cdot r \cdot N$$

- v. Fig. 12.17 en que se representa  $(r \cdot f/c)$  en función de  $S$  para cojinetes completos. Para cojinetes parciales v. tablas.

### 2.5.4 Flujo de lubricante.

- partiendo de que la presión exterior es la atmosférica y de que no hay ranuras ni agujeros en el cojinete, la Fig. 12.18 proporciona el caudal mínimo para que haya condiciones hidrodinámicas.
- $Q-Q_S$  es el caudal impulsado hacia la parte convergente.
- $Q_S$  es el flujo lateral (volumen de caudal que se renueva por s), importante desde el punto de vista de refrigeración (v. Fig. 12.19).

### 2.5.5 Presión en la película de lubricante.

- en un cojinete sin ranuras ni agujeros, con presión exterior igual a la atmosférica, la Fig. 12.20 proporciona la relación ( $P/p_{\max}$ ).
- la Fig. 12.20 permite hallar el ángulo en el que se produce el máximo de presión  $\theta_{p\max}$  y la posición terminal de película  $\theta_{p0}$ .

### 2.5.6 Incremento de temperatura.

- el trabajo para vencer el rozamiento se convierte en calor que se disipa por conducción, convección y radiación.
- por estar en el lado de la seguridad se supondrá que todo esta energía se disipa a través del lubricante (así han calculado las tablas R&B) y que todo el lubricante se renueva en cada vuelta. Dos casos:

- cojinete de longitud infinita

$$\Delta t = \frac{f \cdot W \cdot 2\pi \cdot r \cdot N}{\rho \cdot C \cdot Q}$$

- cojinete de longitud finita (suponiendo  $\Delta t/2$  en el caudal lateral)

$$\Delta t = \frac{f \cdot W \cdot 2\pi \cdot r \cdot N}{\rho \cdot C \cdot (Q - \frac{Q_s}{2})}$$

- una hipótesis más conservadora: únicamente se renueva el caudal lateral

$$\Delta t = \frac{f \cdot W \cdot 2\pi \cdot r \cdot N}{\rho \cdot C \cdot Q_s}$$

- para aceites de hidrocarburo  $\rho \cdot C$  es aprox:  $14.17 \times 10^4 \text{ kg/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^3 = 14.17 \times 10^5 \text{ J/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^3$

### 2.5.7 Balance térmico.

Muchos cojinetes, llamados autosuficientes, están diseñados con un sistema de suministro de lubricante (p.ej. anillo de engrase) que asegure la lubricación hidrodinámica (ventiladores, bombas, etc).

El problema reside en el equilibrio térmico y necesidad de refrigeración, especialmente para diámetros y velocidades grandes. Un cálculo muy aproximado puede hallarse en los capítulos correspondientes de los libros de Shigley y de Faïres.

## 2.6 Orientación al diseño de cojinetes.

### 2.6.1 Orientaciones generales.

Hay que tomar decisiones sobre las variables independientes, aunque algunas vengan condicionadas (velocidad, tipo aceite, etc.).

La primera variable a considerar es carga por unidad de área,  $P$ . La Tabla 2.1 ofrece unos valores orientativos.

| APLICACIÓN                      | CARGA UNITARIA |         |
|---------------------------------|----------------|---------|
|                                 | psi            | MPa     |
| <b>Motores a Diesel:</b>        |                |         |
| Soportes de eje principales     | 900–1700       | 6–12    |
| Brazo de cigüeñal               | 1150–2300      | 8–15    |
| Articulación de biela en pistón | 2000–2300      | 14–15   |
| Motores eléctricos              | 120–250        | 0.8–1.5 |
| Turbinas de vapor               | 120–250        | 0.8–1.5 |
| Reductores de velocidad         | 120–250        | 0.8–1.5 |
| <b>Motores de automóvil:</b>    |                |         |
| Soportes de eje principales     | 600–750        | 4–5     |
| Brazo de cigüeñal               | 1700–2300      | 10–15   |
| <b>Compresores de aire:</b>     |                |         |
| Soportes de eje principales     | 140–280        | 1–2     |
| Brazo de cigüeñal               | 280–500        | 2–4     |
| Bombas centrífugas              | 100–180        | 0.6–1.2 |

Tabla 2.1 Intervalos de valores de cargas por unidad de área proyectada de uso corriente en cojinetes

Seguidamente se fija  $L/D$ . Normalmente  $0.8 < L/D < 1.3$ . La disminución de  $L$ , manteniendo las otras variables, hace decrecer  $h_0$  y aumenta  $Q_s$ . La práctica común es empezar con  $L/D=1$ , aumentar si se quiere aumentar la película y disminuir si hay fuertes flexiones. Algunos valores recomendados:

|                                    |         |
|------------------------------------|---------|
| – motores gasolina y diesel        | 0.3-0.8 |
| – turbogeneradores                 | 0.8-1.5 |
| – generadores y motores            | 1.2-2.0 |
| – ejes con cojinetes autoalineados | 3.0-4.0 |
| – máquina herramienta              | 2.0-4.0 |
| – ferrocarril                      | 1.2-1.8 |

A continuación se fija la holgura radial  $-c-$  que depende del material, acabado superficial y velocidad de giro. (Tabla 12.3 y Fig. 12.29 y Tabla 11.1).

Por último hay que mencionar el  $h_0$  (espesor mínimo de película). Influye la experiencia y el valor a elegir depende de la rugosidad, variación de las cargas, desalineación, deformaciones, etc.

Fijadas las variables independientes se realiza el análisis hidrodinámico del cojinete y se comprueba que el diseño es satisfactorio. En caso contrario se varían los parámetros y se hace una segunda iteración.

### 2.6.2 Técnicas de optimización.

El análisis descrito en el apartado anterior lleva a un cojinete “correcto”, pero puede interesar optimizarlo respecto a alguna variable:  $P$ ,  $f$ , o ver el efecto sobre las variables dependientes de una independiente.

El ejemplo de la Fig. 2.5 permite hallar una zona óptima (sombreada). Al tratarse de un ejemplo los valores numéricos no son trasladables a otro caso.

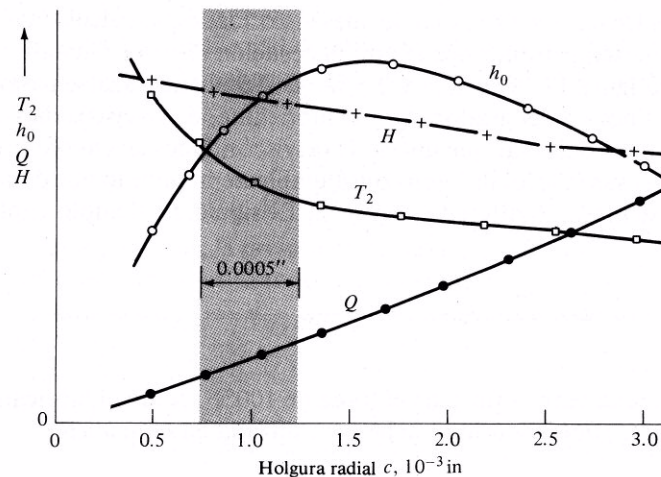


Fig. 2.4 Gráfica de algunas características de un cojinete particular en función de la holgura radial.  $T_2$  es la temperatura a la salida del cojinete.

- la gráfica muestra que si la holgura es muy pequeña la temperatura será alta y muy pequeño el espesor mínimo de película de aceite. Las temperaturas altas pueden ocasionar que el cojinete falle por fatiga. Si la película de aceite es muy delgada las partículas de suciedad no podrán pasar sin causar rayaduras o quedar encajadas en el cojinete. En cualquier caso habrá desgaste y fricción excesivos.
- aparentemente una holgura grande permitiría que la suciedad pasara a través del cojinete y dejara además que fluyera una cantidad grande de aceite. Sin embargo, si la holgura llega a ser demasiado grande, el cojinete se vuelve ruidoso y el espesor mínimo de película de aceite decrece a su vez.
- teniendo en cuenta la tolerancia de producción y el desgaste futuro, la zona óptima en la Fig. 2.4 es la sombreada. De esta manera el futuro desgaste correrá el punto de operación hacia la derecha, incrementará el espesor de película y disminuirá la temperatura de operación.

## 2.7 Lubricación hidrodinámica con alimentación a presión.

Puede presentarse el caso de generación de calor tan elevada que sea necesario introducir un caudal adicional a presión. Se suele emplear un surco o ranura circumferencial con un agujero en la parte opuesta de la zona de carga. Con lo que se crean dos medios cojinetes de longitud aproximadamente la mitad,  $h_0$  disminuye, pero aumenta  $p$ .

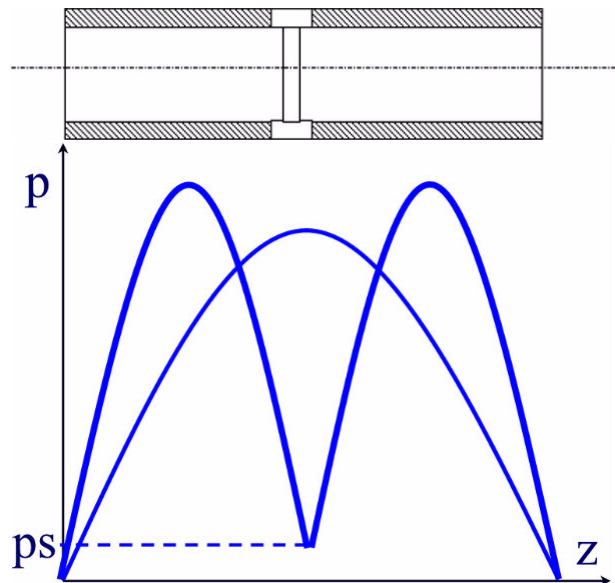


Fig. 2.5 Distribución de presiones en un cojinete con ranura circumferencial comparado con un cojinete sin ella.

Puede optarse también como se indica en la Figura 2.6 por introducir el lubricante practicando un orificio en el cojinete (a), o bien si éste es largo disponer de una ranura longitudinal (b), o bien circumferencial (c). La presión con la que se suministra este lubricante adicional está en el rango 70-350 kPa, valor muy inferior a la presión hidrodinámica que se generan en la zona de máximas presiones. Por tanto el cojinete no depende de la presión exterior para soportar la carga. Esta presión genera un flujo de lubricante que contribuye a disminuir la temperatura de operación.



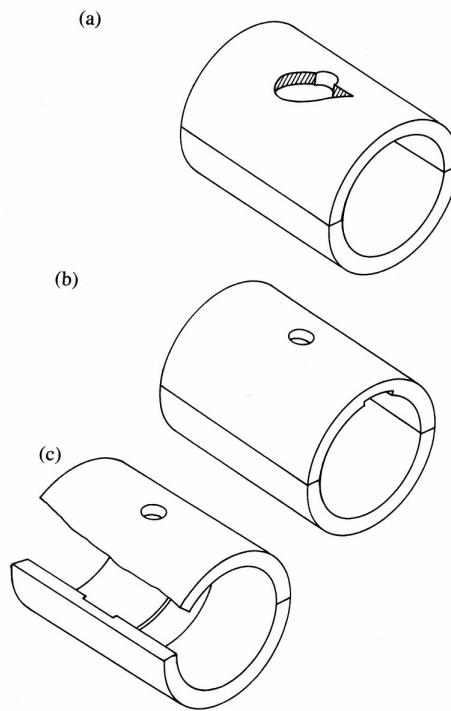


Fig. 2.6 Distintas opciones para cojinetes alimentados a presión

El objetivo de este apartado es determinar el flujo de lubricante originado, suponiendo que:

- la ranura no genera una caída de presión.
- la carga está soportada por el efecto hidrodinámico.
- inicialmente se desprecia el efecto de la excentricidad.
- se trata de flujo laminar y el fluido cumple la ley de Newton.
- la presión sólo es función de la variable longitudinal,  $z$ .
- se desprecia la rotación del eje.

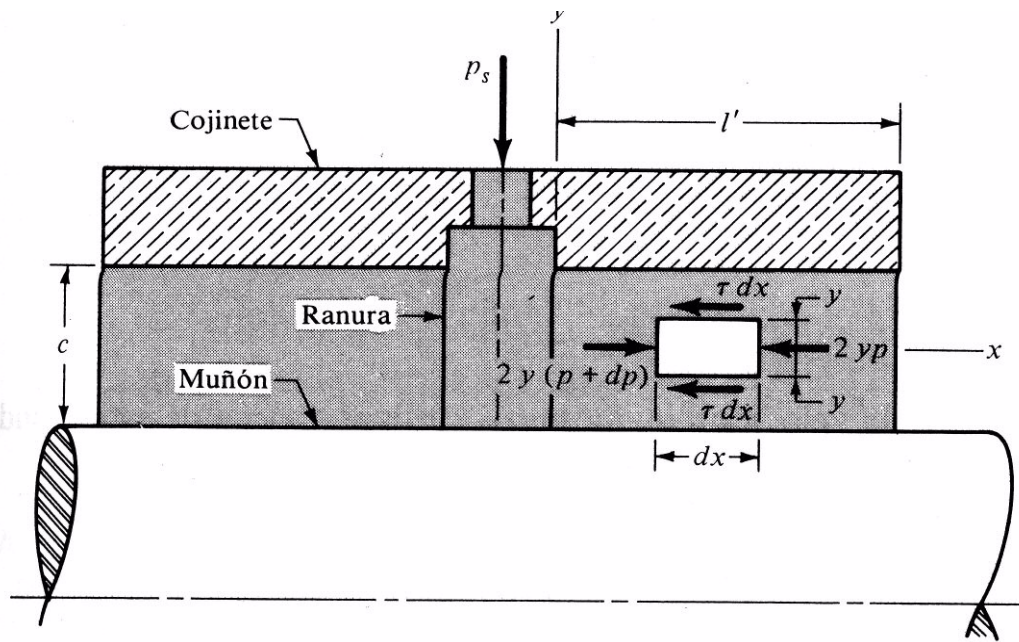


Fig. 2.7 Equilibrio de un diferencial en un cojinete alimentado a presión

Planteando el equilibrio del diferencial y aplicando Newton se obtiene:

$$\tau = y \frac{dp}{dz}$$

$$-\tau = \mu \left( -\frac{dw}{dy} \right)$$

(la explicación del signo en la ecuación anterior puede verse quizá mejor haciendo mover el cojinete y el muñón con una velocidad  $-w$  y "parando" la línea central del fluido)

sustituyendo, integrando y aplicando  $w=0$  para  $y=\pm c/2$ , hallamos:

$$w = \frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} (-c^2 + 4y^2)$$

suponiendo una variación lineal de  $p_s$  entre 0 y  $l'$ :

$$p(z) = p_s \left( 1 - \frac{z}{l'} \right)$$

$$w = \frac{p_s}{8\mu l'} (c^2 - 4y^2)$$

sabiendo que  $h=(c+e.\cos\theta)$  y que  $w_{med} = 2 w_{max}/3$ :

$$w_{max} = \frac{p_s \cdot c^2}{8\mu \cdot l'}$$

$$w_{med} = \frac{p_s \cdot (h - e \cdot \cos \theta)^2}{12 \mu \cdot l'}$$

disponiendo de la velocidad se puede calcular el caudal lateral

$$dQ_s = 2w_{med} \cdot r \cdot h \cdot d\theta$$

$$Q_s = \frac{\pi \cdot p_s \cdot r \cdot c^3}{3 \mu \cdot l'} (1 + 1.5 \cdot \varepsilon^2)$$

Al analizar el funcionamiento hidrodinámico debe tenerse en cuenta en los cojinetes lubricados a presión que:

$$P = \frac{W / 2}{2r \cdot l'}$$

Los diagramas 12.18 y 12.19 no se aplican a los cojinetes lubricados a presión. A la presión máxima dada por la fig. 12.20 hay que sumar  $p_s$ .

En cuanto a la elevación de temperatura:

$$\Delta T_F \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{Q_s}{2} = f \cdot \frac{W}{2} \cdot N \cdot 2\pi \cdot r$$

$$\Delta T_F = \frac{6 \mu \cdot l' \cdot f \cdot W \cdot N}{(1 + 1.5 \cdot \varepsilon^2) \cdot \rho \cdot C \cdot p_s \cdot c^3}$$

## ***COJINETES DE FRICCIÓN***

## INDICE

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>3.</b> | <b>COJINETES DE FRICCIÓN .....</b>                        | <b>35</b> |
| 3.1       | CONDICIONES EN LAS QUE SE PRODUCE LUBRICACIÓN LÍMITE..... | 35        |
| 3.2       | CLASIFICACIÓN DE LOS LUBRICANTES. ....                    | 36        |
| 3.3       | ORIENTACIONES DE DISEÑO. ....                             | 37        |
| 3.4       | EJEMPLOS DE COJINETES DE FRICCIÓN COMERCIALES .....       | 40        |

### 3. COJINETES DE FRICCIÓN

#### 3.1 Condiciones en las que se produce lubricación límite

El paso de la lubricación de película gruesa a delgada suele ser gradual (disminución de  $N$  o aumento de  $P$ ). Se produce contacto metal-metal.

Cuando se proyecta para lubricación límite la viscosidad del lubricante no tiene importancia. La película es válida si la temperatura no se eleva hasta el punto en que el lubricante se fluidifica.

A veces se emplean lubricantes de película sólida con coeficientes de rozamiento muy bajos en condiciones de presión extremas, temperaturas elevadas o muy bajas, o inaccesibilidad.

Tiene importancia la lubricación límite por el aumento de sistemas de bajo o nulo mantenimiento en los que se recurre a ella.

Los procesos que determinan el comportamiento tribológico son:

- mecánica de contacto superficial y proceso de formación de asperezas tanto elásticas como plásticas.
- física del contacto y química de acción entre superficies.
- procesos de rozamiento, especialmente la cortadura de uniones adheridas y deformación de asperezas.
- procesos de desgaste en general por superposición de fatiga superficial, abrasión, adhesión y reacciones triboquímicas.

### 3.2 Clasificación de los lubricantes.

La química-física de los lubricantes tiene una importancia fundamental en la lubricación límite.

Los lubricantes pueden clasificarse en tres grandes tipos:

- lubricantes no reactivos: hidrocarburos, derivados del petróleo. La propiedad más importante es la viscosidad.
- agentes untuosos: ácido esteárico y oléico. Se disuelven a veces en aceite, tienen largas cadenas que se adhieren a la superficie metálica.
- aditivos de alta presión: generalmente contienen fósforo, azufre o cloro. Reaccionan con las asperezas del metal y forman películas que reducen el contacto intermetálico.

Las interacciones lubricante/sólido pueden clasificarse en 3 mecanismos:

- adsorción física.
- adsorción química.
- reacción química.

### 3.3 Orientaciones de diseño.

Es raramente factible hacer deslizar dos superficies metálicas sin que a la larga -si no hay lubricación- se produzca daño en alguna de ellas. Los cojinetes autolubricados (dry bearings) consisten en una combinación de un componente metálico y un no metálico (v. Tabla 3.1).

|                  | <b>Carga<br/>máxima<br/>(MPa)</b> | <b>Temp<br/>Máx<br/>(°C)</b> | <b>Velocidad<br/>máx (m/s)</b> | <b>P.V máx<br/>(N/m.s)</b> |
|------------------|-----------------------------------|------------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| Bronce fundido   | 31                                | 163                          | 0.6                            | 1.5E+05                    |
| Bronce poroso    | 31                                | 66                           | 0.6                            | 1.5E+05                    |
| Hierro poroso    | 55                                | 66                           | 0.3                            | 1.5E+05                    |
| Fenólicos        | 41                                | 93                           | 1.1                            | 4.4E+04                    |
| Ni16n (nylon)    | 7                                 | 93                           | 0.4                            | 8.8E+03                    |
| Teflón           | 3                                 | 260                          | 0.0                            | 2.9E+03                    |
| Teflón reforzado | 17                                | 260                          | 0.4                            | 2.9E+04                    |
| Teflón en tejido | 414                               | 260                          | 0.0                            | 7.3E+04                    |
| Delrin           | 7                                 | 82                           | 0.4                            | 8.8E+03                    |
| Carbono-grafito  | 4                                 | 399                          | 1.1                            | 4.4E+04                    |

Tabla 3.1 Valores orientativos de algunos materiales para cojinetes de fricción

Por lo general se trabaja con gráficas P-V (carga por unidad de área proyectada-velocidad). La justificación está en lo que sigue.

Podemos asumir que la potencia calorífica es el producto de la fuerza de rozamiento y la velocidad:

$$Pot_{calor} = f.W.V$$

por lo general podemos suponer que la capacidad de evacuación de calor depende del área (LxR) del cojinete y por tanto el incremento de temperatura:

$$\Delta t = g \left( \frac{Pot_{calor}}{L.R} \right) = g \left( f \cdot \frac{W}{L.R} \cdot V \right) = g(f.P.V)$$

Se entiende con esta explicación cualitativa por qué en la mayoría de los catálogos comerciales para el dimensionamiento de un cojinete de fricción se utilizan curvas P-V. En esas gráficas se puede apreciar que para bajos valores de carga el límite de velocidad lo impone la máxima temperatura que puede soportar el cojinete. Por el contrario, para bajos valores de la velocidad el máximo valor de la carga viene impuesto por la resistencia del material.

El intervalo de condiciones de trabajo es tan grande que no se puede dar un procedimiento general para el diseño

Un método de diseño se basa en la capacidad de disipación del calor, lo que implicaría mayor duración. Se calcula un valor P.V:



$$P.V = \frac{k.(T_b - T_a)}{f_M}$$

- P es la carga por unidad de área proyectada.
- V es la velocidad periférica.
- $T_a$  es la temperatura ambiente del aire.
- $T_b$  es la temperatura interior del soporte o cojinete.
- $f_M$  es el coeficiente de fricción para lubricación de película mixta.
- k depende de la capacidad del cojinete para disipar calor, hay que estimarlo.

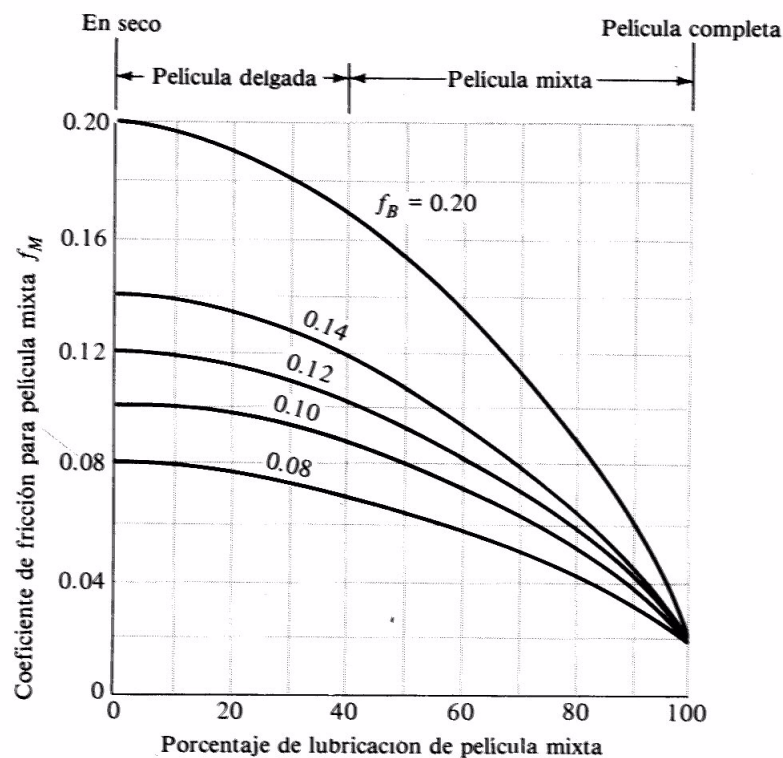


Fig. 3.1 Coeficiente de fricción para diversos porcentajes de lubricación de película mixta. El coeficiente de fricción en seco es  $f_B$  y el de película mixta es  $f_M$ . El intervalo 0 a 40% es el aproximado para la lubricación de película delgada..

La Tabla 3.2 y la figura 3.2 (*Williams, Engineering Tribology, Oxford Science Publications, 1994*) proporcionan orientaciones adicionales sobre las prestaciones de diferentes materiales así como para la fabricación de cojinetes de fricción.

| Type of bearing material   | Maximum static pressure (MPa) | Maximum service temperature (°C) | 'Pressure-velocity' limit (MW/m <sup>2</sup> ) |
|--|-------------------------------|----------------------------------|--|
| Thermosets (phenolics, epoxies, etc. + fillers (textiles, etc.)) | 30-50                         | 175                              | 0.5-1.5  |
| Thermoplastics (nylon, acetal, etc.) + fillers                   | 15-20                         | 150                              | 0.17   |
| Thermoplastics—unfilled  | 10                            | 100                              | 0.05   |
| PTFE + fillers   | 2-7                           | 250                              | 0.15   |
| Carbon graphites   |                               |                                  |  |
| metal filled   | 3-5                           | 350                              | 0.10   |
| epoxy filled   | 1-3                           | 500                              | 0.17   |
| Sintered bronze (+ PTFE and Pb)                                  | 35-70                         | 250                              | 2.5  |

Tabla 3.2 Valores orientativos de algunos materiales para cojinetes de fricción

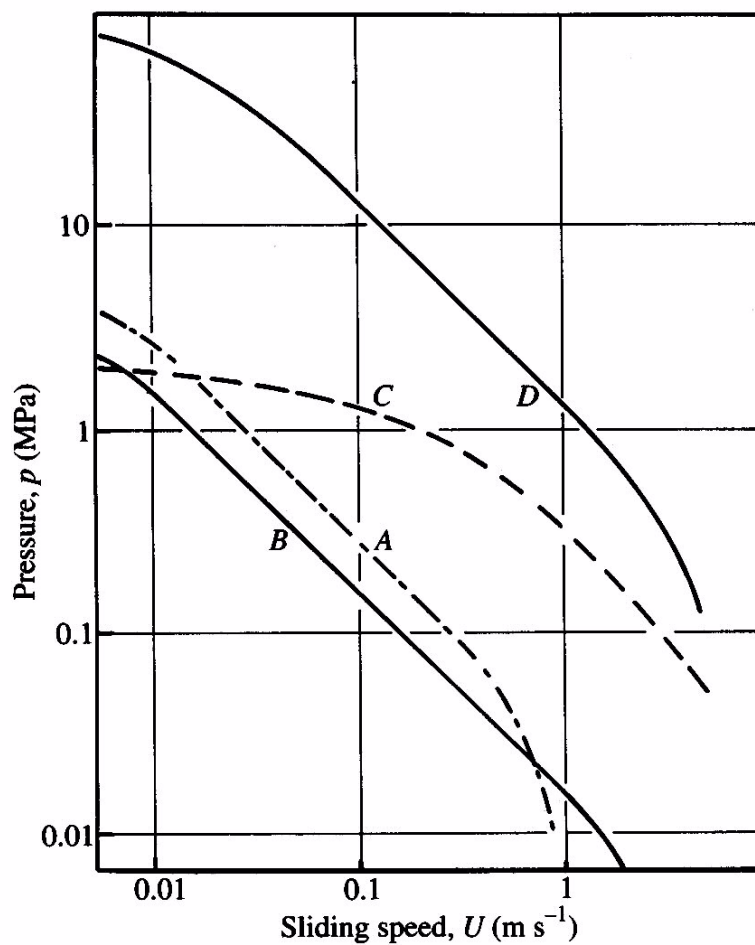


Fig. 3.2 Curvas P.V típicas para distintos materiales para cojinetes de fricción: A, termoplásticos. B, PTFE. C, thermosets impregnados con carbón-grafito. D, bronce poroso.

### 3.4 Ejemplos de cojinetes de fricción comerciales

Existen numerosos fabricantes de cojinetes de fricción y en cada caso convendrá acudir a los catálogos para una correcta elección entre las distintas variantes de los materiales de los cojinetes.

A modo de ejemplo se incluyen en este apartado los criterios que SKF considera para la elección entre su gama de cojinetes de fricción:

- Bronce macizo
- Bronce sinterizado
- Bronce laminado
- Composite PTFE
- Composite POM
- Composite con soporte inoxidable
- Poliamida PTFE
- Fibra Multiláminas

En las figuras que siguen se puede apreciar la estructura de alguno de ellos.

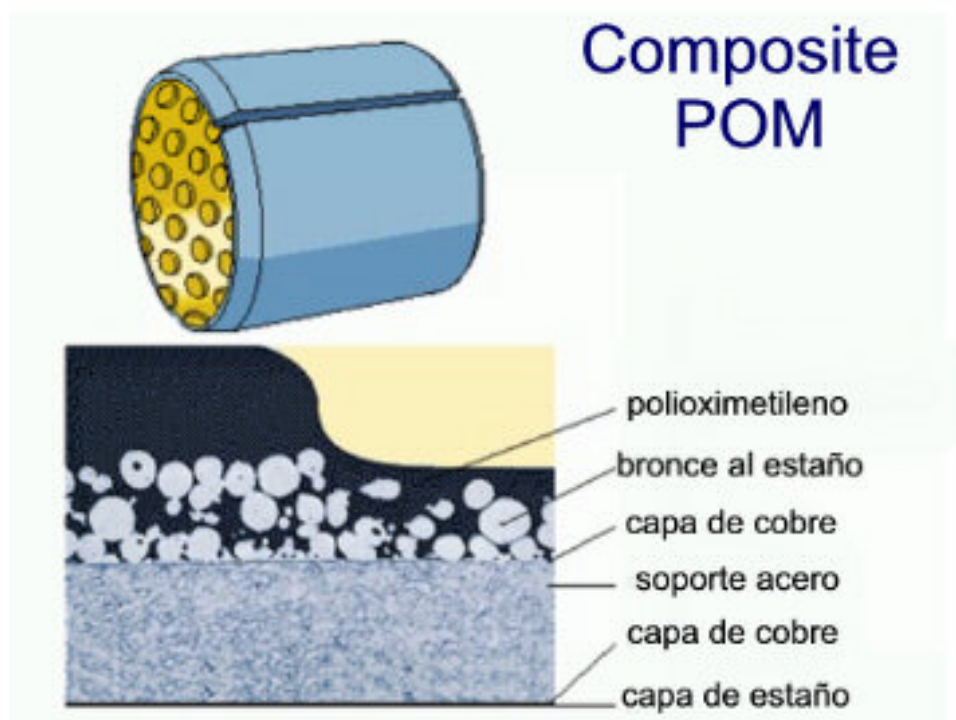


Figura 3.2 Cojinete de fricción de Composite POM (polieximetileno)

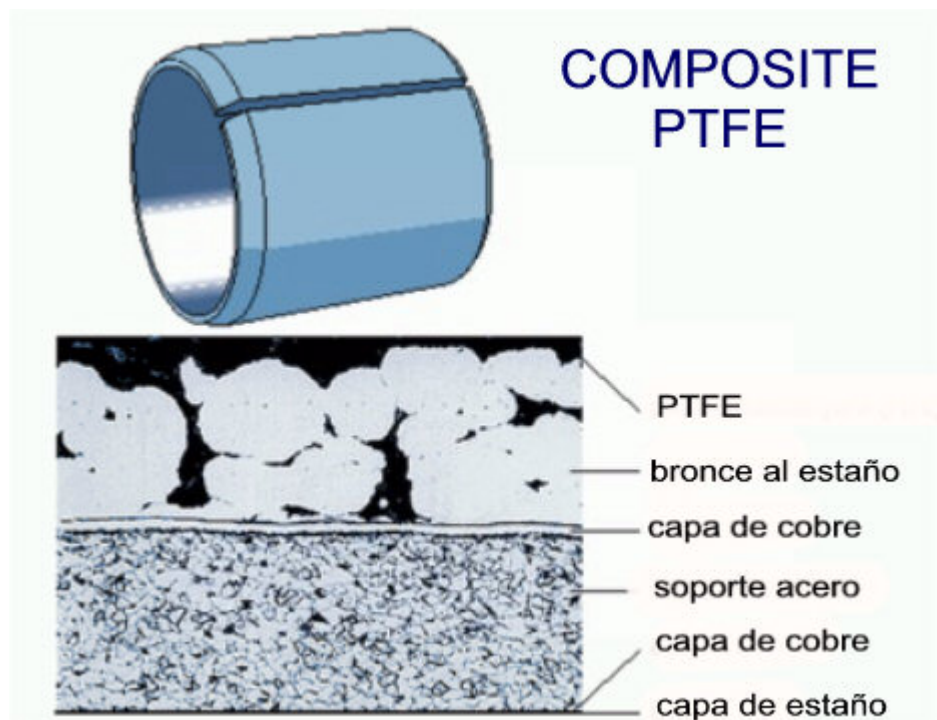


Figura 3.3 Cojinete de fricción de Composite PTFE (politetrafluoruetileno)

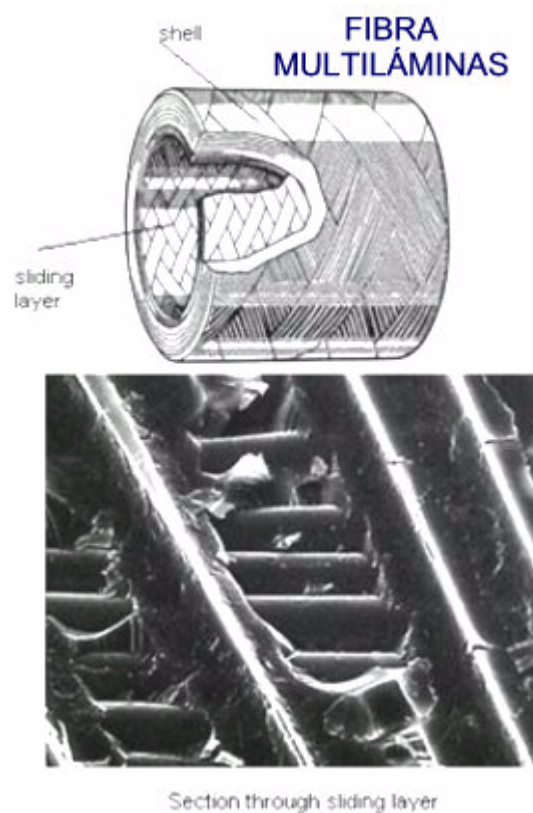


Figura 3.4 Cojinete de fricción de fibras multiláminas



Las dos tablas que siguen ofrecen una comparativa de las prestaciones de cada uno de ellos.

|  |         |   |   |   |  |   |   |   |
|---|--|---|---|---|--|---|---|---|
|   | Bronze Macizo<br>El polivalente  | Bronze Sintetizado<br>El veloz  | Bronze Laminado<br>El todo terreno  | Composito<br>PTFE<br>El corredor de fondo   | Composito<br>POM<br>El escalador   | Composito con Soporte<br>Inoxidable<br>El brillante                                 | Poliamida<br>PTFE<br>El trotador  | Fibra<br>Multiláminas<br>El incansable  |
| go de temperaturas, °C  | -40 .. +150  | -10 .. +100   | -40 .. +150   | -200 .. +250  | -40 .. +110  | -150 .. +150  | -30 .. +110   | -50 .. +140   |
| eficiente de fricción $\mu$   | 0,08 .. 0,15   | 0,05 .. 0,10  | 0,08 .. 0,15  | 0,03 .. 0,08  | 0,04 .. 0,12   | 0,03 .. 0,08  | 0,06 .. 0,15  | 0,03 .. 0,08  |
| gas específica admis., N/mm <sup>2</sup><br>- dinámica<br>- estática                | 50<br>140  | 10<br>50  | 40<br>120   | 80<br>250   | 120<br>250   | 80<br>300   | 40<br>80  | 140<br>200  |
| acidad de desliz. admis., m/s   | 0,5  | 0,25 .. 10  | 1,0   | 2,0   | 2,0  | 1,5   | 1,0   | 0,5   |
| rancia del eje  | e7 – e8  | f7 – f8   | e7 – f8   | f6 – h7   | h7 – h8  | g6 – f7   | h8 – h9   | h7 – h8   |
| rancia del alojamiento  | H7   | H7  | H7  | H7  | H7   | H7  | H7  | H7  |
| osidad del eje R <sub>a</sub> , $\mu$ m   | 0,8 .. 1,6   | 0,2 .. 0,8  | 0,4 .. 0,8  | 0 .. 0,4  | 0 .. 0,8   | 0 .. 0,4  | 0 .. 0,8  | 0 .. 0,8  |
| eza del eje, HB   | 180 – 400  | 200 – 300   | 150 – 400   | 300 – 600   | 150 – 600  | 300 – 600   | 100 – 300   | 200 – 600   |
| ana   |   |  |  |  |  |  |  |  |
| ignación de las series  | PBM<br>PBMF  | PSM<br>PSMF   | PRM<br>PRMF   | PCM<br>PCM .. B<br>PCM .. B<br>PCM .. B   | PCM<br>M<br>PCM .. M<br>PCM .. M   | PI  | PPM<br>PPMF   | PWM   |



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |                           |
|---|---|---|---|--|---|---|---|---|--|---------------------------|
|   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |                           |
| Autolubricante  | -   | +   | -   | ++   | +   | ++  | ++  | ++  |  | PWM                       |
| Sin mantenimiento   | -   | +   | 0   | ++   | +   | ++  | ++  | ++  |  | PPMF                      |
| Alta contaminación  | +   | 0   | ++  | -  | 0   | -   | -   | +   |  | PBM                       |
| Resistente a la corrosión   | +   | 0   | +   | 0  | 0   | ++  | ++  | ++  |  | PJ                        |
| Alta temperatura  | +   | -   | +   | ++   | 0   | +   | 0   | +   |  | PCM...M PCMW...M PCMS...M |
| Cargas altas  | 0   | -   | 0   | +  | ++  | +   | 0   | ++  |  | PCM...B PCMW...B PCMS...B |
| Resistente a impactos/vibraciones   | +   | 0   | +   | 0  | 0   | +   | +   | +   |  | PRMF                      |
| Alta velocidad de deslizamiento   | -   | ++  | 0   | +  | +   | +   | +   | -   |  | PRM                       |
| Bajo rozamiento   | -   | +   | -   | ++   | +   | ++  | 0   | ++  |  | PSMF                      |
| Alta rugosidad del eje  | +   | -   | 0   | -  | 0   | -   | 0   | 0   |  | PSM                       |
| Juego pequeño   | -   | 0   | 0   | ++   | +   | +   | 0   | +   |  | PBMF                      |
| Insensible a la desalineación   | +   | 0   | 0   | -  | 0   | -   | 0   | +   |  | PBM                       |
| Bajo precio   | 0   | +   | +   | ++   | ++  | -   | ++  | -   |  |                           |
| Gama  |   |   |   |  |   |   |   |   |  |                           |
| Designación de las series   |   |   |   |  |   |   |   |   |  |                           |

## ***LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA***

## INDICE

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>4.</b> | <b>LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA.....</b>          | <b>46</b> |
| 4.1       | INTRODUCCIÓN.....                             | 46        |
| 4.2       | EJEMPLO: ESTUDIO DEL APOYO AXIAL SIMPLE.....  | 48        |
| 4.3       | COMPENSADORES .....                           | 50        |
| 4.4       | ACCIÓN DE LOS COMPENSADORES .....             | 52        |
| 4.5       | GUÍA PLANA CON LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA. .... | 53        |



## 4. LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA.

### 4.1 Introducción.

Consiste en suministrar presión elevada a unas cavidades situadas en el cojinete que soporta el eje, independientemente de que gire o no. Se emplea también para soportar una superficie plana (guías hidrostáticas). La presión de alimentación está en el rango 1-10 Mpa.

Ventajas de la lubricación hidrostática:

- las superficies están separadas por una capa de lubricante incluso a velocidad cero: fricción en arranque mínima y desgaste nulo.
- se asegura en todas las condiciones una capa gruesa de lubricante que evita contacto, no hay influencia de las microrrugosidades y ondulaciones (como ocurría en la lubricación límite).
- se consiguen cojinetes más rígidos que los hidrodinámicos: se verá que  $h$  varía con  $W^{1/3}$  mientras que en el segundo caso la variación es con  $W^{1/2}$ . Se pueden diseñar cojinetes de rigidez infinita o que aumenten el espesor de película con la carga.

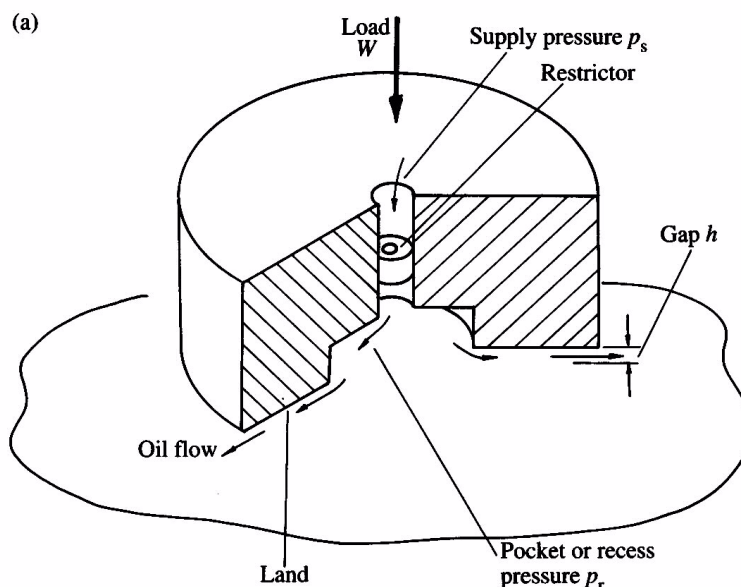
Desventajas:

- incremento del coste económico.
- peligro que puede suponer para la instalación un fallo en el suministro del lubricante a presión.
- necesidad de un filtrado muy exigente del fluido

Aplicaciones:

- por necesidad de disminuir el par de arranque en grandes máquinas, turbinas, etc. , hasta alcanzar el régimen hidrodinámico.
- sustentación de elementos de grandes dimensiones con muy bajo rozamiento y gran precisión de movimiento. (p.ej. telescopio).

En la figura 4.1 se esquematiza un apoyo hidrostático simple y el sistema de suministro de aceite. La función del restrictor (compensador) se verá más adelante.



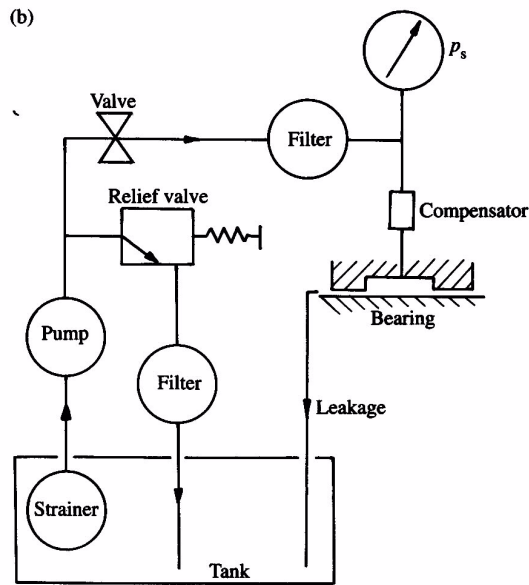


Figura 4.1 Esquema de un apoyo hidrostático (a) y del sistema de suministro de fluido (b)

La figura 4.2 proporciona unos valores orientativos de tamaño de cojinetes en función de la carga a soportar y de la presión en el cojinete.

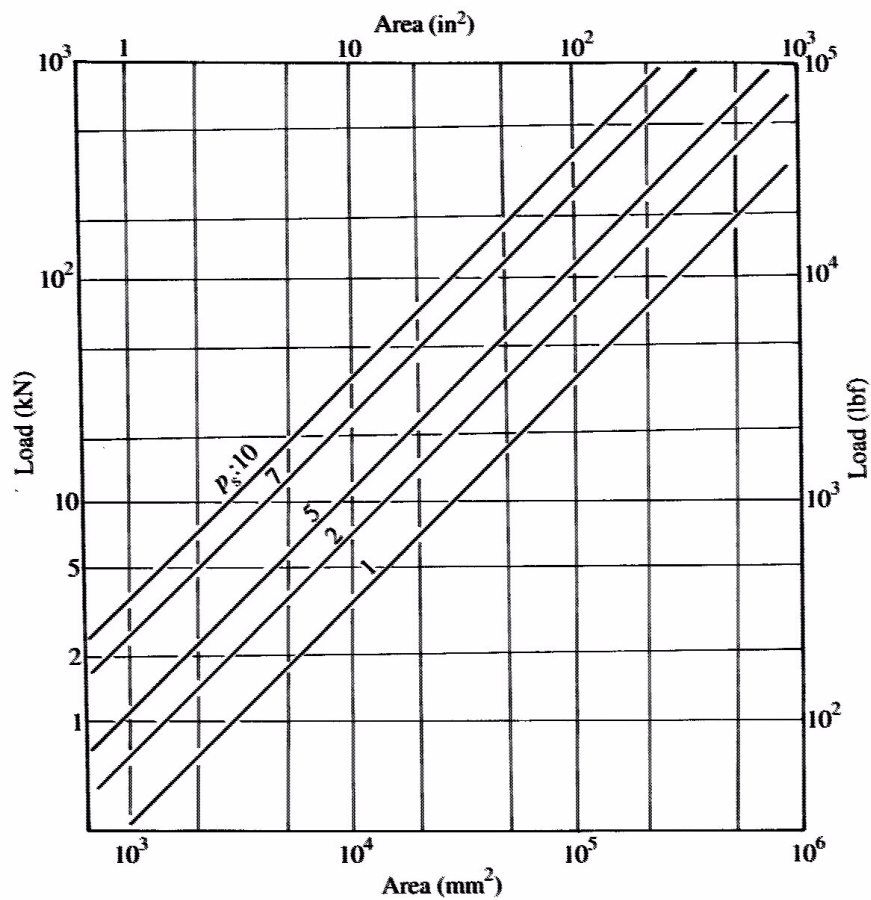


Figura 4.2 Dimensiones aproximadas de cojinetes hidrostáticos. ( $p_s$  en MPa).

#### 4.2 Ejemplo: estudio del apoyo axial simple.

Se supone que la cavidad es lo suficientemente profunda para que se mantenga la presión de alimentación  $p_s$ . Se analiza el equilibrio de un diferencial de fluido en las coordenadas  $(r, \theta, z)$ .

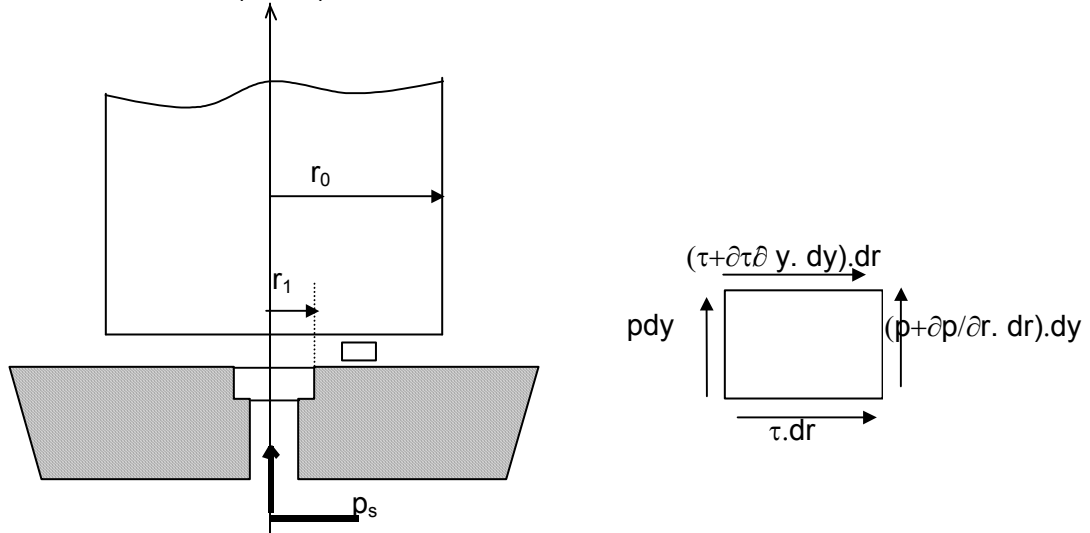


Fig. 4.3 Equilibrio de un elemento diferencial en un apoyo axial simple.

Planteando el equilibrio y aplicando la ley de Newton se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\tau = -\mu \cdot \frac{du}{dy}$$

despejando, integrando  $u$ , y tomando  $u=0$  en  $y=0$ ,  $u=0$  en  $y=h$ :

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dr} (y^2 - h \cdot y)$$

integrando para obtener el caudal total  $Q$ :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h u \cdot dy \cdot r \cdot d\theta$$

$$Q = -\frac{\pi \cdot h^3}{6\mu} \cdot \frac{dp}{dr}$$

La ecuación anterior proporciona el caudal en función de  $r$  y  $dp/dr$ , se puede reordenar e integrar:

$$Q \cdot \frac{dr}{r} = -\frac{\pi \cdot h^3}{6\mu} \cdot dp$$

$$Q \cdot \ln(r) = -\frac{\pi \cdot h^3}{6\mu} \cdot p + C$$

puesto que  $p=0$  en  $r=r_0$ , la expresión de  $p$  se convierte en:

$$p = \frac{6\mu}{\pi h^3} \cdot Q \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Si además se impone que en  $r=r_1$   $p=p_s$ , se obtiene un caudal  $Q$  función de  $p_s$  y una expresión muy sencilla para  $p$ :

$$Q = \frac{p_s \cdot \pi h^3}{6\mu \cdot \ln(r_0 / r_1)}$$

$$p = p_s \cdot \frac{\ln(r_0 / r)}{\ln(r_0 / r_1)}$$

Se puede calcular la carga  $W$  soportada por el cojinete a partir de las expresiones anteriores integrando la presión a lo largo del apoyo:

$$W = p_s \cdot \pi r_1^2 + \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_0} p_s \cdot \frac{\ln(r_0 / r)}{\ln(r_0 / r_1)} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

se integrará por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$u = \ln(r_0 / r) \quad du = -\frac{1}{r} \cdot dr$$

$$dv = r \cdot dr \quad v = \frac{r^2}{2}$$

y se obtiene la siguiente expresión para  $W$

$$W = \frac{p_s \cdot \pi}{2 \ln(r_0 / r_1)} \cdot (r_0^2 - r_1^2)$$

con lo que  $W$  (suponiendo  $r_0$  y  $r_1$  definidos) es proporcional a:

$$W = C_1 \cdot p_s = C_2 \cdot \frac{Q}{h^3}$$

Se verá en el apartado siguiente la importancia de estas expresiones al estudiar la estabilidad.

### 4.3 Compensadores

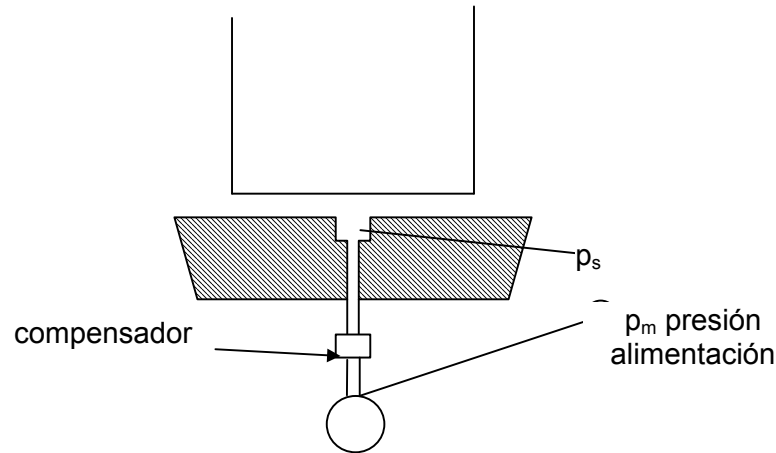


Figura 4.4 Apoyo axial simple con compensador. La presión de alimentación  $p_m$  es la que suministra la instalación. La presión  $p_s$  es la presión del cojinete

Para dispositivos normales de suministro de aceite ( $P \cdot Q = \text{cte}$ ), las ecuaciones del apartado anterior muestran que una disminución de la carga (disminución de presión) provoca un aumento de flujo y con él se produce un aumento de película y de la altura del elemento soportado, y una disminución de la rigidez:

$$W = C_1 \cdot p_s = C_2 \cdot \frac{Q}{h^3}$$

$$p_s \cdot Q = C_3$$

a partir de estas ecuaciones se puede deducir

$$W = \frac{C_2 C_3}{p_s h^3} \Rightarrow W^2 = \frac{C_1 C_2 C_3}{h^3}$$

y por tanto

$$\frac{dW}{dh} = -\frac{3}{2} \frac{C_1 C_3}{Qh}$$

al aumentar  $W$ ,  $p_s$  también aumenta con lo que disminuye  $Q$ , luego  $h$  disminuye y por tanto la rigidez -que viene dada por la expresión anterior- aumenta. (se puede hacer el razonamiento inverso para una disminución de la carga  $W$ ).

Las ecuaciones anteriores muestran que para un apoyo dado las condiciones de trabajo del mismo van a depender de bastantes variables. De cara al diseño hay varios métodos para fijar alguna de estas variables con elementos llamados "compensadores".

Pueden usarse básicamente tres tipos de compensadores:

- garantizar un caudal  $Q$  constante. Puede conseguirse utilizando una bomba de desplazamiento constante con un motor de velocidad constante y de potencia adecuada. También puede conseguirse con

una válvula de flujo constante (orificio variable controlado por el propio flujo).

- otra posibilidad es diseñar una válvula para que  $W/Q$  se mantenga constante y por tanto  $h$  no varíe con la carga. Incluso se puede diseñar de tal forma que  $h$  aumente cuando  $W$  aumenta, para compensar deformaciones de otros elementos.
- finalmente el tercer tipo de compensadores están basados en la introducción de una resistencia al paso del lubricante. De esta forma se consigue regular el flujo de caudal para que éste no aumente excesivamente cuando disminuye la carga, ni disminuya excesivamente cuando aumenta. (p.ej. tubo capilar o un simple orificio).

#### 4.4 Acción de los compensadores

El funcionamiento de los compensadores puede entenderse con el ejemplo siguiente en el que un eje está soportado por el sistema hidrostático de la figura. La presión de alimentación de los cuatro compensadores  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  es  $P_m$ .

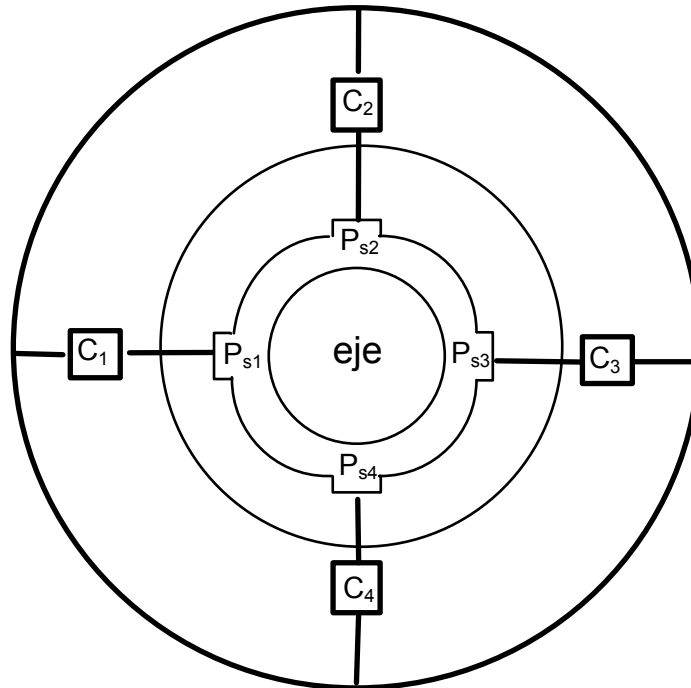


Fig. 4.5 Esquema de un cojinete con cuatro compensadores

Suponiendo que actúa una carga  $W$  en la dirección 2-4 puede estudiarse en función del tipo de compensador la reacción del sistema a una variación de la película de lubricante, suponiendo:

$$Q_4 = k_4 \cdot (W \cdot h^3)_4$$

- si  $C_4$  es un compensador de flujo constante al disminuir  $h_4$  como se cumple la ecuación anterior, la fuerza restauradora aumenta proporcionalmente con el cubo de la disminución de  $h$ .
- si  $C_4$  es un compensador de orificio o tubo capilar se cumple que el caudal  $Q$  es proporcional a  $(P_m - P_{s4})$ :

$$Q_4 = k'_4 \cdot (p_m - p_{s4})$$

si  $h_4$  disminuye,  $Q_4$  disminuye, disminuye por tanto  $(P_m - P_{s4})$ , puesto que  $P_m$  es constante esto implica que  $P_{s4}$  aumenta, provocando una fuerza restauradora.

#### 4.5 Guía plana con lubricación hidrostática.

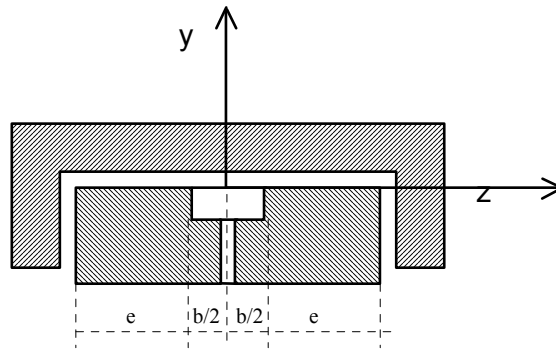


Fig. 4.6 Guía plana con lubricación hidrostática

Se puede tomar la expresión de la velocidad del estudio del apoyo axial simple, así como la velocidad máxima y media.

$$u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} (y^2 - h \cdot y)$$

$$u_{max} = -\frac{1}{8\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^2$$

$$u_{med} = -\frac{1}{12\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^2$$

Se calcula a continuación el caudal Q que fluye en la dirección x por los bordes del apoyo guía.

$$Q = u_{med} \cdot 2 \cdot (h \cdot L)$$

$$Q = -\frac{1}{6\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot h^3 \cdot L$$

integrando y tomando  $p=0$  en  $x=e+b/2$

$$Q = \frac{1}{6\mu} \cdot \frac{h^3 \cdot L}{\left(e + \frac{b}{2} - x\right)} \cdot p$$

Si hacemos además  $p=p_s$  en  $x=b/2$  se obtiene una expresión de Q en función de  $p_s$  y una relación entre p y  $p_s$ :

$$Q = \frac{1}{6\mu} \cdot \frac{h^3 \cdot L}{e} \cdot p_s$$

$$p = p_s \cdot \left(1 + \frac{b-2x}{2e}\right)$$

y la carga W que puede soportar:

$$W = p_s \cdot L \cdot (b + e)$$



## ***COJINETES DE RODAMIENTO***

## INDICE

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>5.</b> | <b>COJINETES DE RODAMIENTO .....</b>                              | <b>73</b> |
| 5.1       | INTRODUCCIÓN .....  | 73        |
| 5.2       | TIPOS DE RODAMIENTOS .....  | 74        |
| 5.3       | DURACIÓN O VIDA ÚTIL DE UN RODAMIENTO .....                       | 77        |
| 5.4       | CARGA EN LOS RODAMIENTOS .....                                    | 78        |
| 5.5       | SELECCIÓN DE RODAMIENTOS DE BOLAS Y DE RODILLOS CILÍNDRICOS ..... | 79        |
| 5.6       | SELECCIÓN DE COJINETES DE RODILLOS CÓNICOS .....                  | 81        |
| 5.7       | COMENTARIOS SOBRE LAS DISTINTAS OPCIONES DE COJINETES .....       | 83        |

## 5. COJINETES DE RODAMIENTO

### 5.1 Introducción

El nombre de “cojinetes de rodamiento”, o simplemente rodamientos, se emplea para describir la clase de soporte de eje en el que la carga principal se transmite a través de elementos que están en contacto rodante y no deslizante.

La carga, la velocidad y la viscosidad de operación del lubricante afectan a las características friccionales de un cojinete de rodamiento.

En este capítulo, que recoge buena parte del capítulo correspondiente del libro “Diseño en Ingeniería Mecánica” de J.E. Shigley, se incidirá en los criterios fundamentales para la elección de un rodamiento. Para un mayor detalle convendrá en cada caso estudiar atentamente las recomendaciones de cada fabricante para atender a factores tales como: carga de fatiga, fricción, calentamiento, problemas cinemáticos, propiedades de los materiales, resistencia a la corrosión, lubricación, tolerancias, etc.

## 5.2 Tipos de rodamientos

Los rodamientos se fabrican para soportar:

- Cargas puramente radiales
- Cargas de empuje axial
- Combinación de cargas radiales y axiales

La nomenclatura de un cojinete se indica en la figura 5.1, en la que se aprecian las cuatro partes principales: aro externo, aro interno, elementos rodantes (bolas), y separador. En cojinetes de bajo coste a veces se omite el separador cuya misión es impedir el contacto entre las bolas del rodamiento.

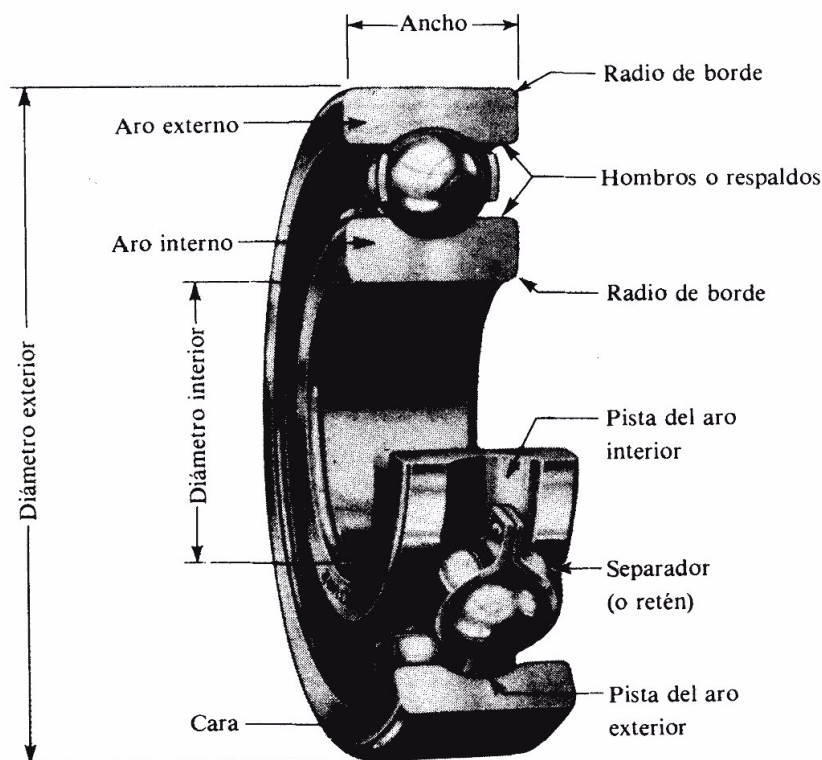


Figura 5.1 Nomenclatura de un rodamiento de bolas

En la figura 5.2 se representan los tipos principales de rodamientos de bolas. Todos estos cojinetes pueden obtenerse con cubiertas o protectores en uno o ambos lados. Las cubiertas no proporcionan un cierre completo, pero sí ofrecen protección contra la entrada de polvo y suciedad. Una variedad de cojinetes se fabrica con sellos herméticos en uno o ambos lados. Cuando los sellos están en ambos lados se lubrica en fábrica.

Los cojinetes de bolas de un fila soportan un pequeño desalineamiento o deflexión del eje, pero es posible también usar cojinetes autoalineantes. Los cojinetes de bolas de doble fila se fabrican en una gran variedad de tipos y tamaños para soportar cargas radiales y axiales más intensas.

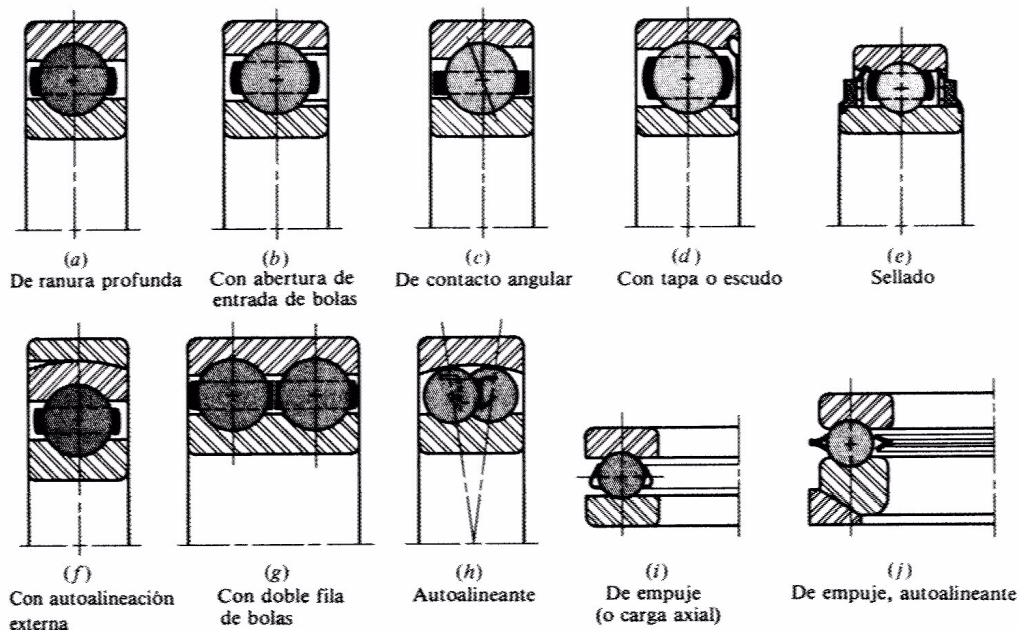


Figura 5.2 Diversos tipos de rodamientos de bolas

Algunos cojinetes de rodillos de tipo estándar disponibles se ilustran en la figura 5.3. Los cojinetes de rodillos cilíndricos soportan una carga mayor que los de bolas del mismo tamaño debido a su mayor área de contacto. Sin embargo, tienen la desventaja de requerir casi una perfecta configuración geométrica de pista y rodillos: un ligero desalineamiento originará que los rodillos se desvíen y se salgan de alineación. Por esta razón el retén debe ser grueso y resistente. Desde luego, los rodillos cilíndricos no soportarán cargas de empuje..

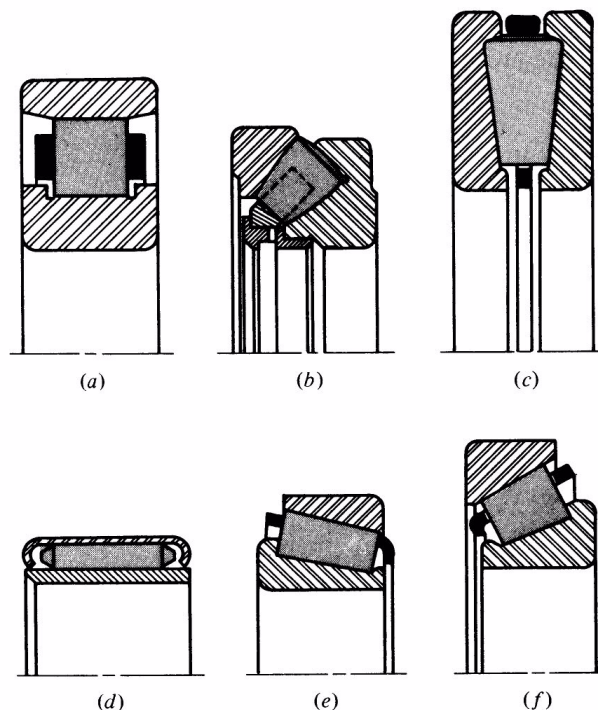


Figura 5.3. Diversos tipos de rodamientos de rodillos: a) cilíndricos, b) esféricos, de empuje, c) cónicos, de empuje, d) de agujas, e) cónicos ordinarios, f) cónicos de amplio contacto angular.

El cojinete de empuje de rodillos esféricos es útil donde se tienen fuertes cargas y desalineamientos. Los elementos esféricos tienen la ventaja de ampliar su área de contacto a medida que la carga aumenta. Los cojinetes de agujas son muy útiles donde el espacio radial es limitado. Se surten con pistas de rodamiento o sin ellas.

Los cojinetes de rodillos cónicos combinan las ventajas de los cojinetes de bolas y de rodillos cilíndricos puesto que pueden soportar cargas radiales y axiales, o cualquier combinación de las dos y además tienen la capacidad de carga elevada de los cojinetes de rodillos cilíndricos. Se diseñan de manera que todos los elementos de la superficie de los rodillos y de las pistas interseccionen en un punto común en el eje del cojinete.

### 5.3 Duración o vida útil de un rodamiento

Cuando se aplica una carga sobre el rodamiento se producen unas tensiones de contacto sobre las pistas y las bolas del rodamiento. Debido a la geometría de estos elementos estas tensiones responden a unas ecuaciones relativamente complicadas, pero basadas en la teoría de Hertz.

Si un cojinete se mantiene limpio y bien lubricado, se monta y se sella contra la entrada de suciedad o polvo, se conserva en esta condición y opera a temperaturas razonables, entonces la fatiga del material será la única causa de fallo. La duración o vida útil de un rodamiento se define como el número total de revoluciones, o el número de horas de giro a una velocidad determinada, de operación del cojinete para que se produzca el fallo. En condiciones ideales el fallo por fatiga consistirá en una astilladura o descascarillado de las superficies que soportan la carga.

La duración nominal es un término autorizado por la AFBMA (*Anti-Friction Bearing Manufacturers Association*) y lo emplean la mayoría de los fabricantes de rodamientos. Se define como el número de revoluciones, o bien horas a una velocidad constante dada, que el 90% de un grupo de cojinetes completará o excederá sin producirse fallo. Los términos: duración mínima, duración  $L_{10}$ , y duración  $B_{10}$ , también se emplean para designar la vida nominal.

#### 5.4 Carga en los rodamientos

Los experimentos muestran que dos grupos de cojinetes idénticos probados bajo cargas diferentes,  $F_1$  y  $F_2$ , tendrán respectivamente duraciones  $L_1$  y  $L_2$  de acuerdo con la relación:

$$\frac{L_1}{L_2} = \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^a$$

siendo,

- $L_i$  la vida en millones de revoluciones o horas de trabajo a una velocidad de rotación dada
- $a=3$  para cojinetes de bolas
- $a=10/3$  para cojinetes de rodillos

Se suele emplear el término capacidad de carga básica  $C$ , que se define como la carga que un grupo de cojinetes soporta para una duración nominal de un millón de revoluciones ( $L_{10}=1 \cdot 10^6$  revoluciones). La duración nominal de un millón de revoluciones es un valor base elegido por facilidad de cálculo. De hecho la carga nominal correspondiente es tan alta que se ocasionaría al aplicarla la deformación plástica de las superficies de contacto. En consecuencia, la capacidad básica de carga es simplemente un valor de referencia y que permite transformar la ecuación anterior en la siguiente en la que, conocida la capacidad de carga  $C$ , puede hallarse la vida para un valor concreto,  $F$ , de carga radial:

$$L = \left( \frac{C}{F} \right)^a$$

en esta última ecuación  $L$  está expresada en millones de revoluciones.

Algunos fabricantes en vez de tabular la carga básica nominal para diversos tamaños de cojinetes prefieren publicar designaciones de sus cojinetes correspondientes a cierto número de horas de vida útil a una velocidad especificada. En estos casos será útil la siguiente expresión que se deriva directamente de las anteriores:

$$F_R = F_D \left( \frac{L_D \cdot n_D}{L_R \cdot n_R} \right)^{\frac{1}{a}}$$

siendo,

- $F_R$ , la capacidad radial nominal de catálogo, N
- $L_R$ , la duración nominal de catálogo, horas
- $F_D$ , la carga de diseño requerida, N
- $L_D$ , la duración de diseño requerida, horas
- $n_R$ , la velocidad nominal de catálogo, rpm o rad/s
- $n_D$ , la velocidad de diseño requerida, rpm o rad/s



## 5.5 Selección de rodamientos de bolas y de rodillos cilíndricos

Con excepción de los cojinetes diseñados únicamente para carga axial, por lo general, los rodamientos de bolas se someten a una combinación de carga radial y axial. Las capacidades de los catálogos están basadas en cargas radiales, se suele definir por tanto una carga radial equivalente,  $F_e$ , que tendrá el mismo efecto sobre la vida del cojinete que las cargas aplicadas. La ecuación de la AFBMA para carga radial equivalente para cojinetes de bolas es el máximo de estos dos valores:

$$F_e = V.F_R$$

$$F_e = X.V.F_R + Y.F_a$$

donde,

- $F_e$  es la carga radial equivalente
- $F_R$  es la la carga radial aplicada
- $F_a$  es la carga axial aplicada
- $V$  es un factor que sirve para corregir las diferentes condiciones de rotación.  $V=1$  para giro del aro interior.  $V=1,2$  para giro del aro exterior. En cojinetes autoalineados se toma siempre  $V=1$ .
- $X$  es el factor radial
- $Y$  es el factor de empuje

Los factores  $X$  e  $Y$  de la ecuación anterior dependen de la geometría del cojinete, incluyendo el número de bolas y el diámetro de las mismas. Las recomendaciones de la AFBMA se basan en el valor del cociente entre la componente de la fuerza axial,  $F_a$ , y la capacidad de carga básica estática  $C_0$ . La capacidad de carga estática se tiene tabulada, junto con la capacidad de carga dinámica básica  $C$ , en muchas publicaciones de fabricantes de cojinetes. Por ejemplo en la Tabla 5.1 se recogen unos valores a modo de ejemplo y puede verse cómo a partir de  $F_a/C_0$  se obtiene  $e$ , y por comparación entre  $F_a/F_R$  y  $e$  puede hallarse  $X$  e  $Y$ . En los rodamientos de rodillos cilíndricos se toma  $Y=0$  puesto que no pueden soportar carga axial.

| $F_a/C_0$ | $e$  | $F_a/F_R \leq e$ |       | $F_a/F_R > e$ |       |
|-----------|------|------------------|-------|---------------|-------|
|           |      | $X_1$            | $Y_1$ | $X_2$         | $Y_2$ |
| 0.014*    | 0.19 | 1.00             | 0     | 0.56          | 2.30  |
| 0.021     | 0.21 | 1.00             | 0     | 0.56          | 2.15  |
| 0.028     | 0.22 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.99  |
| 0.042     | 0.24 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.85  |
| 0.056     | 0.26 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.71  |
| 0.070     | 0.27 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.63  |
| 0.084     | 0.28 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.55  |
| 0.110     | 0.30 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.45  |
| 0.17      | 0.34 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.31  |
| 0.28      | 0.38 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.15  |
| 0.42      | 0.42 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.04  |
| 0.56      | 0.44 | 1.00             | 0     | 0.56          | 1.00  |

\*Útilice 0.014 si  $F_a/C_0 < 0.014$ .

Tabla 5.1 Ejemplo de factores de carga radial equivalente para rodamientos de bolas

La mayoría de los fabricantes disponen de catálogos *on-line* o en CD que permiten seleccionar y calcular toda la gama de sus rodamientos. Para ayudar al diseñador en la selección de cojinetes, se incluyen datos sobre la vida o duración de los rodamientos para muchas clases de máquinas, así como los factores de aplicación de la carga. Esta información proviene de la experiencia real y sirve como punto de partida para el diseño, especialmente si no se dispone de información propia ya contrastada. La Tabla 5.2 contiene recomendaciones acerca de la duración de rodamientos requerida en algunas clases de máquinas. Los factores de aplicación de la Tabla 5.3 sirven para el mismo objeto, como factores de seguridad; se utilizan a fin de aumentar la carga equivalente antes de seleccionar un cojinete.

| TIPO DE APLICACIÓN  | VIDA kh   |
|---|-----------|
| Instrumentos y aparatos de uso poco frecuente   | Hasta 0.5 |
| Motores de avión  | 0.5–2     |
| Máquinas para operación breve o intermitente, donde la interrupción del servicio es de poca importancia | 4–8       |
| Máquinas para servicio intermitente, donde la operación confiable es de gran importancia                | 8–14      |
| Máquinas para servicio de 8 h que no siempre se utilizan plenamente                                     | 14–20     |
| Máquinas para servicio de 8 h que se utilizan plenamente  | 20–30     |
| Máquinas para servicio continuo las 24 h  | 50–60     |
| Máquinas para servicio continuo las 24 h, donde la confiabilidad es de suma importancia                 | 100–200   |

Tabla 5.2. Recomendaciones de duración de cojinetes para diversas clases de maquinarias

| TIPO DE APLICACIÓN                  | FACTOR DE CARGA |
|-------------------------------------|-----------------|
| Engranajes de precisión             | 1.0–1.1         |
| Engranajes comerciales              | 1.1–1.3         |
| Aplicaciones con sellos deficientes | 1.2             |
| Maquinaria sin impactos             | 1.0–1.2         |
| Maquinaria con impactos ligeros     | 1.2–1.5         |
| Maquinaria con impactos moderados   | 1.5–3.0         |

Tabla 5.3 Factores de aplicación de cargas

## 5.6 Selección de cojinetes de rodillos cónicos

La nomenclatura de estos cojinetes difiere en algunos aspectos de la de los rodamientos de rodillos cilíndricos. El aro interno se llama cono, y al aro externo se le denomina copa tal como se indica en la figura 5.4. En este tipo de rodamientos la copa puede separarse del conjunto del cono y rodillos.

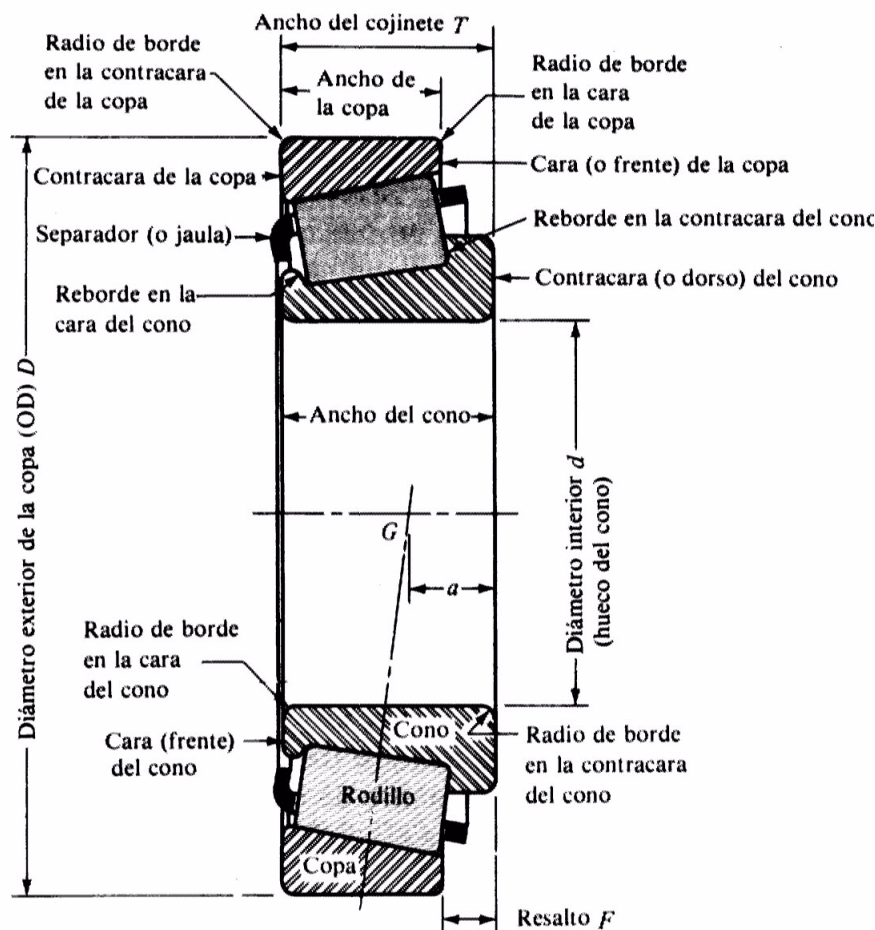


Figura 5.4 Nomenclatura de un rodamiento de rodillos cónicos. El punto G es el centro de carga efectiva y se utiliza para calcular la carga radial del rodamiento.

Un cojinete de rodillos cónicos es capaz de soportar cargas radiales y axiales o combinación de ambas. Sin embargo, aun no existiendo una carga axial externa, las cargas radiales sobre este tipo de rodamientos generan una reacción axial. Es por ello que se emplean siempre en un eje por ejemplo dos rodamientos de rodillos cónicos bien con las contracaras de los conos enfrentadas (montaje directo), o bien con las caras de los conos puestas frente a frente (montaje indirecto).

La componente de empuje axial provocada por una carga radial en un rodamiento de rodillo cónico responde de forma aproximada a la siguiente ecuación

$$F_a = \frac{0.47.F_R}{K}$$

donde  $K$  es aproximadamente 1.5 para cojinetes radiales y 0.75 para cojinetes de gran contacto angular.

La figura 5.5 muestra un montaje típico de dos rodamientos de rodillos cónicos que soportan un eje sometido a una carga axial externa  $F_a$ . Sobre los rodamientos A y B actúan también cargas radiales,  $F_{rA}$  y  $F_{rB}$  respectivamente. Las cargas equivalentes para el cálculo de los cojinetes A y B pueden hallarse empleando las siguientes expresiones:

$$F_{eA} = 0.4.F_{rA} + K_A \left( \frac{0.47.F_{rB}}{K_B} + F_a \right)$$

$$F_{eB} = 0.4.F_{rB} + K_B \left( \frac{0.47.F_{rA}}{K_A} - F_a \right)$$

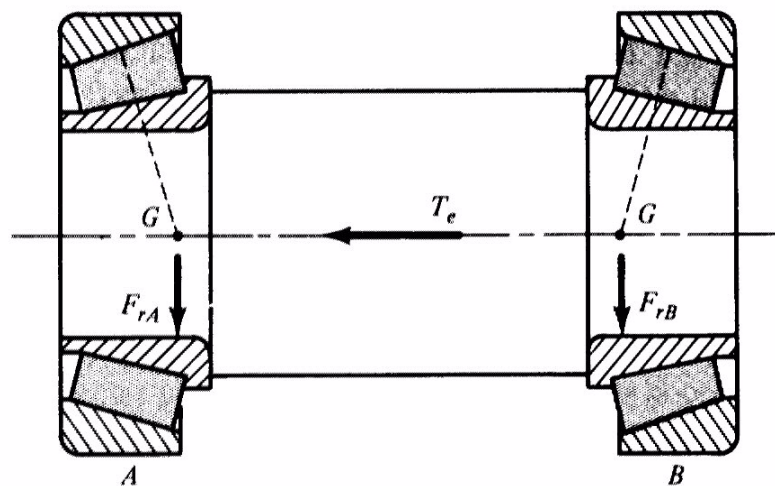


Figura 5.5. Esquema de un par de rodamientos de rodillos cónicos (montaje directo) sobre los que actúan cargas radiales y axiales. Nótese que las cargas radiales se aplican sobre los puntos G definidos por la geometría de cada rodamiento

## 5.7 Comentarios sobre las distintas opciones de cojinetes

Este apartado quiere ser un breve resumen sobre las características principales de los distintos tipos de cojinetes vistos hasta el momento, no sólo los rodamientos. Se pretende exponer algunos criterios de comparación entre cojinetes hidrodinámicos, cojinetes de fricción, rodamientos, etc.. Quizá podían haberse incluido estas ideas al principio del primer capítulo pero se considera que resultará más sencillo retenerlas en estos momentos, una vez vistas las características y propiedades de cada uno de los tipos de cojinetes.

En los cojinetes de fricción (*dry rubbing bearings*) las superficies deslizan sin lubricante. El material de las superficies se elige para que tenga bajos coeficientes de fricción y de desgaste. En algunos casos se emplean aleaciones porosas que permiten la incorporación de algún lubricante o grasa.

En los cojinetes de película gruesa, ya sean hidrodinámicos o hidrostáticos, una película continua de líquido (puede ser también un gas o vapor) separa las superficies que deslizan. Esta película soporta también las cargas aplicadas sobre estas superficies, bien a través de las presiones que se generan en la propia película de lubricante debido al movimiento y a la geometría de las superficies (cojinete hidrodinámico, o bien aerodinámico si el fluido es aire), bien a través de una presión exterior (cojinete hidrostático, o aerostático si el fluido es aire).

En los cojinetes de rodamiento hay unos elementos (bolas, rodillos o agujas) colocados entre las superficies que deslizan.

Existen otras soluciones que no se han visto en detalle basadas en levitación magnética o electrostática, que puede tener su campo de aplicación en situaciones especiales.

Para el caso particular de un eje giratorio sometido a una carga externa, las dos variables de diseño más importantes son la carga radial y la velocidad de giro. La figura 5.6 da una idea de las posibilidades de utilización de distintos tipos de cojinetes en función de los valores que adoptan estas variables. En esta figura se asume  $L=D$  para el cálculo de los cojinetes hidrodinámicos.

A velocidades bajas puede verse cómo los cojinetes de fricción tienen una capacidad similar a la de los rodamientos. Sin embargo, a medida que aumenta la velocidad los rodamientos tienen mejores prestaciones. En esta figura se indica también una velocidad máxima "típica" para rodamientos. Tómense éste y otros valores como órdenes de magnitud y no como límites absolutos. Cuando la velocidad de giro es relativamente alta se ve como los cojinetes hidrodinámicos ofrecen prestaciones superiores.

La Tabla 5.4 recoge una comparativa cualitativa entre características de distintos tipos de cojinetes.



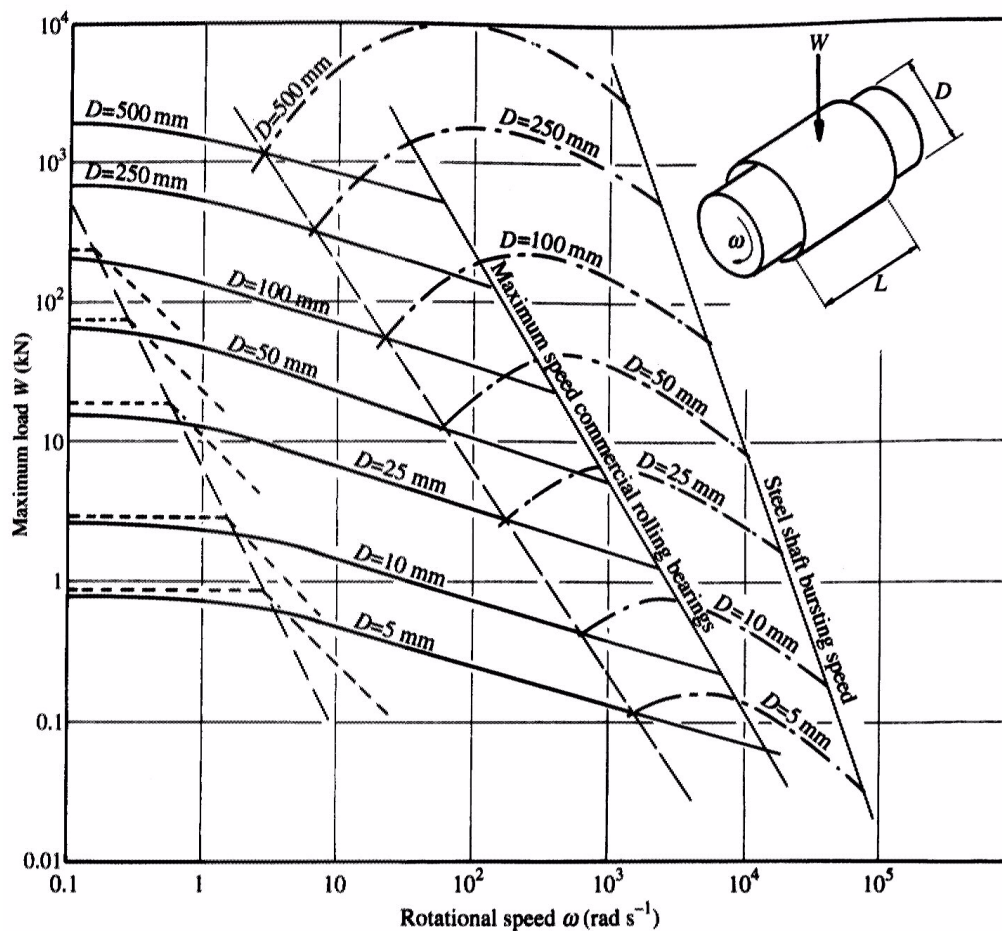


Figura 5.6 Comparativa entre campos de aplicación de cojinetes de fricción (-----), cojinetes hidrodinámicos (- · - · -) y rodamientos (———)

| Type of bearing              | Dry rubbing          | Hydrodynamic fluid film      | Hydrostatic fluid film          | Rolling element             |
|------------------------------|----------------------|------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| Accuracy of radial location  | Fair                 | Fair                         | Excellent                       | Good                        |
| Axial load capacity          | Some                 | None                         | None                            | Some                        |
| Low starting torque          | Good                 | Fair                         | Excellent                       | Excellent                   |
| High-temperature performance | Limited by materials | Limited by lubricant         | Limited by lubricant            | Good, limited by materials  |
| Lubricating system required  | Simple               | Usually requires circulation | Complex, high-pressure system   | Relatively simple if sealed |
| Tolerance of dirt            | Good if sealed       | Needs sealing and filtering  | Sealing and filtering essential | Good with sealing           |

Tabla 5.4 Comparativa cualitativa entre cojinetes de fricción, hidrodinámicos, hidrostáticos y de rodamiento.

***FRENOS Y EMBRAGUES***

## INDICE

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>6.</b> | <b>FRENOS Y EMBRAGUES.....</b>                                  | <b>87</b>  |
| 6.1       | INTRODUCCIÓN .....  | 87         |
| 6.2       | ANÁLISIS DE UN EJEMPLO SENCILLO.....                            | 88         |
| 6.3       | CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS. ....                               | 90         |
| 6.4       | EMBRAGUES Y FRENOS CON ZAPATAS INTERIORES.....                  | 92         |
| 6.5       | EMBRAGUES Y FRENOS DE TAMBOR CON ZAPATAS EXTERIORES. ....       | 95         |
| 6.6       | EMBRAGUES Y FRENOS DE CINTA O BANDA.....                        | 98         |
| 6.7       | EMBRAGUES CÓNICOS DE ACCIÓN AXIAL. ....                         | 100        |
| 6.7.1     | <i>Embrague nuevo: distribución de presiones uniforme. ....</i> | <i>101</i> |
| 6.7.2     | <i>Embrague usado: desgaste uniforme.....</i>                   | <i>102</i> |
| 6.8       | EMBRAGUES DE DISCO DE ACCIÓN AXIAL.....                         | 103        |
| 6.8.1     | <i>Embrague nuevo: distribución uniforme. ....</i>              | <i>104</i> |
| 6.8.2     | <i>Embrague usado: desgaste uniforme.....</i>                   | <i>105</i> |
| 6.9       | MATERIALES DE FRICCIÓN. ....                                    | 106        |
| 6.10      | EJEMPLOS DE FRENOS Y EMBRAGUES.....                             | 107        |



## 6. FRENOS Y EMBRAGUES

### 6.1 Introducción

Son elementos relacionados con el movimiento de rotación: transmitir o absorber energía mecánica de rotación. En el momento del embrague dos masas que están girando a distintas velocidades se intentan llevar a la misma velocidad (en el caso del freno una de ellas tiene velocidad cero). Se produce un deslizamiento relativo, hay rozamiento con generación de calor e incremento de temperatura (figura 6.1)

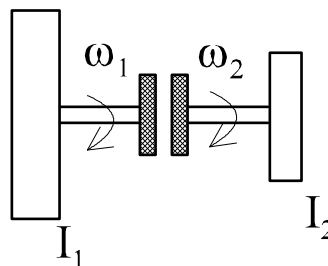


Figura 6.1 Representación esquemática de un embrague.

El análisis de funcionamiento incluye el estudio de la fuerza ejercida, del par de rozamiento, de la energía perdida y del aumento de la temperatura.

El par de rozamiento depende de:

- la fuerza ejercida.
- el coeficiente de rozamiento.
- la geometría de las superficies.

El método de análisis de todos los tipos de embragues y frenos de fricción es:

- a) suponer la distribución de presiones sobre las superficies de fricción.
- b) determinar la relación entre la presión máxima y la presión en un punto cualquiera.
- c) aplicar las ecuaciones de equilibrio estático para determinar la fuerza actuante, el par de torsión y las reacciones en apoyos.

## 6.2 Análisis de un ejemplo sencillo.

Sea la zapata de la figura 6.2 articulada en un punto fijo B, de corta longitud. La fuerza F presiona el material de fricción -cuya área es A- sobre una superficie plana que está en movimiento; f es el coeficiente de fricción.

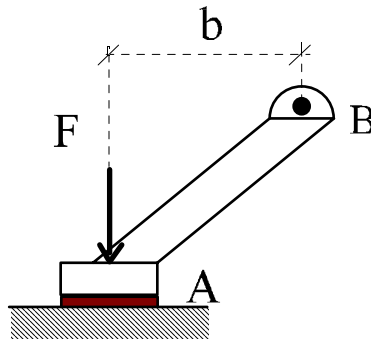


Figura 6.2 Zapata corta actuando sobre un plano

Siguiendo los pasos antes enunciados para el análisis a), b) y c):

- como la zapata es corta suponemos una presión uniformemente distribuida sobre la superficie de fricción.
- llamando N a la fuerza normal al plano en movimiento, teniendo en cuenta la hipótesis que se ha hecho en a) se calcula la presión máxima y la presión en un punto cualquiera (que en este caso coinciden):

$$p_i = p_{\max} = \frac{N}{A} = p$$

- para el cálculo de la fuerza N se plantea el equilibrio de los elementos del freno (figura 6.3):

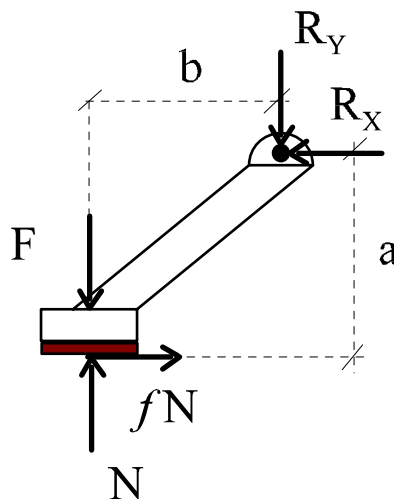


Figura 6.3 Equilibrio de zapata corta actuando sobre un plano

$\Sigma M=0$  (en la articulación):

$$-Nb + Fb + fNa = 0$$

y por tanto,

$$F = \frac{pA(b - fa)}{b}$$

esta ecuación relaciona F y p, ahora bien si  $b=fa$  entonces  $F=0$ . Se produce un fenómeno de *autotrabado* del freno. Por lo general no interesa este efecto y se suele coger  $f'=0,75$  a  $0,8$  del valor de f "autotrabante".

Pueden hallarse también las reacciones en la articulación:

$$R_x = fpA$$

$$R_y = pA - F$$

- Analizando este caso se pueden hacer dos comentarios:

i) *respecto al uso del material de fricción*: p es constante, luego si se quiere hacer un aprovechamiento máximo del material de fricción se calculará para que  $p=p_{max}$ .

ii) si  $b=fa$ , se produce frenado aunque la fuerza  $F=0$ , se habla de *autotrabado*.

### 6.3 Consideraciones energéticas.

Cuando se detienen los elementos rotatorios de una máquina con un freno, éste debe absorber la energía cinética de rotación  $\rightarrow$  calor. De igual forma durante un deslizamiento el embrague absorbe energía  $\rightarrow$  calor.

La capacidad de un embrague (o freno) está limitada por:

- características del material de fricción.
- capacidad de disipación de calor; si el calor se genera más rápido de lo que se disipa  $\rightarrow \Delta$  Temperatura.

Para tener una idea de lo que sucede en un embrague o freno, consideremos un modelo matemático:  $T$  es el momento aplicado por el embrague que se supone constante, los ejes son rígidos,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las velocidades iniciales (figura 6.4):

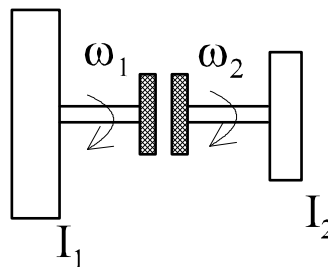


Figura 6.4 Esquema de un embrague

$$\begin{aligned} -T &= I_1 \ddot{\theta}_1 \\ T &= I_2 \ddot{\theta}_2 \end{aligned}$$

integrando las dos ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{-T}{I_1} t + \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{T}{I_2} t + \omega_2 \end{aligned}$$

la velocidad relativa  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$

$$\dot{\theta} = \omega_1 - \omega_2 - T \left( \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right) t$$

de la ecuación anterior se puede deducir el tiempo  $t_1$  para el que se produce la igualdad de velocidades

$$t_1 = \frac{I_1 I_2 (\omega_1 - \omega_2)}{T (I_1 + I_2)}$$

Puede hallarse también la potencia que se está disipando en función de  $t$ :

$$P_{dis} = T \cdot \dot{\theta} = T \left[ (\omega_1 - \omega_2) - \frac{T (I_1 + I_2)}{I_1 I_2} t \right]$$

Esta potencia es máxima para  $t=0$  (justo en el momento en el que se produce el embragado). La expresión anterior permite calcular la energía total disipada:

$$E = \int_0^{t_1} P_{dis} dt = T \int_0^{t_1} \left[ (\omega_1 - \omega_2) - T \frac{(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} t \right] dt$$
$$E = \frac{I_1 I_2 (\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$$

del análisis de la ecuación anterior se deduce fácilmente que la energía total disipada,  $E$ , es independiente del momento o par de tensión del embrague y proporcional al cuadrado de la diferencia de velocidades.

#### 6.4 Embragues y frenos con zapatas interiores.

En este caso se pretende estudiar el freno de la figura 6.5 siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior.

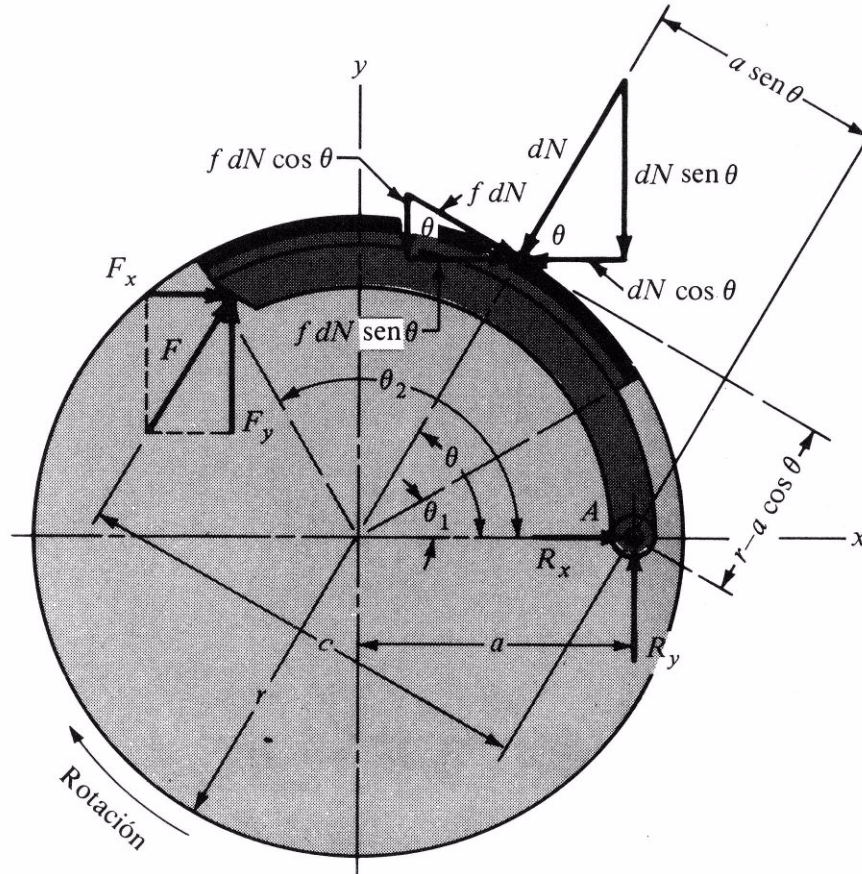


Figura 6.5. Freno de tambor con zapata interior

- Zapata larga:** la distribución de las fuerzas normales no puede suponerse constante. Se hace la hipótesis de que la presión  $p$  en un punto definido por  $\theta$  es proporcional a la altura sobre el punto de la articulación.
- de la hipótesis a) se deduce por tanto que la presión  $p$ , en un punto cualquiera definido por  $\theta$ , se puede relacionar con el punto de presión máxima,  $p_a$ , definido por  $\theta_a$ :

$$\frac{P}{\sin \theta} = \frac{P_a}{\sin \theta_a}$$

la presión máxima se producirá  $\theta_a=90^\circ$  (en caso de que el material de fricción llegue hasta este punto) y la presión es cero para  $\theta=0$ . Un buen diseño de zapata por tanto concentraría más material de fricción donde hay más presión, y lo omitiría en el talón ( $\theta=0$ ).

- siendo  $b$  el ancho de la zapata, se determinará la fuerza  $F$  mediante la condición  $\Sigma M_A=0$ . Se plantea el equilibrio sabiendo que:

$$dN = pbrd\theta = P_a br \frac{\sin \theta}{\sin \theta_a} d\theta$$

llamando  $M_f$  al momento de las fuerzas de fricción, y  $M_N$  al momento de las fuerzas normales:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F = \frac{M_N - M_f}{c}$$

se calculan a continuación  $M_N$  y  $M_f$ :

–  $M_f$  (momento de las fuerzas de fricción)

$$M_f = \int f dN (r - a \cos \theta)$$

la ecuación se integrará entre  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , puntos entre los que se encuentra el material de fricción:

$$M_f = \frac{f P_a b r}{\sin \theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta (r - a \cos \theta) d\theta$$

$$\int \sin \theta (r - a \cos \theta) d\theta = \left[ -r \cos \theta - \frac{a}{2} \sin^2 \theta \right]$$

y por tanto,

$$M_f = \frac{f P_a b r}{\sin \theta_a} \left[ -r (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) - \frac{a}{2} (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) \right]$$

–  $M_N$  (momento de las fuerzas normales)

$$M_N = \int dN \cdot a \cdot \sin \theta$$

$$M_N = \frac{P_a b \cdot r \cdot a}{\sin \theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta \cdot d\theta$$

$$\int \sin^2 \theta \cdot d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]$$

y por tanto,

$$M_N = \frac{P_a b \cdot r \cdot a}{\sin \theta_a} \left[ \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} - \frac{(\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1)}{4} \right]$$

Volviendo de nuevo a la ecuación en la que  $F$  se relaciona con  $M_N$  y  $M_f$  se observa que existe en este caso una condición de  $F = 0$ , sería el caso en el que se daría un efecto de *autotrabado* del freno. En el caso que hemos estudiado se produce un efecto *autoenergizante* puesto que el momento de las fuerzas de rozamiento *ayuda* a la fuerza de frenado  $F$ . Si se invierte el sentido de la rotación del tambor se cambia el sentido de las fuerzas de fricción y entonces se pierde el efecto autoenergizante.

Puede calcularse también el par de frenado, T:

$$T = \int f \cdot r \cdot dN = \frac{fP_a br^2}{\sin \theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cdot d\theta$$

$$T = \frac{fp_a br^2}{\sin \theta_a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Para su posterior aplicación práctica, debe tenerse en cuenta que las ecuaciones anteriores se basan en las siguientes hipótesis:

- la presión en un punto de contacto en la zapata es proporcional a la altura sobre el talón.
- el efecto de la fuerza centrífuga es despreciable.
- se considera la zapata rígida y se desprecia el efecto de la deformación.
- se considera que el coeficiente de rozamiento es constante e independiente de las condiciones de contacto (temperatura, desgaste, etc..).



### 6.5 Embragues y frenos de tambor con zapatas exteriores.

La notación y las hipótesis que se emplearán en este apartado son las mismas que las del apartado anterior.

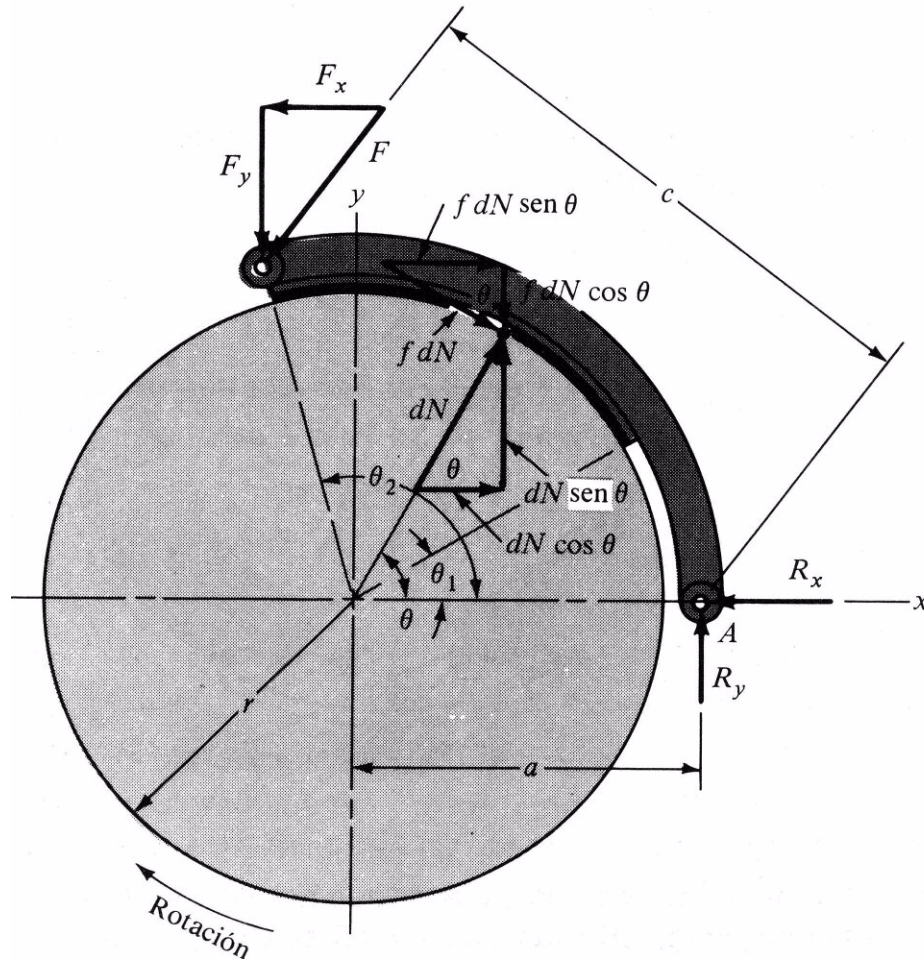


Figura 6.6. Esquema de un freno con zapata exterior

Tomando momentos en la articulación se pueden hallar las siguientes expresiones para los momentos de las fuerzas de rozamiento y las fuerzas normales:

$$M_f = \frac{f P_a b r}{\sin \theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta (r - a \cos \theta) d\theta$$

$$M_N = \frac{P_a b r a}{\sin \theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta$$

El equilibrio de la zapata ( $\Sigma M_A = 0$ ) proporciona la relación entre estos momentos y la fuerza sobre la zapata, F:

$$F = \frac{M_N + M_f}{c}$$

Las reacciones horizontal y vertical se obtienen haciendo  $\Sigma F=0$ ,

$$R_x = \int \cos \theta . dN + \int f \sin \theta . dN - F_x$$

$$R_y = \int f . \cos \theta . dN - \int \sin \theta . dN + F_y$$

sustituyendo,

$$R_x = \frac{p_a b r}{\sin \theta_a} (A + fB) - F_x$$

$$R_y = \frac{p_a b r}{\sin \theta_a} (fA - B) + F_y$$

donde,

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta . d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Si la rotación del tambor fuese en sentido contrario, existiría autoenergización y la fuerza F tendría la siguiente expresión:

$$F = \frac{M_N - M_f}{c}$$

Cuando se emplean elementos con zapatas exteriores como embragues el efecto de la fuerza centrífuga es reducir la fuerza normal, al aumentar  $\omega$ , hay que aumentar F.

Caso especial a estudiar es cuando la articulación (o pivote) está situado de tal forma que el momento de las fuerzas de fricción en este punto es nulo (figura 6.7)

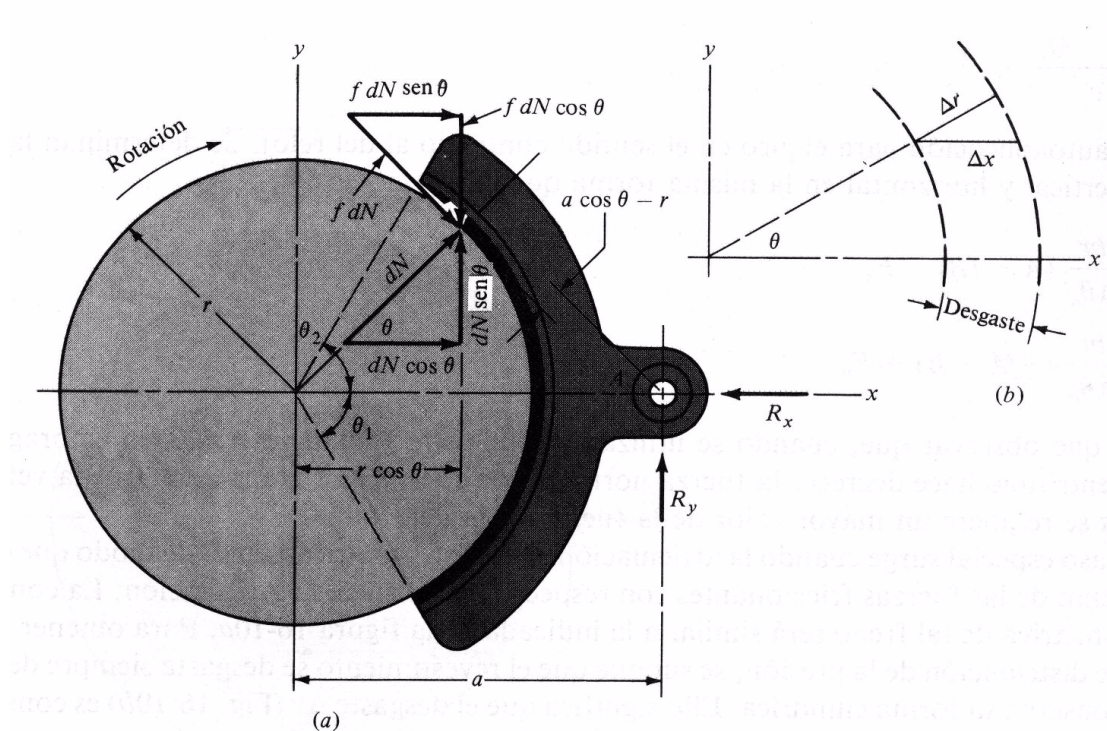


Figura 6.7. Freno con zapata exterior articulada simétrica.

Se hace la hipótesis de desgaste "cilíndrico",  $\Delta x = \text{constante}$ , es decir (ver figura 6.7):

$$\Delta r = \Delta x \cdot \cos \theta$$

puesto que la presión es proporcional al desgaste radial, la relación entre la presión en un punto cualquiera y la máxima será:

$$p = p_a \cos \theta$$

La presión es máxima,  $p_a$ , para  $\theta=0$ . Pasando al análisis de fuerzas, se elige **a** de modo que  $M_f=0$ . Se toma en este caso  $\theta_1=\theta_2$ :

$$M_f = 2 \int_0^{\theta_2} f dN (a \cos \theta - r) = 0$$

puesto que,

$$dN = p_a b r \cos \theta d\theta$$

sustituyendo, se halla el valor de **a** para el que  $M_f$  es nulo:

$$a = \frac{4r \sin \theta_2}{2\theta_2 + \sin 2\theta_2}$$

Las reacciones horizontal,  $R_x$ , y vertical,  $R_y$ , tienen las siguientes expresiones:

$$R_x = 2 \int_0^{\theta_2} \cos \theta dN = \frac{p_a b r}{2} (2\theta_2 + \sin 2\theta_2) = -N$$

$$R_y = 2 \int_0^{\theta_2} f \cos \theta dN = \frac{p_a b r f}{2} (2\theta_2 + \sin 2\theta_2) = -fN$$

El momento de frenado (teniendo en cuenta la simetría de la zapata la deducción es sencilla), **T**:

$$T = \int r f dN = a f N$$

## 6.6 Embragues y frenos de cinta o banda.

Este tipo de frenos funciona mediante una cinta o banda flexible de fricción. Se utiliza en excavadoras mecánicas, montacargas, etc. Su funcionamiento puede explicarse a partir de la figura 6.8.

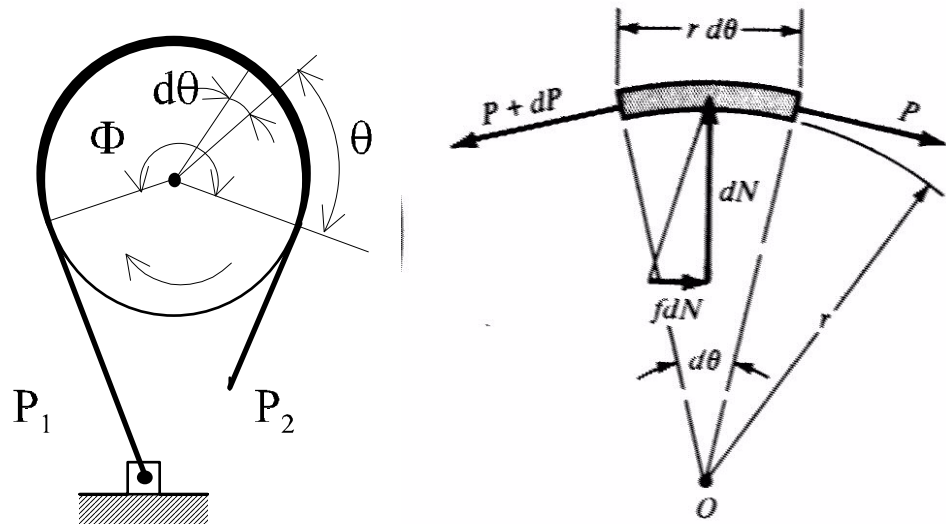


Figura 6.8 Esquema de funcionamiento de un freno de cinta

Debido a la fricción (y con el sentido de giro señalado en la figura), la fuerza de trabajo  $P_2$  es menor que la fuerza en el punto de retención,  $P_1$ . Planteando el equilibrio de un diferencial de cinta,  $\Sigma F=0$ :

$$\begin{aligned} (P + dP) \sin \frac{d\theta}{2} + P \sin \frac{d\theta}{2} - dN &= 0 \\ (P + dP) \cos \frac{d\theta}{2} - P \cos \frac{d\theta}{2} - fdN &= 0 \end{aligned}$$

de las dos ecuaciones anteriores se deduce:

$$\begin{aligned} dN &= Pd\theta \\ dP - fdN &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo el valor de  $dN$  en la ecuación e integrando entre  $P_1$  y  $P_2$ :

$$\int_{P_2}^{P_1} \frac{dP}{P} = f \int_0^{\phi} d\theta$$

y por tanto la relación entre las fuerzas es:

$$\ln \frac{P_1}{P_2} = f\phi \Leftrightarrow \frac{P_1}{P_2} = e^{f\phi}$$

y la expresión para el par de frenada,  $T$ :

$$T = (P_1 - P_2)r$$

La presión que actúa sobre la cinta,  $p$ , puede deducirse de la puesto que sobre el diferencial de longitud  $rd\theta$  y ancho  $b$  actúa una fuerza  $dN$ :

$$dN = pbrd\theta \Rightarrow Pd\theta = pbrd\theta$$

y por tanto

$$p = \frac{P}{br}$$

De la ecuación anterior se deduce directamente que el punto en el que la presión es máxima es:

$$p_a = \frac{P_1}{br}$$

### 6.7 Embragues cónicos de acción axial.

Los embragues se emplean para llevar dos ejes a la misma velocidad de rotación; el efecto se produce por un par de rozamiento  $T$ .

El embrague cónico es uno de los tipos de embrague más antiguo, tan sólo se emplea en aplicaciones sencillas, es simple y eficaz.

Un embrague se llama de acción axial si los elementos de fricción que entran en contacto se mueven paralelamente al eje de rotación (Figura 6.9)

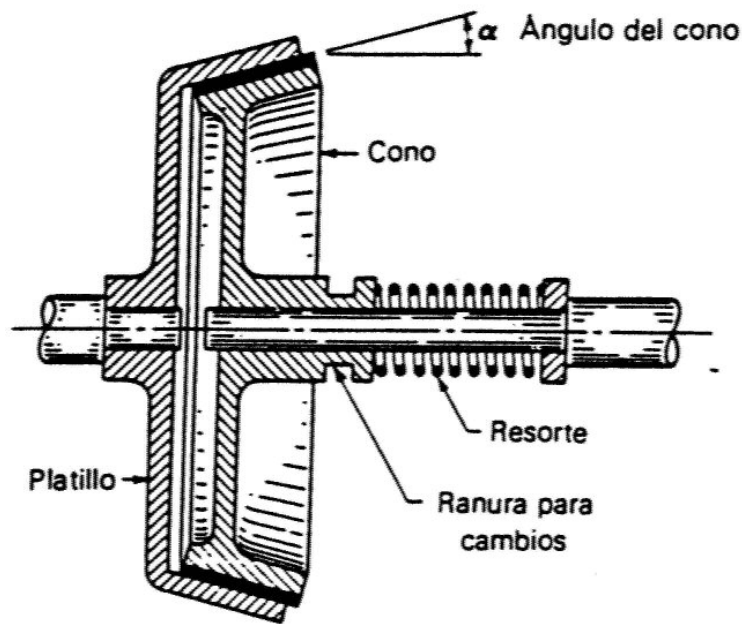


Figura 6.9. Embrague cónico de acción axial

El cono puede deslizarse axialmente, un resorte mantiene la conexión (o cierre) del embrague. El embrague se desconecta (o abre) mediante un mecanismo que ajusta en la ranura de cambios.

El ángulo del cono  $\alpha$ , diámetro y ancho, son los parámetros de diseño (valores normales para  $\alpha$  entre  $10^\circ$  y  $15^\circ$ ).

Para hallar una relación entre la fuerza de trabajo  $F$  y el momento de torsión transmitido se parte del esquema de la figura 6.10. Dos hipótesis son posibles según se considere el embrague nuevo o usado:

- distribución de presiones uniforme (embrague nuevo).
- desgaste uniforme (embrague usado).

6.7.1 Embrague nuevo: distribución de presiones uniforme.

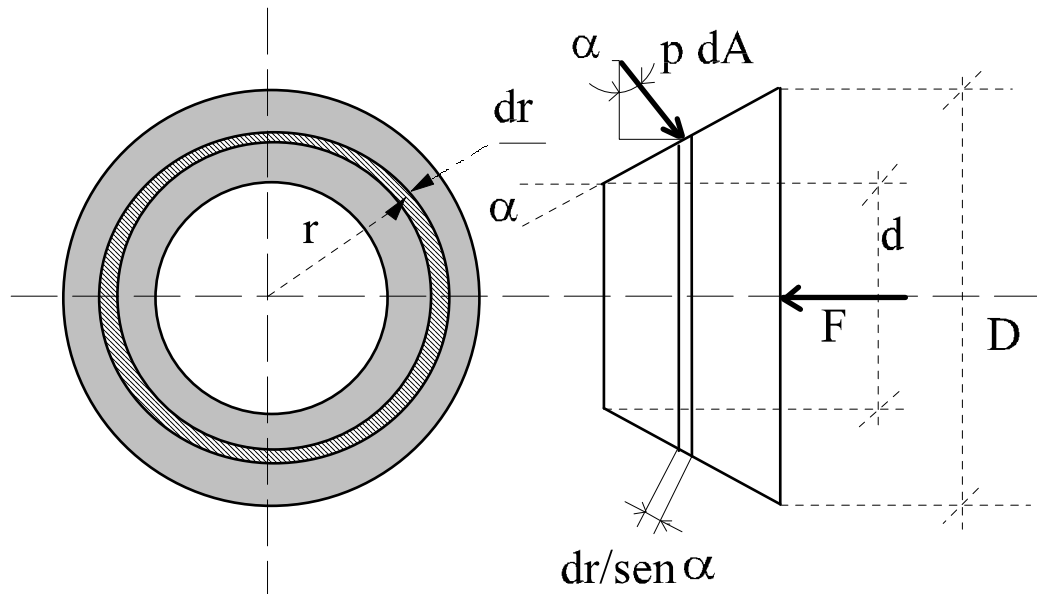


Figura 6.10 Fuerzas actuantes en un embrague cónico

Partiendo de la figura 6.10 se puede integrar la presión en la superficie de contacto para obtener la fuerza  $F$ , se supone  $p=p_m$ :

$$F = \int p \sin \alpha \cdot dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} p_m \frac{2\pi r dr}{\sin \alpha} \sin \alpha$$

$$F = \frac{\pi p_m}{4} (D^2 - d^2)$$

De igual forma puede deducirse el momento de torsión transmitido en función de  $p_m$ :

$$T = \int f r p dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} f p_m \frac{2\pi r^2 dr}{\sin \alpha}$$

$$T = \frac{f \pi p_m}{12 \sin \alpha} (D^3 - d^3)$$



### 6.7.2 Embrague usado: desgaste uniforme.

En esta hipótesis se supone que el desgaste en la dirección del eje de rotación es constante (Figura 6.11),  $\delta = \text{constante}$ :

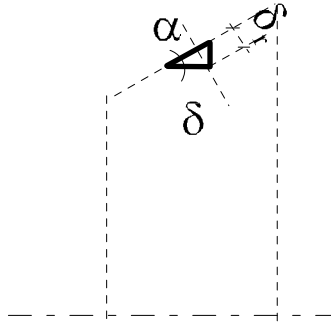


Figura 6.11. Desgaste radial y axial de un embrague cónico.

El desgaste radial,  $\delta_r$ , es proporcional al trabajo de las fuerzas de rozamiento en este punto, y de ahí se deducirá la distribución de presiones.

$$\delta_r = \delta \cdot \sin \alpha = \text{cste} \cdot p \cdot r \cdot \omega \cdot f \cdot dA$$

y por tanto de la ecuación anterior al ser  $\delta = \text{constante}$  se puede deducir que:

$$p \cdot r = \text{cste} \Rightarrow p = p_m \frac{d}{2r}$$

Conocida la distribución de presiones se pueden calcular la fuerza  $F$  y el par transmitido,  $T$ :

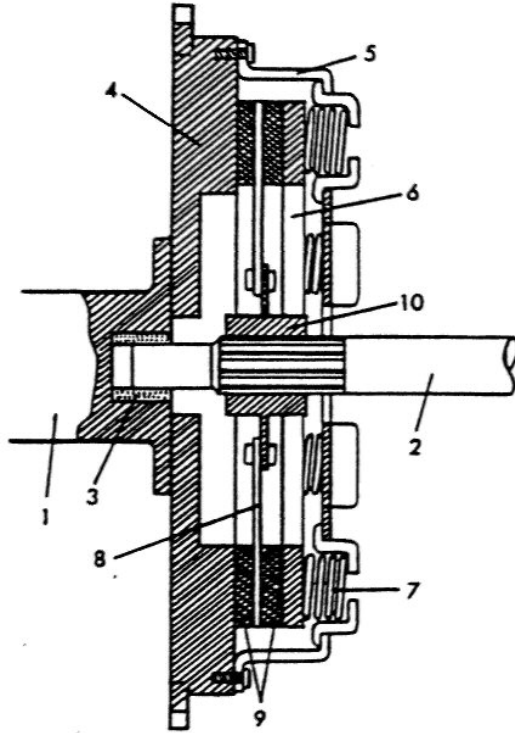
$$F = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} p_m \frac{d}{2r} \frac{2\pi r dr}{\sin \alpha} \sin \alpha = \frac{\pi p_m d}{2} (D - d)$$

$$T = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} f p_m \frac{d}{2r} \frac{2\pi r dr}{\sin \alpha} r = \frac{f \pi p_m d}{8 \sin \alpha} (D^2 - d^2)$$



### 6.8 Embragues de disco de acción axial.

En muchas aplicaciones los embragues de disco han desplazado a los cónicos: presentan una gran superficie de fricción en un espacio reducido, además la superficie disipadora de calor es más efectiva.



1. eje cigueñal.
2. segundo eje (al cambio)
3. cojinete de fricción.
4. volante de inercia.
5. tapa (unida al volante).
6. anillo presor.
7. muelles helicoidales.
8. disco del embrague.
9. forros.
10. cubo (unido al disco) encaja con el segundo eje

Figura 6.12. Embrague de disco de acción axial.

Los muelles helicoidales (Figura 6.12) obligan al anillo presor a separarse de la tapa, así el disco del embrague queda aprisionado entre los forros.

En la figura 6.13 el embrague está en posición de no transmitir el movimiento (desembragado), para ello es necesario separar del disco del embrague el anillo de presión comprimiendo los muelles (en un automóvil normalmente esto se realiza mediante un pedal).

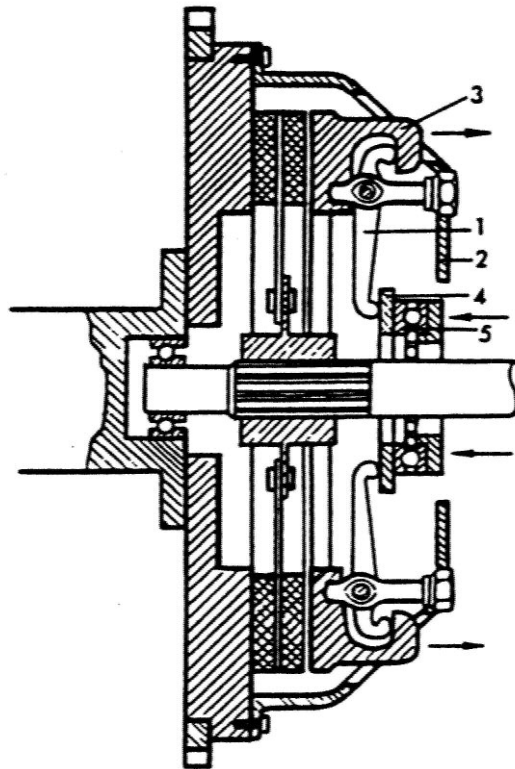


Figura 6.13 Embrague de disco en posición desembragado

En el cálculo de la relación existente entre la fuerza de trabajo,  $F$ , y el par transmitido por rozamiento,  $T$ , se emplean las mismas hipótesis que en el apartado anterior.

#### 6.8.1 Embrague nuevo: distribución uniforme.

Con el embrague nuevo supondremos una distribución uniforme de la presión en el disco.  $p=p_m$ :

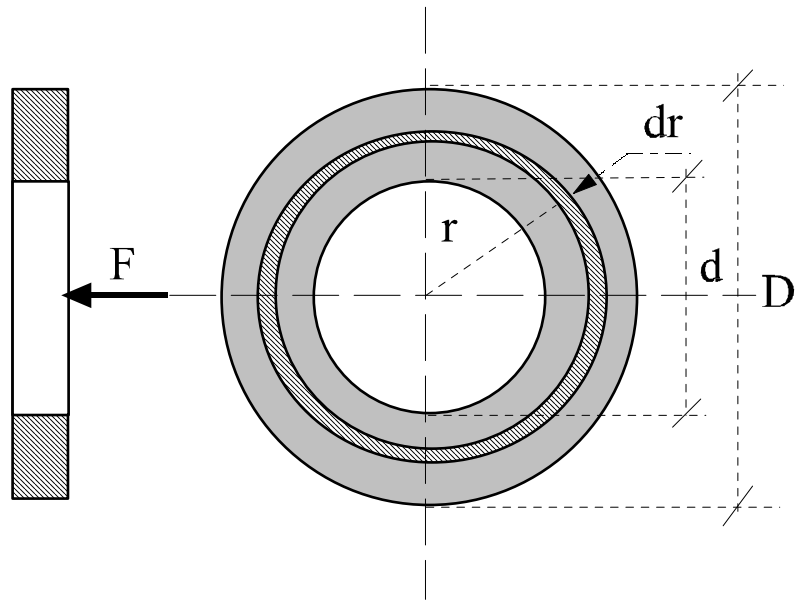


Figura 6.14 Esquema disco de embrague o freno

$$F = \int p \cdot dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} p_m 2\pi r dr = \frac{\pi p_m}{4} (D^2 - d^2)$$

$$T = \int f r p dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} f p_m 2\pi r^2 dr = \frac{f \pi p_m}{12} (D^3 - d^3)$$

#### 6.8.2 Embrague usado: desgaste uniforme.

La hipótesis de desgaste uniforme supone:

$$p \cdot r = cste = p_m \frac{d}{2}$$

y por tanto,

$$F = \int p \cdot dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} p_m \frac{d}{2r} 2\pi r dr = \frac{\pi p_m d}{2} (D - d)$$

$$T = \int f r p dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} f p_m \frac{d}{2r} 2\pi r^2 dr = \frac{f \pi p_m}{8} (D^2 - d^2) d$$

## 6.9 Materiales de fricción.

Las propiedades de un material de fricción para freno o embrague deben ser las siguientes:

- coeficiente de fricción alto y uniforme.
- propiedades poco dependientes de condiciones externas (p.ej. humedad).
- buena conductividad térmica y capacidad de resistir altas temperaturas.
- alta resistencia al desgaste, rayado y raspadura.

La Tabla 6.1 recoge una variedad amplia de materiales de fricción, algunos pueden trabajar en húmedo, sumergidos en aceite o rociados (esto reduce algo el coeficiente de fricción pero permite emplear presiones mayores).

La Tabla 6.2 recoge algunas propiedades de revestimientos típicos de frenos (fibras de asbesto que proporcionan fuerza y capacidad de resistir altas temperaturas, partículas de fricción y materiales aglutinantes).

| MATERIAL   | COEFICIENTE DE FRICCIÓN |           | TEMPERATURA MÁXIMA |         | PRESIÓN MÁXIMA |           |
|--|-------------------------|-----------|--------------------|---------|----------------|-----------|
|  | EN HÚMEDO               | EN SECO   | °F                 | °C      | psi            | kPa       |
| Hierro fundido sobre hierro fundido              | 0.05                    | 0.15–0.20 | 600                | 320     | 150–250        | 1000–1750 |
| Metal pulverizado* sobre hierro fundido          | 0.05–0.1                | 0.1–0.4   | 1000               | 540     | 150            | 1000      |
| Metal pulverizado* sobre acero duro (templado)   | 0.05–0.1                | 0.1–0.3   | 1000               | 540     | 300            | 2100      |
| Madera sobre acero o hierro fundido              | 0.16                    | 0.2–0.35  | 300                | 150     | 60–90          | 400–620   |
| Cuero sobre acero o hierro fundido               | 0.12                    | 0.3–0.5   | 200                | 100     | 10–40          | 70–280    |
| Corcho sobre acero o hierro fundido              | 0.15–0.25               | 0.3–0.5   | 200                | 100     | 8–14           | 50–100    |
| Fieltro sobre acero o hierro fundido             | 0.18                    | 0.22      | 280                | 140     | 5–10           | 35–70     |
| Asbesto tramado* sobre acero o hierro fundido    | 0.1–0.2                 | 0.3–0.6   | 350–500            | 175–260 | 50–100         | 350–700   |
| Asbesto moldeado* sobre acero o hierro fundido   | 0.08–0.12               | 0.2–0.5   | 500                | 260     | 50–150         | 350–1000  |
| Asbesto impregnado* sobre acero o hierro fundido | 0.12                    | 0.32      | 500–750            | 260–400 | 150            | 1000      |
| Grafito sobre acero                              | 0.05–0.1                | 0.25      | 700–1000           | 370–540 | 300            | 2100      |

\*El coeficiente de fricción puede mantenerse dentro de  $\pm 5\%$  en el caso de materiales específicos en este grupo.

Tabla 6.1 Materiales de fricción para embragues.

|                                   | TRAMADOS | MOLDEADOS | DE BLOQUE RÍGIDO |
|-----------------------------------|----------|-----------|------------------|
| Resistencia a la compresión, kpsi | 10–15    | 10–18     | 10–15            |
| Resistencia a la compresión, MPa  | 70–100   | 70–125    | 70–100           |
| Resistencia a la tensión, kpsi    | 2.5–3    | 4–5       | 3–4              |
| Resistencia a la tensión, MPa     | 17–21    | 27–35     | 21–27            |
| Temperatura máxima, °F            | 400–500  | 500       | 750              |
| Temperatura máxima, °C            | 200–260  | 260       | 400              |
| Velocidad máxima, ft/min          | 7500     | 5000      | 7500             |
| Velocidad máxima, m/s             | 38       | 25        | 38               |
| Presión máxima, psi               | 50–100   | 100       | 150              |
| Presión máxima, kPa               | 340–690  | 690       | 1000             |
| Coefficiente de fricción, medio   | 0.45     | 0.47      | 0.40–45          |

Tabla 6.2 Algunas propiedades de revestimientos para frenos

## 6.10 Ejemplos de frenos y embragues

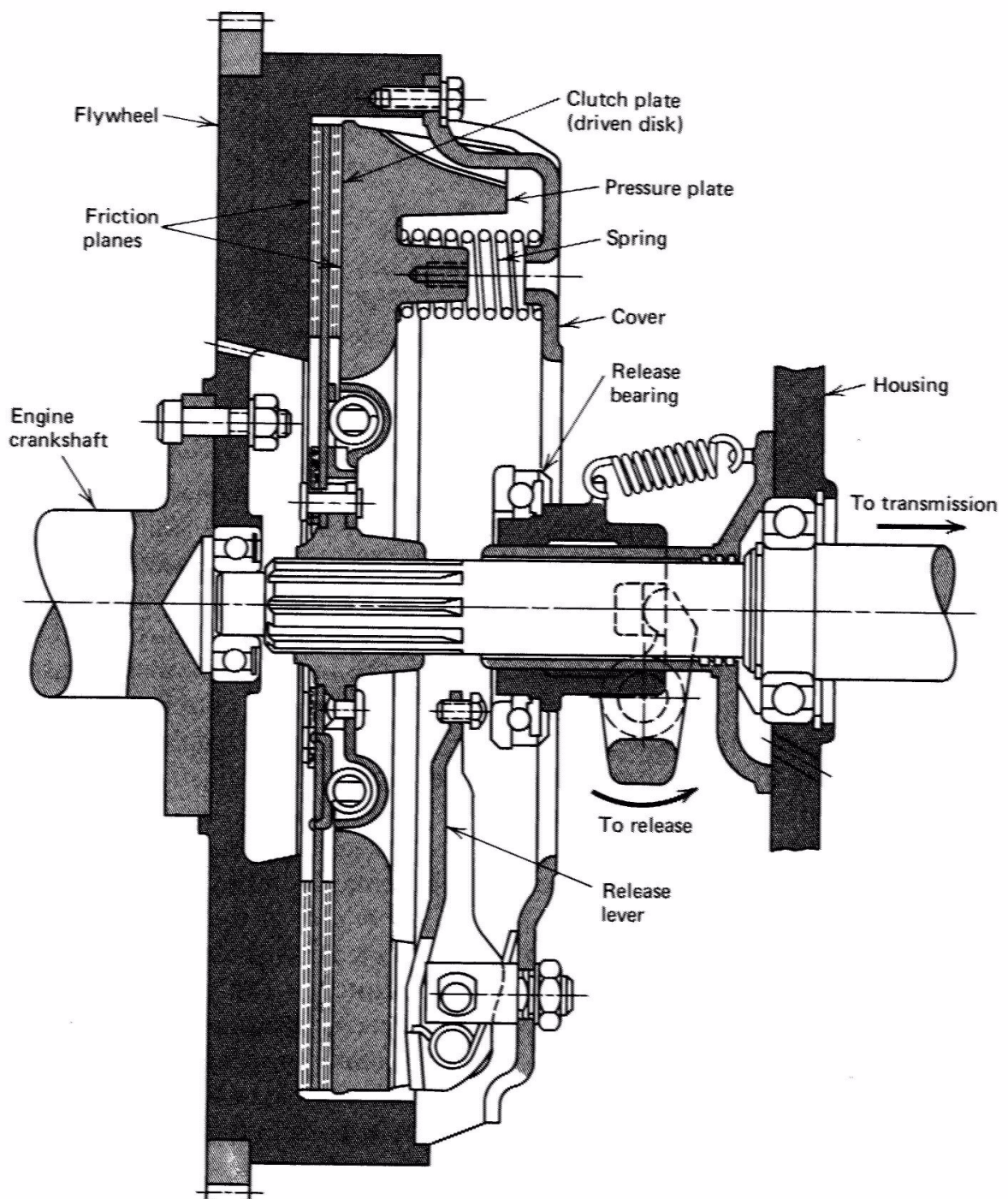


Figura 6.15. Embrague de disco



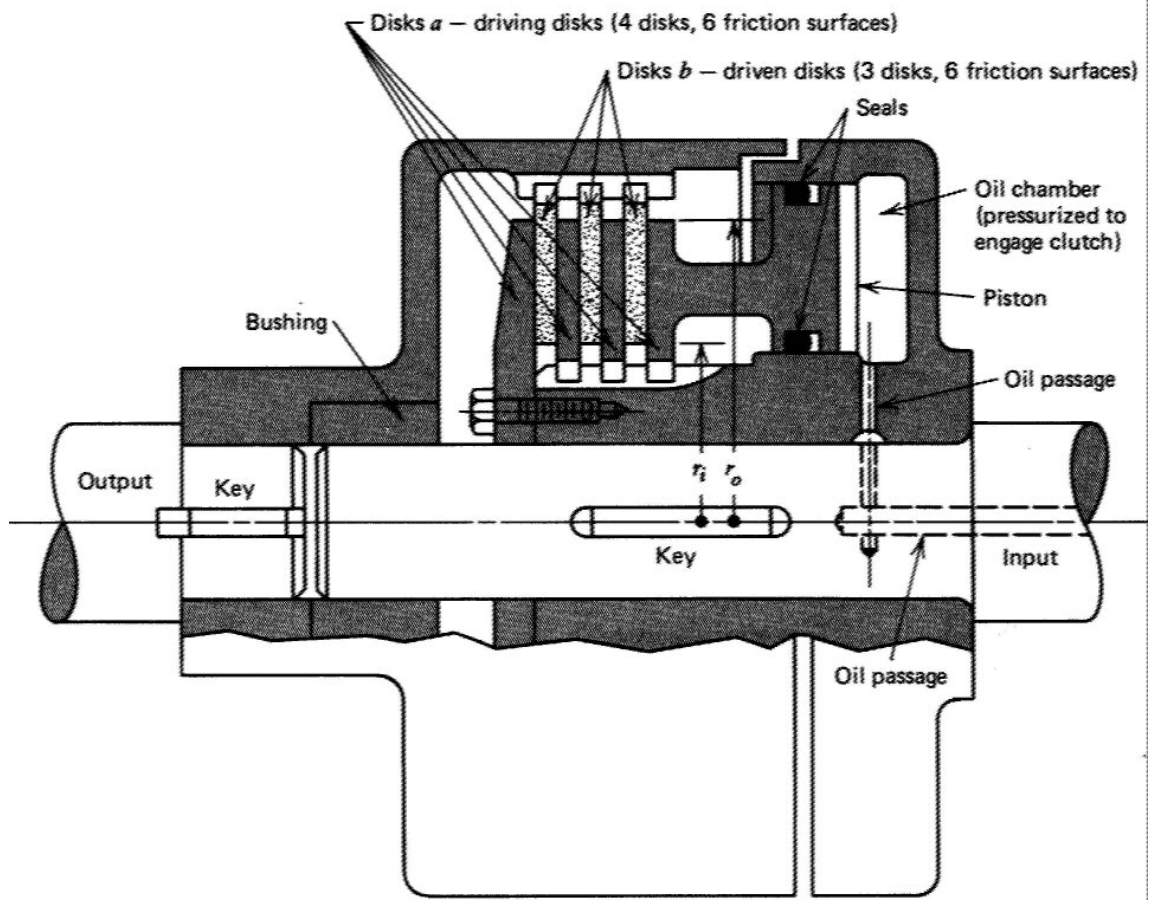


Figura 6.16. Embrague hidráulico multidisco

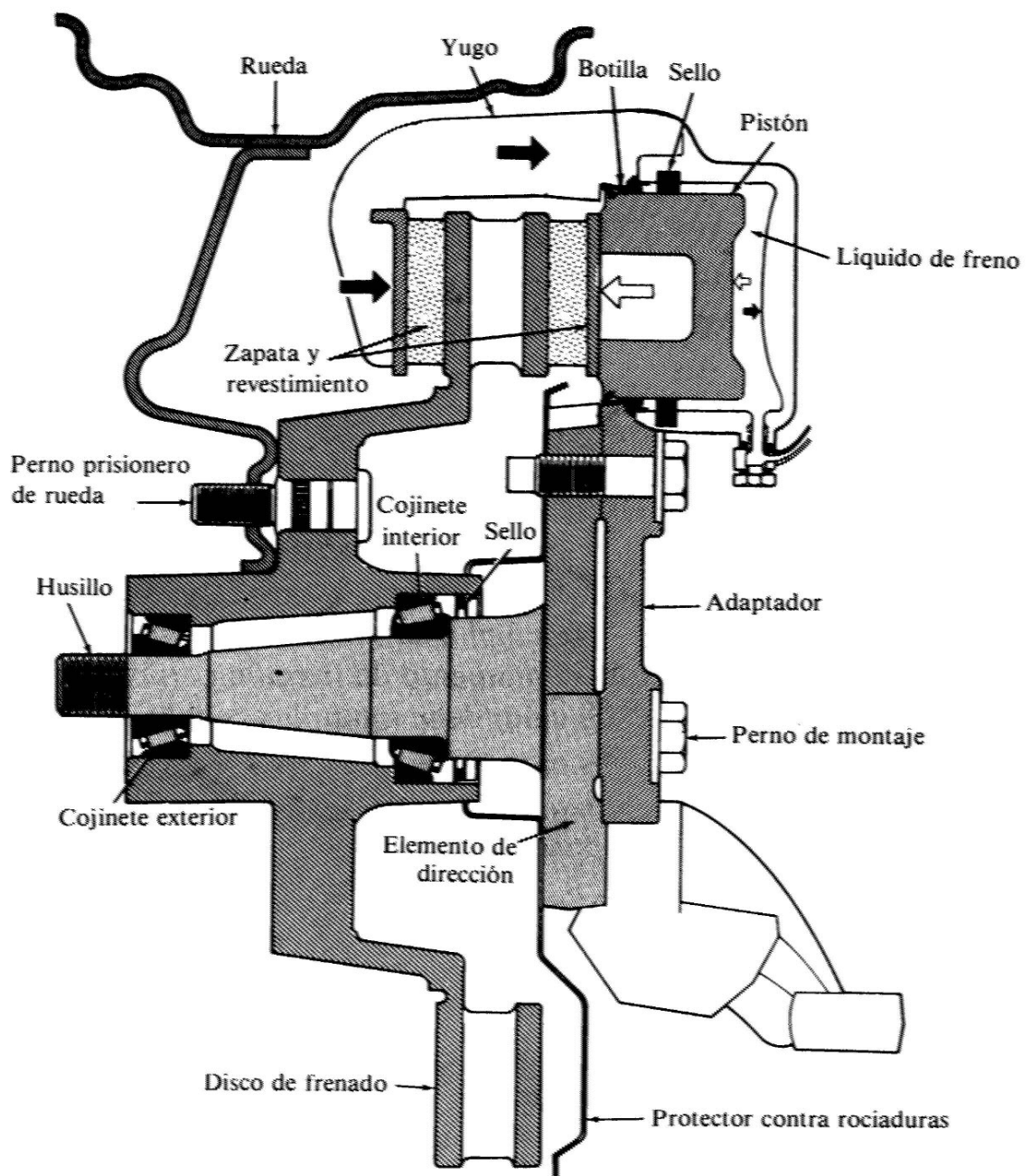


Figura 6.17. Freno de disco para automóvil

***VOLANTES DE INERCIA***

|



## INDICE

|           |                                       |            |
|-----------|---------------------------------------|------------|
| <b>7.</b> | <b>VOLANTES DE INERCIA.....</b>       | <b>112</b> |
| 7.1       | INTRODUCCIÓN.....                     | 112        |
| 7.2       | ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO.....          | 113        |
| 7.3       | CÁLCULO DE UN VOLANTE DE INERCIA..... | 115        |

## 7. VOLANTES DE INERCIA

### 7.1 Introducción.

Un volante de inercia es un elemento totalmente pasivo, únicamente aporta al sistema una inercia adicional. Al incrementarse la inercia del sistema, en igualdad de condiciones, se reducen las fluctuaciones de velocidad. Suelen emplearse volantes de inercia en máquinas cíclicas para reducir las variaciones de la velocidad cuando hay cambios en el par motor o en el par solicitado al motor (par de la carga), dentro del ciclo.

Si el par de la carga y el par del elemento motor de una máquina son constantes no se precisan volantes. Se emplean volantes cuando se quiere conseguir una velocidad de régimen constante (o con las menores fluctuaciones posibles) y:

- 1) el par de la carga es constante pero el par motor es variable con el tiempo (p.ej. motores de combustión)
- 2) viceversa (p.ej. punzonadoras, bombas alternativas, etc.).

Para el cálculo de los volantes de inercia se suelen utilizar dos parámetros auxiliares, la velocidad angular media,  $\omega_m$ , y el coeficiente de fluctuación,  $C_f$ , que se definen:

$$\omega_m = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$$

$$C_f = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m}$$

En la Tabla 7.1 se recogen unos valores típicos de coeficientes de fluctuación para diferentes tipos de máquinas.

| COEFICIENTE DE FLUCTUACIÓN *              |             |
|---|-------------|
| Tipo de máquina                           | $C_f$       |
| Maquinaria de machaqueo                   | 0,200       |
| Maquinaria eléctrica                      | 0,003       |
| Maquinaria eléctrica, transmisión directa | 0,002       |
| Motores con transmisión por correas       | 0,030       |
| Maquinaria para molinos harineros         | 0,020       |
| Transmisión rueda dentada                 | 0,020       |
| Martillos                                 | 0,200       |
| Máquinas herramientas                     | 0,030       |
| Maquinaria para fabricación de papel      | 0,025       |
| Bombas                                    | 0,030-0,050 |
| Maquinaria de corte                       | 0,030-0,050 |
| Maquinaria de hilanderías                 | 0,010-0,020 |
| Maquinaria textil                         | 0,025       |

\* *Mechanical Engineers Handbook, de Kent, 12.ª edición, «Design and Production», pág. 7-40.*

Tabla 7.1 Coeficientes de fluctuación típicos de diferentes máquinas.

## 7.2 Ecuación del movimiento.

Basándonos en la figura 7.1 se deducirán las ecuaciones del movimiento de la masa cuyo momento de inercia respecto al eje de rotación es  $I$ :

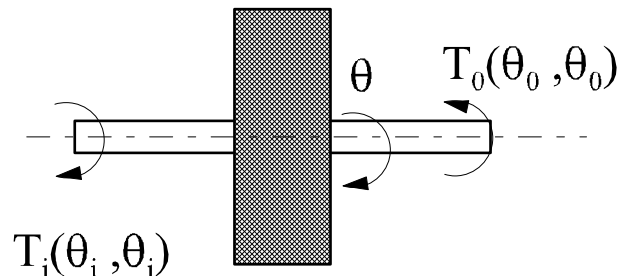


Fig.7.1 Esquema de un volante de inercia.  $T_i$  es el par motor.  
 $T_o$  es la carga.

Tanto el par motor,  $T_i$ , como la carga,  $T_o$ , pueden ser dependientes del ángulo que define la posición y de la velocidad angular.

$$\Sigma M = 0 = T_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) - T_o(\theta_o, \dot{\theta}_o) - I \cdot \ddot{\theta}$$

Si se supone que el eje es rígido ( $\theta_i = \theta_o = \theta$ ) la ecuación anterior se convierte en.

$$I \cdot \ddot{\theta} = T_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) - T_o(\theta_o, \dot{\theta}_o)$$

y conocidos  $T_i$  y  $T_o$  se puede determinar  $\theta$ .

Se resuelve a continuación un caso sencillo que ilustra el funcionamiento del volante de inercia. En la figura 7.2 se recoge el perfil de  $T_i$ ,  $T_o$ ,  $\omega$  en función de  $\theta$ . Este caso se puede estudiar a tramos:

|                                |                      |                               |   |
|--------------------------------|----------------------|-------------------------------|---|
| $0 < \theta < \theta_1$        | $T_i = T_o = 0$      | $I \cdot \ddot{\theta} = 0$   | velocidad constante $\omega_1$ .                                      |
| $\theta_1 < \theta < \theta_2$ | $T_i = \text{cste.}$ | $I \cdot \ddot{\theta} = T_i$ | velocidad inicial $\omega_1$ , movimiento uniformemente acelerado.    |
| $\theta_2 < \theta < \theta_3$ | $T_i = T_o = 0$      | $I \cdot \ddot{\theta} = 0$   | velocidad constante $\omega_2$ .                                      |
| $\theta_3 < \theta < \theta_4$ | $T_o = \text{cste.}$ | $I \cdot \ddot{\theta} = T_o$ | velocidad inicial $\omega_2$ , movimiento uniformemente desacelerado. |
| $\theta_4 < \theta < 2\pi$     | $T_i = T_o = 0$      | $I \cdot \ddot{\theta} = 0$   | velocidad constante $\omega_1$ .                                      |

(en este caso particular la velocidad angular inicial y final son las mismas porque hemos supuesto que la energía entregada en una vuelta,  $T_i \cdot (\theta_2 - \theta_1)$ , y la que absorbe la carga,  $T_o \cdot (\theta_4 - \theta_3)$ , son iguales).

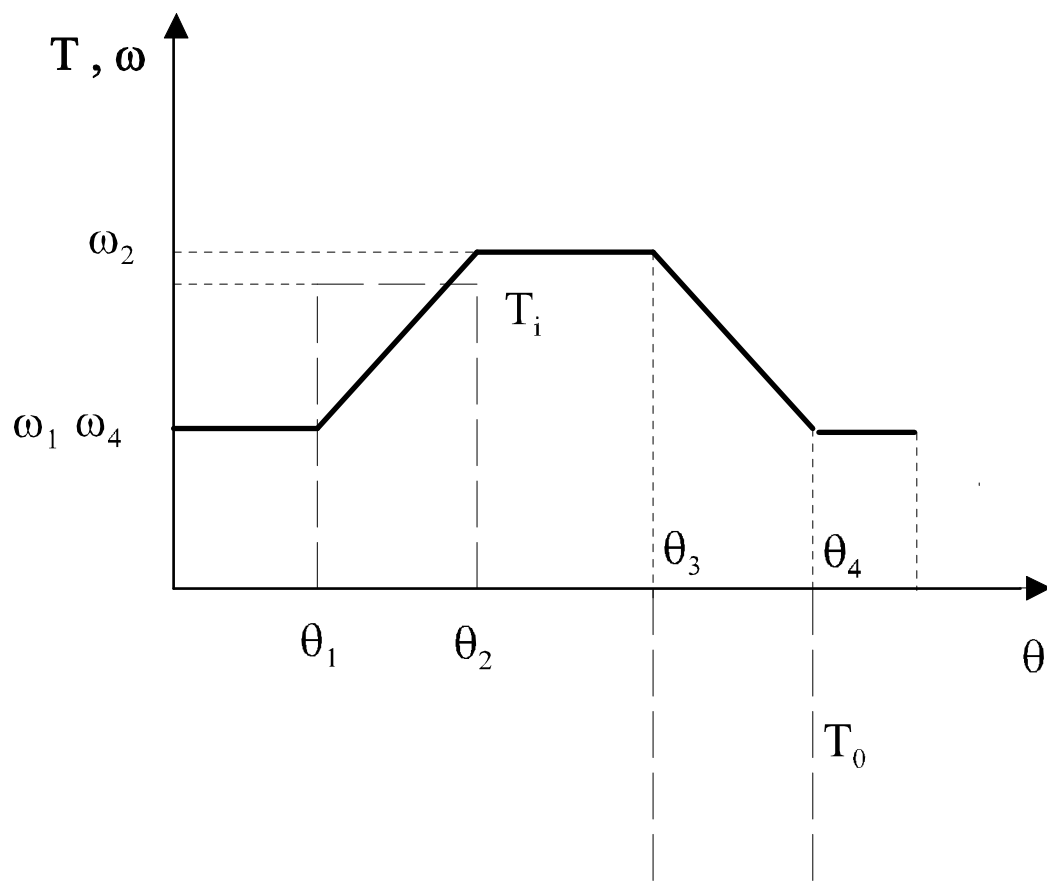


Figura 7.2 Perfiles de  $T_i$ ,  $T_o$ ,  $\omega$  en función de  $\theta$

### 7.3 Cálculo de un volante de inercia.

En la mayoría de los casos las funciones  $T=f(\theta)$  son mucho más complicadas y hay que recurrir a métodos aproximados. Recuérdese:

$$\text{regla trapezoidal} \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx = \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} \cdot h$$

$$\text{regla Simpson} \quad \int_{x_1}^{x_3} f(x).dx = \left( f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3) \right) \frac{h}{3}$$

En algunos casos la carga es constante,  $T_0 = \text{constante}$ , y el par motor es oscilante y se conoce la ley con la que varía en una vuelta (p.ej. un motor de explosión). Si queremos mantener una velocidad constante se debe cumplir:

$$T_0 \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} T_i \cdot d\theta$$

o lo que viene a ser lo mismo, el par motor medio,  $(T_i)_m$  debe ser igual a  $T_0$  (con la hipótesis de velocidad constante). Puede entonces hallarse la aceleración angular en función del momento de inercia del volante,  $I$ , en cualquier punto  $\theta_a$ :

$$\left( \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)_{\theta_a} = \frac{1}{I} \cdot (T(\theta_a) - (T_i)_m)$$

Integrando la ecuación se puede obtener la variación de velocidad entre dos puntos cualesquiera, p. ejemplo  $\theta_a$  y  $\theta_b$ :

$$\dot{\theta}_b^2 - \dot{\theta}_a^2 = \int_{\theta_a}^{\theta_b} (T_i - (T_i)_m) \cdot d\theta \cdot \frac{2}{I}$$

Para definir el volante de inercia es de gran utilidad esta última ecuación puesto que si conocemos la curva  $T_i(\theta)$  sabemos que la máxima fluctuación de velocidad se producirá entre los valores del ángulo que dan el máximo valor del área de esa curva.

En el caso de la figura 7.3 se ha representado la curva de par de un motor de 4 tiempos, luego el ciclo es  $4\pi$ .

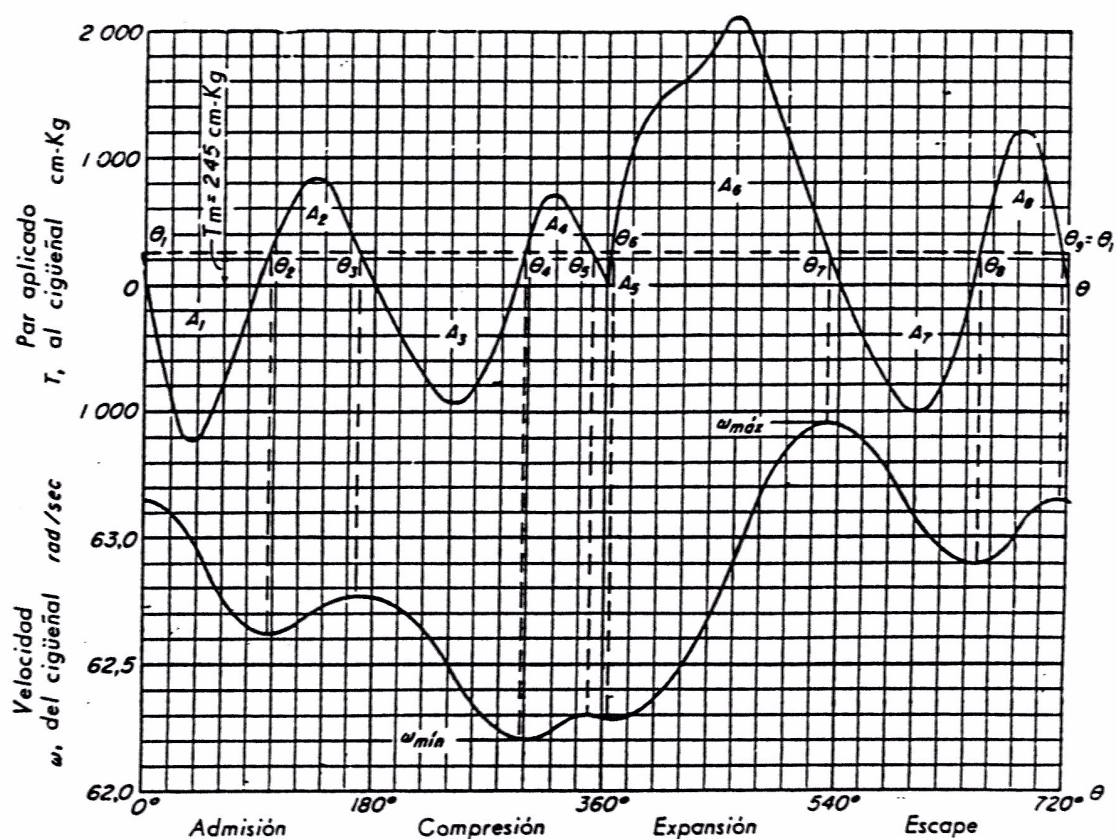


Figura 7.3 Curva de Par de un motor de combustión interna de un sólo cilindro.

## ***TORNILLOS Y UNIONES ATORNILLADAS***

## INDICE

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>8.</b> | <b>TORNILLOS Y UNIONES ATORNILLADAS .....</b>              | <b>119</b> |
| 8.1       | INTRODUCCIÓN .....   | 119        |
| 8.2       | MECÁNICA DE LOS TORNILLOS DE FUERZA O POTENCIA. ....       | 121        |
| 8.3       | ESFUERZOS EN LA ROSCA. ....                                | 124        |
| 8.4       | TORNILLOS Y PERNOS. ....                                   | 126        |
| 8.4.1     | <i>Tensión en juntas atornilladas.....</i>                 | <i>126</i> |
| 8.4.2     | <i>Juntas con empaquetadura.....</i>                       | <i>128</i> |
| 8.5       | PRECARGA DE PERNOS: CARGA ESTÁTICA Y CARGA DE FATIGA. .... | 129        |
| 8.5.1     | <i>Carga estática.....</i>                                 | <i>129</i> |
| 8.5.2     | <i>Carga de fatiga.....</i>                                | <i>129</i> |
| 8.6       | HUSILLOS A BOLAS .....                                     | 131        |
| 8.6.1     | <i>Introducción. ....</i>                                  | <i>131</i> |
| 8.6.2     | <i>Tipos de recirculación de bolas.....</i>                | <i>132</i> |
| 8.6.3     | <i>Factores limitantes en la velocidad.....</i>            | <i>134</i> |
| 8.6.4     | <i>Tipos de acoplamiento.....</i>                          | <i>134</i> |



## 8. TORNILLOS Y UNIONES ATORNILLADAS

### 8.1 Introducción

Se suele utilizar la siguiente terminología para las roscas de tornillos:

- $p$ , paso: distancia entre dos hilos adyacentes
- $l$ , avance: distancia que avanza una tuerca cuando se le da una vuelta. Hay roscas dobles y triples, con las cuales se avanza dos o tres veces el paso respectivamente.

En la figura 8.1 se indica la nomenclatura de roscas. En las figuras 8.2 y 8.3 se representan esquemáticamente tres tipos de roscas: Métrica ISO, Rosca cuadrada, Rosca Acme.

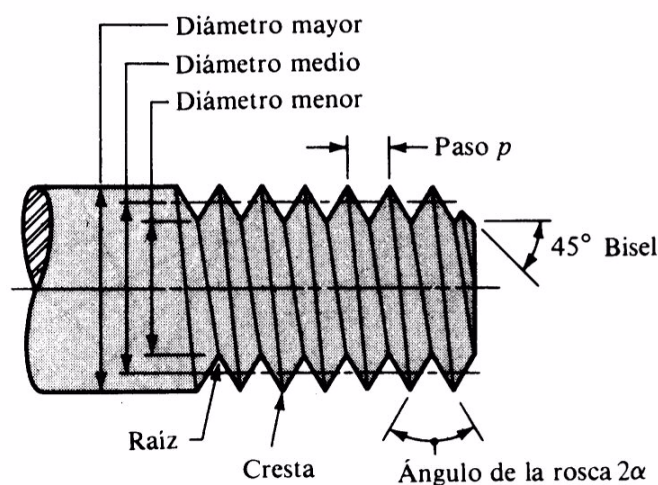


Figura 8.1. Nomenclatura para rosca de tornillo.

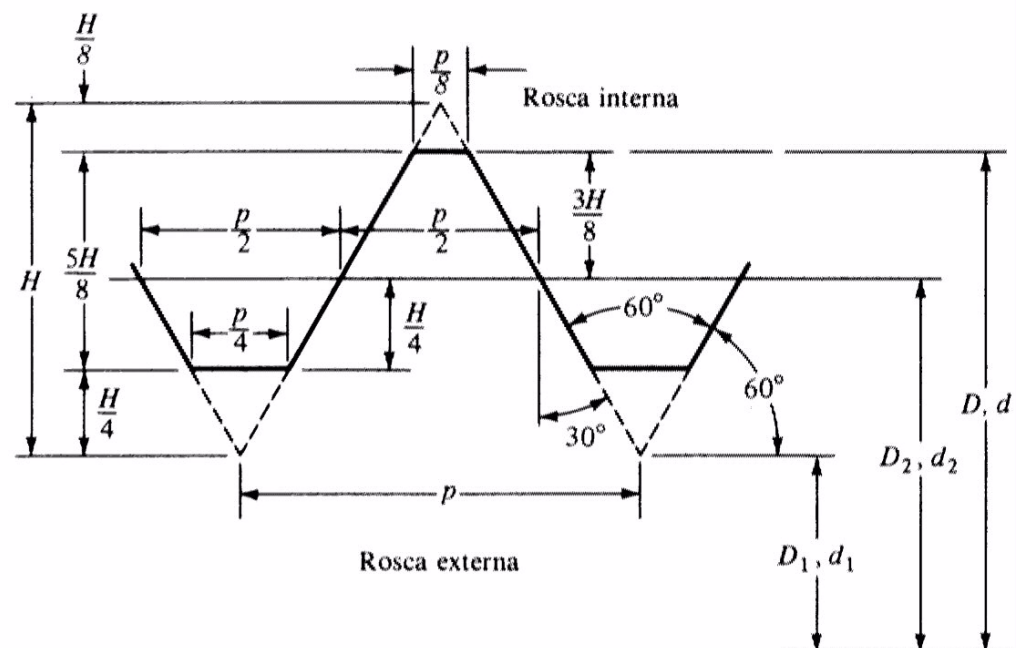


Figura 8.2. Perfil básico de roscas métricas internas y externas.  
 $p$ , paso de rosca.  $H=0.5 \cdot (3)^{1/2} p$

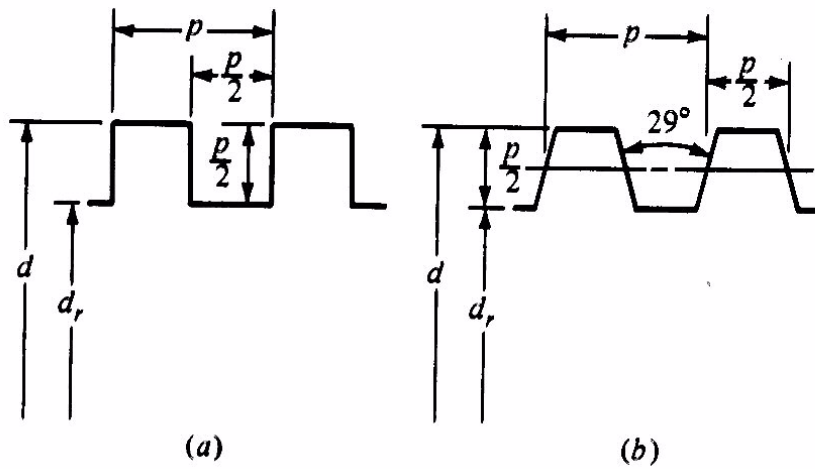


Figura 8.3. Rosca cuadrada y ACME

Para especificar roscas métricas se expresa diámetro y paso en milímetros  
M12 x 1.75 = rosca con diámetro nominal 12mm. y paso 1.75 mm.

Las roscas de perfil cuadrado y Acme se utilizan para la transmisión de potencia; suelen hacerse modificaciones según las necesidades.

## 8.2 Mecánica de los tornillos de fuerza o potencia.

Este tipo de tornillos se utilizan para transformar un movimiento angular en lineal, transmitiendo fuerza (prensas, gatos, husillos de avance de tornos, etc...).

Sea el tornillo de potencia de la figura 8.4, en la que.

- $d_m$  = diámetro medio.
- $p$  = paso.
- $\lambda$  = ángulo de hélice, o de avance.

se quiere calcular la relación entre el par  $T$  necesario para bajar y subir la carga y la fuerza  $F$ .

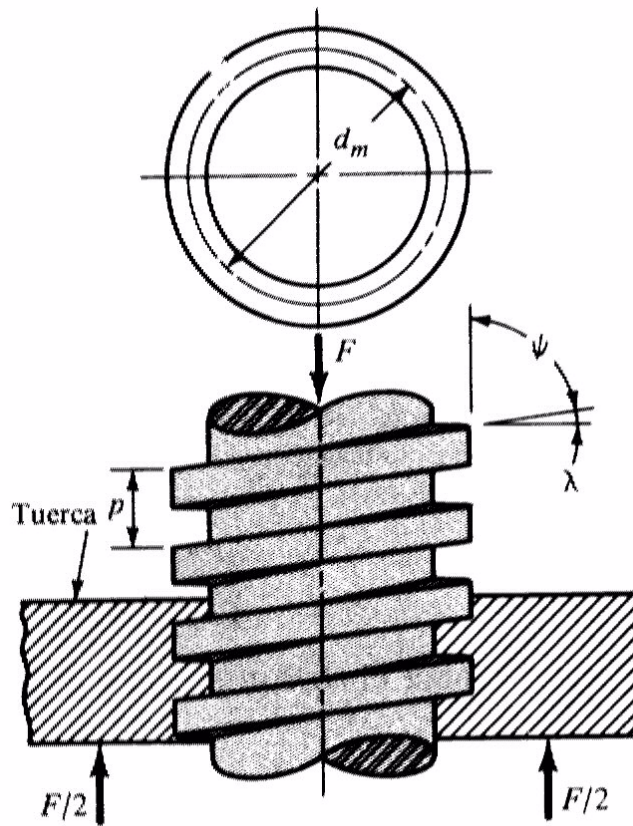


Figura 8.4 Esquema de un tornillo de potencia.

El filete de la rosca del tornillo se desarrolla sobre un plano una longitud equivalente a una vuelta. Se hace un análisis de las fuerzas actuantes para subir la carga figura 8.5 a) y para bajarla figura 8.5 b).

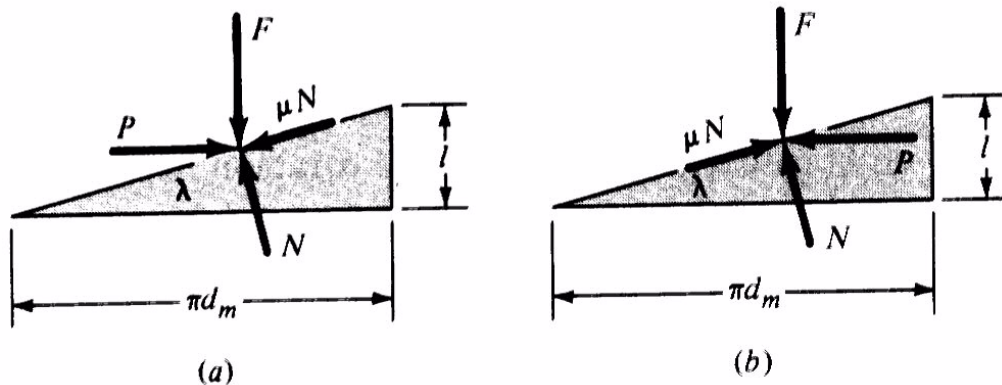


Figura 8.5 Desarrollo de una vuelta del tornillo de potencia de la figura 8.4

Planteando el equilibrio,  $\Sigma F_x=0$  y  $\Sigma F_y=0$ :

caso a)

$$P = \frac{F(\sin \lambda + \mu \cos \lambda)}{\cos \lambda - \mu \sin \lambda}$$

caso b)

$$P = \frac{F(\mu \cos \lambda - \sin \lambda)}{\cos \lambda + \mu \sin \lambda}$$

Sustituyendo en las dos ecuaciones anteriores:

$$\tan \lambda = \frac{l}{\pi d_m}$$

$$T = P \cdot \frac{d_m}{2}$$

se hallan las expresiones que ligan la carga,  $F$ , y el para a realizar,  $T$ , según se trate de subir o bajar:

caso a)

$$T = \frac{F \cdot d_m}{2} \left( \frac{l + \pi \mu d_m}{\pi d_m - \mu l} \right)$$

subir la carga

caso b)

$$T = \frac{F d_m}{2} \left( \frac{\pi \mu d_m - l}{\pi d_m + \mu l} \right)$$

bajar la carga

En el caso b) estamos calculando el momento necesario para vencer parte de la fricción para que la carga baje. Se pueden distinguir dos casos diferentes:

si  $\pi \mu d_m > l \Leftrightarrow \mu > \tan \lambda$   $T > 0$  tornillo autoasegurante

si  $\pi \mu d_m < l \Leftrightarrow \mu < \tan \lambda$   $T < 0$  la carga baja sola

Para calcular la eficiencia,  $e$ , de un tornillo comparamos el par,  $T$ , que hay que realizar con el par,  $T_0$ , que habría que realizar si el rozamiento fuera nulo.  $T_0$  puede calcularse a partir del caso a) haciendo  $\mu = 0$ :

$$T_0 = \frac{F \cdot l}{2\pi}$$

$$e = \frac{T_0}{T}$$

Generalmente cuando se carga el tornillo axialmente hay que emplear un collarín (Figura 8.6) y entonces hay que considerar el par,  $T_c$ , necesario para vencer la fricción entre collarín y carga. Se puede aproximar:

$$T_c = \frac{F \mu_c d_c}{2}$$

Las ecuaciones anteriores son para roscas cuadradas. En el caso de roscas Acme la carga normal queda inclinada respecto al eje (Figura 8.6)

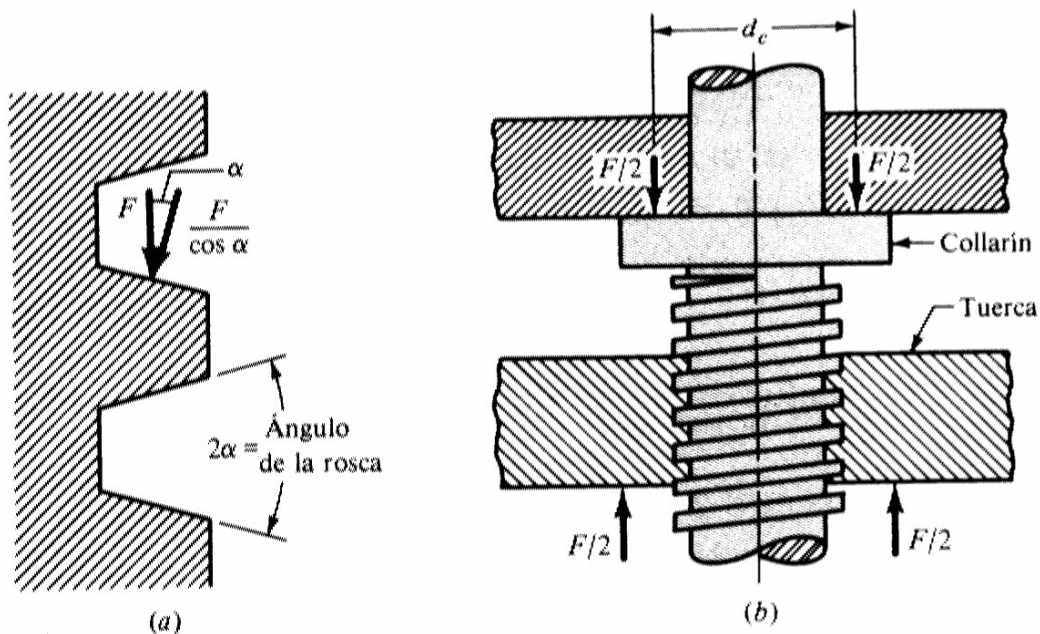


Figura 8.6. Tornillo de potencia con rosca Acme

El par necesario para subir la carga puede aproximarse por la siguiente expresión, en la que el ángulo  $\alpha$  queda definido en la figura 8.6.

$$T = \frac{F \cdot d_m}{2} \left( \frac{l + \pi \mu d_m \sec \alpha}{\pi d_m - \mu l \sec \alpha} \right)$$

De la expresión anterior se deduce que, en el caso de tornillos de fuerza, la rosca Acme no es tan eficiente como la cuadrada, sin embargo suele preferirse porque es más fácil de formar a máquina.

### 8.3 Esfuerzos en la rosca.

En los cálculos que siguen se realiza la hipótesis de que todos los hilos de rosca en contacto con la tuerca comparten la carga; esta hipótesis es sólo parcialmente válida y por ello hay que utilizar en los cálculos coeficientes de seguridad amplios.

Con las limitaciones de la hipótesis realizada, se pueden deducir las siguientes expresiones:

#### Presión contacto.

$$\sigma_B = \frac{F}{\pi d_m h n}$$

n: nº de hilos en contacto

#### Tensión debida a la flexión.

- Se supone la carga F uniformemente distribuida en la rosca a lo largo de todo el diámetro

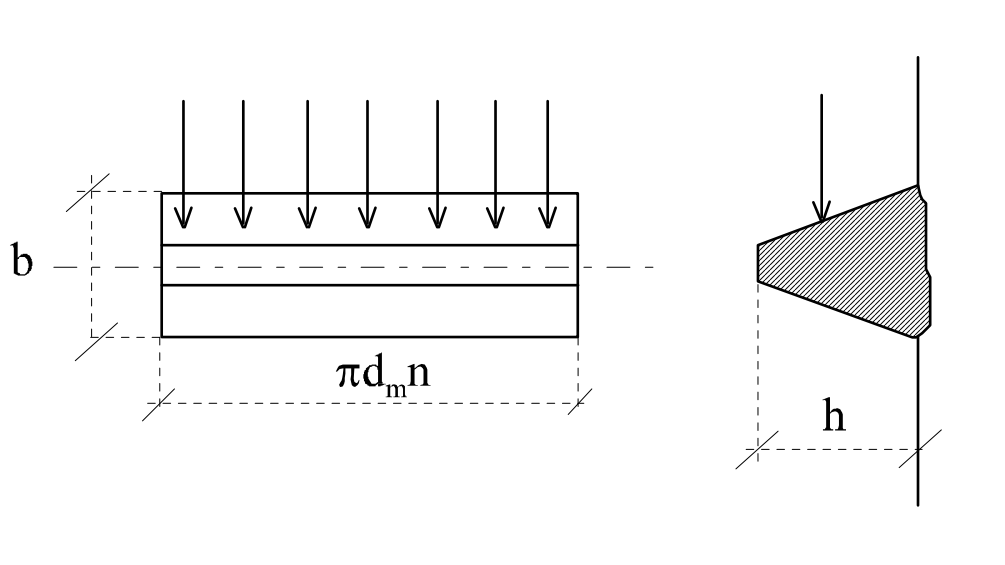


Figura 8.7 Esfuerzos sobre un hilo de rosca.

$$\text{momento máximo } M = \frac{F \cdot h}{2}$$

$$\text{tensión máxima } \sigma_b = \frac{3 \cdot F h}{\pi d_m n b^2}$$

#### Tensión cortante

- Para deducir estas expresiones recuerdese que en el caso de una sección rectangular A, la tensión cortante máxima es:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{F}{A}$$

- En nuestro caso habrá que distinguir entre tornillo y tuerca:

$$\tau = \frac{3 \cdot F}{2 \pi d_r n b} \quad (\text{tornillo})$$

$$\tau = \frac{3 \cdot F}{2 \pi d_o n b} \quad (\text{tuerca})$$

donde  $d_r$  es el diámetro interior y  $d_o$  es el mayor.

En algunos casos puede ser necesario considerar las propias tensiones en el tornillo debido a compresión/tracción, con combinación de cortante debido al efecto del par de torsión T.

En el caso de tener una longitud de tornillo superior a 8 veces el diámetro es necesario considerar el pandeo.

Cuando se necesita un rendimiento muy alto hay que utilizar husillos a bolas. (los propios fabricantes en los catálogos ofrecen criterios de selección).



#### 8.4 Tornillos y pernos.

Si un elemento está diseñado para quedar instalado en un agujero roscado se denomina tornillo. Se aprieta aplicando par a la cabeza.

Si está diseñado para instalarse con tuerca se denomina perno, y se aprietan con par de torsión a la tuerca.

Un espárrago es un perno con rosca en los dos extremos.

##### 8.4.1 Tensión en juntas atornilladas.

El análisis de la tensión en juntas atornilladas se hará a partir de la figura 8.8 4.1, además se definen las siguientes variables:

- $F_i$  = precarga inicial
- $k_p$  = rigidez del perno
- $k_m$  = rigidez de las piezas sujetadas
- $P$  = carga que se aplica

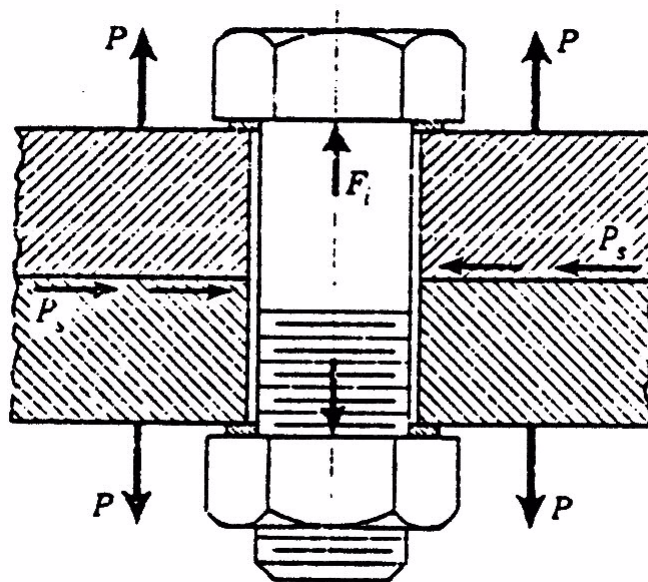


Figura 8.8 Junta atornillada

Se supone que el perno tiene una precarga inicial y se aplica una carga  $P$  (tal como se esquematiza en la Figura 8.8). Esta carga  $P$  se reparte entre el perno y las piezas unidas:  $P_p$  y  $P_m$  respectivamente. El reparto depende de la relación entre las rigideces de ambos elementos (siempre que se mantenga el contacto). Efectivamente deben cumplirse las siguientes ecuaciones:

$$P = P_p + P_m = k_p \Delta \delta_p + k_m \Delta \delta_m$$

y

$$\Delta \delta_p = \Delta \delta_m$$

por tanto,



$$\frac{P_p}{k_p} = \frac{P_m}{k_m}$$

$$\Rightarrow P_p = \frac{k_p P}{k_p + k_m}$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{k_m P}{k_p + k_m}$$

De las dos últimas ecuaciones se puede deducir:

$$\text{carga resultante sobre el perno} = F_p = P_p + F_i = \frac{k_p P}{k_p + k_m} + F_i$$

$$\text{carga en los elementos de la junta} = F_m = P_m - F_i = \frac{k_m P}{k_p + k_m} - F_i$$

La figura 8.9 esquematiza gráficamente cómo se reparte la carga  $P$  en un perno ya precargado, obsérvese que el perno es menos rígido que las piezas que sujeta.

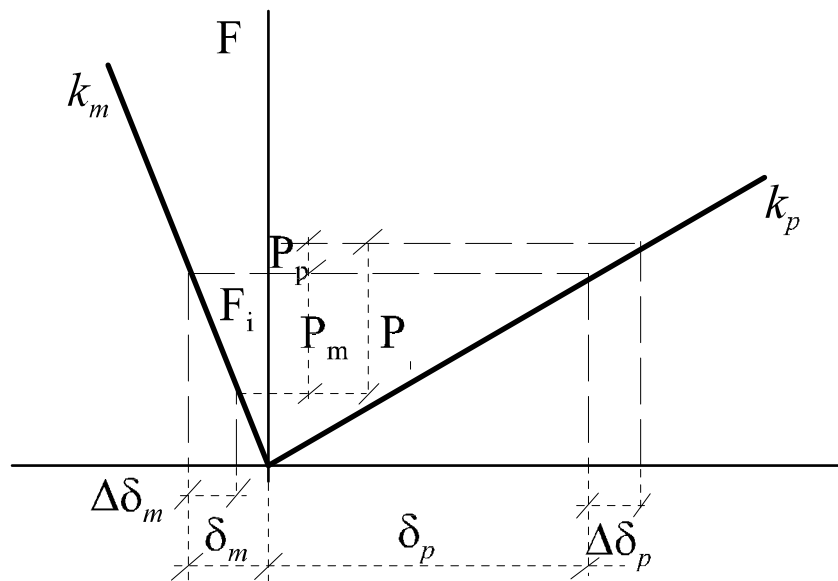


Figura 8.9. Esquema del reparto de  $P$  entre perno y piezas.

Es importante resaltar que las ecuaciones deducidas hasta ahora para el reparto de la carga entre perno y piezas (con precarga) son válidas en tanto que se mantenga algo de la compresión inicial de las piezas. Si la fuerza  $P$  es suficientemente grande para eliminarla, el perno soportaría toda la carga.

Del estudio realizado se deduce que es importante precargar los pernos:

- desde el punto de vista de fatiga (fluctuación menor de la carga).
- para mejorar el efecto de aseguramiento.

Para conocer la precarga a aplicar en un perno se mide el par de torsión de apriete (llave torsiométrica).

$$T = \frac{F_i d_m}{2} \left( \frac{1 + \pi \mu d_m \sec \alpha}{\pi d_m - \mu l \sec \alpha} \right) + \frac{F_i \mu_c d_c}{2}$$

#### 8.4.2 Juntas con empaquetadura.

En algunos casos puede haber más de dos miembros abarcados por el perno/tuerca, actuarían como resortes en serie con una rigidez resultante, k:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

En las juntas con empaquetadura la disposición de la junta condiciona el cálculo de la rigidez  $k_m$  (Figura 8.10)

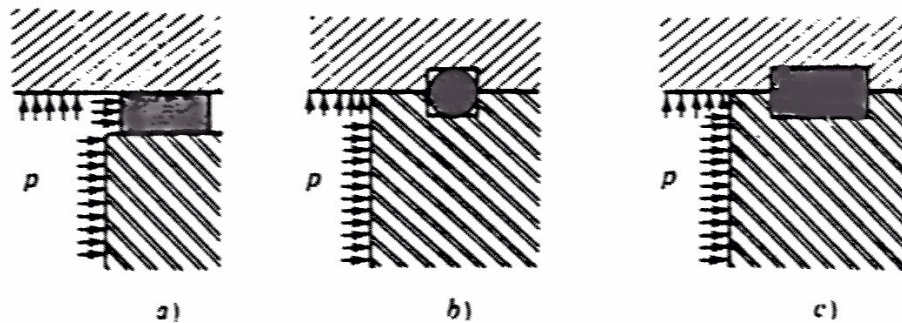


Figura 8.10. Algunos tipos de empaquetaduras utilizados para evitar fugas en juntas.

- a) empaque no colocado en ranura.. b) anillo en "O" en el que el sellado se realiza por la presión p. c) empaque en ranuras en el que el sellado se efectúa por compresión.

En la mayoría de los casos los valores de E de estas juntas son muy pequeños en comparación con los de los metales: esto significa que se pueden suponer rigideces  $\infty$  de las partes del metal y sólo se utiliza la del empaque para  $k_m$ .

## 8.5 Precarga de pernos: carga estática y carga de fatiga.

### 8.5.1 Carga estática.

Anteriormente se halló la carga a la que está sometido un perno precargado con  $F_i$  y con una carga externa actuando,  $P$ :

$$F_p = C \cdot P + F_i$$

$$F_m = (1 - C) \cdot P - F_i$$

donde

$$C = \frac{k_p}{k_m + k_p}$$

La condición para la separación de la junta es  $F_m = 0$  (desaparece la compresión en las piezas unidas y el perno soporta toda la carga). Luego la precarga,  $F_i$ , debe ser mayor que  $(1-C)P$ . Pero además no debe producir fluencia en el material:

$$n \cdot (1 - C)P < F_i < A_t S_y$$

siendo,

- $A_t$ , área trabajo.
- $S_y$ , límite fluencia.
- $n$ , factor seguridad.

Esto es para cargas estáticas, a fatiga podemos encontrar otras restricciones.

### 8.5.2 Carga de fatiga.

Para este análisis es necesario determinar la carga media y alternante, empleando la notación anterior, de la ecuación **Error! Reference source not found.**, conociendo la variación de  $P$  se pueden deducir. Suponiendo por ejemplo que  $P$  varía entre 0 y  $P$ :

$$(F_p)_{\max} = \frac{k_p P}{k_p + k_m} + F_i$$

$$(F_p)_{\min} = F_i$$

De las dos expresiones anteriores se puede deducir la componente alternante y media de la carga, suponiendo que el área efectiva del perno es  $A_t$ :

$$\sigma_a = \frac{(F_p)_{\max} - (F_p)_{\min}}{2 A_t}$$

$$\sigma_m = \frac{(F_p)_{\max} + (F_p)_{\min}}{2A_t}$$

A partir de las ecuaciones anteriores y utilizando el criterio de Goodman modificado:

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = 1$$

se puede determinar la fuerza  $F_i$  limitada por resistencia a fatiga.

## 8.6 Husillos A Bolas

### 8.6.1 Introducción.

Los husillos a bolas (*ball screw* en inglés) se encargan de convertir un movimiento de rotación en otro lineal (operación normal) y viceversa (operación back-drive). También pueden ser utilizados como reductores de velocidad, convirtiendo un desplazamiento lineal en otro menor, como alternativa a motores lineales o cilindros hidráulicos o neumáticos. Un par pequeño es convertido en una gran fuerza de empuje con mayor eficiencia y precisión que la conseguida con un tornillo de potencia. El husillo consta básicamente del eje o husillo propiamente dicho, tuerca, bolas y un sistema de recirculación para éstas últimas. Las bolas giran entre el eje y la tuerca para reducir el rozamiento y elevar el rendimiento de la transferencia de movimiento. Al llegar al final de la carrera vuelven al punto de partida gracias a diversos sistemas de recirculación.

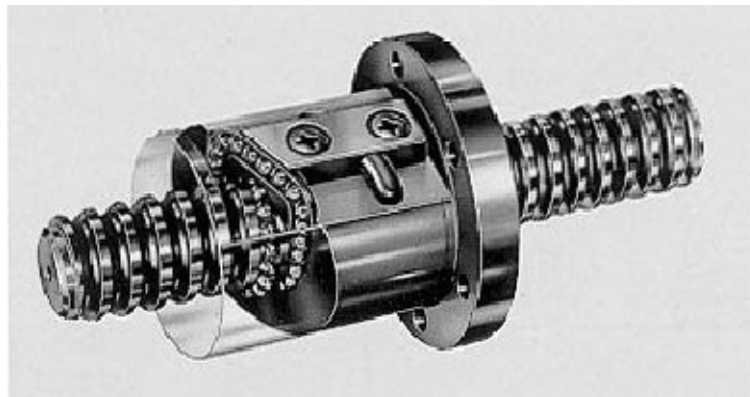


Figura 8.11. Estructura típica de un husillo a bolas.

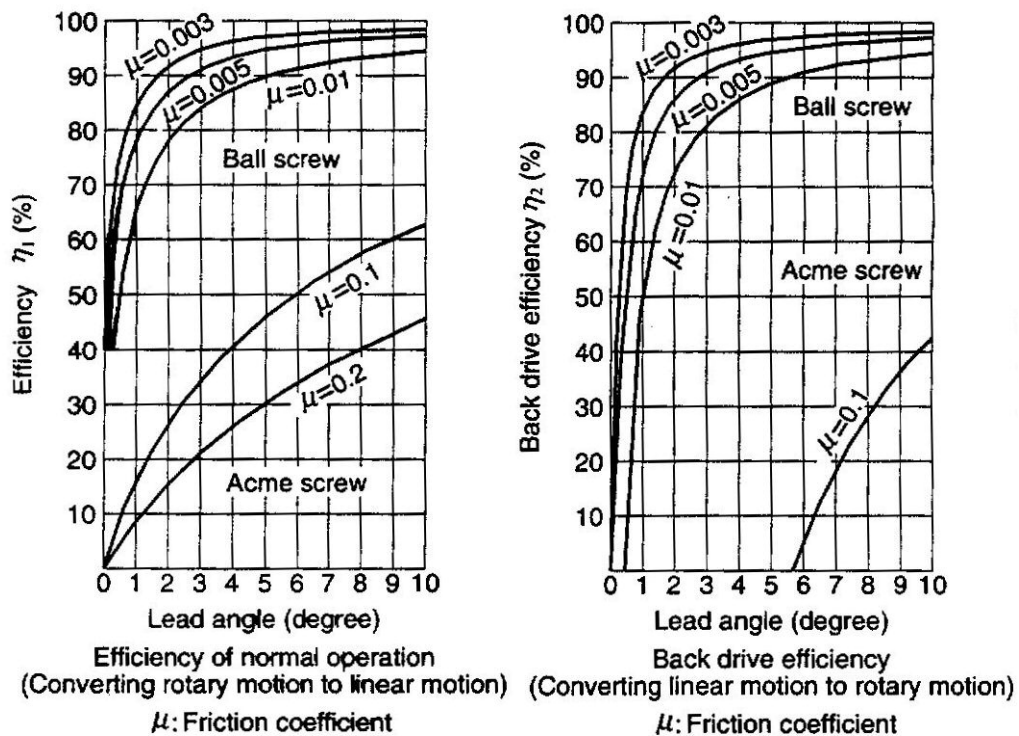
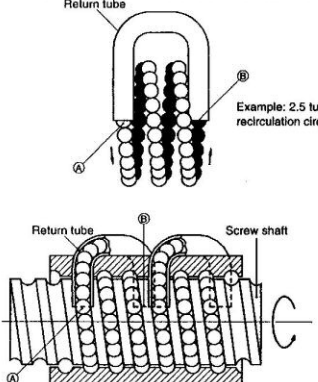


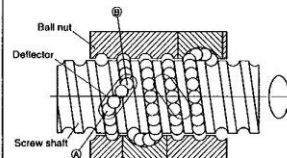
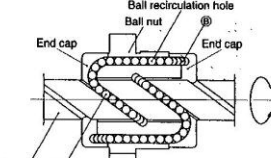
Figura 8.12. Husillo (ball.screw) vs. Tornillo de potencia (Acme screw)

## 8.6.2 Tipos de recirculación de bolas

Por tubo exterior:

| Recirculation method     | Ball return tube type  |
|--------------------------|--|
| Structure                |  <p>Number of turns of balls <math>i_t</math>: Number of turns between (A) to (B)<br/> Number of circuit <math>i_c</math>: Number of the tube<br/> Effective turns of balls <math>i_e = i_c \times i_t</math><br/> In the above Figure, <math>i_t = 2.5</math>; <math>i_c = 2</math>. Therefore <math>i_e = 5</math></p> |
| Characteristics          | Suitable for mass production which cuts costs  |
| Number of turns of balls | Several types  |
| Circuit (number of rows) | Several types  |
| Nut outside diameter     | Large  |
| Output                   | High   |

Por deflectores y End-Cap:

| Deflector type  | End cap type   |
|---|--|
|  <p>Number of turns of balls <math>i_t</math>: 1(one) for deflector type, the number of turns is between (A) to (B).<br/> Number of circuit <math>i_c</math>: number of deflector<br/> Effective turns <math>i_e = i_c \times i_t</math></p> |  <p>Number of turns of balls <math>i_t</math>: Number of turns of balls is (A) to (B)<br/> Number of circuit <math>i_c</math>: Number of start <math>i_s</math>, which is the number of independent threads of the screw<br/> Effective turns <math>i_e = i_s \times i_t = i_s \times i_t</math></p> |
| Compact nut outside diameter  | For small lead   |
| Only one turn   | For screws with high helix lead and multiple start threads   |
| Several types   | Several types  |
| Small   | Several types  |
| Low   | Medium size  |
|   | Somewhat suitable  |



### Recirculación de las bolas

Una característica importante de un husillo a bolas eficiente es el sistema de recirculación de las bolas en el interior de la tuerca. El sistema de transferencia interna se emplea a causa de su robusta construcción, de la ventaja de permitir un diámetro más reducido de la tuerca, un movimiento más suave, menos bolas por circuito y, por lo tanto, menos rozamiento, y de la ausencia de piezas sujetas a un prematuro desgaste.

### Forma de la pista de rodadura

Se emplea la forma ojival (arco gótico) de la pista de rodadura, con objeto de reducir el juego axial libre en el caso de una tuerca sencilla, mientras que no afecta la corrección de la pista ni el contacto de las bolas (Fig. 2).

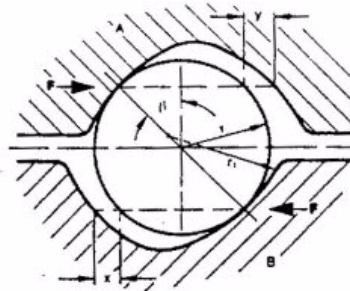


Fig. 2

- A Tuerca
- B Husillo
- r Radio de la bola
- $r_1$  Radio de la pista
- F Carga
- B Ángulo de contacto (45°)
- x, y Juego libre axial

### Precarga

Con objeto de obtener un husillo a bolas completamente libre de juego axial o de aumentar la rigidez axial, el conjunto de tuercas está provisto de un dispositivo de precarga situado entre las tuercas y el eje (Fig. 3).

En el conjunto de doble tuerca, el método de obtener la precarga emplea un anillo con doble dentado diferencial, situado entre ambas tuercas. Gracias a ello se obtiene una regulación muy fina, casi sin escalones y la posibilidad de reajuste a cualquier precarga deseada (Fig. 4).

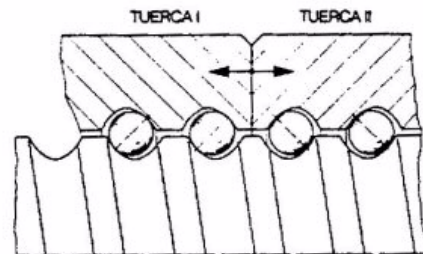


Fig. 3

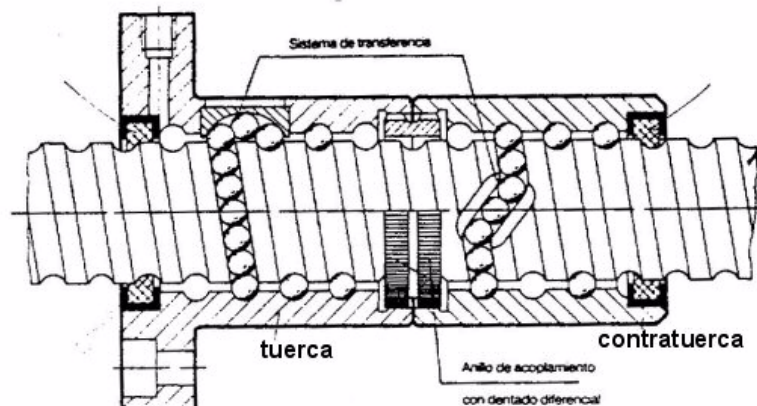


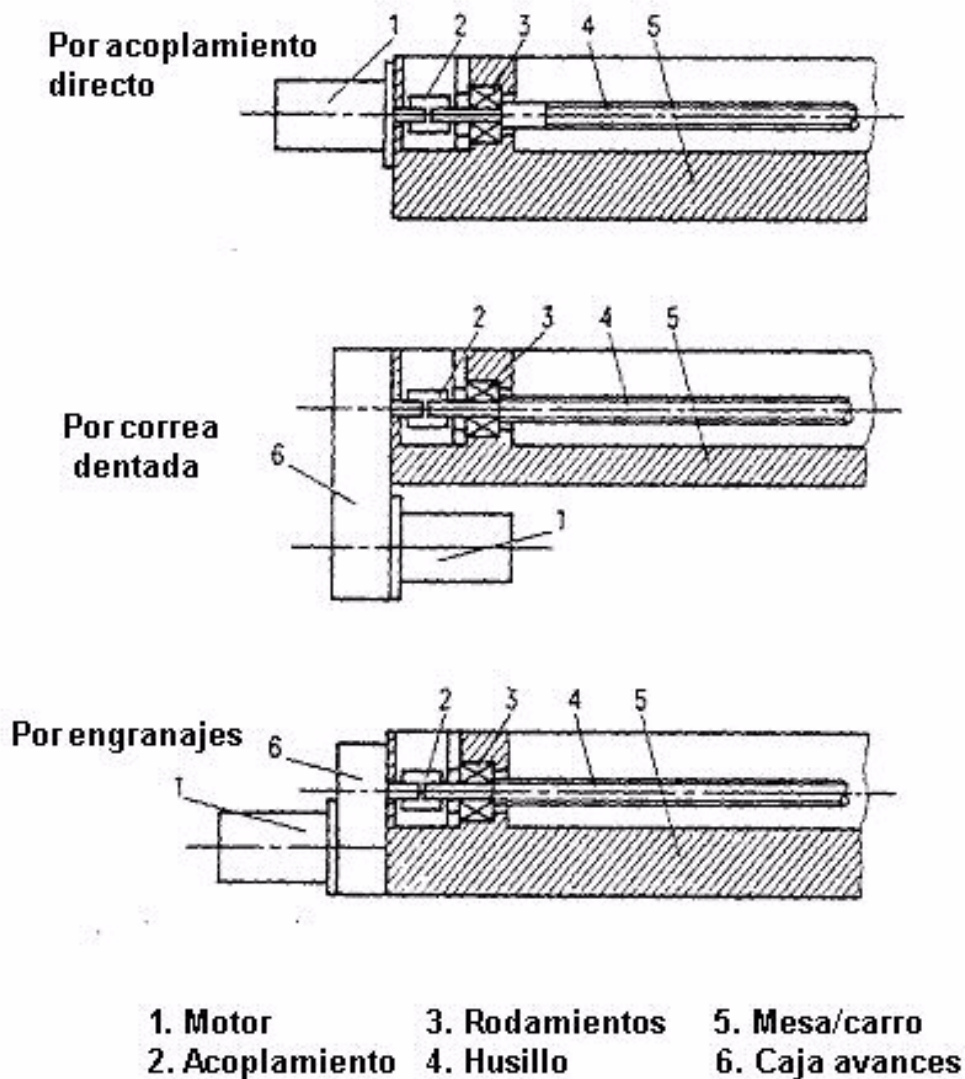
Fig. 4

### 8.6.3 Factores limitantes en la velocidad

La velocidad de rotación del husillo viene limitada por:

- Velocidad de rotación máxima admisible de las bolas.
- Velocidad límite de rotación del eje.
- Ruido y vibraciones.
- Temperatura y deformación térmica creadas.
- Cargas causadas por la velocidad y aceleraciones.

### 8.6.4 Tipos de acoplamiento





## ***ENGRANAJES RECTOS***

## ÍNDICE

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| <b>9. ENGRANAJES RECTOS.....</b>                          | <b>ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.</b> |
| 9.1 INTRODUCCIÓN.....                                     | <b>ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.</b> |
| 9.1.1 Acción conjugada.....                               | <i>Error! Bookmark not defined.</i> |
| 9.1.2 Línea de acción.....                                | <i>Error! Bookmark not defined.</i> |
| 9.1.3 Relación de contacto:.....                          | <i>Error! Bookmark not defined.</i> |
| 9.1.4 Interferencia.....                                  | <i>Error! Bookmark not defined.</i> |
| 9.2 ANÁLISIS DE FUERZAS.....                              | <b>ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.</b> |
| 9.3 ESFUERZOS EN LOS DIENTES.....                         | 150                                 |
| 9.3.1 Cálculo estático.....                               | 150                                 |
| 9.3.2 Efectos dinámicos.....                              | 151                                 |
| 9.3.3 Estimación del tamaño del engrane.....              | 152                                 |
| 9.4 RESISTENCIA A LA FATIGA.....                          | 153                                 |
| 9.4.1 Factor de superficie, $k_a$ .....                   | 153                                 |
| 9.4.2 Factor de tamaño $k_b$ .....                        | 153                                 |
| 9.4.3 Factor de confiabilidad, $k_c$ .....                | 154                                 |
| 9.4.4 Factor de temperatura, $k_d$ .....                  | 154                                 |
| 9.4.5 Concentración del esfuerzo, $k_e$ .....             | 154                                 |
| 9.4.6 Efectos divesos, $k_f$ .....                        | 154                                 |
| 9.5 DURABILIDAD DE LA SUPERFICIE. FATIGA SUPERFICIAL..... | 156                                 |
| 9.5.1 Tensiones de contacto.....                          | 156                                 |
| 9.5.2 Resistencia a la fatiga en la superficie.....       | 156                                 |

## 9. ENGRANAJES RECTOS

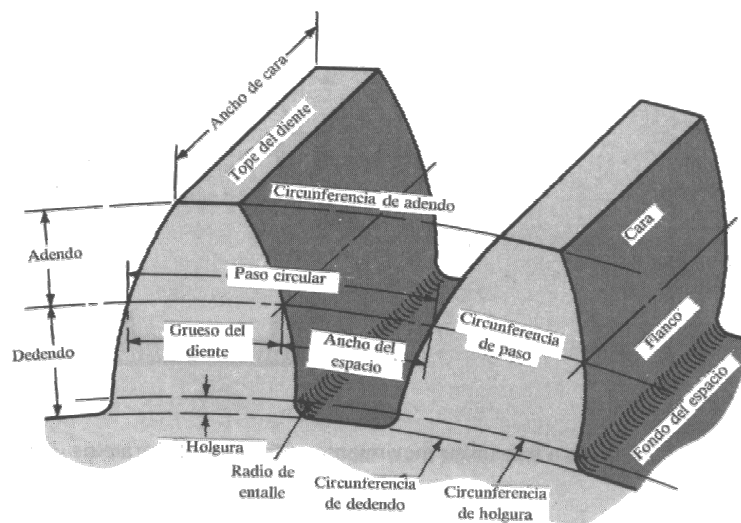
### 9.1 INTRODUCCIÓN.

Son elementos esenciales en la mayoría de las máquinas, son de uso frecuente y extenso. El estudio de engranajes suele abordar:

- 1) análisis cinemático.
- 2) análisis de las fuerzas.
- 3) diseño de engranes (dimensiones).
- 4) consideración desgaste.

Los engranajes rectos se utilizan para transmitir movimientos de rotación entre ejes paralelos. Los dientes son paralelos al eje de rotación. En la Figura 8.1 se representan las características principales de un engranaje recto:

- $p$ , paso circular (medido en la circunferencia de paso en mm entre 2 dientes).
- $m$ , módulo  $m = d/Z$
- $Z$ , número de dientes
- $a$ , adendo
- $t$ , dedendo.



**Figura 8.1. Nomenclatura de los dientes de engrane**

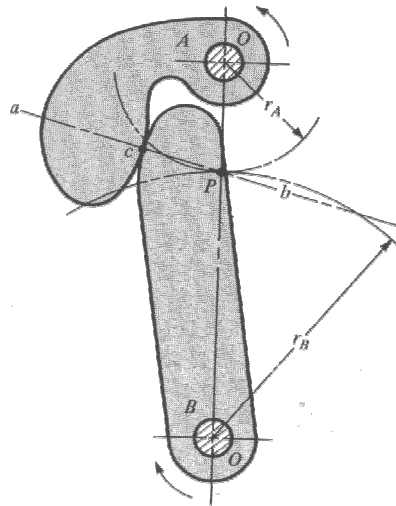
Se definen a continuación algunos puntos importantes para entender el funcionamiento de los engranajes.

#### 9.1.1 Acción conjugada.

Los engranajes son de acción conjugada cuando los perfiles de los dientes se diseñan para que se produzca una relación constante de velocidades angulares durante su funcionamiento de contacto. Normalmente se usan perfiles de evolvente.

### 9.1.2 Línea de acción.

Cuando una superficie empuja a otra, el punto de contacto está donde las dos superficies son tangentes entre sí y en cualquier instante las fuerzas están dirigidas a lo largo de la normal común.



**Figura 8.2. Levas con perfiles en contacto**

A partir de la Figura 8.2 conviene recordar que:

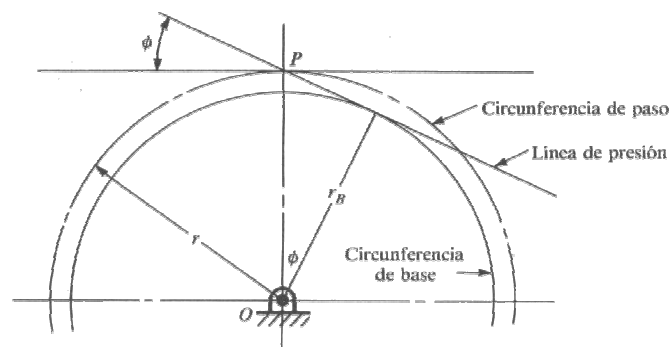
- ab es la línea de acción
- la relación entre las velocidades angulares de las levas es inversamente proporcional a los radios a P.
- las circunferencias de paso son las de centro en O y pasan por P (punto de paso).
- para transmitir relación constante de velocidades, P debe permanecer constante.

En el caso de perfiles de evolvente se puede demostrar que todos los puntos de contacto están sobre ab y que todas las normales a los perfiles en el punto de contacto coinciden con ab. Compruébese en la Figura 8.3.

$$V = r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \quad (20.1)$$

donde

- $r_{1,2}$  radio de paso
- $\omega_{1,2}$  velocidad angular

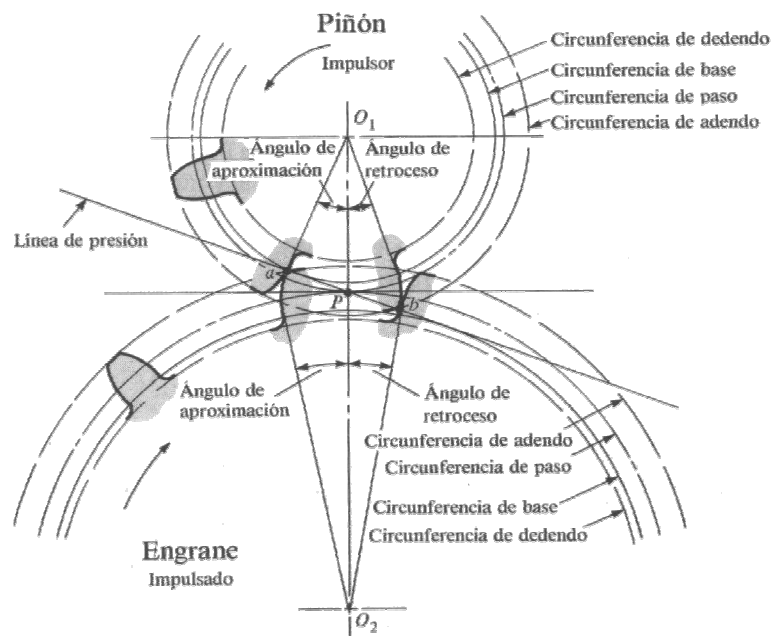


**Figura 8.3. Ángulo de presión, circunferencia de base y de paso.**

Se llama ángulo de presión al que forma la línea de acción con la tangente a la circunferencia de paso,  $\phi$  ( $20^\circ$  ó  $25^\circ$  son los ángulos normalizados). Llamando  $r$  al radio de paso y  $p$  al paso circular, se obtienen las siguientes expresiones para el paso de base y el radio de base:

$$\begin{aligned} r_b &= r \cos \phi \\ p_b &= p \cos \phi \end{aligned} \quad (20.2)$$

La Figura 8.4 permite explicar dónde y cómo se produce el contacto entre engrane y piñón.



**Figura 8.4. Engrane y piñón. Contacto**

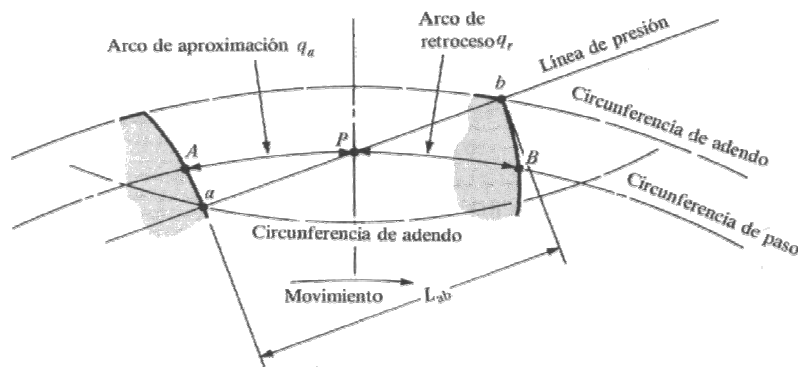
El contacto inicial tendrá lugar cuando el flanco del diente impulsor quede en contacto con la punta del impulsado (punto **a**, donde la línea *ab* cruza la circunferencia de adendo del engranaje).

El punto de contacto final sucede cuando la circunferencia de adendo del impulsor corta a la línea de presión (punto **b**).

Si se aumenta la distancia entre centros de un par de engranes (respecto de la distancia que corresponde a las circunferencias de paso de diseño) se originan dos nuevas circunferencias de paso de operación. Este cambio no influye en las circunferencias base, pero se incrementa el ángulo de presión y se reduce la longitud de la línea de acción.

### 9.1.3 Relación de contacto:

La relación de contacto,  $m_c$ , es un número que indica el promedio de dientes en contacto (Figura 8.5)



**Figura 8.5. Esquema para la definición de la relación de contacto**

Llamando arco de acción  $q_t = q_r + q_a$  al arco *AB*, cuando  $q_t = p$  (paso circular) un diente comienza el contacto en "a" cuando el otro lo está terminando en "b", en este caso  $m_c = 1$ . En un caso más general:

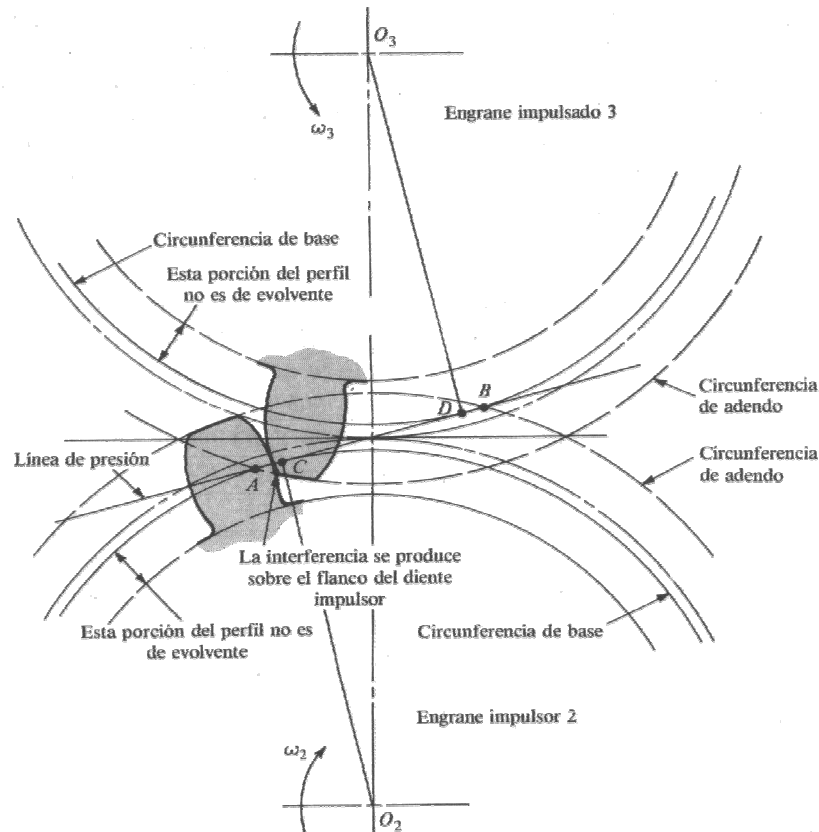
$$m_c = \frac{q_t}{p} \quad (20.3)$$

No deben diseñarse engranes con  $m_c < 1,2$ . La longitud de la línea *ab* puede servir para calcular  $m_c$ :

$$m_c = \frac{L_{ab}}{p \cos \phi} \quad (p = \text{paso circular}) \quad (20.4)$$

#### 9.1.4 Interferencia.

La interferencia se produce cuando hay contacto de porciones de perfiles de diente no conjugadas.



**Figura 8.6. Esquema para explicar el fenómeno de interferencia**

En la Figura 8.6 se aprecia como los puntos de tangencia entre las circunferencias de base y la línea de acción -C y D- están entre los puntos A y B (inicial y final del contacto) luego se produce interferencia.

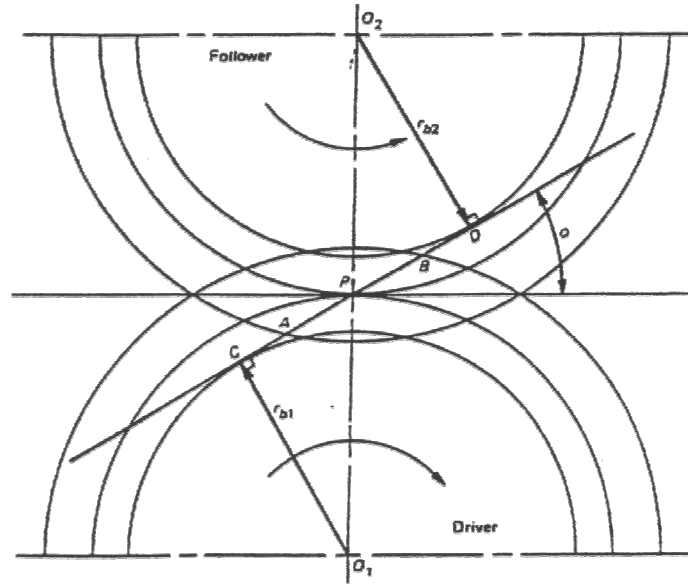
Para que no haya interferencia el contacto debe empezar y acabar -como mucho- en C y D. La interferencia produce debilitamiento.

Con la ayuda de la Figura 8.7 se definen a continuación una serie de ecuaciones que definen el contacto. Los subíndices en los radios hacen referencia a:

- $r_{1,2}$  radio de paso del piñón (impulsor) o rueda (impulsado) respectivamente.
- $r_b$ , radio base.
- $r_a$ , radio circunferencia de adendo.

$$AB = \sqrt{(r_2 + a_2)^2 - r_2^2 \cos^2 \phi} - r_2 \sin \phi + \sqrt{(r_1 + a_1)^2 - r_1^2 \cos^2 \phi} - r_1 \sin \phi \quad (20.5)$$

$$m_c = \frac{AB}{p \cos \phi} \quad (20.6)$$



**Figura 8.7. Longitud y línea de contacto**

El contacto empieza cuando el flanco del conductor toca la cara del conducido -A- y finaliza cuando la cara del conductor toca el flanco del conducido -B-. Se producirá interferencia si el punto A (o B) está en C (o D) o mas allá, es decir si:

$$r_a^2 = r^2 \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi \quad (20.7)$$

llamando c a la distancia entre centros,  $CD = c \sin \phi$



## 9.2 ANÁLISIS DE FUERZAS

La dirección de la fuerza transmitida es según la línea de acción que es tangente a las circunferencias base.

En la Figura 8.8 se consideran:

- las fuerzas sobre el diente,  $F^d$ .
- las fuerzas sobre el eje,  $F^e$ .
- el par transmitido,  $T$ .

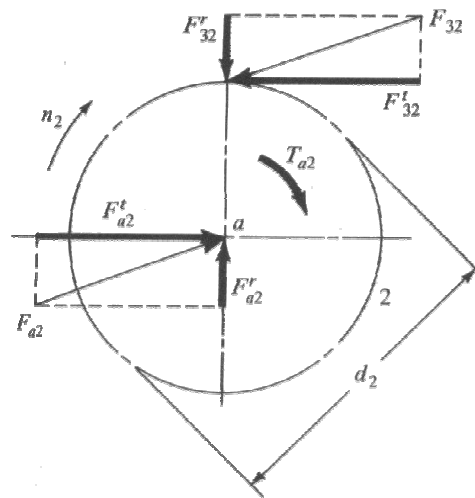


Figura 8.8. La fuerza transmitida tiene la dirección de la línea de contacto.

$$P = T \cdot \omega \quad (20.8)$$

$$T = F \cdot r_b \quad (20.9)$$

Si  $P$  y  $\omega$  son constantes, también lo será  $T$  y por tanto también  $F$ . Lo que si varía es el punto de contacto, y por tanto el efecto de esta fuerza sobre el diente será diferente según esté situada por ejemplo en el extremo de la cara o en el flanco.

### 9.3 ESFUERZOS EN LOS DIENTES

La capacidad de transmisión de un engranaje viene limitada por:

- el calor generado.
- el fallo de los dientes por ruptura.
- el fallo por fatiga en la superficie de los dientes.
- el ruido resultante de velocidades altas o cargas fuertes.

A continuación se estudiarán los fallos de engranajes: por esfuerzo estático a flexión, por fatiga a flexión, por fatiga superficial.

#### 9.3.1 Cálculo estático.

Si  $b$  es el ancho del diente (Fig. 3.1), la tensión en el punto "a" (sin tener en cuenta la compresión) es:

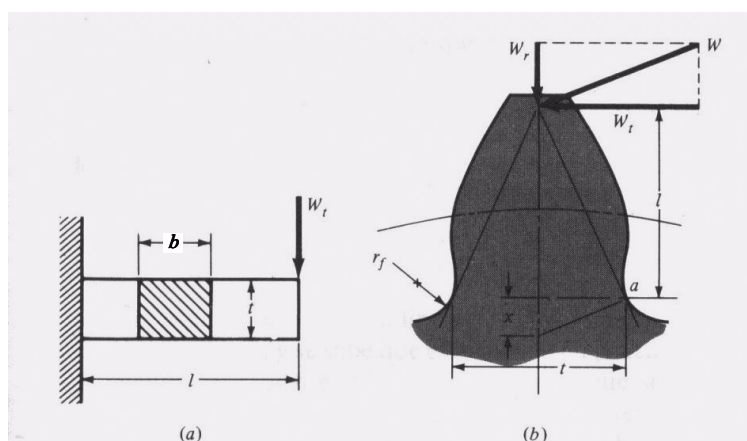


Figura 8.10. Diente sometido a flexión.

$$\sigma = \frac{6 \cdot W_t \cdot \ell}{b t^2} = \frac{W_t}{b} \cdot \frac{6 \ell}{t^2} \quad (20.10)$$

Nótese que manteniendo  $F_t(W_t)$  y  $b$  constantes, las curvas de isotensión debido a la flexión son parábolas. La sección más crítica será aquella en la que una de las parábolas sea tangente al flanco del diente.

El factor  $\frac{6 \ell}{t^2}$  en la ecuación (20.10) es una relación puramente geométrica y se puede sustituir en función del módulo y de un factor conocido por el factor de Lewis que depende exclusivamente de la norma de dentado y del número de dientes. La siguiente ecuación es conocida como la ecuación de Lewis:

$$\sigma = \frac{F_t}{b} \frac{6 \ell}{t^2} = \frac{F_t}{b \cdot m} \frac{1}{Y} \rightarrow Y, \text{ factor de Lewis} \quad (20.11)$$

La expresión anterior no considera el efecto de la fuerza  $F_r$ , además supone que el diente no comparte carga y que la fuerza máxima se ejerce en el extremo del diente. Si el diseño es correcto normalmente la relación de contacto será mayor que

1 y entonces cuando en un diente la carga se aplique en el extremo de éste habrá otros que estén en contacto.

De lo dicho anteriormente se deriva que, probablemente, el punto más desfavorable será alguno intermedio donde sólo un diente esté en contacto.

Otro aspecto que no tiene en cuenta la ecuación de Lewis es la concentración de tensiones en el pie del diente. Para la determinación del factor de concentración se utilizan los datos geométricos y constructivos del diente ( $K_f$ ).

La AGMA (American Gear Manufacturers Association) estableció una ecuación de Lewis modificada en la que se contempla el factor  $K_f$ , y el hecho de que la carga (debido a la relación de contacto) cuando sólo un diente está en contacto no se aplica en la punta del diente. Se introduce un nuevo factor, J, factor AGMA:

$$\sigma = \frac{F_t}{bmJ} \quad (20.12)$$

J (lo mismo que Y) se determina por tablas a partir de adendo, dedendo,  $r_f$  (radio de acuerdo) y z (número de dientes).

### 9.3.2 Efectos dinámicos.

Los fenómenos dinámicos intervienen puesto que se está transmitiendo una carga y hay movimiento. Se vio, por experimentación, que el parámetro que podía ayudar a tener en cuenta los efectos dinámicos era la velocidad en la circunferencia de paso, v ( $v = \omega \cdot r$ , donde  $\omega$  = velocidad rotación y  $r$  = radio de paso).

Se utiliza un factor  $K_v$  que afecta a la ecuación (20.12).  $K_v = 1$  cuando los efectos dinámicos no se tienen en cuenta y las siguientes relaciones proporcionan  $K_v$  en función de v:

- engranajes rectos, dientes acabados por sinfín o por alisado:

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{v}} \quad (20.13)$$

**v en pies/minuto**

(1 pie = 12 pulgadas; 1 pulgada = 25,4 mm)

- engranajes con dientes de alta precisión alisados o esmerilados. Carga dinámica apreciable:

$$K_v = \sqrt{\frac{78}{78 + \sqrt{v}}} \quad (20.14)$$

**v en pies/minuto**

Resumiendo se llegaría a dos expresiones para la tensión por flexión.

- ecuación de Lewis para esfuerzo por flexión

$$\sigma = \frac{F_t}{bmY \cdot K_v} \quad (20.15)$$

- ecuación AGMA para esfuerzos por flexión

$$\sigma = \frac{F_t}{b.m.J.K_v} \quad (20.16)$$

### 9.3.3 Estimación del tamaño del engrane.

En este apartado se dan unas orientaciones para obtener unos valores preliminares sobre el tamaño del engranaje, sin consideraciones de durabilidad o confiabilidad.

Se suele elegir una anchura de cara del diente,  $b$ , tal que.

$$3p < b < 5p \quad (p: \text{ paso circular})$$

El tamaño se obtiene por medio de iteraciones, la información es por lo general:

- Potencia,  $P$ .
- velocidad en rpm,  $n$ .
- nº de dientes,  $z$ .

El procedimiento de cálculo consiste en seleccionar un valor de prueba para el módulo y luego realizar los cálculos sucesivos:

$$v = \omega.r = \frac{2\pi n}{60} \cdot \frac{d}{2} \quad (20.17)$$

$$F_t = \frac{P}{\omega.r} \quad (20.18)$$

$$\sigma = \frac{F_t}{b.m.J.K_v} \quad (20.19)$$

La interferencia obliga a que con dimensiones estándar no se elijan engranajes por debajo de 18 dientes cuando el ángulo de presión es  $20^\circ$ , ni por debajo de 12 dientes cuando es  $25^\circ$ .

## 9.4 RESISTENCIA A LA FATIGA.

Los límites de fatiga se obtienen con los métodos de cálculo vistos en "Fatiga". En el caso de los engranajes se utiliza para el cálculo del límite a fatiga,  $S_e$ , la siguiente expresión:

$$S_e = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot S'_e \quad (21.1)$$

donde,

$S'_e$  = límite de fatiga del material.

$k_a$  = factor de superficie.

$k_b$  = factor de tamaño.

$k_c$  = factor de confiabilidad.

$k_d$  = factor de temperatura.

$k_e$  = factor de modificación por concentración de esfuerzo.

$k_f$  = factor de efectos diversos.

### 9.4.1 Factor de superficie, $k_a$

De entre las distintas posibilidades vistas en "fatiga" se usa la curva de "acabado a máquina" aun cuando el flanco pueda estar esmerilado o cepillado, porque el fondo no lo suele estar.

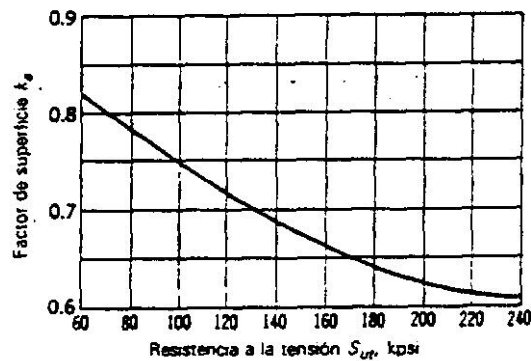


Tabla 4.1 Factores de acabado en superficie  $k_a$  para dientes de engrane cortados, cepillados y esmerilados.

### 9.4.2 Factor de tamaño $k_b$

Este factor tiene en cuenta que  $S'_e$  ha sido calculado para un tamaño  $d$ , de probeta y que el diente tiene otra sección transversal. Utilizando  $P$  (paso diametral= 1/m) en dientes/pulgada si:

- $P > 12$  dientes/pulgada  $k_b = 1$
- $P < 12$  utilizar Tabla 4.2.

| Paso $P$ | Factor $k_b$ | Paso $P$ | Factor $k_b$ |
|----------|--------------|----------|--------------|
| 2        | 0.832        | 6        | 0.925        |
| 2,5      | 0.850        | 7        | 0.939        |
| 3        | 0.865        | 8        | 0.951        |
| 4        | 0.890        | 10       | 0.972        |
| 5        | 0.909        | 12       | 0.990        |

Tabla 4.2 Factores de tamaño para dientes de engrane rectos.

#### 9.4.3 Factor de confiabilidad, $k_c$ .

Utilizando el criterio visto en Fatiga, se obtiene de la Tabla 4.3

| FACTORES DE CONFIABILIDAD |       |       |       |       |       |        |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Confiabilidad $R$         | 0.50  | 0.90  | 0.95  | 0.99  | 0.999 | 0.9999 |
| Factor $k_c$              | 1.000 | 0.897 | 0.868 | 0.814 | 0.753 | 0.702  |

Tabla 4.3 Factores de confiabilidad

#### 9.4.4 Factor de temperatura, $k_d$

De una forma muy aproximada puede utilizarse:

- $k_d=1$   $T \leq 450^\circ\text{C}$
- $k_d=1-5,8 \cdot 10^{-3} \cdot (T-450)$   $450^\circ\text{C} < T < 550^\circ\text{C}$

#### 9.4.5 Concentración del esfuerzo, $k_e$

Este factor ha sido incluido en el coeficiente J de la AGMA y por tanto tómese para engranes,  $k_e = 1$ .

#### 9.4.6 Efectos divesos, $k_f$

Se puede tener en cuenta por ejemplo que algunos engranes giran siempre en el mismo sentido y por tanto la flexión es en un solo sentido:

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma}{2} \quad (21.2)$$

Utilizando el criterio de Goodman esto implicaría (probeta)

$$\sigma = \frac{2S'_e S'_{ut}}{S'_{ut} + S'_e} \quad (21.3)$$

Cuando  $S_{ut} \leq 200 \text{ kpsi}$ ,  $S_{ut} = 2.S'_e$ . Sustituyendo en la ecuación (21.3) la tensión máxima a fatiga en ese caso:

$$\sigma = \frac{4}{3} S'_e \quad (21.4)$$

luego,  $k_f = 1,33$ .

El resto de los valores vienen recogidos en la Tabla 4.4.

| FACTORES DE EFECTOS DIVERSOS PARA FLEXIÓN EN UN SOLO SENTIDO |           |      |      |      |      |
|--|-----------|------|------|------|------|
| Resistencia a la tensión $S_{ut}$ , kpsi                     | Hasta 200 | 250  | 300  | 350  | 400  |
| Factor $k_f$   | 1.33      | 1.43 | 1.50 | 1.56 | 1.60 |

Tabla 4.4 Factores de efectos diversos para flexión en un solo sentido.

$$1 \text{ psi} = 6,895 \text{ kPa}$$

$$200 \text{ kpsi} \cong 140,5 \text{ kg/mm}^2$$

## 9.5 DURABILIDAD DE LA SUPERFICIE. FATIGA SUPERFICIAL

En este apartado se tiene en cuenta la fatiga debida a las tensiones de contacto. Por un lado habrá que determinar las tensiones de contacto que se generan en el engrane,  $\sigma_H$ , y la resistencia a la fatiga superficial del material empleado,  $S_H$ , por otro.

### 9.5.1 Tensiones de contacto.

Hay que recurrir a las expresiones de contacto entre dos cilindros cuyos radios de curvatura son conocidos, y también lo es la carga aplicada. Se particulariza para engranajes:

$$\sigma_H = -C_p \sqrt{\frac{F_t}{C_v \cdot b \cdot d \cdot I}} \quad (22.1)$$

donde,

$C_v = K_v$  (factor dinámico visto anteriormente).

$b$  = ancho del diente.

$d$  = diámetro paso.

$$I = \frac{\cos \phi \sin \phi}{2} \frac{m_G}{m_G + 1} \quad \frac{m_G}{m_G - 1} \text{ para engranes interiores}$$

$$m_G = \frac{d_G}{d_p} \quad (d_G, \text{ diámetro engrane, } d_p, \text{ diámetro piñón})$$

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_G^2}{E_G} \right)}}$$

### 9.5.2 Resistencia a la fatiga en la superficie.

La AGMA recomienda que se use la siguiente expresión para el límite de fatiga:

$$S_H = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} \cdot S_c \quad (22.2)$$

donde (ver Tabla 5.1),

$$S_c = 0,4 H_B - 10 \text{ kpsi}$$

$H_B$  = dureza Brinell de la superficie más suave que está en contacto.

$C_L$  = factor duración de vida.

$C_R$  = factor confiabilidad.

$C_H$  = factor de relación de dureza. = 1 para engranajes rectos

$C_T$  = factor de temperatura = 1 si  $T_F < 120^\circ\text{C}$



| Ciclos de vida | Factor de vida $C_L$ | Confiabilidad $R$ | Factor de conf. $C_R$ |
|----------------|----------------------|-------------------|-----------------------|
| $10^4$         | 1.5                  | Hasta 0.99        | 0.80                  |
| $10^6$         | 1.3                  | 0.99 a 0.999      | 1.00                  |
| $10^8$         | 1.1                  | 0.999 o más       | 1.25 o más            |
| $10^8$ o más   | 1.0                  |                   |                       |

Tabla 5.1 Factores de modificación de vida y confiabilidad.

Conviene tener en cuenta además que la carga  $W_t$  puede no estar perfectamente distribuida en el ancho de la cara (Tabla 5.2), además se puede prever un factor de sobrecarga (Tabla 5.3) y un coeficiente de seguridad, CS:

$$F'_t = CS \cdot K_0 \cdot K_m \cdot F_t \quad (22.3)$$

| Ciclos de vida  | Características de la carga impulsada |                   |                 |
|-----------------|---------------------------------------|-------------------|-----------------|
|                 | Uniforme                              | Choques moderados | Choques fuertes |
| Uniforme        | 1.00                                  | 1.25              | 1.75            |
| Choque ligero   | 1.25                                  | 1.50              | 2.00            |
| Choque moderado | 1.50                                  | 1.75              | 2.25            |

Tabla 5.2 Factor de corrección por sobrecarga

| Características de montaje  | Ancho de cara, pulg |     |     |          |
|---|---------------------|-----|-----|----------|
|   | 0 a 2               | 6   | 9   | 16 o más |
| Exactos, holguras pequeñas en cojinetes, mínima flexión del eje, engranes de precisión. | 1.3                 | 1.4 | 1.5 | 1.8      |
| Menos rígidos, engranes menos exactos, contacto a través de toda la cara.               | 1.6                 | 1.7 | 1.8 | 2.2      |
| Exactitud y ajuste tales que el área de contacto es menor que la de toda la cara        | Mayor que 2.2       |     |     |          |

Tabla 5.3 Factor de distribución de la carga para engranes cilíndricos rectos.