

Ingeniería Energética

Ingeniería Térmica



Teoría

21 capítulos con toda la información necesaria para resolver los problemas sobre ingeniería térmica



Problemas

Problemas resueltos sobre ingeniería térmica, dependientes de cada capítulo. Es necesario comprender la teoría para poder resolverlos



Recursos

Información tanto teórica como experimental, necesaria para la resolución de problemas, bibliografía, índices

[Principal](#) - Ingeniería Térmica

Ingeniería Energética

Teoría de Ingeniería Térmica



Capítulo 1

Principios Básicos de Transferencia de Calor
Conducción,
Conductividad Térmica,
Convección, Radiación



Capítulo 2

Conducción Unidireccional Estacionaria
Introducción, Ecuación Fundamental de Conducción, Cilindros, Aislamiento crítico en Cilindros, Paredes Esféricas sin generación, Conducción Monodimensional con Generación de Energía



Capítulo 3

Conducción Estacionaria en 2 o más Dimensiones
Método Analítico, Método Gráfico, Métodos Numéricos, Método de Relajación, Método Matricial y Método de Iteración



Capítulo 4

Condición de Contorno de Convección en Sólidos Infinitos
Placa, Cilindro, Esfera, Otros Elementos 2D y 3D, Transitorios con Generación de Calor



Capítulo 5

Condición de Contorno Isotérmica en Sólidos Infinitos
Conducción Transitoria en Placa y en Pared Cilíndrica, Transitorios con Generación de Calor



Capítulo 6

Transitorios en Sólidos Semiinfinitos
Condición de Contorno Isotérmica, Flujos Térmicos Uniformes en la Superficie, Contactos, Pulsos de Energía, Generación de Calor, Variaciones Periódicas de Temperatura en la Superficie, Resistencia Térmica Despreciable, Paredes



Capítulo 7

Conducción en Sólidos Finitos
Transitorios 2D y 3D, Condición de Contorno Isotérmica y de Convección, Transitorios con Generación de Energía



Capítulo 8

Método Gráfico para Transitorios
Problemas Monodimensionales, Choque Térmico con Condición de Contorno Isotérmica, Convección Superficial



Capítulo 9

Superficies Adicionales de Sección Constante
Campo de Aplicación, Perfil Óptimo, Casos Especiales



Capítulo 10

Superficies Adicionales de Sección Variable
Perfil Óptimo de la Aleta Longitudinal de Perfil Triangular, Rendimiento de la Aleta, Coeficiente Global de Transferencia de Calor con Refrigeración por Aire



Capítulo 11

Convección: Capa Límite Térmica e Hidrodinámica
Ecuación Diferencial de la transmisión de Calor en un Medio en Movimiento, Capa Límite Laminar en Flujo sobre Placa Plana, Ecuaciones Integrales del Impulso y de la Energía de la Capa Límite, Capa Límite Turbulenta para Placa Plana, Desprendimiento de la Capa Límite



Capítulo 12

Convección: Flujo en Conductos
Conductos no Circulares, Interior de Tuberías con Régimen Laminar y Flujo de Calor Constante



Capítulo 13

Convección: Analogías y Análisis Dimensional
Transmisión de Calor y Cantidad de Movimiento (Régimen Turbulento), Reynolds, Prandtl, Von Kàrmàn, Colburn, Métodos de Análisis Dimensional



Capítulo 14

Correlaciones para la Convección Natural
Correlaciones Analíticas entre Placas, Tubos, Esferas



Capítulo 15

Correlaciones para la Convección Forzada
Placas, Interior y Exterior de Tuberías, Esferas, Combinación de Convección Natural y Forzada, Flujos Cruzados, Superficies Giratorias



Capítulo 16

Condensación y Vaporización
Condensación en Película Laminar sobre Placas y Tubos Verticales, inclinados y Horizontales, Condensación en Régimen Turbulento, en el Interior de Tubos Horizontales, en forma de Gotas, Transferencia de Calor por Evaporación de Líquidos en Reposo, Evaporación de Líquidos en Flujo Forzado en el Interior de Tubos



Capítulo 17

Intercambiadores de Calor (LMTD)
Tipos Básicos de Intercambiador, Coeficiente de Transferencia Térmica Global, Transmisión de Calor entre Fluidos en Movimiento a Temperaturas Variables a Través de una Pared



Capítulo 18

Intercambiadores de Calor (Eficiencia)
Eficacia de los Intercambiadores, Eficiencia Térmica y NTU para algunas configuraciones en Flujo Cruzado, Intercambiadores Compactos



Capítulo 19

Radiación Térmica
Física de la Radiación, Transmisión de Calor por Radiación, Factor de Forma, Álgebra de Factores de Forma



Capítulo 20

Intercambios Radiativos
Intercambios entre Superficies Negras, Grises y Refractarias, Técnicas Matriciales



Capítulo 21

Aplicaciones de la Radiación Térmica
Radiación a Través de un Medio Transmisor y Absorbente, Propiedades Radiativas de los Gases, Radiación de Nubes de Partículas, Cálculos en Hornos y Hogares

[Principal](#) - [Ingeniería Térmica](#) - Teoría

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
ELECTRICA Y ENERGETICA**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

**INGENIERIA TERMICA
Y DE FLUIDOS**

Pedro Fernández Díez

I.- PRINCIPIOS BÁSICOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

I.1.- INTRODUCCIÓN

La Ingeniería Térmica trata de los procesos de transferencia de calor y la metodología para calcular la velocidad con que éstos se producen para así diseñar los componentes y sistemas en los que tiene lugar una transferencia de calor.

A título de ejemplo, determinados casos de diseño requieren disminuir las cantidades de calor transferido mediante un aislante térmico; otros implican procesos de transferencia de calor de un fluido a otro mediante intercambiadores de calor; a veces el problema de diseño es controlar térmicamente un proceso manteniendo las temperaturas de funcionamiento de los componentes sensibles al calor dentro de unos márgenes predeterminados, etc.

De todo esto se desprende que la transferencia de calor abarca una amplia gama de fenómenos físicos que hay que comprender antes de proceder a desarrollar la metodología que conduzca al diseño térmico de los sistemas correspondientes.

Siempre que existe una diferencia de temperatura, la energía se transfiere de la región de mayor temperatura a la de temperatura más baja; de acuerdo con los conceptos termodinámicos la energía que se transfiere como resultado de una diferencia de temperatura, es el calor. Sin embargo, aunque las leyes de la termodinámica tratan de la transferencia de energía, sólo se aplican a sistemas que están en equilibrio; pueden utilizarse para predecir la cantidad de energía requerida para cambiar un sistema de un estado de equilibrio a otro, pero no sirven para predecir la rapidez (tiempo) con que puedan producirse estos cambios. La fenomenología que estudia la transmisión del calor complementa los Principios Primero y Segundo de la Termodinámica clásica, proporcionando unos métodos de análisis que permiten predecir esta velocidad de transferencia térmica.

Para ilustrar los diferentes tipos de información que se pueden obtener desde ambos puntos

de vista, (termodinámico y transferencia de calor) consideraremos, a título de ejemplo, el calentamiento de una barra de acero inmersa en agua caliente. Los principios termodinámicos se pueden utilizar para predecir las temperaturas finales una vez los dos sistemas hayan alcanzado el equilibrio y la cantidad de energía transferida entre los estados de equilibrio inicial y final, pero nada nos dicen respecto a la velocidad de la transferencia térmica, o la temperatura de la barra al cabo de un cierto tiempo, o del tiempo que hay que esperar para obtener una temperatura determinada en una cierta posición de la barra. Por otra parte, un análisis de la transmisión del calor permite predecir la velocidad de la transferencia térmica del agua a la barra y de esta información se puede calcular la temperatura de la barra, así como la temperatura del agua en función del tiempo.

Para proceder a realizar un análisis completo de la transferencia del calor es necesario considerar tres mecanismos diferentes, conducción, convección y radiación.

El diseño y proyecto de los sistemas de intercambio de calor y conversión energética requieren de cierta familiaridad con cada uno de estos mecanismos, así como de sus interacciones; consideraremos, en primer lugar, los principios básicos de la transmisión del calor y algunas aplicaciones simples, que pueden ser de utilidad en capítulos posteriores, en los que serán tratados con detalle cada uno de los mecanismos de esta transferencia térmica.

I.2.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN

La conducción es el único mecanismo de transmisión del calor posible en los medios sólidos opacos; cuando en estos cuerpos existe un gradiente de temperatura, el calor se transmite de la región de mayor temperatura a la de menor temperatura, siendo el calor transmitido por conducción Q_k , proporcional al gradiente de temperatura dT/dx , y a la superficie A , a través de la cual se transfiere, Fig I.1.a, es decir:

$$Q_k = A \frac{dT}{dx}$$

en donde T es la temperatura y x la dirección del flujo de calor.

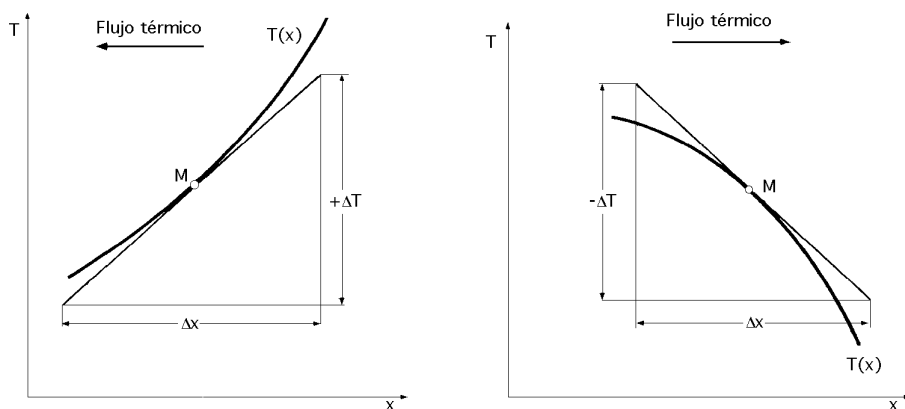


Fig I.1- Convenio de signos para la transmisión del calor por conducción

El flujo real de calor depende de la conductividad térmica k , que es una propiedad física del cuerpo, por lo que la ecuación anterior se puede expresar en la forma:

$$Q_k = - k A \frac{dT}{dx}$$

en la que el signo (-) es consecuencia del Segundo Principio de la Termodinámica, según el cual, el calor debe fluir hacia la zona de temperatura más baja. El gradiente de temperaturas, será negativo si la temperatura disminuye para valores crecientes de x ; si se considera que el calor transferido en la dirección positiva debe ser una magnitud positiva, en el segundo miembro de la ecuación anterior hay que introducir un signo negativo.

Esta ecuación expresa la ley de conducción del calor de Fourier, y se utiliza para definir la conductividad térmica k ; por ejemplo, si la superficie de intercambio térmico se expresa en m^2 , la temperatura en grados Kelvin, la distancia x en metros y la transmisión del calor en W, las unidades de k serán $W/m^\circ K$.

PARED PLANA..- Una aplicación inmediata de la ley de Fourier corresponde al caso de la transmisión del calor a través de una pared plana, Fig I.2. Cuando las superficies de la pared se encuentran a temperaturas diferentes, el calor fluye sólo en dirección perpendicular a las superficies. Si la conductividad térmica es uniforme, la integración de la ecuación anterior proporciona:

$$Q_k = - \frac{k A}{L} (T_2 - T_1) = \frac{k A}{L} (T_1 - T_2)$$

en la que L es el espesor de la pared, T_1 es la temperatura de la superficie de la izquierda $x = 0$, y T_2 es la temperatura de la superficie de la derecha $x = L$.

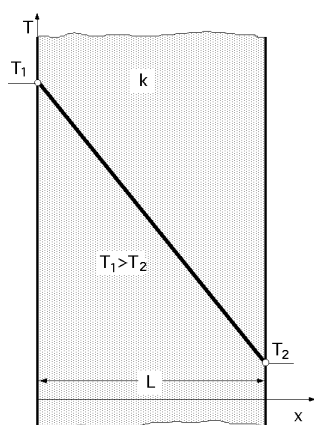


Fig I.2.- Muro plano

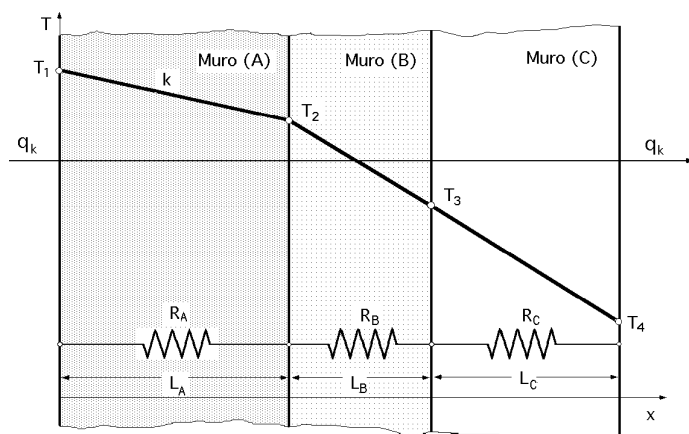


Fig I.3.- Pared compuesta

PAREDES PLANAS EN SERIE..- Si el calor se propaga a través de varias paredes en buen contacto térmico, como por ejemplo, en la construcción de capas múltiples, el análisis del flujo de

calor en estado estacionario a través de todas las secciones tiene que ser el mismo.

Sin embargo, y tal como se indica en la Fig I.3 en un sistema de tres capas, los gradientes de temperatura en éstas son distintos. El calor transmitido se puede expresar para cada sección y como es el mismo para todas las secciones, se puede poner:

$$Q_k = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{L}{kA}\right)_A} = \frac{T_2 - T_3}{\left(\frac{L}{kA}\right)_B} = \frac{T_3 - T_4}{\left(\frac{L}{kA}\right)_C} = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{L}{kA}\right)_A + \left(\frac{L}{kA}\right)_B + \left(\frac{L}{kA}\right)_C}$$

Si se considera un conjunto de n capas en perfecto contacto térmico el flujo de calor es:

$$Q_k = \frac{T_i - T_{i+1}}{\left(\frac{L}{kA}\right)_i} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{L}{kA}\right)_i}$$

en la que T_1 es la temperatura superficial de la capa 1 y T_{n+1} la temperatura superficial de la capa N .

ANALOGÍA ELÉCTRICA DE LA CONDUCCIÓN.- La analogía entre el flujo de calor y la electricidad, permite ampliar el problema de la transmisión del calor por conducción a sistemas más complejos, utilizando conceptos desarrollados en la teoría de circuitos eléctricos. Si la transmisión de calor se considera análoga al flujo de electricidad, la expresión L/kA equivale a una resistencia y la diferencia de temperaturas a una diferencia de potencial, por lo que la ecuación anterior se puede escribir en forma semejante a la ley de Ohm:

$$Q_k = \frac{T}{R_k}, \text{ siendo, } \begin{array}{l} \text{Potencial térmico, } T = T_1 - T_2 \\ \text{Resistencia térmica, } R_k = \frac{L}{kA} \end{array}$$

La inversa de la resistencia térmica se denomina conductividad térmica, k/L , W/m^2K , o conductancia térmica unitaria del flujo de calor por conducción.

PAREDES EN PARALELO.- Las ecuaciones anteriores se pueden utilizar también en la resolución de problemas más complejos, en los que la conducción tiene lugar en paredes dispuestas en paralelo. La Fig I.4 muestra un bloque formado por dos materiales de áreas A_1 y A_2 en paralelo; para su resolución hay que tener en cuenta que para una determinada diferencia de temperaturas a través del bloque, cada capa del conjunto se puede analizar por separado, teniendo presentes las condiciones impuestas para el flujo unidimensional a través de cada una de las dos secciones.

Si la diferencia de temperaturas entre los materiales en contacto es pequeña, el flujo de calor paralelo a las capas dominará sobre cualquier otro flujo normal a éstas, por lo que el problema se puede tratar como unidimensional sin pérdida importante de exactitud.

Como el calor fluye a través de los dos materiales según trayectorias separadas, el flujo total

de calor Q_k será la suma de los dos flujos:

$$Q_k = Q_1 + Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{L}{kA}\right)_1} + \frac{T_1 - T_2}{\left(\frac{L}{kA}\right)_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

en la que el área total de transmisión del calor es la suma de las dos áreas individuales y la inversa de la resistencia total es igual a la suma de las inversas de todas las resistencias individuales.

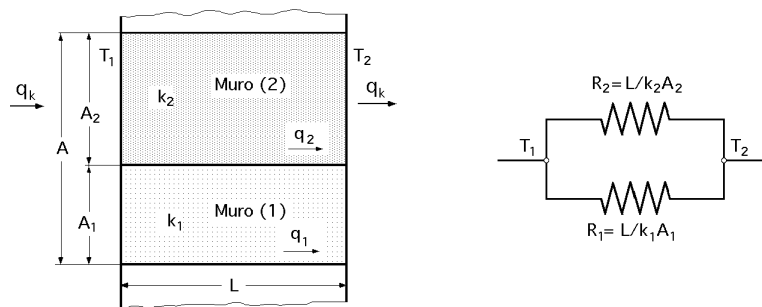


Fig I.4.- Transmisión de calor a través de una pared con dos secciones en paralelo

Una aplicación más compleja del enfoque del circuito térmico es la indicada en la Fig I.5, en la que el calor se transfiere a través de una estructura formada por una resistencia térmica en serie, otra en paralelo y una tercera en serie; para este sistema, el flujo térmico por unidad de superficie es:

$$Q_k = \frac{T_{\text{global}}}{\sum_{i=1}^{i=n} R_i} = \frac{T_{\text{global}}}{R_A + R_2 + R_D} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \\ R_2 = \frac{R_B R_C}{R_B + R_C} \end{array} \right| = \frac{T_{\text{global}}}{R_A + \frac{R_B R_C}{R_B + R_C} + R_D}$$

en la que n es el número de capas en serie, R_i es la resistencia térmica de la capa i , y T_{global} es la diferencia de temperaturas entre las dos superficies exteriores.

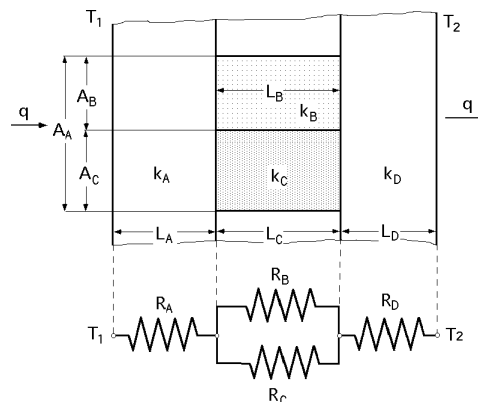


Fig I.5.- Circuito térmico en serie-paralelo-serie

El análisis del circuito precedente supone flujo unidimensional. Si las resistencias R_B y R_C son muy diferentes, los efectos bidimensionales pueden ser importantes.

RESISTENCIA DE CONTACTO.- Cuando superficies a distintas temperaturas se ponen en contacto, aparece una resistencia térmica en la interfase de los sólidos, que se conoce como *resistencia de contacto*, y que se desarrolla cuando los dos materiales no ajustan exactamente, por lo que entre ambos puede quedar atrapada una delgada capa de fluido. Una vista ampliada del contacto entre las dos superficies mostraría que los sólidos se tocan sólo en picos superficiales, mientras que los huecos estarían ocupados por un fluido, o el vacío.

La resistencia de la interfase depende de:

- La rugosidad superficial
- La presión que mantiene en contacto las dos superficies
- Del fluido de la interfase
- De su temperatura

En la interfase, el mecanismo de la transmisión del calor, y su determinación, es complejo; la conducción del calor tiene lugar a través de los puntos de contacto del sólido en forma tridimensional por cuanto el calor se transmite por las áreas de contacto a través del fluido de la interfase por convección, y entre las superficies por radiación.

Si el calor a través de las superficies sólidas en contacto es Q , la diferencia de temperaturas a través del fluido que separa los dos sólidos es T_i y la resistencia de contacto R_i se expresa en función de una conductancia interfacial h_i , W/m^2K , se tiene:

$$Q = h_i A \quad T_i = \frac{T_i}{\frac{1}{h_i A}} = \frac{T_i}{R_i}$$

Cuando las dos superficies están en contacto térmico perfecto, la diferencia de temperaturas a través de la interfase es nula, por lo que su resistencia térmica es cero; un contacto térmico imperfecto tiene lugar cuando existe una diferencia de temperaturas en la interfase.

Tabla I.1.- Conductancias interfaciales de algunos materiales a presiones moderadas

Interface	h_i , W/m^2K
Cerámica-cerámica	500-3000
Cerámica-metal	1500-8500
Grafito metal	3000-6000
Acero inoxidable-acero inoxidable	1700-3700
Aluminio-aluminio	2200-12000
Acero inoxidable-aluminio	3000-4500
Cobre-cobre	10000-25000
Hierro-aluminio	4000-40000

La resistencia por contacto depende de la presión con que se mantiene el contacto, y muestra un descenso notable cuando se alcanza el límite elástico de alguno de los materiales.

En los sólidos mecánicamente unidos no se suele considerar la resistencia de la interfase, a pesar de que siempre está presente. Sin embargo hay que conocer la existencia de la resistencia de la interfase y la diferencia de temperaturas resultante a través de la misma; en superficies rugosas y bajas presiones de unión, la caída de temperatura a través de la interfase puede ser importante, incluso dominante, y hay que tenerla en cuenta.

La problemática de la resistencia de la interfase es compleja y no existe ninguna teoría, o base de datos empíricos, que la describa exactamente para situaciones de interés industrial.

I.3.- CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

La conductividad térmica k es una propiedad de los materiales que, excepto en el caso de los gases a bajas temperaturas, no es posible predecir analíticamente; la información disponible está basada en medidas experimentales. En general, la conductividad térmica de un material varía con la temperatura, pero en muchas situaciones prácticas se puede considerar con un valor medio constante, si el sistema tiene una temperatura media, lo que proporciona resultados bastante satisfactorios.

En la Tabla I.2 se relacionan los valores típicos de la conductividad térmica de algunos metales, sólidos no metálicos, líquidos y gases, que nos dan una idea del orden de magnitud con que se presenta en la práctica, mientras que en la Fig I.6, se presentan dos gráficas de conductividades térmicas, una entre 0 y 450 W/m²K para metales y aleaciones (buenos conductores térmicos), y otra entre 0 y 0,8 W/m²K para algunos gases y líquidos, observándose la gran diferencia existente entre sus coeficientes de conductividad k .

Tabla I.2.- Conductividad térmica de algunos materiales

Material	k (W/m ² K), a 300°K
Cobre	386
Aluminio	204
Vidrio	0,75
Plástico	0,2-0,3
Agua	0,6
Aceite de motores	0,15
Freón (líquido)	0,07
Aire	0,026

El mecanismo de la transmisión de calor por conducción en los materiales conductores está asociado a las vibraciones de la *estructura reticular* y al movimiento de los electrones libres, (metales y aleaciones), al igual que en los conductores eléctricos, por lo que materiales buenos conductores de la electricidad son también, en general, buenos conductores del calor, (cobre, plata, aluminio, etc).

Los buenos aislantes eléctricos, (que requieren de una *estructura porosa* y un gas atrapado en la misma), son también buenos aislantes térmicos, (vidrio, plásticos, etc). En estos materiales, la transferencia de calor puede tener lugar de diversas formas:

a) *Conducción a través de la estructura sólida porosa o fibrosa*

b) *Conducción y/o convección a través del aire atrapado en los espacios vacíos*

c) *Radiación entre porciones de la estructura sólida, lo cual es especialmente importante a temperaturas elevadas o en recintos vacíos*

Se han desarrollado materiales superaislantes para aplicaciones criogénicas, que constan de varias capas de materiales altamente reflectantes separados por espacios vacíos, que minimizan la conducción y la convección, alcanzándose conductividades térmicas del orden de 0,02 W/m°K.

En muchos materiales, el valor de k no es constante, sino que varía con la temperatura y con la composición química de los mismos. Cuando sólo depende de la temperatura, se puede poner el valor de k en la forma:

$$k = k(T) = k_0 (1 + \alpha T)$$

siendo k_0 el valor de la conductividad a la temperatura de referencia, y α es una constante, (coeficiente de dilatación). En tal caso la integración de la ecuación de Fourier proporciona:

$$Q_k = - \int_{T_1}^{T_2} A k_0 (1 + \alpha T) dT = \frac{k_0 A}{L} \left\{ T_1 - T_2 + \frac{\alpha}{2} (T_1^2 - T_2^2) \right\} = \frac{k_m A}{L} (T_1 - T_2)$$

en la que k_m es el valor de k a la temperatura $\frac{T_1 + T_2}{2}$

COEFICIENTES DE CONDUCTIVIDAD TÉRMICA PARA LAS ALEACIONES.- En la Fig I.6.a se muestra el comportamiento con la temperatura de las conductividades térmicas de algunos metales y aleaciones, (cobre, aluminio, acero al carbono, acero inoxidable 18-8).

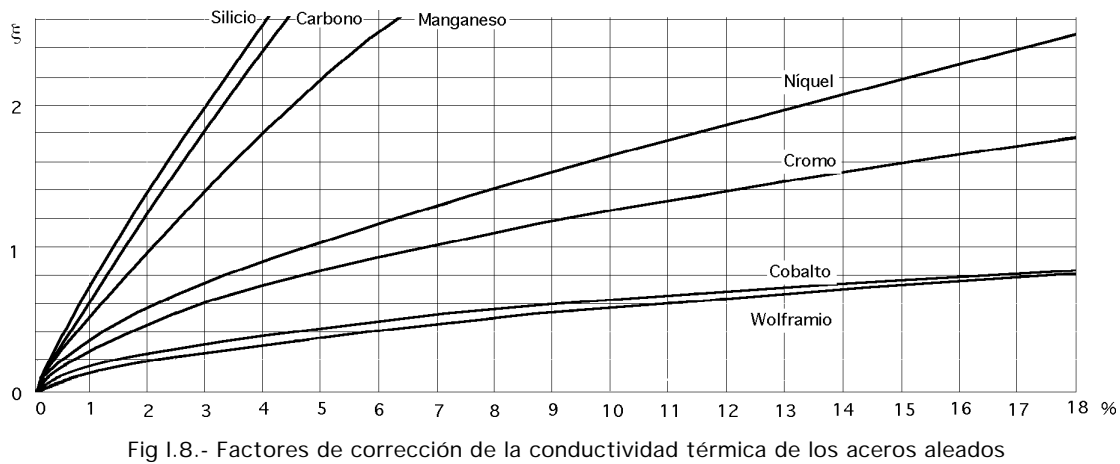
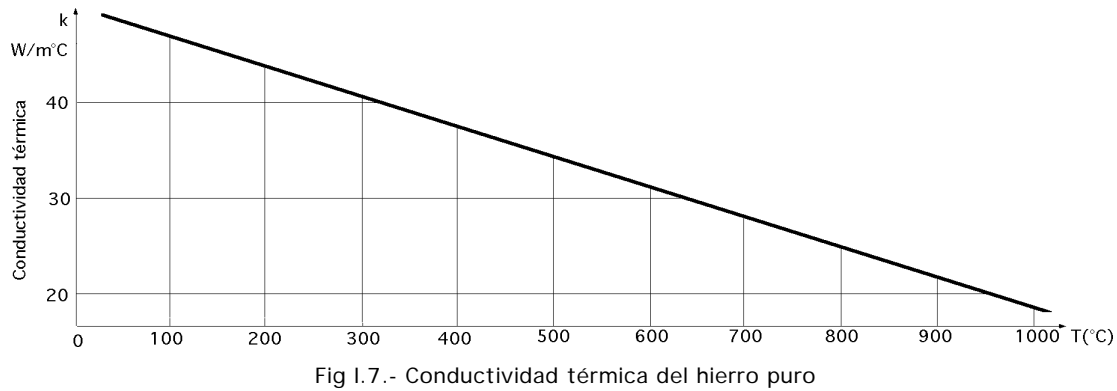
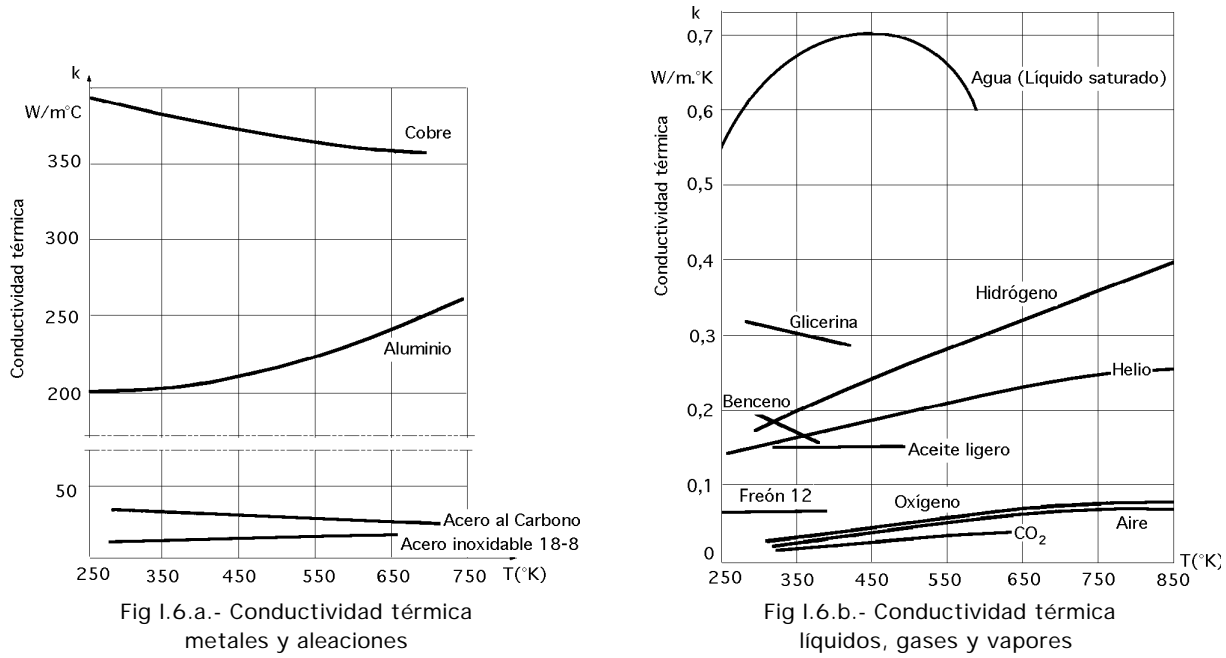
La *conductividad térmica de las aleaciones, en general, y de los aceros en particular*, se puede determinar mediante la relación:

$$k = \frac{k_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

en la que k_0 es la conductividad térmica del metal base, y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, son unos factores de corrección de dicha conductividad, propios de cada metal que la caracterizan. La conductividad térmica del hierro puro viene representada en la Fig I.7, mientras que los factores característicos de los metales adicionales que entran en la composición de un acero aleado, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, en la Fig I.8.

CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE LÍQUIDOS.- En la Fig I.6 se indica la conductividad térmica de algunos líquidos en función de la temperatura, observándose que, excepto en el caso del agua, la conductividad térmica de los líquidos decrece a medida que aumenta su temperatura, pero el cambio es tan pequeño que en la mayor parte de las situaciones prácticas, la conductivi-

dad térmica se puede suponer constante para ciertos intervalos de temperatura; asimismo, en los líquidos no hay una dependencia apreciable con la presión, debido a que éstos son prácticamente incompresibles.



Para la determinación de la difusividad térmica en líquidos, se propone la fórmula:

$$= \frac{k}{c_p} = \frac{5}{4} \sqrt[3]{\frac{1}{M}}$$

en la que M es la masa molecular y ρ la densidad del líquido. Como la ecuación no es homogénea, conviene precisar las unidades en que deben expresarse las magnitudes que en ella figuran:

k en Kcal/°C.m.hora, ρ en kg/dm³ y c_p en Kcal/°Ckg

Para definir la variación de la conductividad térmica k en función de la temperatura, Riedel propone la ecuación:

$$k = k_K \{1 - 6,7 (1 - T_r)^{2/3}\}$$

siendo:

k la conductividad a la temperatura $T = T_r T_k$ en °K

k_k la conductividad a la temperatura crítica T_k en °K

T_r la temperatura reducida igual a $\frac{T}{T_k}$

En el caso en que se desconozca la conductividad k_k , la ecuación anterior se puede emplear para determinar la conductividad a una temperatura para la que no existen resultados de medida; en estas circunstancias el valor de k_K se calcula para unas ciertas condiciones en las que se conozca T_k con ayuda de la citada ecuación. Si no se conoce T_k se pueden determinar los valores de k_k y de T_k efectuando dos medidas de k a temperaturas suficientemente espaciadas una de otra; esta ecuación se puede utilizar para temperaturas reducidas del orden de 0,9, aproximadamente.

Tabla I.3.- Valores de k'/k

T/T _k	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	1
k'/k	38	33	27	19,3	15,5	12	9,3	4,3	1

La conductividad de los líquidos varía con la temperatura; en las proximidades del punto crítico disminuye más rápidamente, ya que la conductividad del vapor es siempre más baja.

Si se conocen la conductividad del vapor saturado k y la temperatura crítica del líquido T_k en °K, la conductividad del líquido a la temperatura de saturación se puede deducir de la siguiente relación:

$$\frac{k'}{k} = f\left(\frac{T}{T_k}\right)$$

que precisa de la Tabla I.3.

CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE GASES Y VAPORES.- En la Fig I.6 y a título de ejemplo, se muestran algunas conductividades térmicas de gases y vapores, observándose su variación con la temperatura.

La conductividad térmica de los gases crece con la presión, pero este aumento a presiones normales es tan pequeño que se puede despreciar; sin embargo, en las proximidades del punto crítico, y para presiones o muy bajas, o muy altas, la variación de la conductividad térmica en función de la presión, no se puede despreciar.

La conductividad térmica de los gases se incrementa con la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Los gases presentan conductividades térmicas muy bajas, tanto más, cuanto más elevado es su peso molecular.

Por analogía con el proceso de la transmisión del calor, y sobre la base de la teoría molecular, se propone la siguiente relación (Sutherland) entre la conductividad y la viscosidad dinámica de un gas, de la forma:

$$k = c_v = c_{v0} \frac{1 + \frac{C}{T_0}}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

en la que C es una constante con dimensiones de temperatura, y c_{v0} un coeficiente numérico que depende del número n de átomos contenidos en la molécula, de la forma (B. Koch):

$$c_{v0} = 1 + \frac{4,5}{1 + 2n}, \text{ con, } \begin{aligned} &= 2,50, \text{ para gases monoatómicos ; } &= 1,90, \text{ para gases biatómicos} \\ &= 1,64, \text{ para gases triatómicos ; } &= 1,50, \text{ para gases tetraatómicos} \end{aligned}$$

Tabla I.4.- Valores de C y c_{v0} de la fórmula de Sutherland

Fluido	C	$c_{v0} = (\text{Kg seg}^2/\text{m}^2)$
Aire	114	0,166
Oxígeno	128	0,18
Hidrógeno	74	0,083
Nitrógeno	110	0,16
Anhídrido carbónico	260	0,137
Monóxido de carbono	---	0,16
Vapor de agua	673	0,087

En la Tabla I.4 se indican los valores de C y c_{v0} para diversos gases industriales.

I.4. - TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

Cuando un fluido a T_F se pone en contacto con un sólido cuya superficie de contacto está a una temperatura distinta T_{pF} , el proceso de intercambio de energía térmica se denomina *transmisión de calor por convección*. En este capítulo introductorio no vamos a desarrollar procedimientos analíticos, sino una visión general del fenómeno, planteando las ecuaciones básicas que se utilizan en los cálculos.

Existen dos tipos de convección:

- a) Convección libre o natural
- b) Convección forzada

En la *convección libre*, la fuerza motriz procede de la variación de densidad en el fluido como consecuencia del contacto con una superficie a diferente temperatura, lo que da lugar a unas fuerzas ascensionales; ejemplos típicos de tal convección libre son la transmisión de calor entre la pared o el tejado de una casa en un día sin viento, la convección en un tanque que contiene un líquido en el que se encuentra sumergida una bobina de calefacción, el calor transferido desde la superficie de un colector solar en un día en calma, etc.

La *convección forzada* tiene lugar cuando una fuerza motriz exterior mueve un fluido con una velocidad u_F sobre una superficie que se encuentra a una temperatura T_{pF} , mayor o menor que la del fluido T_F . Como la velocidad del fluido en la convección forzada u_F es mayor que en la convección libre, se transfiere, por lo tanto, una mayor cantidad de calor para una determinada temperatura.

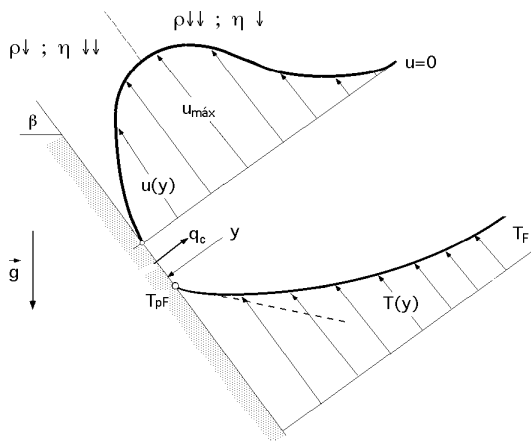


Fig I.10.- Distribución de la temperatura y la velocidad en convección libre sobre una placa plana inclinada

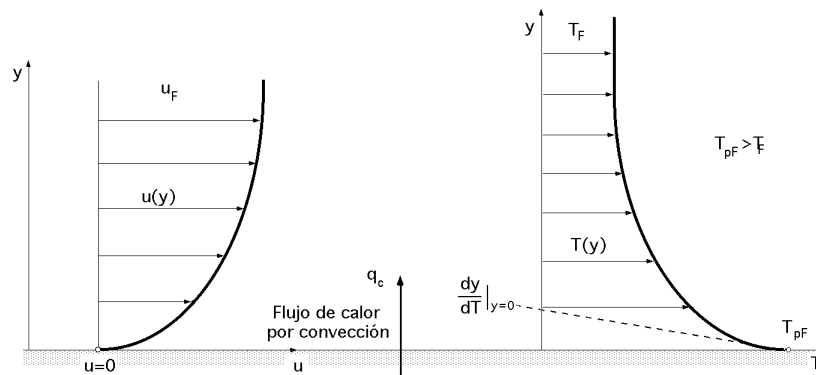


Fig I.9.- Distribución de la temperatura y la velocidad sobre una placa plana en convección forzada

Independientemente de que la convección sea libre o forzada, la cantidad de calor transmitida Q_c , se puede escribir (Ley de Newton):

$$Q_c = h_{cF} A (T_{pF} - T_F)$$

en la que:

h_{cF} es la conductancia convectiva térmica unitaria o coeficiente de transmisión del calor por convección en la interfase líquido-sólido, en $W/m^2\text{°K}$

A es el área superficial en contacto con el fluido, en m^2

T_{pF} es la temperatura de la superficie, en $^{\circ}K$.

T_F es la temperatura del fluido no perturbado, en $^{\circ}K$.

La ecuación anterior sólo sirve como definición del coeficiente de convección h_{cF} ; su valor numérico se tiene que determinar analítica o experimentalmente.

En la Tabla I.5 se relacionan algunos valores aproximados de los coeficientes de transmisión de calor por convección, incluyendo la vaporización (ebullición) y la condensación, consideradas usualmente como una parte del área de la convección.

La relación entre el calor transmitido a un fluido por convección y el flujo del fluido, se puede obtener a partir de la Fig I.9, que muestra una placa plana caliente que se enfría mediante una corriente de aire que fluye sobre aquella, (convección forzada), y las distribuciones de la velocidad y temperatura.

Tabla I.5.- Valores aproximados de coeficientes de transmisión de calor por convección

Tipo de convección y fluido	h_c ($W/m^2\text{°K}$)
Convección libre, aire	5-25
Convección libre, agua	20-100
Convección forzada, aire	10-200
Convección forzada agua	50-10.000
Agua en ebullición	3.000-100.000
Vapor de agua en condensación	5.000-100.000

Se observa que la velocidad $u = u(y)$ decrece en la dirección y hacia la superficie como resultado de la fuerza de rozamiento (viscosidad). Como la velocidad de la capa de fluido adyacente a la pared es $u = 0$, la transmisión de calor por unidad de área entre la superficie y esta capa de fluido se puede considerar debida exclusivamente a la conducción:

$$\frac{Q_c}{A} = -k_F \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0} = h_c (T_{pF} - T_F)$$

Este punto de vista sugiere que el proceso pudiera ser eminentemente conductivo, pero como el gradiente de temperaturas en la superficie viene determinado por la velocidad con que el fluido situado más allá de la pared puede transportar la energía a la corriente principal, (el gradiente de

temperaturas sobre la pared depende del campo de velocidades del fluido), resulta que a mayor velocidad se produce un mayor gradiente de temperaturas y una transferencia de calor superior, por lo que el proceso es prácticamente convectivo, sin despreciar la conductividad térmica que tiene igualmente un papel importante.

La situación es muy similar en la convección libre, como puede verse en la Fig I.10; la diferencia principal consiste en que en la convección forzada la velocidad lejos de la superficie se aproxima al valor de la corriente libre impuesta por una fuerza externa, mientras que en la convección natural la velocidad depende de las propiedades del fluido, que se indican a continuación,

En los gases la densidad disminuye y la viscosidad aumenta, cuando la temperatura aumenta.

En los líquidos la densidad disminuye y la viscosidad disminuye, cuando la temperatura aumenta.

Si el fluido es un líquido, la velocidad crece al principio con la distancia a la placa, debido a que la viscosidad disminuye más rápidamente que la densidad, que lo hace más lentamente, fenómeno que se invierte desde la zona de velocidad máxima hasta el resto del fluido; la fuerza ascensional decrece a medida que la densidad del fluido se aproxima a la del fluido de los alrededores, por lo que la velocidad alcanza, en primer lugar, un máximo y, posteriormente, se aproxima a cero lejos de la superficie caliente.

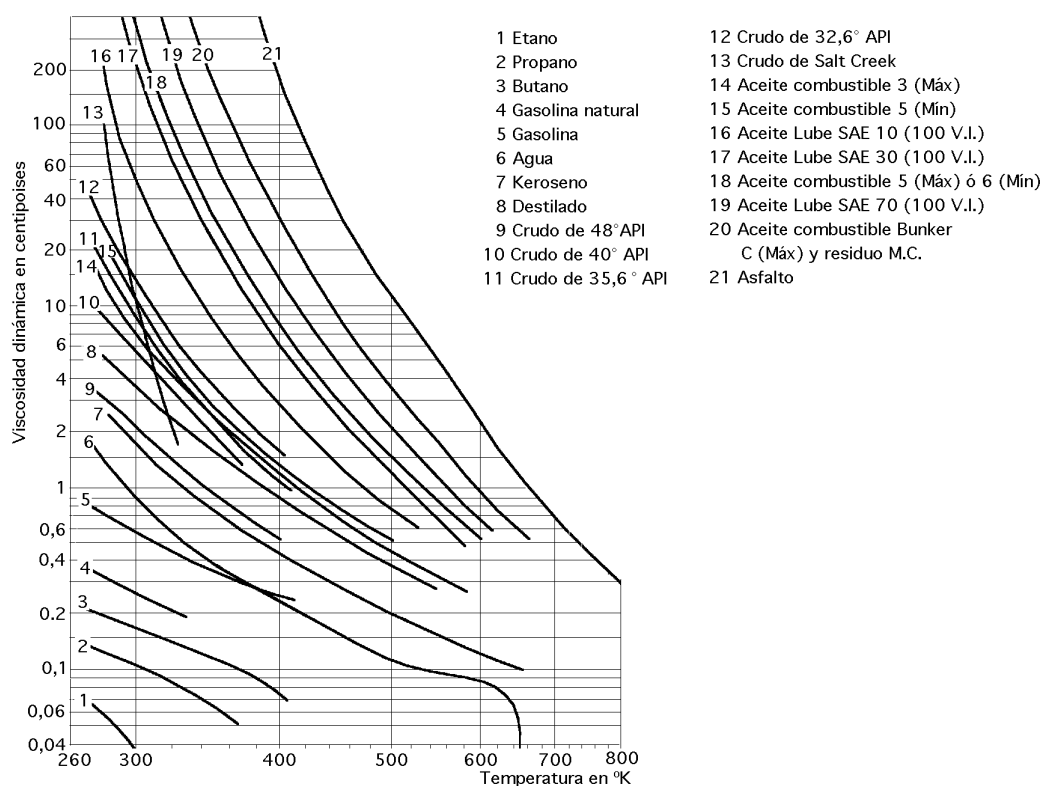


Fig I.11.- Viscosidad del agua y de algunos líquidos derivados del petróleo

La distribución de temperaturas en la convección libre y forzada tiene una forma similar y, en ambos casos, el mecanismo de la transmisión del calor en la interfase (fluido/sólido) corresponde a la conducción.

El coeficiente de transmisión de calor por convección depende, en general, de la densidad, de la viscosidad y de la velocidad del fluido, así como de sus propiedades térmicas (conductividad térmica y calor específico), es decir:

$$h_{cF} = f(\rho, \mu, u, k, c_p)$$

En la convección forzada la velocidad viene impuesta al sistema por una bomba, ventilador, etc, y se puede medir directamente, $u_F = Q/A$

En la convección natural, la velocidad es de la forma: $u_F = f(\Delta T, \rho, g)$, es decir, depende de:

- La diferencia de temperaturas ΔT entre la superficie y el fluido
- Del coeficiente de dilatación térmica del fluido β que determina el cambio de densidad por unidad de diferencia de temperatura
- Del campo de fuerzas exteriores que, en general, es la gravedad

El número adimensional característico para la convección natural es el número de Grashof, de la forma:

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

El número adimensional para la convección forzada es el número de Reynolds: $Re = \frac{u_F L}{\nu}$

El número adimensional que define al fluido es el n° de Prandtl, clasificándoles, en primera aproximación, en cuatro grandes grupos:

Gases: $Pr \approx 1$

Líquidos (agua, aceites calientes, etc): $Pr > 1$

Aceites a bajas temperaturas: $Pr > 1000$

Metales líquidos: $Pr \ll 1$

La transmisión de calor por convección se puede tratar también dentro de la estructura de una red de resistencias térmicas, en la forma:

$$R_c = \frac{1}{h_c A}$$

y esta resistencia, en una interfase superficie-fluido, se puede incorporar fácilmente a una red.

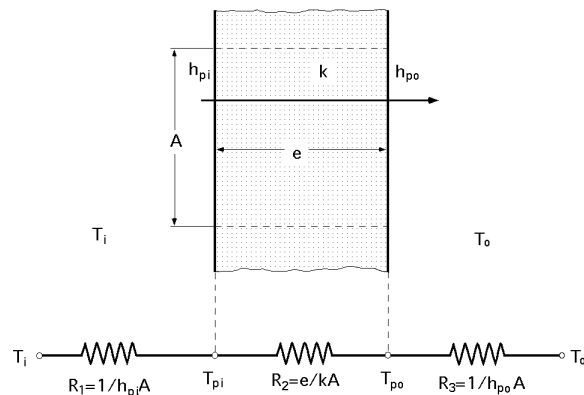


Fig I.12.- Analogía eléctrica correspondiente a la transmisión de calor a través de una pared plana con convección en sus dos caras.

El calor transmitido viene dado por:

$$Q = \frac{T_i - T_o}{\sum_{i=1}^3 R_i} = \frac{T_i - T_o}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{h_{ci} A} + \frac{1}{k A} + \frac{1}{h_{co} A}}$$

I.6.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR RADIACIÓN

Mientras que la conducción y la convección térmicas tienen lugar sólo a través de un medio material, la radiación térmica puede transportar el calor a través de un fluido o del vacío, en forma de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz. Existen muchos fenómenos diferentes de radiación electromagnética pero en Ingeniería Térmica sólo consideraremos la radiación térmica, es decir, aquella que transporta energía en forma de calor.

La cantidad de energía que abandona una superficie en forma de calor radiante depende de la temperatura absoluta a que se encuentre y de la naturaleza de la superficie.

Un radiador perfecto o cuerpo negro emite una cantidad de energía radiante de su superficie Q_r , dada por la ecuación:

$$Q_r = A T^4 = A E_b$$

en la que E_b es el poder emisor del radiador, viniendo expresado el calor radiante Q_r en W, la temperatura T de la superficie en °K, y la constante dimensional de Stefan-Boltzman en unidades SI, en la forma:

$$= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{°K}^4}$$

La ecuación anterior dice que toda superficie negra irradia calor proporcionalmente a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Aunque la emisión es independiente de las condiciones de los alrededores, la evaluación de una transferencia neta de energía radiante requiere

una diferencia en la temperatura superficial de dos o más cuerpos entre los cuales tiene lugar el intercambio. Si un cuerpo negro irradia calor a un recinto que le rodea completamente y cuya superficie es también negra, es decir, absorbe toda la energía radiante que incide sobre él, la transferencia neta de energía radiante viene dada por:

$$Q_r = A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

siendo T_1 y T_2 la temperatura del cuerpo negro y la temperatura superficial del recinto en °K, respectivamente.

Si los dos cuerpos negros tienen entre sí una determinada relación geométrica, que se determina mediante un factor de forma F , el calor radiante transferido entre ellos es:

$$Q_r = Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

Los cuerpos reales no cumplen las especificaciones de un radiador ideal, sino que emiten radiación con un ritmo inferior al de los cuerpos negros. Si a una temperatura igual a la de un cuerpo negro emiten una fracción constante de la energía que emitirían considerados como cuerpo negro para cada longitud de onda, se llaman cuerpos grises.

Un *cuerpo gris* emite radiación según la expresión:

$$Q_r = A E_b = A T^4$$

El calor radiante neto transferido por un cuerpo gris a la temperatura T_1 a un cuerpo negro que le rodea a la temperatura T_2 es:

$$Q_r = \epsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

siendo ϵ_1 la emitancia de la superficie gris, igual a la relación entre la emisión de la superficie gris y la emisión de un radiador perfecto a la misma temperatura. El hecho de que la transferencia de calor dependa de T^4 complica los cálculos.

Si T_1 y T_2 no difieren demasiado, se puede poner:

$$Q_r = \epsilon_1 A_1 (T_1^4 - T_2^4) = \epsilon_1 A_1 (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2) (T_1 - T_2) = \left| \frac{T_1 - T_2}{T_m} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2 T_m} \right| =$$

$$= \left| \frac{(T_1 + T_2)^2 - 2 T_1 T_2}{T_1 + T_2 = 2 T_m} = (T_1^2 + T_2^2) = 4 T_m^2 - 2 T_m^2 \right| = \epsilon_1 A_1 4 T_m^3 (T_1 - T_2) = A_1 h_r (T_1 - T_2)$$

habiendo considerado:

$$(T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2) = \{(T_1 + T_2)^2 - 2 T_1 T_2\} 2 T_m = (4 T_m^2 - 2 T_m^2) 2 T_m = 4 T_m^3$$

siendo: $h_r = 4 \epsilon_1 T_m^3$, el coeficiente de transferencia de calor por radiación.

A la temperatura de $25^\circ\text{C} = 298^\circ\text{K}$, se obtiene: $h_r = 6 \epsilon_1 \text{ W/m}^2\text{K}$, por lo que el coeficiente de transferencia de calor por radiación a la temperatura ambiente es del orden de 6 veces la emitancia de la superficie.

Para: $T_1 = 320^\circ\text{K}$ y $T_2 = 300^\circ\text{K}$, el error debido al empleo de la aproximación es del 0,1%

Para: $T_1 = 400^\circ\text{K}$ y $T_2 = 300^\circ\text{K}$, el error debido al empleo de la aproximación es del 2%

Si ninguno de los dos cuerpos es un radiador perfecto, pero poseen entre sí una determinada relación geométrica, el calor radiante neto transferido entre ellos viene dado por:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{1-2}^* (T_1^4 - T_2^4) = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{\epsilon_2}} A_1$$

en la que F_{1-2}^* es un factor de forma que modifica la ecuación de los radiadores perfectos para tener en cuenta las emitancias y las geometrías relativas de los cuerpos reales.

En muchos problemas industriales, la radiación se combina con otros modos de transmisión del calor. La solución de tales problemas se puede simplificar utilizando una resistencia térmica R_r para la radiación; su definición es semejante a la de la resistencia térmica de convección y conducción.

Si el calor transferido por radiación se escribe en la forma convectiva:

$$Q_r = \frac{T_1 - T_2}{R_r}$$

en la que T_2' es una temperatura de referencia cuya elección viene impuesta por las condiciones de convección, (temperatura media del entorno en contacto con la superficie), mientras que T_2 es una temperatura de referencia que viene impuesta por las condiciones de radiación, (medio ambiente), la resistencia térmica radiativa viene dada por:

$$R_r = \frac{T_1 - T_2}{A_1 F_{1-2} (T_1^4 - T_2^4)} = \frac{1}{A_1 F_{1-2} (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2)}$$

La conductividad térmica unitaria de la radiación h_r se define mediante la expresión:

$$h_r = \frac{1}{R_r A_1} = \frac{F_{1-2} (T_1^4 - T_2^4)}{T_1 - T_2} = F_{1-2} (T_1^2 + T_2^2) (T_1 + T_2)$$

en la mayoría de los casos T_2 y T_2' coinciden.

I.7.- MECANISMOS COMBINADOS DE TRANSMISIÓN DE CALOR

Normalmente la energía térmica se transmite en etapas a través de un cierto número de secciones conectadas en serie, intercalando entre ellas otras situaciones en paralelo; para dar una idea, consideraremos una aplicación de la transmisión de calor en la cámara de combustión de una turbina de gas, en la que los productos de la combustión que la atraviesan, calientan las paredes siendo estas refrigeradas mediante un refrigerante que circula por un anillo exterior a la pared, Fig I.13. Los productos de la combustión contienen gases como el CO, CO₂ y H₂O que emiten y absorben la radiación; en la primera sección de este sistema el calor se transfiere del gas incandescente a la superficie interna de la pared de la cámara de combustión por los mecanismos de convección y radiación que actúan en paralelo.

El calor total Q en la superficie de la pared, a cierta distancia de la tobera es:

$$Q = Q_{c(gases)} + Q_r = h_{cg} A (T_g - T_{pg}) + h_r A (T_g - T_{pg}) = (h_{cg} + h_r) (T_g - T_{pg}) A = \frac{T_g - T_{pg}}{R_1}$$

$$R_1 = \frac{1}{(h_{cg} + h_r) A}$$

en la que T_g es la temperatura del gas incandescente y T_{pg} es la temperatura de la superficie interna de la pared.

En estado estacionario el calor se conduce a través de la pared periférica a la misma velocidad que en la superficie y en la que el valor de Q es:

$$Q = Q_k = \frac{k A}{e} (T_{pg} - T_{pF}) = \frac{T_{pg} - T_{pF}}{R_2} \quad ; \quad R_2 = \frac{e}{k A}$$

siendo T_{pF} la temperatura superficial de la pared en el lado refrigerado y R_2 la resistencia térmica de la segunda sección.

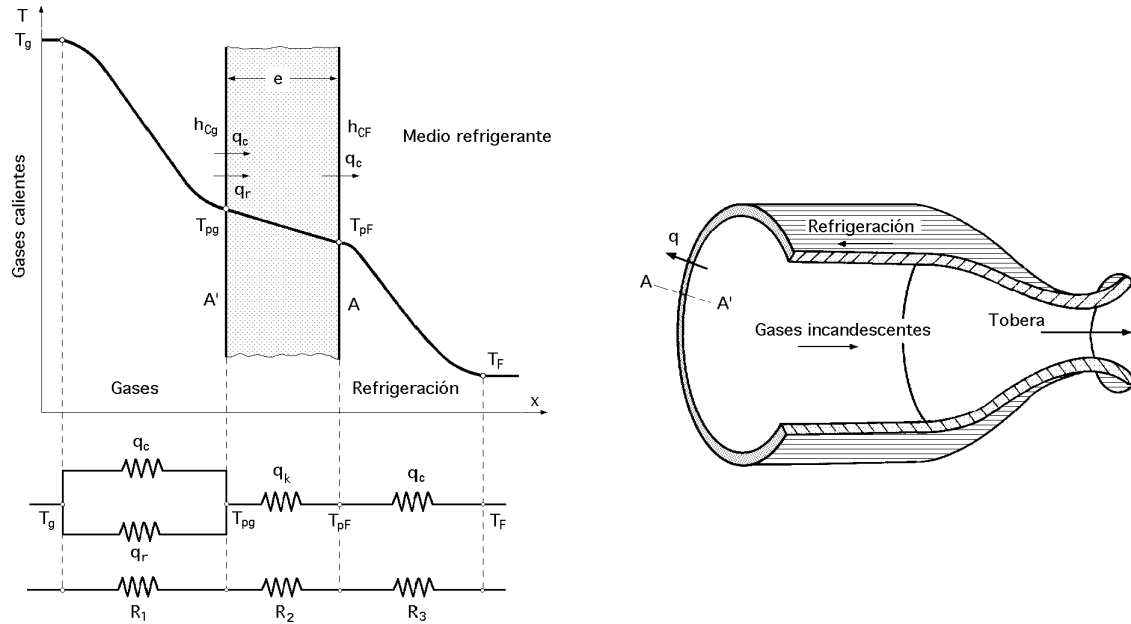


Fig I.13.- Transmisión de calor en la cámara de combustión de una turbina de gas

Después de atravesar la pared, el calor fluye por convección a través de la tercera sección del sistema hacia el refrigerante. El calor en la última etapa es:

$$Q = Q_c = h_{CF} A (T_{pF} - T_F) = \frac{T_{pF} - T_F}{R_3} \quad ; \quad R_3 = \frac{1}{h_{CF} A}$$

siendo T_F la temperatura del refrigerante y R_3 la resistencia térmica en la tercera sección del sistema.

Hay que hacer constar que los valores numéricos de los coeficientes de convección en la primera h_{CG} y tercera h_{CF} sección del sistema dependen de muchos factores y, por lo tanto, son diferentes. Además, las áreas de las tres secciones sometidas al flujo de calor no son iguales. No obstante, como la pared es muy delgada, el cambio en el área del flujo de calor es tan pequeño que puede despreciarse en este sistema. En la práctica ocurre con frecuencia que sólo se conocen las temperaturas de los gases incandescentes y del refrigerante, por lo que el calor es:

$$Q = \frac{T_g - T_F}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_g - T_F}{\frac{1}{h_{CG} + h_r} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_{CF}}} A$$

En la ecuación anterior el flujo de calor se ha expresado exclusivamente en función de un potencial global de temperaturas y las características de transmisión del calor de las secciones individuales en que se ha dividido el camino seguido por el flujo. A partir de estas relaciones es posible evaluar cuantitativamente la importancia de cada resistencia térmica individual de la transmisión, por lo que una inspección del orden de magnitud de los términos individuales del denominador indican, frecuentemente, la forma de simplificar el problema, de modo que cuando uno u otro término domine cuantitativamente, se puede, a veces, despreciar el resto.

Existen ciertos tipos de problemas, principalmente en el diseño de intercambiadores de calor, en los que conviene simplificar la ecuación anterior combinando las resistencias o conductancias individuales del sistema térmico, reduciéndolas a una magnitud llamada *coeficiente global de transmisión del calor* U ; la última ecuación se puede expresar en función de este coeficiente global en la forma:

$$Q = U A \quad T_{\text{total}} = \frac{T_{\text{total}}}{R_1 + R_2 + R_3} \quad U A = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Para una pared plana de espesor e entre dos fluidos:

$$\frac{1}{U A} = \frac{1}{h_c A} + \frac{e}{k A} + \frac{1}{h_F A}$$

Para el ejemplo anterior:

$$\frac{1}{U A} = \frac{1}{(h_{cg} + h_r) A} + \frac{e}{k A} + \frac{1}{h_{cF} A}$$

El coeficiente global U se calcula siempre en función de una superficie A de intercambio térmico del sistema, que habrá que fijar de antemano.

II.- CONDUCCIÓN DE CALOR UNIDIRECCIONAL EN RÉGIMEN ESTACIONARIO

II.1.- INTRODUCCIÓN

La conducción es una forma de transferencia térmica según la cual, el calor *viaja* desde una región de temperatura elevada a otra de menor temperatura, pudiendo aparecer en los sólidos, en los líquidos y en los gases. Para el caso de los líquidos y gases, la conducción se encuentra normalmente en combinación con la convección; la conducción pura tiene lugar, fundamentalmente, en los sólidos opacos.

En lo que sigue consideraremos que el medio conductor es un sólido, pero los principios que se desarrollan pueden aplicarse asimismo a aquellos líquidos y gases en los que el movimiento convectivo se encuentre limitado por el mecanismo que sea.

El estudio de la conducción térmica se puede realizar siguiendo tres directrices principales:

- a) En la primera interviene la conducción en régimen estacionario (en el que la temperatura resulta ser función de una determinada dirección)*
- b) En la segunda se trata la conducción estacionaria en la que la temperatura es función de dos o tres direcciones*
- c) La tercera se corresponde con la conducción en régimen transitorio*

La ecuación de la conducción es una expresión matemática, consecuencia del Principio de Conservación de la Energía en una sustancia sólida; se obtiene mediante un balance energético en un elemento de volumen del material en el que se realiza la transferencia de calor por conducción. Dentro del sólido se supondrán despreciables las transferencias de calor por convección y radiación. Las transferencias de calor debidas a la conducción están relacionadas con la distribución de temperaturas mediante la ley de Fourier.

El balance de energía tiene en cuenta el hecho de que pueda generarse energía en el interior del material; ejemplos típicos de generación interna de energía en un sólido lo constituyen las

reacciones químicas que generan calor o el calor generado como consecuencia del paso de una corriente eléctrica a través de una resistencia (efecto Joule), etc, que analizaremos en el apéndice correspondiente.

La forma general de la ecuación de conducción debe tener en cuenta el *almacenamiento de energía* en el material. Como la energía interna de un sistema, $U = U(T,t)$, aumenta con la temperatura del mismo, una sustancia sólida experimentará un incremento neto de la energía en ella almacenada cuando aumente su temperatura T a lo largo del tiempo t , y viceversa. Si la temperatura es independiente del tiempo, el sistema está en régimen estacionario; si la temperatura es función del tiempo, se dice que el sistema está en régimen no estacionario o transitorio, y el incremento de su energía interna viene asociado directamente al almacenamiento de energía.

Se puede clasificar la conducción también por el *número de dimensiones* de las coordenadas de que dependa la temperatura; si ésta es función de una sola coordenada, el problema es monodimensional, y si es función de dos o tres, entonces se dice que es un problema bi o tridimensional, respectivamente; si la temperatura es función del tiempo y de la dirección x en coordenadas rectangulares, o sea, $T = T(x,t)$, se dice que el problema es monodimensional y transitorio.

II.2.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN

La conducción es la forma de transferencia de calor en la que se realiza un intercambio de energía desde la región de mayor temperatura a la de menor temperatura, por el movimiento cinético de sus partículas, o por el impacto directo de sus moléculas, como es el caso de los fluidos en reposo, o por el arrastre de electrones como es el caso de los metales.

La ley básica de la conducción del calor, a partir de observaciones experimentales, proviene de Biot, pero en general se conoce con el nombre de ecuación de Fourier, ya que fue él quien la aplicó a su teoría analítica del calor. Esta ley establece que la tasa de transferencia de calor por conducción en una dirección dada, es proporcional al área normal a la dirección del flujo de calor, y al gradiente de temperatura en esa dirección.

Para el flujo térmico en la dirección x la ley de Fourier viene dada por:

$$Q_x = -k A \frac{T}{x} \quad \text{ó} \quad q_x = \frac{Q_x}{A} = -k \frac{T}{x}$$

en la que Q_x es el calor que atraviesa la superficie A en la dirección positiva de las x , y q_x es el flujo de calor por unidad de superficie transversal, también en la dirección positiva de las x . La constante k es la conductividad térmica del material y es, como sabemos, una magnitud positiva.

Consideraremos en lo que sigue que el flujo es unidireccional según x ; la ecuación de Fourier dice que se puede calcular el flujo de calor en la dirección x si se conoce el gradiente de temperaturas en esa dirección; la distribución de la temperatura en un medio se puede calcular a partir de la solución de la ecuación diferencial de la conducción del calor, cuando se somete a unas condiciones apropiadas de frontera.

Para su determinación consideraremos un elemento de volumen infinitesimal, de dimensio-

en x , y , z , pudiéndose establecer el siguiente balance energético:

(Energía que atraviesa por conducción el elemento) + (Energía generada en el elemento) = (Variación de la energía interna del elemento)

La energía que entra por conducción al elemento de volumen infinitesimal, Fig II.1, en la dirección x , viene dada por:

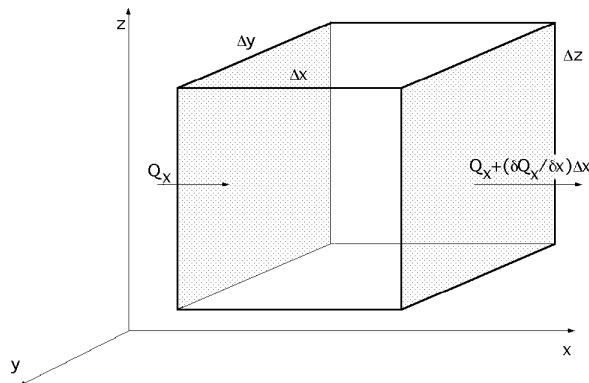


Fig II.1.- Paralelepípedo elemental de fluido

$$Q_x = q_x \Delta y \Delta z$$

y la energía saliente por:

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x$$

siendo el balance de energía que atraviesa el elemento de volumen en la dirección x :

$$Q_x - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x) = - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x = - \frac{q_x}{x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Haciendo lo mismo para las direcciones y y z se obtiene:

$$Q_y - (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y) = - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y = - \frac{q_y}{y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$Q_z - (Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z) = - \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z = - \frac{q_z}{z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

La energía que por conducción atraviesa el elemento de volumen es:

$$- (\frac{q_x}{x} + \frac{q_y}{y} + \frac{q_z}{z}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

La energía generada o disipada en el elemento de volumen, por fuentes o sumideros de energía, viene dada por:

$$E \Delta x \Delta y \Delta z$$

y la variación U de la energía interna en dt , para el caso de sólidos y líquidos, en los que los calores específicos a presión y volumen constante son iguales, $c_p = c_v$, es de la forma:

$$U = m c_p \frac{T}{t} = c_p \frac{T}{t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

en la que y c_p no varían con el tiempo.

En consecuencia, el balance energético total proporciona la ecuación diferencial de la conducción de calor, en la forma:

$$-\left(\frac{q_x}{x} + \frac{q_y}{y} + \frac{q_z}{z}\right) + E = c_p \frac{T}{t}$$

$$q_x = -k \frac{T}{x}$$

y teniendo en cuenta la ecuación de Fourier para cada dirección: $q_y = -k \frac{T}{y}$, resulta:

$$q_z = -k \frac{T}{z}$$

$$-\frac{1}{x} \left(k \frac{T}{x}\right) - \frac{1}{y} \left(k \frac{T}{y}\right) - \frac{1}{z} \left(k \frac{T}{z}\right) + E = c_p \frac{T}{t}$$

en la que:

$$T = T(x, y, z, t) \quad \text{y} \quad E = E(x, y, z, t)$$

obteniéndose:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{E}{k} = \frac{c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

que es la ecuación diferencial de la transmisión de calor por conducción en régimen transitorio con generación de energía, y en la que α es la difusividad térmica.

Para analizar la conducción de calor en un cilindro, se utilizan coordenadas cilíndricas, quedando la ecuación anterior en la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

y para el caso de transmisión de calor a través de una esfera:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

en las que hay que tener en cuenta las condiciones de frontera, propias de cada caso a estudiar.

II.3.- CONDUCCIÓN EN UN CILINDRO

Para estudiar la conducción de calor en un cilindro, conviene utilizar la ecuación de coordenadas cilíndricas, que en ausencia de fuentes y sumideros, $E = 0$, y para régimen estacionario, es de la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad ; \quad r \frac{\partial T}{\partial r} = C_1 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

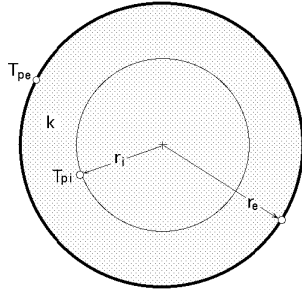


Fig II.2.- Cilindro

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Suponiendo que para un punto a la distancia r_i la temperatura es T_i y que para el radio exterior r_e la temperatura es T_{pe} , las condiciones en los límites son, Fig II.2:

Para,

$$\begin{aligned} r = r_i & ; \quad T_i = C_1 \ln r_i + C_2 \\ r = r_e & ; \quad T_{pe} = C_1 \ln r_e + C_2 \end{aligned}$$

deduciéndose de las mismas las constantes C_1 y C_2 , de la forma:

$$C_1 = \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \quad ; \quad C_2 = T_i - \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \ln r_i$$

La distribución de temperaturas $T(r)$ es de la forma:

$$\frac{T(r) - T_i}{T_{pe} - T_i} = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \quad ; \quad T(r) = T_i + (T_{pe} - T_i) \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

$$Q(r) = - 2 \pi r L k \frac{dT(r)}{dr} = - 2 \pi r L k \frac{C_1}{r} = - 2 \pi k L \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = \frac{T_i - T_{pe}}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2 \pi k L}}$$

Cuando, $r_e = r_i + e$, con, $\frac{e}{r_i} \gg 1$, la resistencia térmica se reduce a la resistencia de una placa,

$$\frac{e}{2 \pi r_i k L} = \frac{e}{k A}$$

El valor de Q es independiente de la posición radial r en la que T_{p0} y T_i son temperaturas del cilindro, y L es la longitud del mismo. Este estudio se puede ampliar a un tubo, en el que su temperatura interior sea $T_{pF} = T_i$ resultando la siguiente distribución de temperaturas:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_{pe} - T_{pF}} = \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

El calor transmitido es de la forma: $Q = 2 \pi k L \frac{T_{pF} - T_{p0}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$

Si k es variable, función de la temperatura, $k = k(T)$, el flujo de calor es de la forma:

$$Q = \frac{2 L}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \int_{T_{pF}}^{T_{p0}} k(T) dT$$

Para el caso de cilindros de capas múltiples con convección y radiación al medio exterior, Fig II.3, se puede poner:

$$Q = U A (T_{pF} - T_{p0}) = \frac{T_{pF} - T_{p0}}{\frac{1}{U A}}$$

$$\frac{1}{U A} = \frac{1}{2 r_1 L h_{ci}} + \frac{\ln \frac{r_A}{r_1}}{2 k_1 L} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_A}}{2 k_2 L} + \frac{1}{2 r_2 L (h_{cF} + h_{rF})}$$

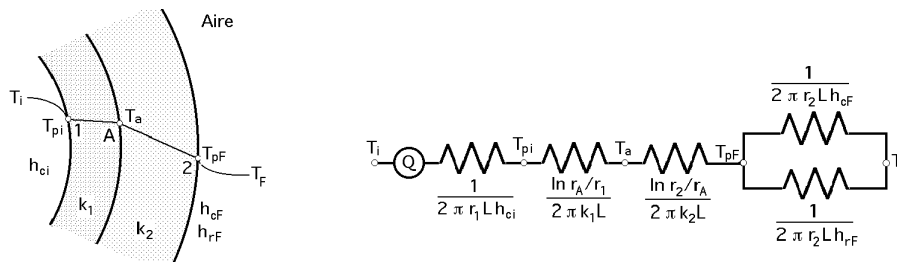


Fig II.3.- Tubería aislada, distribución de temperaturas y circuito térmico correspondiente

en la que la resistencia en paralelo se puede sustituir por una única, considerando un coeficiente de convección: $h_C = h_{cF} + h_{rF}$

II.4.- ESPESOR DE AISLAMIENTO CRITICO PARA UN CILINDRO

Cuando se recubre un cilindro con una capa de material aislante, cuya resistencia térmica es baja, de modo que este aislamiento exterior esté rodeado por un fluido, se pretende conocer el efecto que producirá el aislamiento adicional sobre la transferencia de calor, desde el interior del cilindro, (con o sin generación de energía, ya que se mantiene constante la temperatura exterior T_{pi} del cilindro), o lo que es lo mismo, que este aislamiento adicional aumente o disminuya la cantidad de calor que se transfiere a partir del cilindro compuesto, (núcleo más aislamiento).

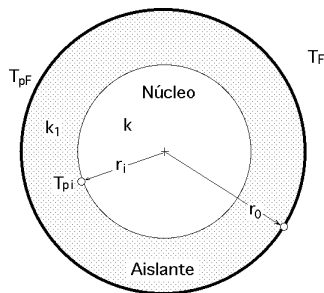


Fig II.4.- Aislamiento de un cilindro, radio crítico

La nomenclatura a utilizar viene indicada en la Fig II.4, en la que se supondrá constante el valor de T_{pi} que es la temperatura de la superficie del cilindro (núcleo).

El calor Q que se transfiere a partir del mismo, en régimen permanente, es igual a la pérdida por convección desde la superficie.

$$Q = h_C A_0 (T_{pF} - T_F) = \frac{T_{pF} - T_F}{\frac{1}{2 r_0 L h_C}}$$

Cuando se añade aislamiento y dado que en él no hay generación de energía, la cantidad de calor a disipar se mantiene constante, A_0 aumenta y T_{pF} disminuye. Para determinar cual de estos efectos predomina, el calor Q transmitido se puede calcular entre la temperatura exterior de la pared T_{pi} , y la del medio exterior T_F , en la siguiente forma:

$$Q = \frac{T_{pi} - T_F}{R_{k1} + R_c} = \frac{T_{pi} - T_F}{\frac{\ln \frac{r_0}{r_i}}{2 \frac{k_1}{L}} + \frac{1}{2 \frac{r_0}{L h_c}}} = \frac{2 L (T_{pi} - T_F)}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0 h_c}} = \frac{T_{pi} - T_F}{R}$$

siendo R la resistencia térmica global.

Derivando la expresión de Q respecto de r_0 se obtiene la condición de disipación de calor máxima o mínima:

$$\frac{dQ}{dr_0} = - 2 L (T_{pi} - T_F) \frac{\frac{1}{k_1 r_0} - \frac{1}{r_0^2 h_c}}{(\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0 h_c})^2} = 0$$

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{r_0 h_c} \quad ; \quad \frac{r_0 h_c}{k_1} = 1 \quad ; \quad r_0 =$$

La magnitud adimensional $\frac{h_c r_0}{k_1}$ se conoce como número de Biot: $Bi = \frac{h_c r_0}{k_1}$

Al valor, $r_0 = \frac{k_1}{h_c}$, se le denomina radio crítico, y se cumple para un valor del número de Biot igual a la unidad.

Si se calcula la derivada segunda de Q y se aplica la condición: $r_0 = \frac{k_1}{h_c}$, se obtiene:

$$\frac{d^2 Q}{dr_0^2} = - 2 L (T_{pi} - T_F) \frac{-\frac{r_0}{k_1^2} \ln \frac{r_0}{r_i} - 2 \frac{r_0}{k_1^2} + \frac{2}{h_c k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{3}{h_c k_1}}{(\frac{1}{h_c} + \frac{r_0}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i})^3}$$

$$\frac{d^2 Q}{dr_0^2} \bigg|_{r_0 = \frac{k_1}{h_c}} = - 2 L (T_{pi} - T_F) \frac{\frac{h_c^2}{k_1}}{(1 + \ln \frac{r_0}{r_i})^2}$$

que siempre es negativa, por lo que el radio crítico r_c , o radio óptimo, dado por el número de Biot igual a la unidad, se corresponde con una pérdida o disipación de calor máxima, para, $r_c = r_0$.

También se podía haber resuelto considerando que el valor de Q será máximo cuando la resistencia R sea mínima, es decir:

$$R = \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0 h_c} \quad ; \quad \frac{dR}{dr_0} = \frac{1}{k_1} \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0^2 h_c} = 0 \quad \begin{matrix} r_0 = \\ r_0 = \frac{k_1}{h_c} \end{matrix}$$

$$\frac{d^2 R}{dr_0^2} = -\frac{1}{k_1} \frac{1}{r_0^2} + \frac{2}{r_0^3 h_c} = \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{1}{k_1} + \frac{2}{r_0 h_c} \right) = \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_1} \right) = \frac{1}{k_1 r_0^2}$$

que siempre es (+) luego R siempre será mínima y Q máximo, de la forma:

$$Q = \frac{2 L (T_{pi} - T_F)}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0 h_c}} = \frac{2 L (T_{pi} - T_F)}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{k_1}} = \frac{2 L (T_{pi} - T_F)}{\frac{1}{k_1} (\ln \frac{r_0}{r_i} + 1)}$$

Por lo tanto es posible aumentar la disipación de calor de una tubería o de un cilindro, mediante la adición de un aislante, siempre que el radio crítico $r_c = h_c/k_1$ sea mayor que el radio, exterior de la tubería, o cilindro, sin recubrir. El radio crítico es constante para cada tipo de aislamiento y fluido exterior convectivo, por serlo k_I y h_C .

Es posible que para tuberías pequeñas, o para alambres, el radio r_i sea menor que r_c , en cuyo caso la adición de aislante a la tubería o cilindro, descubiertos, (punto a), determina un aumento del calor cedido, hasta que se alcance el radio crítico r_c , tal como se muestra en la Fig II.5.a.

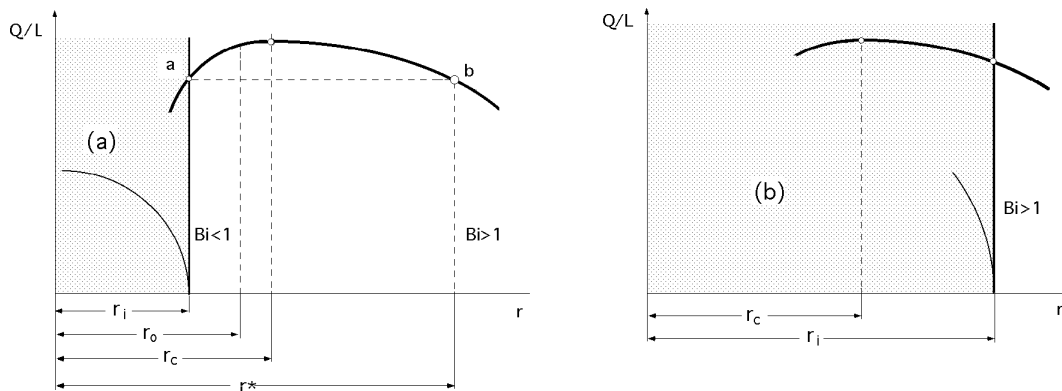


Fig II.5.a-b- Posiciones del radio crítico en tuberías de distinto diámetro

Un aumento posterior del espesor del aislante hará que el calor disipado descienda desde el máximo a otro valor inferior (punto b), de radio r^* , en que el calor disipado es igual que el del tubo o cilindro desnudos.

Por lo tanto, para conseguir una pérdida de calor menor que la que cede el tubo o cilindro al descubierto, será preciso añadir un espesor de aislante e superior a $(r^* - r_i)$, $e > r^* - r_i$.

En la Fig II.5.b, se tiene una situación típica de tubería de gran diámetro, $2 r_i$, en la que el radio exterior de la misma r_i es mayor que el radio crítico r_c y, en consecuencia, cualquier aislante que se añada, disminuirá la pérdida de calor.

Para, $Bi < 1$, que implica que, $r_i < r_c$, la adición de aislamiento en cilindros o tuberías de pequeño diámetro, incrementa la cantidad de calor transferida al exterior.

Para, $Bi > 1$, que implica que, $r_i > r_c$, el aislamiento adicional a tuberías y conducciones de gran diámetro, hará disminuir la transferencia de calor, lo que implica un mejor aislamiento.

Si se considera la radiación: $r_c = \frac{k}{h_c + h_r}$

En realidad el valor de r_0 es sólo una aproximación ya que se ha supuesto que el coeficiente de transmisión de calor era independiente de r_0 ; sin embargo, desde un punto de vista práctico, no se necesita un valor exacto de r_0 , por cuanto al ser el valor de Q máximo, la pérdida de calor no es sensible a los cambios de r , cuando r esté cerca de r_0 .

II.5.- PARED ESFÉRICA SIN GENERACIÓN DE ENERGÍA

En régimen permanente se tiene que $\frac{T}{t} = 0$, y si no existen fuentes ni sumideros, $E = 0$; para un material isotrópico, $T = T(r)$, y por lo tanto, el flujo de calor se puede considerar monodimensional.

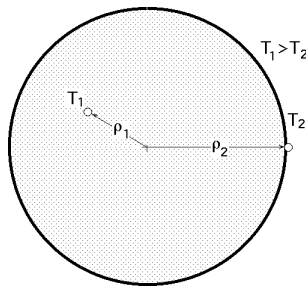


Fig II.6.- Esfera

La ecuación diferencial de la distribución de temperaturas es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Haciendo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r}$$

se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x}{r} \right)$$

Resultados similares se obtendrían para, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$, por lo que:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{T}{r} \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{T}{r} \frac{2}{r} = 0$$

Si al gradiente de temperaturas en la dirección radial le llamamos u , la distribución de temperaturas es de la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = u = \left| \begin{array}{l} \frac{u}{r} + \frac{2}{r} u = 0 \quad ; \quad \frac{du}{u} + \frac{2}{r} \frac{dr}{r} = 0 \\ \ln u + 2 \ln r = \ln C \quad ; \quad u r^2 = C \end{array} \right| = \frac{C}{r^2} \quad ; \quad T = - \frac{C}{2r} + B$$

Las condiciones en los límites, son:

$$\begin{aligned} T_1 &= - \frac{C}{2r_1} + B \\ T_2 &= - \frac{C}{2r_2} + B \end{aligned}$$

$$T_1 - T_2 = - \frac{C}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\begin{aligned} C &= - \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \\ B &= T_1 - \frac{T_1 - T_2}{2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \end{aligned}$$

siendo: $e = r_2^2 - r_1^2$

La distribución de temperaturas en paredes esféricas es de la forma:

$$T = \frac{1}{e} \frac{r_2^2}{2} (T_1 - T_2) - \frac{r_2^2}{2e} (T_1 - T_2) + T_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{e} \frac{r_2^2}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - 1 \right)$$

viniendo dado el calor transmitido por conducción por la expresión:

$$Q = -k A \frac{dT}{dr} = -k 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} = -4\pi k r^2 \frac{C}{2} = 4\pi k r_1^2 \frac{T_1 - T_2}{e}$$

observándose que Q no es constante, sino que depende de r_1 y se va diluyendo a medida que aumenta r_1 , (r_2 es constante), por cuanto aumenta la sección.

Esta expresión para el calor se puede poner también en la forma:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{4\pi r_1^2 k}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{esf}}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{4\pi r_1^2 k}} = 4\pi k \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}}$$

en la que R_{esf} se denomina *resistencia térmica de la esfera*, en analogía con la ley de Ohm.

Para determinar el calor evacuado a través de una esfera hueca, de radio interior r_1 y radio exterior r_2 , calentada por un fluido a T_F , a un medio exterior a T_0 , se tendrá:

$$Q = \frac{T_F - T_0}{\frac{1}{4\pi r_1^2 h_{pF}} + \frac{e}{4\pi r_1 r_2 k} + \frac{1}{4\pi r_2^2 h_{p0}}}$$

siendo h_{pF} el coeficiente de convección en el interior de la esfera y h_{p0} en el exterior.

Para una esfera el radio crítico viene dado por, $r_c = \frac{2k}{h_c}$

Si se considera la radiación, $r_c = \frac{2k}{h_c + h_r}$

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

Hasta ahora sólo hemos considerado problemas de conducción térmica sin generación de calor dentro del propio material. Cuando haya que tener en cuenta la generación interna de calor se resuelve en primer lugar la ecuación de la energía para la distribución de temperaturas que exista en el material de que se trate. La solución contendrá dos constantes de integración que deberán determinarse mediante condiciones de contorno adecuadas. A continuación se utilizará la ley de Fourier para determinar el flujo de calor a través del sólido.

Sabemos que el calor puede generarse internamente de diversas maneras; dentro de un material sólido pueden producirse reacciones químicas tanto endotérmicas como exotérmicas. Una reacción exotérmica generará calor, mientras que una reacción endotérmica absorberá calor del material, originando un sumidero de calor. Si una corriente eléctrica pasa a través de una

resistencia, se genera calor en el conductor. También se produce calor en los materiales fisiónables como consecuencia de las reacciones nucleares que tienen lugar dentro de los mismos.

PARED PLANA.- Como ejemplo en el que interviene la generación de calor, consideraremos una pared plana de espesor, $e = 2L$, Fig II.7, en la que se produce la generación constante de calor, uniformemente distribuida a través de la totalidad del volumen de material.

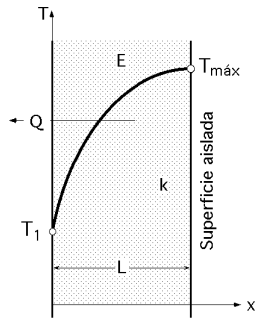


Fig II.7.- Pared plana
(Distribución de temperaturas)

Para su estudio consideraremos la mitad de su espesor, que nos va a permitir introducir el concepto de frontera aislada o adiabática; partiendo de la ecuación:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{E}{k} = 0 \quad \frac{1}{t} \frac{dT}{dt} = 0$$

Integrándola en la dirección x se tiene:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{E}{k} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{Ex}{k} + C_1 \quad T = -\frac{Ex^2}{2k} + C_1x + C_2$$

Condiciones de contorno:

Para, $x = 0$, $T = T_1$; $C_2 = T_1$

Para: $x = L$, se tiene una frontera aislada o adiabática; como el calor transferido ha llegado a esta frontera por conducción, la correspondiente condición a una superficie adiabática es:

$$q_{x=L} = -k \frac{dT}{dx} \bigg|_{x=L} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dx} \bigg|_{x=L} = 0 \quad 0 = -\frac{EL}{k} + C_1 \quad ; \quad C_1 = \frac{EL}{k}$$

Una frontera o límite aislado en un material sólido es aquella en la que resulta ser nulo el gradiente de temperaturas en dicho límite; sustituyendo C_1 y C_2 se obtiene la distribución de temperaturas:

$$T = T_1 + \frac{ELx}{k} \left(1 - \frac{x}{2L}\right)$$

que es una distribución parabólica con respecto a x ; el valor máximo de la temperatura, supuesto E manantial, se presenta en la superficie aislada, $x = L$:

$$T_L = T_{\text{máx}} = T_1 + \frac{EL^2}{2k} \quad \frac{T_{\text{máx}}}{T_1} = 1 + \frac{EL^2}{2kT_1}$$

Toda la energía generada dentro de la pared se conduce hacia la superficie libre en $x = 0$, en la forma:

$$Q = -kA \frac{dT}{dx} \bigg|_{x=0} = -kA \left(-\frac{Ex}{k} + \frac{EL}{k}\right) = AE(L - x)$$

No puede transferirse ninguna energía calorífica a través de la superficie extrema correspondiente a, $x = L$, porque está aislada y no puede almacenarse ninguna energía en el material, por cuanto se han impuesto condiciones estacionarias.

Un balance de energía de la pared en la superficie, $x = 0$, implica:

$$Q_{x=0} = -k A \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = \left| \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = -\frac{E x}{k} + \frac{E L}{k} \Big|_{x=0} = \frac{E L}{k} \right| = -A E L = -V E$$

siendo V el volumen de la pared plana.

PLACA PLANA RODEADA POR UN FLUIDO CONVECTOR.- Si a continuación se supone que rodeando a la placa se encuentra un fluido convector, Fig II.8, con temperatura T_F y coeficiente

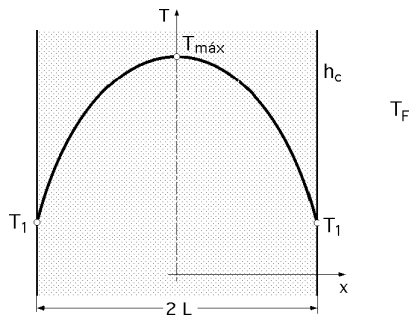


Fig II.8.- Placa plana rodeada por un fluido
(Distribución de temperaturas)

h_C , el calor generado en la placa atraviesa ésta por conducción, y luego va escapando al fluido exterior por convección; partiendo de:

$$T = -\frac{E x^2}{2k} + C_1 x + C_2 \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{E x}{k} + C_1$$

y dado que en esta nueva situación la condición de:

$$T_{máx} \quad \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = 0$$

se encuentra en el eje de la placa, $x = 0$ $C_1 = 0$; $T_{máx} = C_2$

Para calcular T_1 y $T_{máx}$ se tendrá en cuenta que el calor que atraviesa por conducción la cara exterior de la placa, escapa al fluido convector por convección, luego para, $x = L$ se tiene:

$$C_2 = T_{máx} = T_1 + \frac{E L^2}{2k}$$

$$-k \frac{T}{x} \Big|_{x=L} = h_C (T_1 - T_F) \quad ; \quad \frac{T}{x} \Big|_{x=L} = -\frac{h_C (T_1 - T_F)}{k} = -\frac{E L}{k}$$

$$T_1 = T_F + \frac{E L}{h_C} = -\frac{E L^2}{2k} + T_{máx} \quad ; \quad T_{máx} = T_F + \frac{E L}{h_C} + \frac{E L^2}{2k}$$

Distribución de temperaturas:

$$\begin{aligned} T = T_{máx} - \frac{E x^2}{2k} &= -\frac{E x^2}{2k} + T_1 + \frac{E L^2}{2k} = T_1 + \frac{E}{2k} (L^2 - x^2) = T_F + \frac{E L^2}{2k} - \frac{E x^2}{2k} + \frac{E L}{h_C} = \\ &= T_F + \frac{E L}{h_C} \left(\frac{L}{2} - \frac{x^2}{2L} + \frac{k}{h_C} \right) \end{aligned}$$

El calor que pasa de la placa al fluido es:

$$Q = 2 A h_C (T_1 - T_F) = 2 A h_C \left(T_F + \frac{E L}{h_C} - T_F \right) = 2 A E L = E V$$

PARED CILÍNDRICA.- Supongamos un conductor cilíndrico macizo, Fig II.9, por el que circula una corriente eléctrica de intensidad I y resistencia R . La superficie lateral del cilindro está a la temperatura T_0 .

La energía generada en el cilindro por unidad de volumen es:

$$E = \frac{R I^2}{V}$$

siendo V el volumen del cilindro.

El valor de E es constante para: $I = \text{Cte}$ y $R = \text{Cte}$.

La ecuación de la conducción monodimensional y estacionaria en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{E}{k} = 0$$

y la distribución de temperaturas se obtiene por integración:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{E r}{2k} + \frac{C_1}{r} \quad ; \quad T = -\frac{E r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

Para: $r = r_0$ y $T = T_0$, resulta:

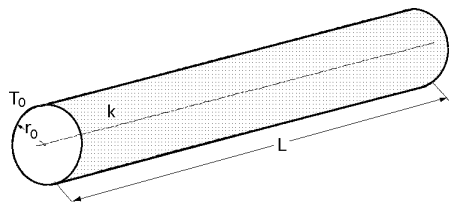


Fig II.9.- Pared cilíndrica

$$T_0 = -\frac{E r_0^2}{4k} + C_1 \ln r_0 + C_2$$

Para determinar la temperatura de la línea central del cilindro $r = 0$, se tiene:

$$\ln r = \ln 0 = -$$

es decir, la temperatura correspondiente tendría que ser $-\infty$, lo cual no es posible, luego $C_1 = 0$ y, por lo tanto:

$$C_2 = T_0 + \frac{E r_0^2}{4k}$$

$$T - T_0 = -\frac{E r^2}{4k} + \frac{E r_0^2}{4k} = \frac{E r_0^2}{4k} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} \quad ; \quad \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{E r_0^2}{4k T_0} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\}$$

La temperatura máxima del cilindro se encuentra a lo largo del eje del mismo, y vale:

$$\text{Para, } r = 0 \quad ; \quad T = T_{\text{máx}} = T_0 + \frac{E r_0^2}{4k}$$

Si se supone que el conductor cilíndrico emite calor al exterior, se tiene que:

$$\frac{T}{r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{h_c}{k} (T_0 - T_F) = -\frac{E r_0}{2k} \quad T_0 = T_F + \frac{E r_0}{2 h_c}$$

Teniendo en cuenta:

$$T - T_0 = \frac{E r_0^2}{4k} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\}$$

resulta la siguiente distribución de temperaturas:

$$T - T_F = \frac{E r_0}{2 h_c} + \frac{E r_0^2}{4k} - \frac{E r^2}{4k} = \frac{E r_0}{2 h_c} \left(1 + \frac{r_0 h_c}{2k} - \frac{r^2 h_c}{2k r_0} \right)$$

$$T_{\text{máx}} = T_F + \frac{E r_0}{2 h_c} \left(1 + \frac{r_0 h_c}{2k} \right) = T_F + \frac{E r_0}{2 h_c} \left(1 + \frac{Bi}{2} \right)$$

Si, $Bi \rightarrow 0$, sólido isoterma, $k \rightarrow \infty$, por lo que la temperatura variará preferentemente en el fluido

$$T = T_F + \frac{E r_0}{2 h_c}$$

Si, $Bi \rightarrow \infty$, resulta todo lo contrario, es decir, $h_c \rightarrow \infty$, por lo que el fluido será isoterma, y la diferencia de temperaturas se originará en el sólido, $T = T_F$

Calor eliminado al exterior:

$$Q = -k A \left(\frac{T}{r} \right)_{r=r_0} = -k A \frac{E r_0}{2k} = -E r_0^2 L = -E V$$

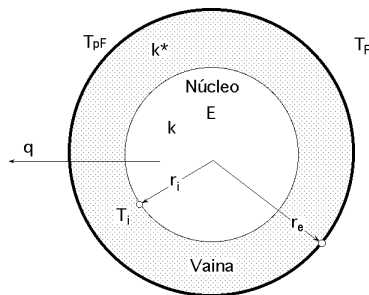


Fig II.10.- Núcleo generador de calor rodeado con una vaina

PARED CILÍNDRICA RODEADA CON UNA VAINA.- En este caso, supondremos que el núcleo genera calor, mientras que el recubrimiento no; en consecuencia, habrá que estudiar por separado el núcleo del recubrimiento o vaina, teniendo en cuenta que tienen una frontera común.

Supondremos el conjunto (núcleo-vaina) de la Fig II.10, en régimen estacionario y conducción monodimensional, es decir, $T = T(r)$.

Para el núcleo, que genera E, se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{E}{k} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{E r}{2k} + \frac{C_1}{r} \quad ; \quad T = -\frac{E r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2$$

y como para, $r = 0$, $C_1 = 0$, resulta:

$$T = -\frac{E r^2}{4k} + C_2$$

La distribución de temperaturas para la vaina, $E = 0$, es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad ; \quad T = C_3 \ln r + C_4$$

Condiciones de contorno:

a) Para: $r = r_i$ y $T = T_i$ común al núcleo y a la vaina, por ser la unión perfecta, se tiene:

$$T_i = C_2 - \frac{E r_i^2}{4k} = C_3 \ln r_i + C_4 \quad ; \quad C_2 = T_i + \frac{E r_i^2}{4k} = \frac{E r_i^2}{4k} + C_3 \ln r_i + C_4$$

que es una primera ecuación que relaciona las constantes de integración C_2 , C_3 y C_4 .

Como:

$$T = C_2 - \frac{E r^2}{4k} = T_i + \frac{E r_i^2}{4k} - \frac{E r^2}{4k}$$

para $r = 0$ se tiene la temperatura máxima: $T_{\text{máx}} = C_2 = T_i + \frac{E r_i^2}{4k}$

b) Como el calor desprendido por el núcleo, tiene que ser absorbido por la vaina, se tendrá:

$$q_{r=r_i}^{\text{vaina}} = q_{r=r_i}^{\text{núcleo}} \quad ; \quad -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_i}^{\text{núcleo}} = -k^* \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_i}^{\text{vaina}}$$

$$-k \left(-\frac{E r_i}{2k} \right) = -k^* \frac{C_3}{r_i} \quad ; \quad C_3 = -\frac{E r_i^2}{2k^*}$$

c) En la superficie periférica de la vaina en contacto con el medio exterior se tiene:

$$q_{r=r_e}^{\text{vaina}} = q_{r=r_e}^{\text{fluido}} \quad ; \quad q_{r=r_e}^{\text{vaina}} = -k^* \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_e} = -k^* \frac{C_3}{r_e} \quad -k^* \frac{C_3}{r_e} = h_C (T_{pF} - T_F)$$

$$q_{r=r_e}^{\text{fluido}} = h_C (T_{pF} - T_F)$$

$$C_3 = \frac{-h_C (T_{pF} - T_F) r_e}{k^*} = -\frac{E r_i^2}{2k^*} \quad ; \quad T_{pF} = T_F + \frac{E r_i^2}{2h_C r_e}$$

$$T = C_3 \ln r + C_4 = \left| \text{para: } r = r_e, T = T_{pF} \right| \quad T_{pF} = C_3 \ln r_e + C_4$$

$$T_F + \frac{E r_i^2}{2h_C r_e} = \frac{-E r_i^2}{2k^*} \ln r_e + C_4$$

$$C_4 = T_F + \frac{E r_i^2}{2h_C r_e} + \frac{E r_i^2}{2k^*} \ln r_e$$

Con los valores de C_3 y C_4 así encontrados, calculamos el valor de C_2

$$C_2 = \frac{E r_i^2}{4k} + C_3 \ln r_i + C_4 = T_F + E r_i^2 \left(\frac{1}{2h_C r_e} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{2k^*} \ln \frac{r_e}{r_i} \right)$$

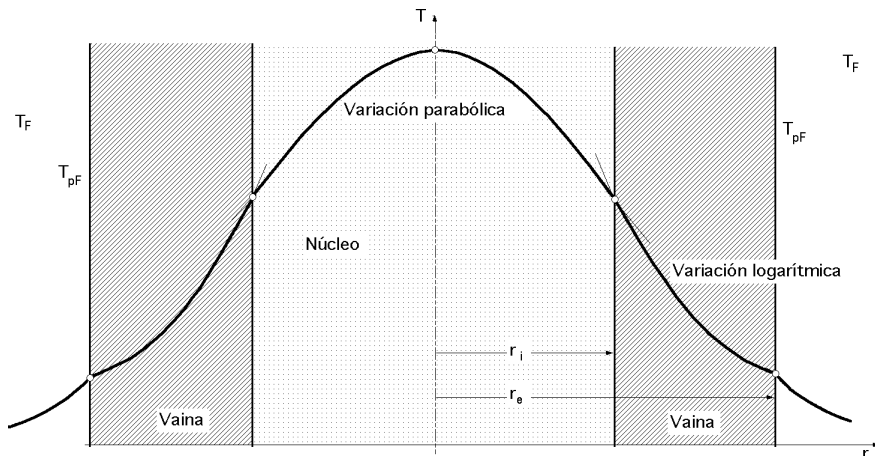


Fig II.11.- Distribución de temperaturas en el núcleo y en la vaina

Las funciones de los flujos térmicos unitarios son las siguientes:

$$\text{NÚCLEO: } \frac{dT}{dr} = - \frac{E r}{2 k} \quad ; \quad q = - k \frac{dT}{dr} = \frac{r E}{2} \quad (\text{aumenta con } r)$$

$$\text{VAINA: } \frac{dT}{dr} = - \frac{E r_i^2}{2 k^* r} \quad ; \quad q = - k^* \frac{dT}{dr} = \frac{r_i^2 E}{2 r} \quad (\text{disminuye cuando aumenta } r)$$

El calor total que se disipa al exterior es:

$$Q = q_{r=r_e} 2 r_e L = r_i^2 L E = V E$$

siendo V el volumen del núcleo.

$$\text{Si en el reactor hubiere } N \text{ elementos: } Q = r_i^2 L E N = V E$$

La distribución de temperaturas en el núcleo es parabólica:

$$T_{\text{núcleo}} = T_i + \frac{E r_i^2}{4 k} - \frac{E r^2}{4 k} = - \frac{E r^2}{4 k} + T_F + E r_i^2 \left(\frac{1}{2 h_c r_e} + \frac{1}{4 k} + \frac{1}{2 k^*} \ln \frac{r_e}{r_i} \right)$$

mientras que a la salida de la vaina es logarítmica:

$$T_{\text{vaina}} = - \frac{E r_i^2}{2 k^*} \ln r + T_F + E r_i^2 \left(\frac{1}{2 h_c r_e} + \frac{\ln r_e}{2 k^*} \right)$$

En el entronque común para $r = r_i$ se tiene:

$$q = q^* \quad ; \quad - k \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{núcleo}} = - k^* \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{vaina}}^* \quad ; \quad \frac{\frac{dT}{dr} \Big|_{\text{núcleo}}}{\frac{dT}{dr} \Big|_{\text{vaina}}^*} = \frac{k^*}{k}$$

que dice que las tangentes a las curvas, $T = T(r)$ y $T^* = T^*(r)$, son tanto más divergentes, cuanto más distintas sean las conductividades k y k^* .

III.- CONDUCCION DE CALOR EN REGIMEN ESTACIONARIO EN FUNCION DE DOS O MAS VARIABLES

III.1.- METODO ANALITICO

En los casos de conducción de calor estudiados se supone que la distribución de la temperatura es función de una sola variable, es decir, sólo se han estudiado los sistemas unidimensionales en régimen permanente. A continuación vamos a estudiar los problemas de conducción definidos por dos o más variables independientes, es decir, los casos de conducción estacionaria en dos dimensiones espaciales o los de conducción variable en una sola dirección (la otra variable es el tiempo).

Aunque las soluciones analíticas obtenidas para estos casos tienen muy poco valor práctico, se incluyen para hacer resaltar las técnicas matemáticas que han de utilizarse en los casos más complejos y de mayor utilidad que se abordarán más adelante. Cuando se tenga más interés en los resultados finales que en los desarrollos matemáticos de las soluciones, la obtención de éstas en algunos problemas de importancia práctica se han representado por gráficos relativamente sencillos.

CONDUCCION EN REGIMEN PERMANENTE EN PLACAS RECTANGULARES.- Vamos a estudiar en primer lugar la conducción en régimen permanente de una placa rectangular, como la representada en la Fig III.1.

Para calcular la distribución de temperaturas en la placa utilizaremos coordenadas cartesianas, considerando como plano (x,y) el de la placa y como origen de coordenadas el vértice. Suponemos que no existe conducción en la dirección z, normal a la placa; ésto se cumplirá si la placa tiene una gran longitud en esta última dirección, de forma que no se produzcan efectos de borde $L \gg b$; $L \gg a$, o si las caras x, y están aisladas térmicamente.

La ecuación de conducción del calor para el régimen permanente, en coordenadas cartesianas

y dos dimensiones es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal a la que se puede aplicar el principio de superposición.

La solución de la ecuación anterior se obtiene suponiendo que la distribución de temperaturas se puede expresar como el producto de dos funciones, cada una de las cuales depende solamente de una de las variables independientes; es decir, que si $X(x)$ es únicamente función de x y si $Y(y)$ es únicamente función de y , podemos suponer que la temperatura T , viene dada por:

$$T = X(x) Y(y)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación diferencial de partida y ordenando la expresión resultante, se tiene:

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad -\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

Como cada miembro de esta ecuación depende sólo de una variable, los dos miembros tienen que ser iguales a una constante, $-\lambda^2$, por lo que se puede poner:

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda^2$$

sistema que es equivalente al de las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \lambda^2 Y = 0$$

cuyas soluciones son,

$$Y = B_1 \operatorname{Sh}(\lambda y) + B_2 \operatorname{Ch}(\lambda y)$$

$$X = B_3 \operatorname{sen}(\lambda x) + B_4 \cos(\lambda x)$$

por lo que la distribución de temperaturas T es:

$$T = \{B_1 \operatorname{Sh}(\lambda y) + B_2 \operatorname{Ch}(\lambda y)\} \{B_3 \operatorname{sen}(\lambda x) + B_4 \cos(\lambda x)\}$$

en la que λ y las B son constantes que hay que determinar mediante las condiciones de contorno.

PLACA RECTANGULAR CON UNA DISTRIBUCION DE TEMPERATURA DADA EN UNA ARISTA Y NULA EN LAS DEMAS.- Consideremos la placa rectangular de la Fig III.2 de dimensiones respectivas a y b , según los ejes x e y .

Se puede suponer que la temperatura es nula en los bordes, $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, y variable en el borde, $y = b$, que se puede representar como $f(x)$ en el campo $0 \leq x \leq L$, de forma que se puede

operar como si fuese conocida. La anulaci3n de la temperatura en los otros bordes no es esencial, pues basta con que se mantenga constante, tal como T_c , por lo que el problema puede reducirse al expuesto anteriormente mediante la superposici3n de una constante $-T_c$ a toda la configuraci3n.

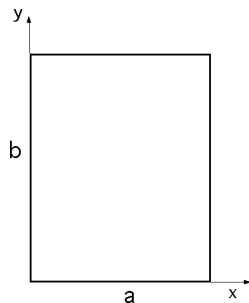


Fig III.1

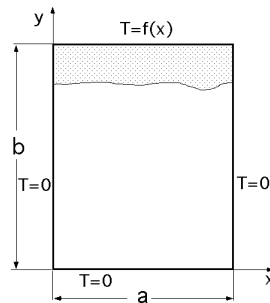


Fig III.2

Las condiciones de contorno que han de aplicarse a la ecuaci3n general para la determinaci3n de las constantes son las siguientes,

Para,

$$\begin{aligned} x = 0, T = 0 & \quad ; \quad x = a, T = 0 \\ y = 0, T = 0 & \quad ; \quad y = b, T = f(x) \end{aligned}$$

La aplicaci3n de las condiciones, $y = 0, T = 0 \quad B_2 = 0$
 $x = 0, T = 0 \quad B_4 = 0$ que la ecuaci3n general se reduzca a:

$$T = B_1 \operatorname{Sh}(\gamma y) B_3 \operatorname{sen}(\alpha x) = B \operatorname{Sh}(\gamma y) \operatorname{sen}(\alpha x)$$

en la que B sustituye al producto, $B = B_1 B_3$

La aplicaci3n de la condici3n:

$$x = a, T = 0, \quad 0 = B \operatorname{Sh}(\gamma y) \operatorname{sen}(\alpha a)$$

Para que esta ecuaci3n se cumpla para todos los valores de y, es necesario que:

$$\operatorname{sen}(\alpha a) = 0$$

que se satisface para, $\alpha = 0, \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \dots$, y en general por, $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$, siendo, $n = 0, 1, 2, \dots$

Para cada valor de n se obtiene un valor de γ que proporciona una soluci3n diferente de la ecuaci3n:

$$T = B \operatorname{Sh}(\gamma y) \operatorname{sen}(\alpha_n x)$$

por lo que la soluci3n general ser3 la suma de todas estas soluciones parciales, por lo que:

$$T = \sum_{n=0} B_n \operatorname{Sh}(\gamma_n y) \operatorname{sen}(\alpha_n x)$$

en la que B_n representa la constante B para cada una de las soluciones.

Como para, $n = 0$ resulta que, $B_n = 0$, el primer término de la serie se anula, por lo que:

$$T = \sum_{n=1} B_n \operatorname{Sh} \left(\frac{nY}{a} \right) \sin \left(\frac{nX}{a} \right)$$

La aplicación de la condición, $y = b$, $T = f(x)$, conduce al cálculo de B_n

$$T = f(x) = \sum_{n=1} B_n \operatorname{Sh} \left(\frac{nb}{a} \right) \sin \left(\frac{nX}{a} \right), \text{ con } \frac{n}{a} = \frac{n}{a}, n = 0, 1, 2, 3, \dots; 0 \leq x \leq a$$

En una serie infinita de funciones de la forma:

$$\sin \left(\frac{x}{a} \right), \sin \left(\frac{2x}{a} \right), \sin \left(\frac{3x}{a} \right), \dots, \sin \left(\frac{nx}{a} \right), \dots$$

éstas son ortogonales, cuando se cumple que:

$$\int_0^a \sin \left(\frac{ix}{a} \right) \sin \left(\frac{jx}{a} \right) dx = 0, \text{ con, } i \neq j$$

y tiene un valor determinado en un instante considerado.

Por lo tanto, si la serie:

$$T = f(x) = \sum_{n=1} B_n \operatorname{Sh} \left(\frac{nb}{a} \right) \sin \left(\frac{nX}{a} \right) = B_1 \operatorname{Sh} \left(\frac{b}{a} \right) \sin \left(\frac{x}{a} \right) + \dots + B_n \operatorname{Sh} \left(\frac{nb}{a} \right) \sin \left(\frac{nX}{a} \right)$$

es convergente e integrable, y la multiplicamos por $\sin \left(\frac{nX}{a} \right)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) \sin \left(\frac{nX}{a} \right) dx &= \\ &= B_1 \operatorname{Sh} \left(\frac{b}{a} \right) \int_0^a \sin \left(\frac{x}{a} \right) \sin \left(\frac{nX}{a} \right) dx + \dots + B_n \operatorname{Sh} \left(\frac{nb}{a} \right) \int_0^a \sin^2 \left(\frac{nX}{a} \right) dx + \dots \end{aligned}$$

Por definición de ortogonalidad se hacen cero todas las integrales del segundo miembro, menos la correspondiente al coeficiente B_n , por lo que:

$$B_n \operatorname{Sh} \left(\frac{nb}{a} \right) = \frac{\int_0^a f(x) \sin \left(\frac{nX}{a} \right) dx}{\int_0^a \sin^2 \left(\frac{nX}{a} \right) dx} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \left(\frac{nX}{a} \right) dx$$

por lo que la expresión de la distribución de temperaturas toma la siguiente forma:

$$T = \sum_{n=1} \frac{2}{a} \frac{\operatorname{Sh} \left(\frac{nY}{a} \right)}{\operatorname{Sh} \left(\frac{nb}{a} \right)} \sin \left(\frac{nX}{a} \right) \int_0^a f(x) \sin \left(\frac{nX}{a} \right) dx = \sum_{n=1} \frac{2}{a} \frac{\operatorname{Sh} \left(\frac{nY}{a} \right)}{\operatorname{Sh} \left(\frac{nb}{a} \right)} \sin \left(\frac{nX}{a} \right) \int_0^a f(x) \sin \left(\frac{nX}{a} \right) dx$$

El calor que atraviesa una superficie se determina a partir de la ecuación de Fourier, particularizando para dicha superficie e integrando a lo largo de ella.

Para el caso particular del calor transmitido a través de la superficie, $x = 0$, por unidad de altura, perpendicular al plano (x,y) , se tiene:

$$\begin{aligned}
 Q|_{x=0} &= \int_{y=0}^b k \frac{T(x,y)}{x} \Big|_{x=0} dy = \\
 &= \int_{y=0}^b -\frac{2k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{ny}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \cos \frac{nx}{a} \frac{n}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{nx}{a} dx + f(x) \sin \frac{nx}{a} \sin \frac{nx}{a} \Big|_{x=0} dy = \\
 &= \int_{y=0}^b -\frac{2k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{ny}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \frac{n}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{nx}{a} dx dy = \\
 &= -\frac{2k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ch} \frac{ny}{a} \Big|_0^b}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \frac{n}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{nx}{a} dx = \\
 &= -\frac{2k}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ch} \frac{nb}{a} - 1}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{nx}{a} dx
 \end{aligned}$$

PLACA CON UN BORDE A TEMPERATURA UNIFORME.- En el caso particular Fig III.3 de que el borde, $y = b$, se mantenga a temperatura constante, $f(x) = T_0$, y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^a T_0 \sin \frac{nx}{a} dx = \frac{T_0 a}{n} \{1 - (-1)^n\}$$

la ecuación anterior se convierte en:

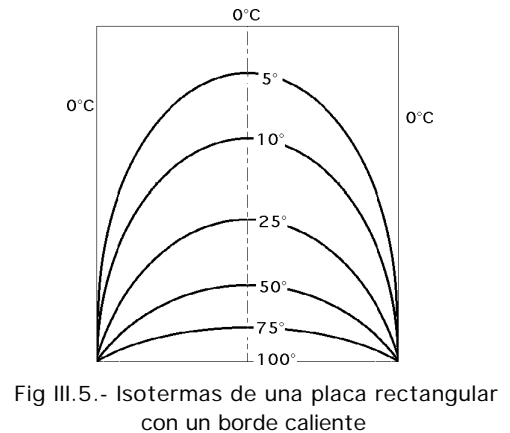
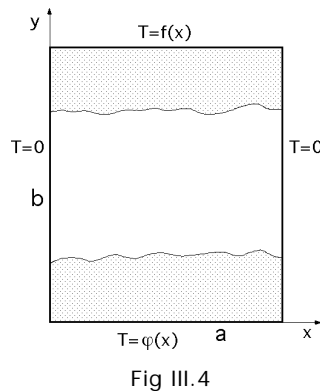
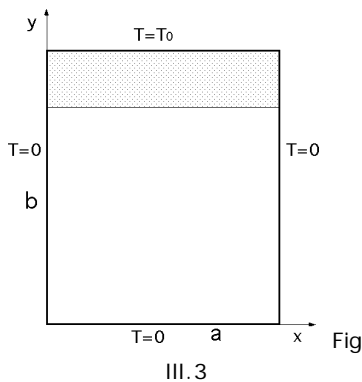
$$\frac{T}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{ny}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{nx}{a} = 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{ny}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \frac{\sin \frac{nx}{a}}{n}$$

que permite calcular la temperatura en cualquier punto de la placa.

En la Fig III.5 se representa la forma de las isotermas de una placa rectangular calentada por un borde.

- Si el borde caliente es la base inferior, y los demás están a $T = 0$, la solución se encuentra cambiando y por, $b - y$:

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{n(b-y)}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \frac{\sin \frac{nx}{a}}{n}$$



- Si el borde caliente es el correspondiente a, $x = a$ y los demás están a, $T = 0$, la solución se encuentra cambiando y por x ; x por y ; a por b ; b por a :

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\text{Sh} \frac{nx}{b}}{\text{Sh} \frac{na}{b}} \frac{\text{sen} \frac{ny}{b}}{n}$$

- Si el borde caliente es el correspondiente a, $x = 0$ y los demás están a, $T = 0$, la solución se encuentra cambiando en el caso anterior, x por, $a - x$:

$$\frac{T}{T_0} = 4 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\text{Sh} \frac{n(a-x)}{b}}{\text{Sh} \frac{na}{b}} \frac{\text{sen} \frac{ny}{b}}{n}$$

PLACA RECTANGULAR CON DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN DOS BORDES OPUESTOS

La placa rectangular con distribución de temperaturas en dos bordes opuestos se puede reducir al caso anterior mediante una simple superposición. Consideremos, por ejemplo, el caso que se presenta en la Fig III.4, en el que la placa tiene la distribución, $T = f(x)$, para, $y = b$, mientras que para, $y = 0$, $T = \phi(x)$. Si se mantienen los otros bordes a, $T = 0$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \text{Para,} \quad \begin{aligned} y &= b, & T &= f(x) \\ y &= 0, & T &= \phi(x) \\ x &= 0, & T &= 0 \\ x &= a, & T &= 0 \end{aligned}$$

Debido al carácter lineal de la ecuación diferencial se puede reducir a dos sistemas más sencillos, definiendo u y v de modo que: $T = u + v$

Los símbolos u y v se emplean para designar las soluciones de los dos sistemas siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \quad ; \quad \text{Para,} & y &= b; u = f(x) \\ & & y &= 0; u = 0 \\ & & x &= 0; u = 0 \\ & & x &= a; u = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \quad ; \quad \text{Para,} & y &= b; v = 0 \\ & & y &= 0; v = f(x) \\ & & x &= 0; v = 0 \\ & & x &= a; v = 0 \end{aligned}$$

La solución del sistema de la primera de estas ecuaciones es de la forma:

$$u = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{ny}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \sin \frac{nx}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{nx}{a} dx$$

Si, $f(x) = T_0$; $u = 4 T_0 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\text{Sh} \frac{ny}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \frac{\sin \frac{nx}{a}}{n}$

Mediante el cambio de variable, $y' = b - y$, la solución anterior se aplica a la segunda ecuación, quedando en la forma:

$$v = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{n(b-y)}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \sin \frac{nx}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{nx}{a} dx$$

La solución de la ecuación, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, con sus condiciones de contorno, será la suma de las anteriores

$$T = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{nx}{a}}{\text{Sh} \frac{nb}{a}} \left(\text{Sh} \frac{ny}{a} + \text{Sh} \frac{n(b-y)}{a} \right) \int_0^a f(x) \sin \frac{nx}{a} dx$$

DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN MAS DE UNA SUPERFICIE DE CONTORNO.- Una generalización para cuando varias superficies tengan temperaturas diferentes, como es el caso de la placa que se propone en la Fig III.6 con diferentes condiciones de contorno, la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0 \quad ; \quad \text{Para,} & y &= b; T = f_2(x) \\ & & y &= 0; T = T_2 \\ & & x &= 0; T = T_1 \\ & & x &= a; T = f_1(y) \end{aligned}$$

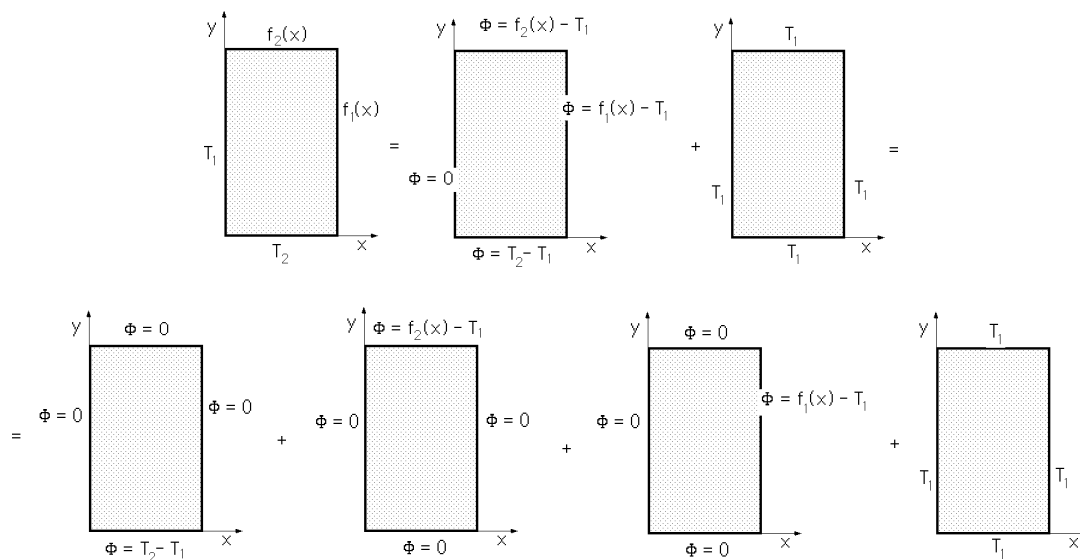


Fig III.6.- Distribución de temperaturas en más de una superficie de contorno

que se transforma, restando a todas las caras T_1 en:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \text{Para,} \quad \begin{aligned} y = b; & \quad \phi = f_2(x) - T_1 \\ y = 0; & \quad \phi = T_2 - T_1 \\ x = 0; & \quad \phi = 0 \\ x = a; & \quad \phi = f_1(y) - T_1 \end{aligned}$$

Este sistema se puede descomponer en otros tres de la forma:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \text{Para,} \quad \begin{aligned} y = b; & \quad \phi_1 = 0 \\ y = 0; & \quad \phi_1 = T_2 - T_1 \\ x = 0; & \quad \phi_1 = 0 \\ x = a; & \quad \phi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \text{Para,} \quad \begin{aligned} y = b; & \quad \phi_2 = 0 \\ y = 0; & \quad \phi_2 = 0 \\ x = 0; & \quad \phi_2 = 0 \\ x = a; & \quad \phi_2 = f_1(y) - T_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \text{Para,} \quad \begin{aligned} y = b; & \quad \phi_3 = f_2(x) - T_1 \\ y = 0; & \quad \phi_3 = 0 \\ x = 0; & \quad \phi_3 = 0 \\ x = a; & \quad \phi_3 = 0 \end{aligned}$$

por cuanto sumando dichos sistemas de ecuaciones se recompone el sistema inicial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

con:

$$(x,y) = \theta_1(x,y) + \theta_2(x,y) + \theta_3(x,y)$$

y la distribución de temperaturas:

$$T(x,y) = T_1 + \theta_1(x,y) + \theta_2(x,y) + \theta_3(x,y)$$

como suma de soluciones que hemos analizado anteriormente.

CONDICION DE CONTORNO DE CONVECCION.- Cuando exista convección en una o en varias caras del sólido se efectúa un análisis similar al visto anteriormente; si a través de la cara, $x = a$, existe un intercambio térmico con un fluido exterior a T_F , se tienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \text{Para,} \quad \begin{aligned} y = b ; \quad \theta &= 0 \\ y = 0 ; \quad \theta &= 0 \\ x = 0 ; \quad \theta &= 0 \\ x = a ; \quad -k \frac{d\theta}{dx} \bigg|_{x=a} &= h_C(T_1 - T_F) \end{aligned}$$

Se resuelven matemáticamente las expresiones resultantes y las constantes A_1, A_2, B_1, B_2 y C , de las que sólo son independientes cuatro de ellas, en función de la nueva condición de unicidad. Finalmente se superponen las soluciones y se calcula la distribución final de las temperaturas reales.

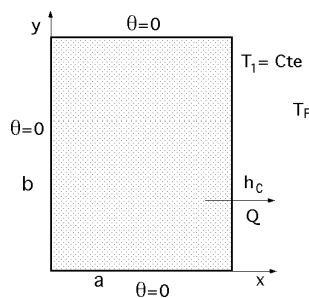


Fig III.7

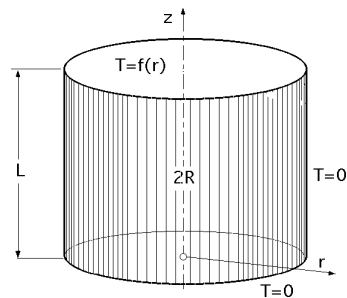


Fig III.8

CONDUCCION EN UN CILINDRO CIRCULAR DE LONGITUD FINITA..- Vamos a estudiar la conducción estacionaria de un cilindro sólido de longitud finita L y radio exterior R , en dos dimensiones espaciales, tal como el de la Fig III.8.

Si la distribución de temperaturas es función de la coordenada radial r , y de la axial z , $T = T(r,z)$, e independiente de la coordenada circunferencial y suponiendo existe una simetría axial para las condiciones de contorno, la ecuación de conducción general en coordenadas cilíndricas, se reduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Este caso es un problema de conducción bidimensional, aunque las condiciones de contorno sean independientes de la coordenada; la distribución de temperaturas es la solución general de la ecuación anterior.

Mediante un método similar buscamos una solución de la forma:

$$T = R(r) Z(z)$$

siendo $R(r)$ y $Z(z)$ función de las variables r y z respectivamente; sustituyendo en:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

y ordenándola en r y z , obtenemos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

en la que el miembro de la derecha es función de z y el de la izquierda de r .

Como los dos miembros son iguales y función de diferentes variables, ambos habrán de ser iguales a una constante $- \lambda^2$, obteniéndose así un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = - \lambda^2$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \lambda^2 R = 0 \quad R = B_1 J_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0 \quad Z = B_3 \text{Sh}(\lambda z) + B_4 \text{Ch}(\lambda z)$$

La primera de estas ecuaciones es la función de Bessel de orden cero, mientras que la segunda conduce a funciones hiperbólicas; las expresiones $J_0(\lambda r)$ y $Y_0(\lambda r)$, son las funciones de Bessel de primera especie y orden cero.

Por consiguiente, aplicando las definiciones de R y de Z de la ecuación, $T = R(r) Z(z)$, la solución de la ecuación en coordenadas cilíndricas se puede expresar en la forma:

$$T = \{B_1 J_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r)\} \{B_3 \text{Sh}(\lambda z) + B_4 \text{Ch}(\lambda z)\}$$

Si en el cilindro de la Fig III.8 se mantienen todas las superficies a temperatura nula, excepto en la base superior del cilindro, $z = L$, donde supondremos una temperatura $f(r)$, el problema se reduce a encontrar la ecuación que proporciona la distribución de temperaturas a través del cilindro con las siguientes condiciones:

$$\text{Para: } z = 0, T = 0$$

$$\text{Para: } z = L, T = f(r)$$

Para: $r = R, T = 0$

Para: $r = 0$, la temperatura debe ser finita en $r = 0$; en esta situación, $Y_0(0) = 1$, para $r = 0$, es decir, $B_2 = 0$

- Por la condición, $z = 0, T = 0$, se tiene, $B_4 = 0$, quedando:

$$T = B J_0(r) \operatorname{Sh}(z)$$

- La aplicación de la condición, $r = R, T = 0$, exige que:

$$0 = B J_0(R) \operatorname{Sh}(z)$$

y para que esta condición pueda ser satisfecha por todos los valores de, R , comprendidos entre 0 y L , es necesario que:

$$J_0(R) = 0$$

Las tablas de valores de $J_0(R)$ indican que J_0 toma valores nulos según una sucesión de valores de, R , que difieren entre sí una cantidad que tiende a 2 conforme, R ; por consiguiente, hay un número infinito de valores de R que satisfacen $J_0(R)$.

La solución general es la suma de las correspondientes a cada una de las R_n de la forma:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{Sh}(z) J_0(r/R_n)$$

- La aplicación de la condición, $z = L, T = f(r)$, permite determinar los valores de B_n si la serie siguiente es convergente:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{Sh}(L/R_n) J_0(r/R_n) = B_1 \operatorname{Sh}(L/R_1) J_0(r/R_1) + \dots + B_n \operatorname{Sh}(L/R_n) J_0(r/R_n)$$

para lo cual las funciones, $J_0(r/R_1), J_0(r/R_2), \dots, J_0(r/R_n)$, deben formar un agrupamiento ortogonal en el intervalo, $0 \leq r \leq R$, con respecto a un factor ponderal r .

Los valores de B son constantes que hay que determinar; si la serie es convergente e integrable, se puede poner:

$$\begin{aligned} \int_0^R r f(r) J_0(r/R_n) dr &= \\ &= B_1 \operatorname{Sh}(L/R_1) \int_0^R r J_0(r/R_1) J_0(r/R_n) dr + B_2 \operatorname{Sh}(L/R_2) \int_0^R r J_0(r/R_2) J_0(r/R_n) dr + \dots \\ &\quad \dots + B_n \operatorname{Sh}(L/R_n) \int_0^R r J_0^2(r/R_n) dr + \dots \end{aligned}$$

Por definición de ortogonalidad:

$$\int_0^R r J_0(\alpha_i r) J_0(\alpha_j r) dr = 0, \text{ con } i \neq j$$

todas las integrales del segundo miembro a excepción de la última, son cero, es decir:

$$\int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr = B_n \text{Sh}(\alpha_n L) \int_0^R r J_0^2(\alpha_n r) dr$$

en la que:

$$\int_0^R r J_0^2(\alpha_n r) dr = \frac{R^2}{2} \{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)\} = \frac{R^2 J_1^2(\alpha_n R)}{2}$$

$$B_n \text{Sh}(\alpha_n L) = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr}{\frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_n R)}$$

obteniéndose la siguiente distribución de temperaturas:

$$T = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh}(\alpha_n z) J_0(\alpha_n r)}{\text{Sh}(\alpha_n L) J_1^2(\alpha_n R)} \int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr$$

En el caso particular de que la temperatura en la base superior sea constante es decir, $f(r) = T_0$, permaneciendo nula en las restantes superficies, y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^R r J_0(\alpha_n r) dr = \frac{R}{\alpha_n} J_1(\alpha_n R)$$

$$\frac{T}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n R} \frac{\text{Sh}(\alpha_n z) J_0(\alpha_n r)}{\text{Sh}(\alpha_n L) J_1(\alpha_n R)}$$

En el caso de que la temperatura en las demás superficies tenga un valor constante en vez de ser nula, T_0 se interpreta sencillamente como la diferencia entre la temperatura en el extremo $z = L$ y este valor constante.

El principio de superposición se puede aplicar para la resolución de otros casos, como la distribución de temperaturas en un cilindro calentado a temperatura uniforme en los extremos y a temperatura cero en la superficie lateral, que se puede encontrar sumando dos soluciones de la forma de la ecuación anterior.

En la Fig III.9 se ha representado la distribución de la temperatura en el eje, $r = 0$, para el cilindro sólido calentado a temperatura constante en un extremo.

También se representa el caso de un cilindro calentado en las dos bases. La solución se consigue fácilmente por superposición a partir del primer caso.

Tabla III.1.- VALORES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,00	1,0000	0,0000	-	-	1,0000	0,0000	+	-
0,05	0,9993	0,0249	-1,9793	-12,7898	1,0006	0,0250	8,1142	19,9096
0,10	0,9975	0,0499	-1,5342	-6,4589	1,0025	0,0500	2,4270	9,8538
0,15	0,9943	0,0747	-1,2707	-4,3636	1,0056	0,0752	2,0300	6,4775
0,20	0,9900	0,0995	-1,0811	-3,3238	1,0100	0,1005	1,7527	4,7759
0,25	0,9844	0,1240	-0,9315	-2,7041	1,0156	0,1259	1,5415	3,7470
0,30	0,9776	0,1483	-0,8072	-2,2931	1,0226	0,1516	1,3724	3,0559
0,35	0,9696	0,1723	-0,7003	-2,0004	1,0308	0,1776	1,2327	2,5591
0,40	0,9604	0,1960	-0,6060	-1,7808	1,0404	0,2040	1,1145	2,1843
0,45	0,9500	0,2193	-0,5214	-1,6095	1,0512	0,2307	1,0129	1,8915
0,50	0,9384	0,2422	-0,4445	-1,4714	1,0634	0,2578	0,9244	1,6564
0,55	0,9257	0,2647	-0,3738	-1,3571	1,0770	0,2855	0,8465	1,4635
0,60	0,9120	0,2867	-0,3085	-1,2603	1,0920	0,3137	0,7775	1,3028
0,65	0,8971	0,3081	-0,2476	-1,1767	1,1084	0,3424	0,7158	1,1667
0,70	0,8812	0,3290	-0,1906	-1,1032	1,1263	0,3718	0,6605	1,0502
0,75	0,8642	0,3492	-0,1371	-1,0375	1,1456	0,4019	0,6105	0,9495
0,80	0,8462	0,3688	-0,0868	-0,9781	1,1665	0,4328	0,5653	0,8617
0,85	0,8273	0,3877	-0,0392	-0,9236	1,1889	0,4645	0,5242	0,7846
0,90	0,8075	0,4059	0,0056	-0,8731	1,2129	0,4971	0,4867	0,7165
0,95	0,7867	0,4233	0,0480	-0,8258	1,2386	0,5306	0,4524	0,6559
1,00	0,7652	0,4400	0,0882	-0,7812	1,2660	0,5651	0,4210	0,6019
1,05	0,7428	0,4559	0,1262	-0,7387	1,2952	0,6007	0,3921	0,5534
1,10	0,7196	0,4709	0,1621	-0,6981	1,3261	0,6379	0,3656	0,5097
1,15	0,6957	0,4950	0,1960	-0,6589	1,3589	0,6754	0,3411	0,4703
1,20	0,6711	0,4982	0,2280	-0,6211	1,3937	0,7146	0,3185	0,4345
1,25	0,6459	0,5106	0,2582	-0,5843	1,4304	0,7552	0,2976	0,4021
1,30	0,6200	0,5220	0,2865	-0,5485	1,4692	0,7973	0,2782	0,3725
1,35	0,5937	0,5324	0,3130	-0,5134	1,5102	0,8409	0,2603	0,3455
1,40	0,5668	0,5419	0,3379	-0,4791	1,5533	0,8860	0,2436	0,3208
1,45	0,5395	0,5504	0,3610	-0,4454	1,5988	0,9329	0,2281	0,2981
1,50	0,5118	0,5579	0,3852	-0,4123	1,6467	0,9816	0,2138	0,2773
1,55	0,4837	0,5644	0,4022	-0,3797	1,6970	1,0322	0,2004	0,2582
1,60	0,4554	0,5699	0,4204	-0,3475	1,7499	1,0848	0,1879	0,2406
1,65	0,4267	0,5743	0,4370	-0,3159	1,8055	1,1394	0,1763	0,2243
1,70	0,3979	0,5777	0,4520	-0,2847	1,8639	1,1963	0,1655	0,2093
1,75	0,3690	0,5801	0,4654	-0,2539	1,9252	1,2555	0,1553	0,1959
1,80	0,3399	0,5815	0,4774	-0,2236	1,9805	1,3171	0,1459	0,1826
1,85	0,3109	0,5818	0,4878	-0,1938	2,0570	1,3813	0,1371	0,1707
1,90	0,2818	0,5811	0,4968	-0,1644	2,1277	1,4482	0,1288	0,1595
1,95	0,2528	0,5794	0,5043	-0,1354	2,2018	1,5179	0,1211	0,1494
2,00	0,2238	0,5767	0,5103	-0,1070	2,2795	1,5906	0,1138	0,1398
2,05	0,1951	0,5730	0,5150	-0,0790	2,3610	1,6664	0,1071	0,1310
2,10	0,1666	0,5682	0,5182	-0,0516	2,4462	1,7455	0,1007	0,1227
2,15	0,1383	0,5626	0,5202	-0,0248	2,5356	1,8280	0,0945	0,1150
2,20	0,1103	0,5559	0,5207	0,0014	2,6291	1,9140	0,0892	0,1079
2,25	0,0827	0,5483	0,5200	0,0271	2,7270	2,0039	0,0840	0,1012
2,30	0,0555	0,5398	0,5180	0,0522	2,8296	2,0978	0,0791	0,0949
2,35	0,0287	0,5304	0,5148	0,0767	2,9369	2,1957	0,0745	0,0891
2,40	0,0025	0,5201	0,5104	0,1004	3,0492	2,2981	0,0702	0,0837
2,45	-0,0232	0,5090	0,5048	0,1235	3,1668	2,4050	0,0661	0,0785
2,50	-0,0483	0,4970	0,4980	0,1459	3,2898	2,5167	0,0623	0,0738
2,55	-0,0729	0,4843	0,4902	0,1675	3,4185	2,6334	0,0587	0,0694
2,60	-0,0968	0,4708	0,4813	0,1883	3,5532	2,7553	0,0554	0,0652
2,65	-0,1199	0,4565	0,4714	0,2084	3,6942	2,8828	0,0522	0,0613
2,70	-0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,8416	3,0161	0,0492	0,0577
2,75	-0,1641	0,4259	0,4486	0,2460	3,9959	3,1554	0,0464	0,0543
2,80	-0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,1573	3,3010	0,0438	0,0511
2,85	-0,2051	0,3928	0,4223	0,2801	4,3261	3,4533	0,0413	0,0481
2,90	-0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,5027	3,6126	0,0390	0,0452

VALORES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL (Continuación)

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$K_0(x)$	$K_1(x)$
2,95	-0,2426	0,3574	0,3927	0,3107	4,6875	3,7791	0,0368	0,0426
3,00	-0,2600	0,3390	0,3768	0,3246	4,8807	3,9533	0,0347	0,0401
3,05	-0,2765	0,3201	0,3602	0,3376	5,0829	4,1355	0,0327	0,0378
3,10	-0,2920	0,3009	0,3431	0,3496	5,2944	4,3262	0,0309	0,0355
3,15	-0,3066	0,2812	0,3253	0,3606	5,5157	4,5256	0,0292	0,0335
3,20	-0,3201	0,2613	0,3070	0,3707	5,7472	4,7342	0,0276	0,0316
3,25	-0,3327	0,2411	0,2882	0,3797	5,9893	4,9525	0,0260	0,0298
3,30	-0,3443	0,2206	0,2690	0,3878	6,2426	5,1809	0,0246	0,0281
3,35	-0,3548	0,2000	0,2495	0,3949	6,5076	5,4199	0,0232	0,0265
3,40	-0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,7848	5,6701	0,0219	0,0250
3,45	-0,3727	0,1583	0,2094	0,4061	7,3782	6,2058	0,0196	0,0222
3,55	-0,3864	0,1164	0,1684	0,4132	7,6956	6,7927	0,0175	0,0197
3,65	-0,3960	0,0745	0,1269	0,4165	9,3751	7,1068	0,0165	0,0186
3,70	-0,3923	0,0538	0,1060	0,4166	9,7386	7,4357	0,0156	0,0176
3,75	-0,4014	0,0332	0,0852	0,4158	9,1189	7,7800	0,0147	0,0166
3,80	-0,4025	0,0128	0,0645	0,4141	9,5168	8,1404	0,0139	0,0157
3,85	-0,4026	-0,0073	0,0438	0,4114	9,9332	8,5177	0,0132	0,0148
3,90	-0,4018	-0,0272	0,0233	0,4078	10,3689	8,9127	0,0124	0,0140
3,95	-0,3999	-0,0468	0,0030	0,4033	10,8248	9,3264	0,0118	0,0132
4,00	-0,3971	-0,0660	-0,0169	0,3979	11,3019	9,7594	0,0111	0,0124
4,05	-0,3933	-0,0848	-0,0366	0,3916	11,8011	10,2129	0,0105	0,0117
4,10	-0,3886	-0,1032	-0,0560	0,3845	12,3235	10,6877	0,0099	0,0111
4,15	-0,3830	-0,1212	-0,0751	0,3767	12,8703	11,1849	0,0094	0,0105
4,20	-0,3765	-0,1386	-0,0937	0,3680	13,4424	11,7056	0,0089	0,0099
4,25	-0,3692	-0,1555	-0,1119	0,3585	14,0412	12,2508	0,0084	0,0093
4,30	-0,3610	-0,1719	-0,1296	0,3483	14,6679	12,8219	0,0079	0,0088
4,35	-0,3520	-0,1876	-0,1467	0,3375	15,3239	13,4199	0,0075	0,0083
4,40	-0,3422	-0,2027	-0,1633	0,3259	16,0104	14,0462	0,0071	0,0079
4,45	-0,3370	-0,2172	-0,1793	0,3137	16,7290	14,7021	0,0067	0,0074
4,50	-0,3205	-0,2310	-0,1947	0,3010	17,4811	15,3892	0,0064	0,0070
4,55	-0,3086	-0,2441	-0,2094	0,2876	18,2684	16,1088	0,0060	0,0066
4,60	-0,2961	-0,2565	-0,2234	0,2737	19,0926	16,8625	0,0057	0,0063
4,65	-0,2830	-0,2681	-0,2367	0,2593	19,9553	17,6520	0,0054	0,0059
4,70	-0,2693	-0,2790	-0,2493	0,2445	20,8584	18,4790	0,0051	0,0056
4,75	-0,2551	-0,2891	-0,2612	0,2292	21,9039	19,3453	0,0048	0,0053
4,80	-0,2404	-0,2985	-0,2723	0,2135	22,7936	20,2528	0,0046	0,0050
4,85	-0,2252	-0,3070	-0,2825	0,1975	23,8299	21,2034	0,0043	0,0047
4,90	-0,2097	-0,3146	-0,2920	0,1812	24,9147	22,1993	0,0041	0,0045
4,95	0,1938	0,3215	-0,3007	0,1646	20,0506	23,2426	0,0039	0,0042
5,00	-0,1776	-0,3275	-0,3085	0,1478	27,2398	24,3356	0,0036	0,0040
5,10	-0,1443	-0,3371	-0,3216	0,1137	29,7900	26,6800	0,0033	0,0036
5,20	-0,1103	-0,3432	-0,3313	0,0792	32,5800	29,2500	0,0029	0,0032
5,30	-0,0758	-0,3460	-0,3374	0,0445	35,6500	32,0800	0,0026	0,0029
5,40	-0,0412	-0,3453	-0,3402	0,0101	39,0100	35,1800	0,0023	0,0025
5,50	-0,0068	-0,3414	-0,3395	0,0238	42,6900	38,5900	0,0021	0,0023
5,60	0,0270	-0,3343	-0,3354	0,0568	46,7400	42,3300	0,0019	0,0020
5,70	0,0599	-0,3241	-0,3282	0,0887	51,1700	46,4400	0,0017	0,0018
5,80	0,0917	-0,3110	-0,3177	0,1192	56,0400	50,9500	0,0015	0,0016
5,90	0,1220	-0,2951	-0,3044	0,1481	61,3800	55,9000	0,0013	0,0014
6,00	0,1506	-0,2767	-0,2882	0,1750	67,2300	61,3400	0,0012	0,0013
6,10	0,1773	-0,2559	-0,2694	0,1998	73,6600	67,3200	0,0011	0,0012
6,20	0,2017	-0,2329	-0,2483	0,2223	80,7200	73,8900	0,0010	0,0010
6,30	0,2238	-0,2081	-0,2251	0,2422	88,4600	81,1000	0,0009	0,0009
6,40	0,2433	-0,1816	-0,1999	0,2596	96,9600	89,0300	0,0008	0,0008
6,50	0,2601	-0,1538	-0,1732	0,2732	106,3000	97,7400	0,0007	0,0007

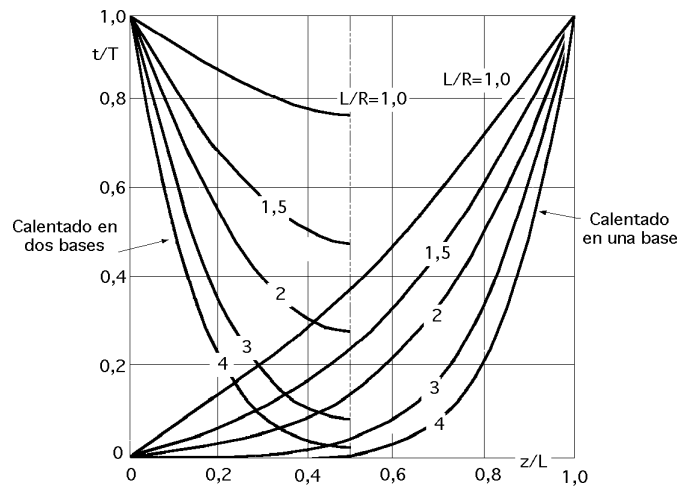
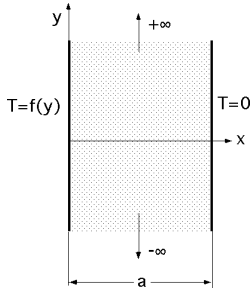


Fig III.9.- Distribución axial de la temperatura en un cilindro sólido de longitud finita

DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN SECCIONES RECTANGULARES

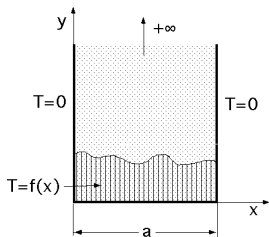
a) Rectángulo infinito con distribución de temperatura inicial en, $x = 0$



$$\begin{aligned} x = 0 & ; -\infty < y < +\infty ; T = f(y) \\ x = a & ; -\infty < y < +\infty ; T = 0 \end{aligned}$$

$$T(x,y) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \sin \frac{\pi y}{a} \frac{dx}{\cos \frac{(a-x)\pi}{a} + \text{Ch} \frac{(x-y)\pi}{a}}$$

b) Rectángulo semiinfinito con distribución de temperatura inicial en, $y=0$



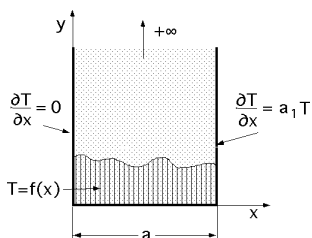
$$\begin{aligned} x = 0 & ; 0 < y < +\infty ; T = 0 \\ x = a & ; 0 < y < +\infty ; T = 0 \\ y = 0 & ; 0 < x < a ; T = f(x) \end{aligned}$$

$$T(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) e^{-\left(\frac{n\pi y}{a} \right)} \int_0^a f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx$$

con n raíces de, $n = \frac{n\pi}{a}$

Para, $f(x) = 0$; $T(x,y) = \frac{4}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{(2n+1)\pi x}{a} \right) e^{-\frac{(2n+1)\pi y}{a}}}{2n+1} ; \quad \frac{(2n+1)\pi}{a}$

c) Rectángulo semiinfinito con distribución de temperaturas en la base, con convección lateral en una cara y con aislamiento en la otra cara



$$x = 0 ; 0 < y < +\infty ; \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$x = a ; 0 < y < +\infty ; \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = a_1 T = -\frac{h_C}{k} T$$

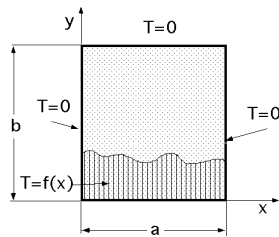
$$y = 0 ; 0 < x < a ; T = f(x)$$

$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{n} + a_1^2) e^{-(\frac{2}{n} + a_1^2)y}}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1} \cos(\frac{n}{a}x) \int_0^a f(x) \cos(\frac{n}{a}x) dx$$

con raíces de, $\tan(\frac{n}{a}a) = a_1 = -\frac{h_C}{k}$

Para, $f(x) = 0$; $\frac{(x,y)}{0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 e^{-\frac{n}{a}y}}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1} \frac{\cos(\frac{n}{a}x)}{\cos(\frac{n}{a}a)}$

d) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior



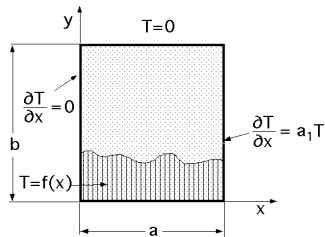
$$\begin{aligned} x=0 & ; 0 < y < b ; T=0 \\ x=a & ; 0 < y < b ; T=0 \\ y=0 & ; 0 < x < a ; T=f(x) \\ y=b & ; 0 < x < a ; T=0 \end{aligned}$$

$$T(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh}\{\frac{n}{a}(b-y)\}}{\text{Sh}(\frac{n}{a}b)} \sin(\frac{n}{a}x) \int_0^a f(x) \sin(\frac{n}{a}x) dx$$

con raíces de, $\frac{n}{a} = \frac{n}{a}$

Para, $f(x) = 0$; $\frac{(x,y)}{0} = \frac{4}{n=1,3,5,\dots} \frac{\text{Sh}\{\frac{n}{a}(b-y)\}}{\text{Sh}(\frac{n}{a}b)} \frac{\sin(\frac{n}{a}x)}{n}$

e) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior, convección en una de las caras y aislamiento en la otra.



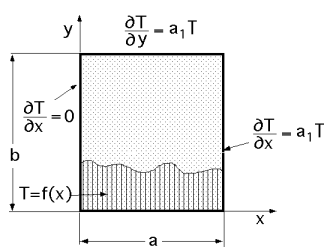
$$\begin{aligned} x=0 & ; 0 < y < b ; \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = 0 \\ x=a & ; 0 < y < b ; \frac{T}{x} \Big|_{x=a} = a_1 T = -\frac{h_C}{k} T \\ y=0 & ; 0 < x < a ; T=f(x) \\ y=b & ; 0 < x < a ; T=0 \end{aligned}$$

$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{n} + a_1^2) \cos(\frac{n}{a}x)}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1} \frac{\text{Sh}\{\frac{n}{a}(b-y)\}}{\text{Sh}(\frac{n}{a}b)} \int_0^a f(x) \cos(\frac{n}{a}x) dx$$

con raíces de, $\tan(\frac{n}{a}a) = a_1 = -\frac{h_C}{k}$

Para, $f(x) = 0$; $\frac{(x,y)}{0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \frac{\text{Sh}\{\frac{n}{a}(b-y)\}}{\cos(\frac{n}{a}a) \text{Sh}(\frac{n}{a}b)} \frac{\cos(\frac{n}{a}x)}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1}$

f) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior, convección en una de las caras y en la base superior y aislamiento en la otra.



$$x = 0 ; 0 < y < b ; \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$x = a ; 0 < y < b ; \frac{T}{x} \Big|_{x=a} = a_1 T = - \frac{h_C}{k} T$$

$$y = 0 ; 0 < x < a ; T = f(x)$$

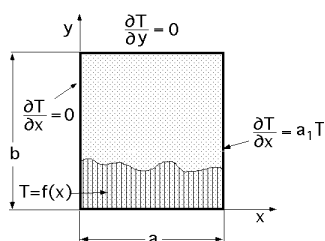
$$y = b ; 0 < x < a ; \frac{T}{y} \Big|_{y=b} = a_1 T = - \frac{h_C}{k} T$$

$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{n} + a_1^2) \cos(\frac{n}{2} x)}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1} \frac{n \operatorname{Ch}\{ \frac{n}{2}(b-y) \} + a_1 \operatorname{Sh}\{ \frac{n}{2}(b-y) \}}{n \operatorname{Ch}(\frac{n}{2}b) + a_1 \operatorname{Sh}(\frac{n}{2}b)} \int_0^a f(x) \cos(\frac{n}{2} x) dx$$

$$\text{con } n \text{ raíces de, } n \operatorname{tg}(\frac{n}{2} a) = a_1 = - \frac{h_C}{k}$$

$$\text{Para, } f(x) = 0 ; \frac{(x,y)}{0} = 2 a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{Ch}\{ \frac{n}{2}(b-y) \} + a_1 \operatorname{Sh}\{ \frac{n}{2}(b-y) \}}{\cos(\frac{n}{2} a) \{ n \operatorname{Ch}(\frac{n}{2}b) + a_1 \operatorname{Sh}(\frac{n}{2}b) \}} \frac{\cos(\frac{n}{2} x)}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1}$$

g) Rectángulo finito, con distribución de temperatura en la base inferior, convección en una de las caras y aislamiento en la otra cara y en la base superior.



$$x = 0 ; 0 < y < b ; \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$x = a ; 0 < y < b ; \frac{T}{x} \Big|_{x=a} = a_1 T = - \frac{h_C}{k} T$$

$$y = 0 ; 0 < x < a ; T = f(x)$$

$$y = b ; 0 < x < a ; \frac{T}{y} \Big|_{y=b} = 0$$

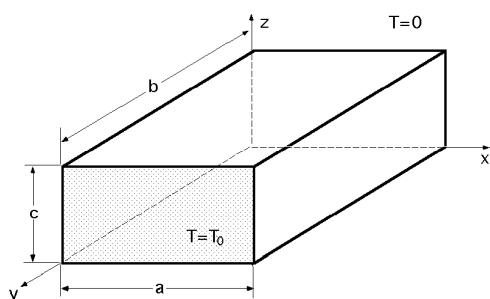
$$T(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{n} + a_1^2) \cos(\frac{n}{2} x)}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1} \frac{\operatorname{Ch}\{ \frac{n}{2}(b-y) \}}{\operatorname{Ch}(\frac{n}{2}b)} \int_0^a f(x) \cos(\frac{n}{2} x) dx$$

$$\text{con } n \text{ raíces de, } n \operatorname{tg}(\frac{n}{2} a) = a_1 = - \frac{h_C}{k}$$

$$\text{Para, } f(x) = 0 ; \frac{(x,y)}{0} = 2 a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Ch}\{ \frac{n}{2}(b-y) \}}{\cos(\frac{n}{2} a) \operatorname{Ch}(\frac{n}{2}b)} \frac{\cos(\frac{n}{2} x)}{a(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1}$$

DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN PARALELEPIPEDOS

a) Paralelepípedo con una cara a T_0 y el resto a $T=0$.



$$x = 0 ; x = a ; T = 0$$

$$y = 0 ; T = 0$$

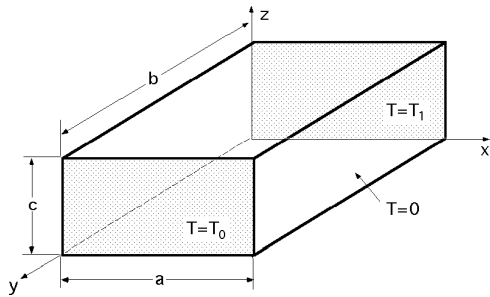
$$y = b ; T = T_0$$

$$z = 0 ; z = c ; T = 0$$

$$T(x,y,z) = 16 T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Sh}(\frac{y}{b})}{\operatorname{Sh}(\frac{b}{b})} \frac{\operatorname{Sh}(\frac{m}{c})}{\operatorname{Sh}(\frac{c}{c})} \frac{\operatorname{Sh}(\frac{n}{a})}{\operatorname{Sh}(\frac{a}{a})}$$

$$m = \frac{(2m+1)}{c} ; n = \frac{(2n+1)}{a} ; 2 = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

b) Paralelepípedo con una cara a T_0 y la opuesta a T_1

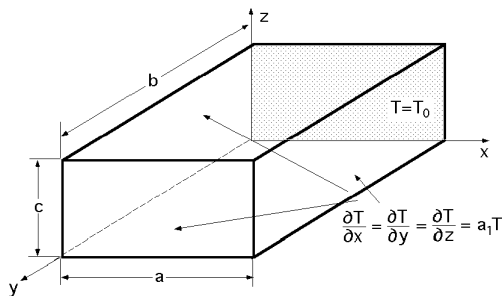


$$\begin{aligned} x = 0 ; x = a & ; T = 0 \\ y = 0 ; T & = T_1 \\ y = b ; T & = T_0 \\ z = 0 ; z = c & ; T = 0 \end{aligned}$$

$$T(x,y,z) = 16 \sum_{n=0} \sum_{m=0} \frac{T_1 \operatorname{Sh} \{ (b-y) \} + T_0 \operatorname{Sh} (y)}{\operatorname{Sh} (b)} \frac{\operatorname{Sh} (mz)}{m} \frac{\operatorname{Sh} (nx)}{n}$$

$$m = \frac{(2m+1)}{c} ; \quad n = \frac{(2n+1)}{a} ; \quad 2 = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

c) Paralelepípedo con una cara a T_0 y convección en las demás



$$\begin{aligned} y = 0 & \quad T = T_0 & ; y = b & \quad \frac{T}{y} \Big|_{y=b} = a_1 \\ x = 0 & \quad \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = -a_1 & ; x = a & \quad \frac{T}{x} \Big|_{x=a} = a_1 \\ z = 0 & \quad \frac{T}{z} \Big|_{z=0} = -a_1 & ; z = c & \quad \frac{T}{z} \Big|_{z=c} = a_1 \end{aligned}$$

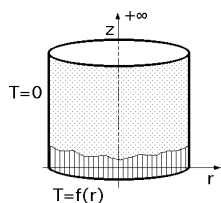
$$T(x,y,z) = 4 a_1^2 T_0 \sum_{n=1} \sum_{m=1} \frac{a_1 \operatorname{Sh} \{ (b-y) \} + \operatorname{Ch} (b-y)}{\{ a_1 \operatorname{Sh} (b) + \operatorname{Ch} (b) \} \cos (na) \cos (mc)} \frac{\cos (nx) \cos (mz)}{\{ a (\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1 \} \{ c (\frac{2}{m} + a_1^2) + a_1 \}}$$

$$m = \frac{(2m+1)}{c} ; \quad n = \frac{(2n+1)}{a} ; \quad 2 = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

con n y m raíces de: $n \operatorname{tg} (na) = a_1 ; \quad m \operatorname{tg} (mc) = a_1$

DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN CILINDROS

a) Cilindro semiinfinito con distribución de temperatura inicial en la base



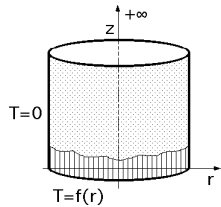
$$z = 0 ; \quad 0 < r < R ; \quad T = f(r)$$

$$r = R ; \quad 0 < z < \infty ; \quad T = 0$$

$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1} \frac{J_0 (\frac{nr}{R})}{J_1^2 (\frac{nR}{R})} e^{- (\frac{n}{R})^2 z} \int_0^R r f(r) J_0 (\frac{nr}{R}) dr ; \quad J_0 (\frac{nR}{R}) = 0$$

Para, $f(r) = 0 ; \quad T(r,z) = \frac{2}{R} \sum_{n=1} \frac{J_0 (\frac{nr}{R})}{J_1 (\frac{nR}{R})} e^{- \frac{n^2}{R^2} z}$

b) Cilindro finito con distribución de temperaturas en su base



$$z = 0 ; 0 < r < R ; T = f(r)$$

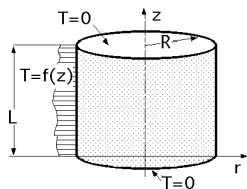
$$r = R ; 0 < z < L ; T = 0$$

$$z = L ; 0 < z < L ; T = 0$$

$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r) \text{Sh}\{\alpha_n (L-z)\}}{J_1^2(\alpha_n R) \text{Sh}(\alpha_n L)} \int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr ; J_0(\alpha_n R) = 0$$

$$\text{Para, } f(r) = 0 ; T(r,z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r) \text{Sh}\{\alpha_n (L-z)\}}{(\alpha_n R) J_1(\alpha_n R) \text{Sh}(\alpha_n L)}$$

c) Cilindro finito con distribución de temperaturas lateral



$$z = 0 ; 0 < r < R ; T = 0$$

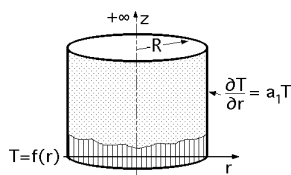
$$r = R ; 0 < z < L ; T = f(z)$$

$$z = L ; 0 < z < L ; T = 0$$

$$T(r,z) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(\frac{n r}{L}) \text{sen}(\frac{n z}{L})}{I_0(\frac{n R}{L})} \int_0^L f(z) \text{sen}(\frac{n z}{L}) dz$$

$$\text{Para, } f(r) = 0 ; T(r,z) = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0(\frac{(2n+1) r}{L}) \text{sen}(\frac{(2n+1) z}{L})}{I_0(\frac{(2n+1) R}{L}) (2n+1)}$$

d) Cilindro semiinfinito con distribución de temperaturas en la base y convección lateral



$$z = 0 ; 0 < r < R ; T = f(r)$$

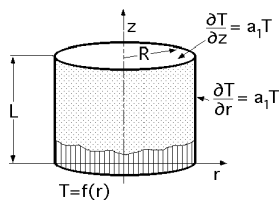
$$r = R ; 0 < z < L ; \frac{T}{r} \Big|_{r=R} = a_1 T = -\frac{h_C}{k} T$$

$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r)}{(\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R)} e^{-\alpha_n z} \int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr$$

$$\text{con } \alpha_n \text{ raíces de: } a_1 J_0(\alpha_n R) = -\alpha_n J_1(\alpha_n R) ; \frac{J_0(\alpha_n R)}{J_1(\alpha_n R)} = \frac{\alpha_n}{a_1} = \frac{R \alpha_n}{R a_1} = \frac{R \alpha_n}{Bi}$$

$$\text{Para, } f(r) = 0 ; T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_n R)}{(\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R)} e^{-\alpha_n z}$$

e) Cilindro finito con distribución de temperaturas en la base inferior, convección en la base superior y convección lateral



$$z = 0 ; 0 < r < R ; T = f(r)$$

$$r = R ; 0 < z < L ; \frac{T}{r} \bigg|_{r=R} = a_1 T = - \frac{h_C}{k} T$$

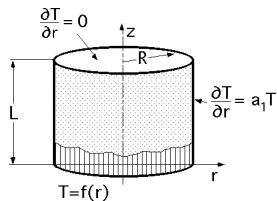
$$z = L ; 0 < r < R ; \frac{T}{z} \bigg|_{z=L} = a_1 T = - \frac{h_C}{k} T$$

$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha_n R)}{(\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R)} \frac{\alpha_n \text{Ch}\{(\alpha_n(L-z))\} + a_1 \text{Sh}\{(\alpha_n(L-z))\}}{\alpha_n \text{Ch}(\alpha_n L) + a_1 \text{Sh}(\alpha_n L)} \int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr$$

$$\text{con } \alpha_n \text{ raíces de: } a_1 J_0(\alpha_n R) = \alpha_n J_1(\alpha_n R) ; \frac{J_0(\alpha_n R)}{J_1(\alpha_n R)} = \frac{\alpha_n}{a_1} = \frac{R \alpha_n}{R h_C} = \frac{R \alpha_n}{\text{Bi}}$$

$$\text{Para, } f(r) = 0 ; T(r,z) = \frac{2 a_1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r)}{(\alpha_n^2 + a_1^2) J_0(\alpha_n R)} \frac{\alpha_n \text{Ch}\{(\alpha_n(L-z))\} + a_1 \text{Sh}\{(\alpha_n(L-z))\}}{\alpha_n \text{Ch}(\alpha_n L) + a_1 \text{Sh}(\alpha_n L)}$$

f) Cilindro finito con distribución de temperaturas en la base inferior, la base superior aislada térmicamente y convección lateral



$$z = 0 ; 0 < r < R ; T = f(r)$$

$$r = R ; 0 < z < L ; \frac{T}{r} \bigg|_{r=R} = - \frac{h_C}{k} T$$

$$z = L ; 0 < r < R ; \frac{T}{z} \bigg|_{z=L} = 0$$

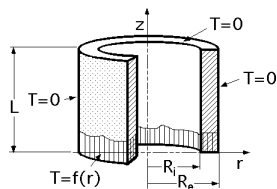
$$T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha_n R)}{(\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R)} \frac{\text{Ch}\{(\alpha_n(L-z))\}}{\text{Ch}(\alpha_n L)} \int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr$$

$$\text{con } \alpha_n \text{ raíces de: } a_1 J_0(\alpha_n R) = \alpha_n J_1(\alpha_n R) ; \frac{J_0(\alpha_n R)}{J_1(\alpha_n R)} = \frac{\alpha_n}{a_1} = \frac{R \alpha_n}{R h_C} = \frac{R \alpha_n}{\text{Bi}}$$

$$\text{Para, } f(r) = 0 ; T(r,z) = \frac{2 a_1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r)}{(\alpha_n^2 + a_1^2) J_0(\alpha_n R)} \frac{\text{Ch}\{(\alpha_n(L-z))\}}{\text{Ch}(\alpha_n L)}$$

DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN TUBOS

a) Tubo finito con distribución de temperatura inicial en la base y cero en el resto



$$r = R_e ; 0 < z < L ; T = 0$$

$$r = R_i ; 0 < z < L ; T = 0$$

$$z = 0 ; R_i < r < R_e ; T = f(r)$$

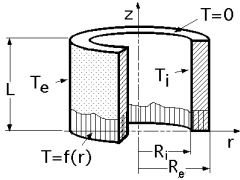
$$z = L ; R_i < r < R_e ; T = 0$$

$$T(r,z) = \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha_n R_e) C_0(\alpha_n r)}{J_0^2(\alpha_n R_i) - J_0^2(\alpha_n R_e)} \frac{\text{Sh}\{(\alpha_n(L-z))\}}{\text{Sh}(\alpha_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r f(r) C_0(\alpha_n r) dr$$

$$C_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0(\alpha_n R_i) - J_0(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n r)$$

con α_n raíces de: $J_0(\alpha_n R_e) Y_0(\alpha_n R_i) - J_0(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n R_e) = 0$

b) Tubo finito con distribución de temperaturas en su base inferior, 0 en la superior, y T_e y T_i en las laterales, exterior e interior, respectivamente.



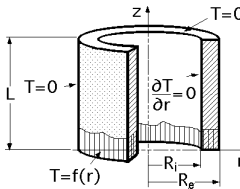
$$\begin{aligned} r = R_e & ; 0 < z < L & ; T = T_e \\ r = R_i & ; 0 < z < L & ; T = T_i \\ z = 0 & ; R_i < r < R_e & ; T = f(r) \\ z = L & ; R_i < r < R_e & ; T = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(r,z) = & \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha_n R_e) C_0(\alpha_n r)}{J_0^2(\alpha_n R_i) - J_0^2(\alpha_n R_e)} \frac{\text{Sh}\{(\alpha_n(L-z))\}}{\text{Sh}(\alpha_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r f(r) C_0(\alpha_n r) dr + \\ & + \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha_n R_e) C_0(\alpha_n r)}{J_0^2(\alpha_n R_i) - J_0^2(\alpha_n R_e)} \frac{\text{Sh}(\alpha_n z)}{\text{Sh}(\alpha_n L)} \frac{2 T_e \{ \text{Ch}(\alpha_n L) - 1 \} J_0(\alpha_n R_i)}{J_0(\alpha_n R_e)} - \frac{2 T_i}{J_0(\alpha_n R_e)} \end{aligned}$$

$$C_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0(\alpha_n R_i) - J_0(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n r)$$

con α_n raíces de: $J_0(\alpha_n R_e) Y_0(\alpha_n R_i) - J_0(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n R_e) = 0$

c) Tubo finito con distribución de temperaturas en la base inferior, cero en la base superior y superficie lateral exterior y aislada térmicamente en la superficie lateral interior



$$\begin{aligned} r = R_e & ; 0 < z < L & ; T = 0 \\ r = R_i & ; 0 < z < L & ; \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ z = 0 & ; R_i < r < R_e & ; T = f(r) \\ z = L & ; R_i < r < R_e & ; T = 0 \end{aligned}$$

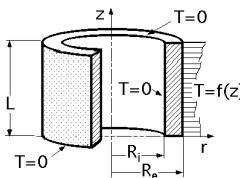
$$T(r,z) = \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\alpha_n R_e) C_0(\alpha_n r)}{J_0^2(\alpha_n R_i) - J_0^2(\alpha_n R_e)} \frac{\text{Sh}\{(\alpha_n(L-z))\}}{\text{Sh}(\alpha_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r f(r) N_0(\alpha_n r) dr$$

$$C_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0(\alpha_n R_i) - J_0(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n r)$$

$$N_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0'(\alpha_n R_i) - J_0'(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n r)$$

con α_n raíces de: $J_0(\alpha_n R_e) Y_0'(\alpha_n R_i) - J_0'(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n R_e) = 0$

d) Tubo finito con temperatura cero en las bases superior, inferior y superficie lateral interior y distribución de temperaturas en la superficie lateral exterior

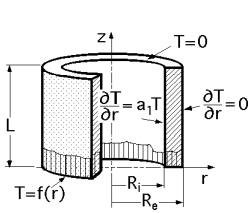


$$\begin{aligned} r = R_i & ; 0 < z < L & ; T = 0 \\ r = R_e & ; 0 < z < L & ; T = f(z) \\ z = 0 & ; R_i < r < R_e & ; T = 0 \\ z = L & ; R_i < r < R_e & ; T = 0 \end{aligned}$$

$$T(r,z) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_0(\alpha_n r) I_0(\alpha_n R_i) - K_0(\alpha_n R_i) I_0(\alpha_n r)}{K_0(\alpha_n R_e) I_0(\alpha_n R_i) - K_0(\alpha_n R_i) I_0(\alpha_n R_e)} \sin(\alpha_n z) \int_0^L f(z) \sin(\alpha_n z) dz$$

con α_n raíces de: $\alpha_n = \frac{n}{L}$

e) Tubo finito con distribución de temperatura en la base inferior, temperatura cero en la base superior, convección en la superficie lateral interior y aislamiento térmico en la superficie lateral exterior.



$$\begin{aligned} r = R_i & \quad ; \quad 0 < z < L & \quad ; \quad \frac{T}{r} \Big|_{r=R_e} = a_1 T \\ r = R_e & \quad ; \quad 0 < z < L & \quad ; \quad \frac{T}{r} \Big|_{r=R_e} = 0 \\ z = 0 & \quad ; \quad R_i < r < R_e & \quad ; \quad T = f(r) \\ z = L & \quad ; \quad R_i < r < R_e & \quad ; \quad T = 0 \end{aligned}$$

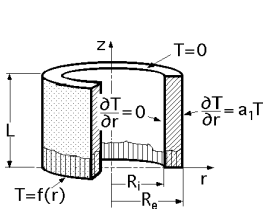
$$T(r,z) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_i) + a_1 J_0(\alpha_n R_i) \}^2 N_0(\alpha_n r)}{\{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_i) + a_1 J_0(\alpha_n R_i) \}^2 - (\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R_e)} \frac{\text{Sh}\{\alpha_n (L-z)\}}{\text{Sh}(\alpha_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r f(r) N_0(\alpha_n r) dr$$

$$N_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0'(\alpha_n R_i) - J_0'(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n r)$$

con α_n raíces de:

$$\{ \alpha_n Y_0'(\alpha_n R_i) + a_1 Y_0(\alpha_n R_i) \} J_0'(\alpha_n R_e) - \{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_i) + a_1 J_0(\alpha_n R_i) \} Y_0'(\alpha_n R_e) = 0$$

f) Tubo finito con distribución de temperatura en la base inferior, temperatura cero en la base superior, convección en la superficie lateral exterior y aislamiento térmico en la superficie lateral interior.



$$\begin{aligned} r = R_i & \quad ; \quad 0 < z < L & \quad ; \quad \frac{T}{r} \Big|_{r=R_e} = 0 \\ r = R_e & \quad ; \quad 0 < z < L & \quad ; \quad \frac{T}{r} \Big|_{r=R_e} = a_1 T \\ z = 0 & \quad ; \quad R_i < r < R_e & \quad ; \quad T = f(r) \\ z = L & \quad ; \quad R_i < r < R_e & \quad ; \quad T = 0 \end{aligned}$$

$$T(r,z) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \}^2 N_0(\alpha_n r)}{\{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \}^2 - (\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R_i)} \frac{\text{Sh}\{\alpha_n (L-z)\}}{\text{Sh}(\alpha_n L)} \int_{R_i}^{R_e} r f(r) N_0(\alpha_n r) dr$$

$$N_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0'(\alpha_n R_i) - J_0'(\alpha_n R_i) Y_0(\alpha_n r)$$

con α_n raíces de:

$$Y_0'(\alpha_n R_i) \{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \} - J_0'(\alpha_n R_i) \{ \alpha_n Y_0'(\alpha_n R_e) + a_1 Y_0(\alpha_n R_e) \} = 0$$

III.2.- METODO GRAFICO

El método gráfico se basa en una serie de condicionamientos geométricos de la fórmula vectorial de la ley de Fourier, que especifica que las isotermas y las líneas de flujo térmico constante (fronteras adiabáticas), son siempre perpendiculares en los puntos en que se cortan; las líneas de simetría son también fronteras adiabáticas. Por lo tanto, se puede hacer un diagrama esquemático de las isotermas y de las líneas equipotenciales del flujo térmico, y perfeccionar el sistema hasta conseguir se satisfaga la condición de perpendicularidad entre ellas. La exactitud de la

distribución de temperaturas va a depender del cuidado que se ponga en la construcción de las citadas líneas; en cada punto de intersección, las tangentes a las líneas correspondientes han de ser perpendiculares; los cuadriláteros curvilíneos hay que construirlos de forma que la suma de los dos lados opuestos sean iguales, Fig III.10, es decir:

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ac} + \overline{bd}$$

Si suponemos un cuadrado curvilíneo típico, por el que fluye una cierta cantidad de calor q_i , aplicando la ley de Fourier (por unidad de profundidad) se obtiene:

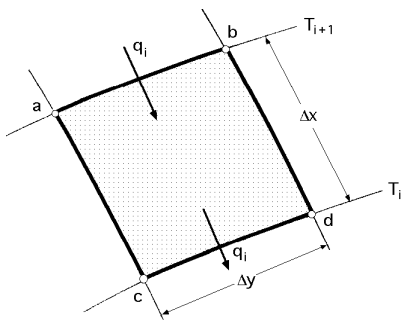


Fig III.10- Cuadrado curvilíneo de isotermas y adiabáticas, $x = y$

$$q_i = k \quad y \quad \frac{T_{i+1} - T_i}{x}$$

y si se dibujan todos los cuadrados curvilíneos de forma que se cumpla que $x = y$ y las subdivisiones de temperatura serán iguales.

Entonces se puede expresar la diferencia de temperaturas entre dos isotermas adyacentes, en función de la diferencia de temperaturas total a través de la superficie completa y del número de subdivisiones de temperaturas iguales M , por lo que:

$$T_{i+1} - T_i = \frac{T_{total}}{M} = \frac{T_1 - T_2}{M}, \text{ con } x = y$$

siendo T_1 y T_2 las temperaturas extremas, $T_1 > T_2$. Sustituyendo en q_i resulta:

$$q_i = k \frac{T_1 - T_2}{M}$$

Si el número de líneas de flujo térmico es N , la transferencia de calor a través de cada canal entre dos líneas térmicas equipotenciales adyacentes, será la misma para todas ellas, siendo el calor transferido total de la forma:

$$Q_{total} = N q_i = k \frac{N}{M} (T_1 - T_2) = k F (T_1 - T_2), \text{ con } x = y$$

El factor $F = \frac{N}{M}$ se denomina Factor de forma de la conducción, y es la relación entre el número de líneas de flujo y el número de líneas isotermas. ro

Se conocen algunas expresiones que proporcionan una expresión matemática del factor de forma F para diversas geometrías sencillas. Así, por ejemplo, para la conducción en una pared plana:

$$Q = k \frac{A}{L} \quad T = k F \quad T$$

siendo $F = \frac{A}{L}$ el factor de forma para este caso de conducción

Para un cilindro hueco de longitud L el factor de forma de la conducción térmica es:

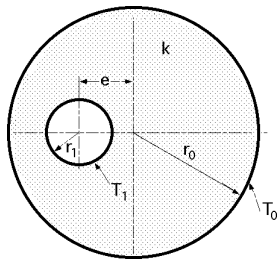
$$F = \frac{2 L}{\ln \frac{r_0}{r_i}}$$

Los factores de forma se pueden obtener para una gran variedad de geometrías, en los que:

$$Q = k F (T_1 - T_0)$$

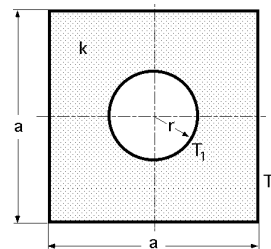
viniedo recogidos algunos resultados a continuación.

1) Cilindros circulares excéntricos, de radios r_0 y r_1 , y longitud L



$$F = \frac{2 L}{\text{Arg Ch} \left(\frac{r_0^2 + r_1^2 - e^2}{2 r_0 r_1} \right)}$$

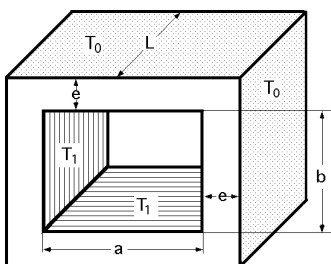
2) Cilindro circular dentro de un cuadrado de lado a y longitud L



$$F = \frac{2 L}{\ln \frac{0,54 a}{r}}$$

3) Caja paralelepípedica, con espesor de pared constante e

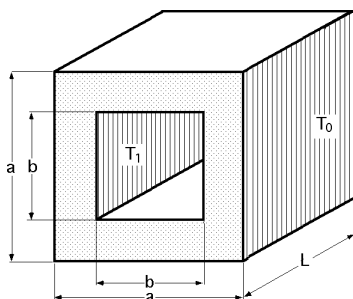
Area de la superficie interna A_1 ; Area de la superficie externa A_2



$$F = \frac{0,79 \sqrt{A_1 A_2}}{e}, \text{ para } (a, b, L) < \frac{e}{5}$$

$$F = \frac{A_1}{e} + 2,16 (a + b + L) + 1,2 e, \text{ para } (a, b, L) > \frac{e}{5}$$

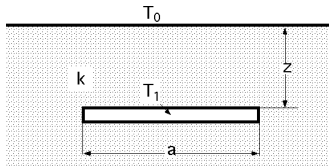
4) Caja paralelepípedica, con bases cuadradas



$$F = \frac{2 L}{0,93 \ln \frac{a}{b} - 0,0502} \text{ para } \frac{a}{b} > 1,4 ; L \gg a$$

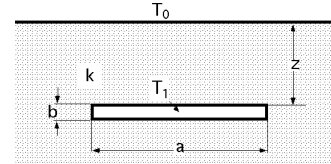
$$F = \frac{2 L}{0,785 \ln \frac{a}{b}} \text{ para } \frac{a}{b} < 1,4 ; L \gg a$$

5) Placa rectangular delgada enterrada, de longitud L



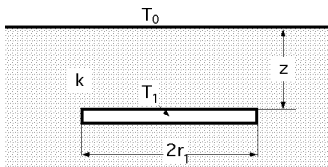
$$F_{(z=0)} = \frac{a}{\ln \frac{4a}{L}} \quad ; \quad F_{(z \gg a)} = \frac{2a}{\ln \frac{4a}{L}}$$

6) Viga rectangular enterrada, de longitud $L \gg a, b, z$



$$F = 2,756 L [\ln (1 + \frac{z}{a})]^{-0,59} (\frac{z}{b})^{-0,078}$$

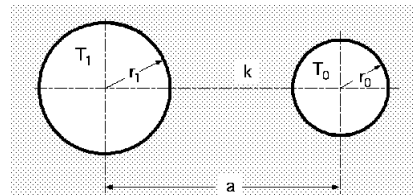
7) Disco horizontal delgado enterrado



$$F = 4 r_1 \quad (z=0)$$

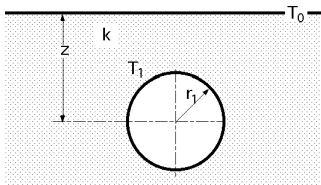
$$F = 8 r_1 \quad (z \gg 2r_1)$$

8) Dos cilindros paralelos de longitud L en un medio infinito



$$F = \frac{2 L}{\text{Arg Ch} [\frac{a^2 - r_1^2 - r_0^2}{2 r_0 r_1}]}$$

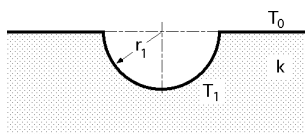
9) Cilindro horizontal enterrado de radio r_1 , y longitud L , o también esfera enterrada de radio r_1



Cilindro: $F = \frac{2 L}{\text{Arg Ch} \frac{z}{r_1}}$ para $z < 3 r_1$; Cilindro: $F = \frac{2 L}{\ln \frac{2z}{r_1}}$ para $z > 3 r_1$

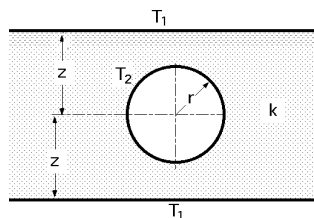
Esfera: $F_{z \gg r_1} = \frac{4 r_1}{1 - \frac{r_1}{2z}}$; Esfera: $F_z = 4 r_1$

10) Semiesfera enterrada en un medio semiinfinito



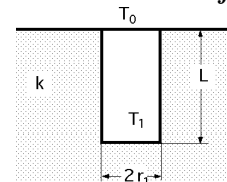
$$F = 2 r_1$$

11) Cilindro horizontal de longitud L enterrado entre dos planos a T_1



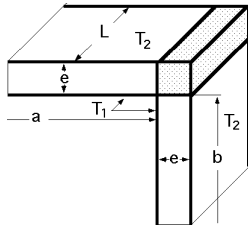
$$F = \frac{2 L}{\ln \frac{4z}{r}}$$

12) Cilindro vertical de longitud L en un sólido semiinfinito



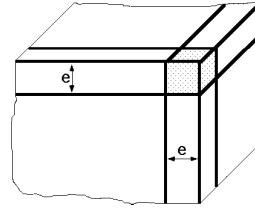
$$F = \frac{2 L}{\ln \frac{2L}{r_1}}$$

13) *Arista intersección de dos paredes planas de espesor e y anchura L , con temperatura interior T_1 y temperatura exterior T_2*



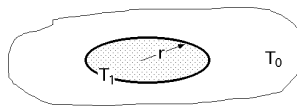
$$F = 0,54 L \quad ; \quad a > \frac{e}{5} \quad ; \quad b > \frac{e}{5}$$

14) *Esquina intersección de tres paredes planas de espesor e , con temperatura interior T_1 y temperatura exterior T_2*



$$F = 0,15 e \quad ; \quad \text{Dimensiones} > \frac{e}{5}$$

15) *Región en forma de disco en la superficie de un sólido semiinfinito*



$$F = 4 r$$

III.3.- METODOS NUMERICOS

Los métodos numéricos se pueden aplicar a problemas de conducción en régimen estacionario y a problemas en que aparezcan condiciones de contorno radiativas o que exista una generación de calor interna E .

El método numérico de diferencias finitas divide al modelo sólido en una serie de nudos; haciendo en cada uno de ellos un balance de energía, se obtiene una ecuación para el cálculo de la temperatura de cada nudo; también se obtiene una ecuación separada para cada nudo situado en el contorno o periferia del sólido.

El resultado final de la aplicación del método es la obtención de un sistema de n ecuaciones correspondientes a los n nudos del sistema, que sustituyen a las ecuaciones en derivadas parciales y a las condiciones de contorno a aplicar.

Si el número n de nudos es pequeño, se pueden utilizar técnicas normales de resolución de ecuaciones; si el número de nudos aumenta, puede ser ventajoso el utilizar soluciones aproximadas por métodos iterativos, y si el número de nudos es muy grande hay que recurrir al ordenador.

Para un problema de conducción bidimensional, la técnica de diferencias finitas se aplica como se especifica a continuación:

- Se divide el sólido en un cierto número de cuadrados de igual tamaño*
- Se supondrá que las características de cada cuadrado se concentran en el centro del mismo, como la masa, temperatura, etc*
- Cada uno de los cuadrados tiene una longitud Δx en la dirección x , Δy en la dirección y*
- El nudo al que se ha asignado el subíndice 0 se puede encontrar rodeado por cuatro nudos adyacentes, como se muestra en la Fig III.11, de forma que cada nudo esté conectado a los contiguos mediante una línea conductora a través de la cual se pueda conducir el calor de un cuadrado a otro.*

El balance energético, en régimen estacionario, en el nudo 0, sin generación de energía térmica es:

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_{i \rightarrow 0} = 0$$

NUDOS INTERIORES.- Aplicando la ecuación de Fourier al nudo interior 0 correspondiente a un cuadrado de espesor d , se obtiene el siguiente balance energético:

$$Q_{1 \rightarrow 0} = -kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = k(\Delta y \Delta z) \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = k \Delta z (T_1 - T_0)$$

$$Q_{2 \rightarrow 0} = k \Delta z (T_2 - T_0)$$

$$Q_{3 \rightarrow 0} = k \Delta z (T_3 - T_0)$$

$$Q_{4 \rightarrow 0} = k \Delta z (T_4 - T_0)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_{i \rightarrow 0} = 0 \quad ; \quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 = 0$$

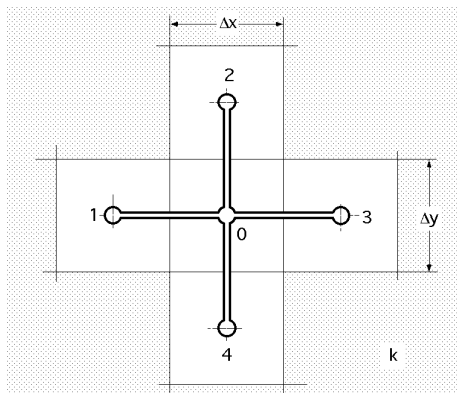


Fig III.11.- Nudo interior conductivo

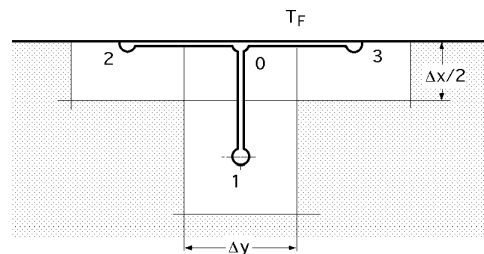


Fig III.12.- Nudo periférico

La exactitud que se consigue al sustituir el gradiente de temperaturas, dT/dx , por la diferencia finita de dos temperaturas, $T_1 - T_0$, depende del tamaño de cada cuadrado; a menores dimensiones de los cuadrados, mayor exactitud en el gradiente de temperatura.

A todos los nudos que se encuentren situados sobre la periferia del sólido, hay que hacerles un balance de energía por separado.

NUDOS EN CONTACTO CON UN FLUIDO.- Si el sólido está en contacto con un fluido a T_F , Fig III.12, con un coeficiente de transmisión de calor por convección h_C , se asigna a cada nudo de este tipo la mitad de la superficie que a cualquier otro nudo interior. El nudo 0 puede intercambiar calor por conducción con tres nudos contiguos, y transferir calor por convección al fluido.

El balance de energía en el nudo 0 es:

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} + Q_{3 \rightarrow 0} + Q_{F \rightarrow 0} = 0$$

Sustituyendo las aproximaciones de las diferencias finitas para la ley de Fourier correspondiente a los tres primeros términos, y para la ley de Newton en el último, se obtiene, para un espesor unidad:

$$k \frac{y}{x} \frac{T_1 - T_0}{x} + k \frac{x}{2} \frac{T_2 - T_0}{y} + k \frac{x}{2} \frac{T_3 - T_0}{y} + h_c y (T_F - T_0) = 0$$

que para, $x = y$, se simplifica, quedando en la siguiente forma:

$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + \frac{h_c x}{k} T_F - (2 + h_c \frac{x}{k}) T_0 = 0$$

$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + (Bi) T_F - \{2 + (Bi)\} T_0 = 0$$

A título de ejemplo, para la pieza representada en la Fig III.13, en la que la superficie A está en contacto con un fluido a T_F , la B está a una temperatura T_B , la C es una superficie aislada y la D está a T_D se puede indicar, para los diversos nudos que se han considerado, que las temperaturas T_1, T_2 y T_3 son conocidas e iguales a T_B , así como las temperaturas T_7, T_8 y T_9 son también conocidas e iguales a T_D . Sin embargo, T_4, T_5 y T_6 son desconocidas y habrá que calcularlas mediante los siguientes balances de energía por unidad de espesor, en las paredes A, B, C, y D.

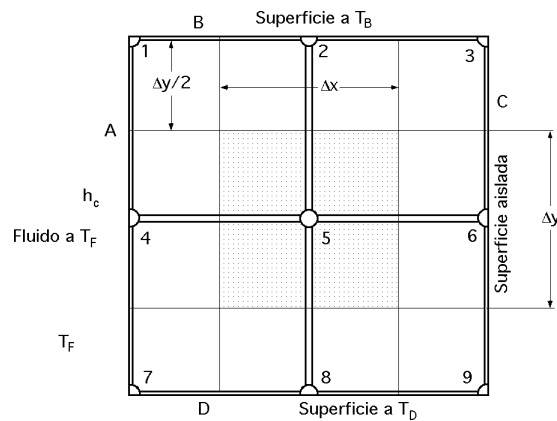


Fig III.13.- Placa metálica con sus superficies en diversas situaciones térmicas

$$Q_A = Q_{F \rightarrow 1} + Q_{F \rightarrow 4} + Q_{F \rightarrow 7} = h_c y \left\{ \frac{T_F - T_1}{2} + (T_F - T_4) + \frac{T_F - T_7}{2} \right\}$$

$$Q_B = Q_{1 \rightarrow 4} + Q_{2 \rightarrow 5} + Q_{3 \rightarrow 6} + Q_{1 \rightarrow F} = k x \left(\frac{T_1 - T_4}{2 y} + \frac{T_2 - T_5}{y} + \frac{T_3 - T_6}{2 y} \right) + h_c \frac{y}{2} (T_1 - T_F)$$

$Q_C = 0$, por estar la superficie C aislada

$$Q_D = k x \left(\frac{T_9 - T_6}{2 y} + \frac{T_8 - T_5}{y} + \frac{T_7 - T_4}{2 y} \right) + h_c \frac{y}{2} (T_7 - T_F)$$

Como comprobación global de los resultados obtenidos para las diferentes transferencias térmicas, la transferencia neta de calor en el sólido tiene que ser nula.

GENERACION DE ENERGIA..- Si en un nudo 0 concreto, Fig III.11, existe un foco térmico generador de energía E, el balance energético en el nudo citado, en un sistema bidimensional con 4 nudos vecinos es:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + E = 0$$

y sustituyendo cada término del flujo térmico por la forma en diferencias finitas de la ley de Fourier, se tendrá:

$$k \frac{y}{x} \frac{T_1 - T_0}{x} + k \frac{x}{y} \frac{T_2 - T_0}{y} + k \frac{y}{x} \frac{T_3 - T_0}{x} + k \frac{x}{y} \frac{T_4 - T_0}{y} + E = 0$$

y si la red es cuadrada $x = y$, por lo que:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4 T_0 + E \frac{x^2}{k} = 0$$

III.4.- METODO DE RELAJACION

Si se desea incrementar la exactitud de la solución disminuyendo el espaciado de la red, aparecen más nudos con temperaturas desconocidas y, por lo tanto, con ecuaciones adicionales a resolver. El fundamento del método de relajación es el de estimar inicialmente las temperaturas de cada nudo de forma que se satisfagan, aproximadamente, las ecuaciones de balance de energía; así, en vez de intentar hacer que todas las ecuaciones de balance energético sean iguales a cero, como en el caso anterior, lo que se hace es igualarlas a un término llamado *residuo*.

A continuación se varían sistemáticamente las temperaturas hasta que se reduce el residuo a un valor muy pequeño, indicándonos este valor la exactitud con que se han estimado las temperaturas iniciales de todos y de cada uno de los nudos. Si todos los residuos se redujesen a cero, las temperaturas obtenidas a partir de ellos serían las soluciones exactas de las ecuaciones del balance de energía.

El método de relajación se puede descomponer para su aplicación en las siguientes etapas:

a) Hay que fijar de antemano unos valores de todas las temperaturas incógnitas de los nudos que, por intuición, sean todo lo próximas a las verdaderas como se pueda presuponer. Los límites de estas temperaturas vienen especificados por las condiciones de contorno extremas.

b) Se sustituyen las temperaturas iniciales supuestas en cada una de las ecuaciones de los residuos y se procede al cálculo de éstos.

c) Para reducir los residuos hay que modificar la temperatura que corresponda al residuo cuyo valor absoluto sea el mayor de todos, hasta que este residuo se reduzca a cero. La convergencia hacia la solución correcta de temperaturas se favorece si la temperatura del nudo afectado se modifica en el sentido de que su residuo no se reduzca exactamente a cero, sino que pase a tener un valor menor y de signo opuesto que el que

poseía antes de hacer el cambio de temperaturas.

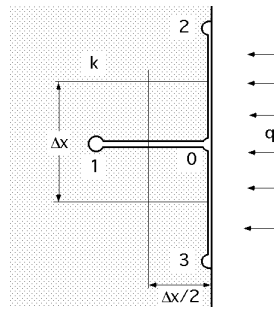
d) Finalmente se repite la etapa c hasta que se consiga el grado de exactitud deseado.

Siempre que un nodo esté situado en el contorno de un sólido, la ecuación del residuo dependerá del tipo de condición de contorno en la superficie. La ecuación del balance de energía en cada caso concreto, viene referida para el nudo señalado con el subíndice 0.

ECUACIONES PARA LOS RESIDUOS EN EL CASO DE NUDOS EN LOS LIMITES.

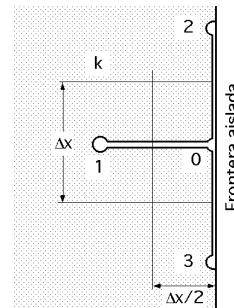
SISTEMAS BIDIMENSIONALES. REDES CUADRADAS $x = y$

1) Superficie plana (Frontera isotérmica)



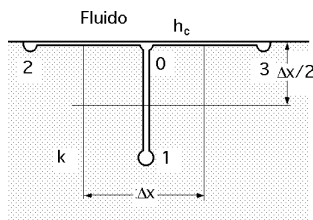
$$q \frac{\Delta x}{k} + T_1 - T_0 = R_0$$

2) Superficie plana (Frontera aislada)



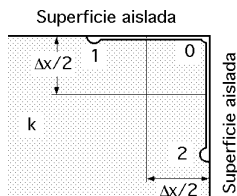
$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 - 2 T_0 = R_0$$

3) Superficie plana en contacto con un fluido a T_F



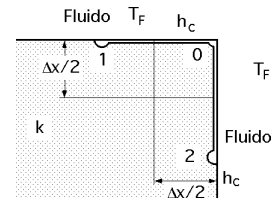
$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 - [2 + Bi] T_0 + Bi T_F = R_0$$

4) Esquina exterior (Ambas superficies aisladas)



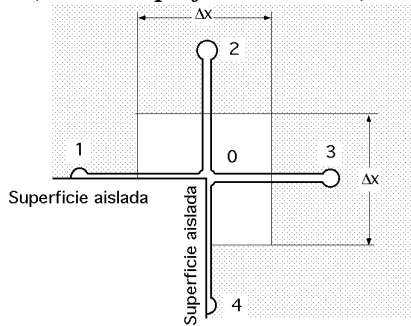
$$\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 = R_0$$

6) Esquina exterior (Ambas superficies en contacto con un fluido a T_F)



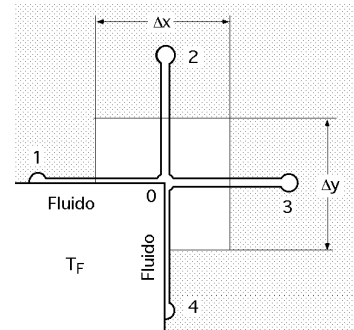
$$\frac{T_1 + T_2}{2} - [1 + Bi] T_0 + Bi T_F = R_0$$

6) Esquina interior
(Ambas superficies aisladas)



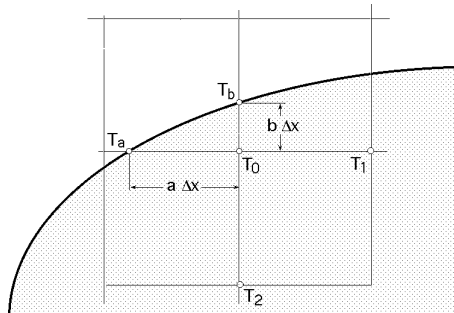
$$\frac{T_1 + T_4}{2} + T_2 + T_3 - 3 T_0 = R_0$$

7) Esquina interior
(Ambas superficies en contacto con un fluido a T_F)



$$\frac{T_1 + T_4}{2} + T_2 + T_3 - [3 + Bi] T_0 + Bi T_F = R_0$$

8.- Nudo interior cercano a una superficie curva no isotérmica



$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \left(\frac{T_1}{1+a} + \frac{T_2}{1+b} + \frac{T_a}{a(1+a)} + \frac{T_b}{b(1+b)} \right) - T_0 = R_0$$

III.5.- METODO MATRICIAL

El método de relajación no se adapta fácilmente para su utilización mediante técnicas con ordenador, porque exige la selección de la ecuación del nudo que posea el residuo de valor absoluto más grande, y aunque esto no significa un problema insoluble, existen otros métodos, como el matricial, que lo resuelven basándose en la representación de las ecuaciones del balance de energía para cada nudo en forma de una matriz.

Si el sólido se subdivide en n nudos, el conjunto de las ecuaciones correspondientes, a cada nudo, se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned} a_{11} T_1 + a_{12} T_2 + a_{13} T_3 + \dots + a_{1n} T_n &= b_1 \\ a_{21} T_1 + a_{22} T_2 + a_{23} T_3 + \dots + a_{2n} T_n &= b_2 \\ a_{31} T_1 + a_{32} T_2 + a_{33} T_3 + \dots + a_{3n} T_n &= b_3 \\ \dots &\dots \\ a_{n1} T_1 + a_{n2} T_2 + a_{n3} T_3 + \dots + a_{nn} T_n &= b_n \end{aligned}$$

en las que los coeficientes a_{ij} y b_i son constantes conocidas, y las magnitudes T_i son las temperaturas incógnitas.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la forma:

$$A T = B$$

en la que A es una matriz de $n.n$ coeficientes mientras que T y B son matrices columna, compuestas cada una de ellas por n elementos. Muchos de los elementos de la matriz A son cero, concentrándose los no nulos en las proximidades de la diagonal. Los elementos de la matriz B son las constantes de los segundos miembros, es decir, los residuos. Los elementos de la matriz T son la solución del problema.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Para calcular las temperaturas desconocidas, premultiplicamos por A^{-1} , quedando:

$$A^{-1} A T = A^{-1} B ; T = A^{-1} B$$

hay que determinar A^{-1} que satisfaga la ecuación: $T = A^{-1} B$.

Si los elementos de la matriz inversa de A vienen dados por:

$$C = A^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Las temperaturas incógnitas de los nudos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + c_{13} b_3 + \dots + c_{1n} b_n &= T_1 \\ c_{21} b_1 + c_{22} b_2 + c_{23} b_3 + \dots + c_{2n} b_n &= T_2 \\ c_{31} b_1 + c_{32} b_2 + c_{33} b_3 + \dots + c_{3n} b_n &= T_3 \\ \dots & \dots \\ c_{n1} b_1 + c_{n2} b_2 + c_{n3} b_3 + \dots + c_{nn} b_n &= T_n \end{aligned}$$

y como se conocen los valores de todos los coeficientes b_i , el problema del cálculo de las temperaturas se reduce a la determinación de la matriz inversa de A.

III.6.- METODO DE ITERACION

El método de iteración está basado en la resolución explícita de cada ecuación de los nudos, para hallar la temperatura de los mismos. A partir de la ecuación del balance de energía de un nudo interior en un cuerpo bidimensional, se tiene la siguiente ecuación, para el nudo central 0:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4 T_0 = 0 \quad T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4}$$

Para cuando el nudo esté en el contorno, por ejemplo en contacto con un fluido, se tiene:

$$T_0 = \frac{\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + Bi T_F}{2 + Bi}$$

y así se puede escribir, para cada nudo, una ecuación para su temperatura en función de la temperatura de los nudos vecinos. Las ecuaciones de partida para cada nudo son las desarrolladas para el caso del método matricial.

Una vez despejada la temperatura correspondiente al nudo a estudiar, se suponen inicialmente una serie de valores para todas las temperaturas de todos los nudos; seguidamente se calculan nuevos valores para las temperaturas utilizando las ecuaciones de partida de los nudos, de forma que las temperaturas a calcular en cada paso, se basen siempre en los resultados de los nudos más inmediatos. El método se repetirá tantas veces como sea necesario, hasta que la diferencia entre los últimos valores de las temperaturas y los anteriores, estén comprendidos dentro del grado de precisión que se haya fijado de antemano.

IV.- CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN EN SÓLIDOS INFINITOS

IV.1.- INTRODUCCIÓN

En la mayor parte de los problemas de tipo térmico que se plantean a nivel técnico intervienen variaciones de la temperatura con respecto al tiempo; a continuación consideraremos las técnicas que permitan obtener, en los sistemas en los que aparezcan condiciones no estacionarias, tanto las distribuciones de temperatura, como las transferencias de calor.

Un proceso de transferencia térmica es transitorio siempre que la temperatura correspondiente al interior del sistema varíe a lo largo del tiempo; existen muchos ejemplos prácticos en los que intervienen fenómenos de transferencia de calor transitorios, como, los procesos de fabricación en los que el producto que se está manufacturando se tiene que calentar o enfriar para transformarlo en un producto adecuado para ser utilizable, o los hornos industriales que se encienden y apagan de modo cíclico y periódico, en los que se realizan procesos que originan variaciones de temperaturas, tanto en su interior como en sus paredes; los aceros y algunas aleaciones, suelen calentarse y enfriarse para modificar sus propiedades físicas de interés industrial, mediante tratamientos térmicos; los motores térmicos funcionan en régimen transitorio tanto durante el arranque, como en otros momentos, relativamente cortos, etc.

Si las variaciones de la temperatura en el sólido a estudiar se consiguen poniéndole en contacto con un medio exterior (líquido o gas), se origina un fenómeno de convección; según sea el valor del coeficiente de convección del fluido y la conductividad térmica del sólido, se pueden dar los tres casos siguientes:

a) Condición de contorno de convección. - Este caso general se obtiene cuando las resistencias a la conducción en el sólido y a la convección tienen magnitudes comparables, dando un n° de Bi del orden de la unidad; en esta situación el sólido va modificando paulatinamente su temperatura,

al mismo tiempo que su superficie va tomando con más o menos rapidez la temperatura del fluido.

b) Condición de resistencia térmica interna despreciable.- Este caso particular se obtiene cuando la temperatura del sistema sujeto a una respuesta térmica transitoria es casi uniforme, por lo que se pueden ignorar las pequeñas diferencias de temperatura dentro del mismo; las variaciones en la energía interna del sistema se pueden expresar en función de las variaciones de la temperatura uniforme, aproximación que se conoce también como modelo de la capacidad térmica global. La suposición de que la temperatura es uniforme se justifica, puesto que la resistencia térmica a la conducción dentro del sólido es pequeña comparada con la resistencia exterior convectiva. Se cumple para un valor de $Bi < 0,1$ lo que garantiza el que la temperatura en el interior del sólido, (placa, cilindro, esfera), no diferirá de la de la superficie en más de un 5%, lo que equivale a suponer que el fluido debe tener un bajo coeficiente de convección (aire, gases), por lo que el sólido tiende a la temperatura del fluido en un tiempo relativamente grande, permaneciendo uniforme en cada instante la temperatura del sólido, incluida su superficie.

c) Condición de contorno isotérmica.- Esta condición de contorno particular, también conocida como de resistencia superficial despreciable, se consigue cuando el sólido (placa, cilindro, esfera), se sumerge rápidamente en un líquido para el cual el coeficiente de transferencia de calor por convección es muy elevado, es decir, en condiciones en que la resistencia a la transferencia de calor por convección es despreciable; se cumple que la relación h_C/k es muy grande, ($Bi \gg 1$), lo que indica que el fluido a T_F tiene la facultad de eliminar o aplicar calor a la superficie del sólido en forma instantánea, por lo que ésta se pondrá a T_F y permanecerá a esta temperatura en todo el proceso. Si el sólido es un buen conductor térmico, el fluido tiene que ser un líquido con un elevado coeficiente de convección, (fluido muy enérgico, como un metal líquido o sales fundidas). Los tiempos de permanencia son relativamente cortos para que en una estrecha zona periférica sea siempre $Fo < 1$. También se consigue una condición de contorno isotérmica, cuando el sólido a estudiar se pone en contacto con otro sólido a distinta temperatura, y se produce un cambio instantáneo de su temperatura superficial de forma que adquiere la del segundo sólido.

En el presente estudio vamos a obtener las soluciones analíticas de la expresión general de la ecuación de la conducción en régimen transitorio, en sistemas en los que se produzcan variaciones de sus temperaturas, tanto espaciales como temporales, para algunas geometrías simples, que suelen encontrarse en determinadas aplicaciones prácticas, como:

a) Una placa infinita de espesor L , para la cual $T = T(x,t)$

b) Un cilindro macizo infinitamente largo de radio R , para el que $T = T(r,t)$

c) Una esfera maciza de radio R , para la cual $T = T(r,t)$

Las condiciones de contorno para estas geometrías, comunes a las tres, son:

a) La primera condición de contorno especifica que el plano medio de la placa equivale a un aislamiento o plano adiabático, al igual que el eje del cilindro o el centro de la esfera.

b) La segunda condición de contorno dice que el calor se transfiere desde la superficie exterior del sólido a un fluido a la temperatura T_F , con un coeficiente de transferencia de calor h_C .

Esta condición de contorno se expresa en la forma:

$$h_C (T_{pF} - T_F) = -k \left(\frac{T}{x} \right)_{x_{sup}}$$

La condición inicial en los tres casos es la misma; se puede partir de un sólido isoterma, temperatura T_0 para $t = 0$, o no, temperatura $f(x)$ ó $f(r)$ para $t = 0$, y a partir de este instante se introduce el sólido en el fluido que se encuentra a una temperatura T_F , iniciándose el proceso transitorio de transferencia de calor. Las soluciones correspondientes a la distribución de temperaturas y a la transferencia térmica, suelen presentarse en forma analítica o en forma gráfica, viniendo expresadas las variables en forma adimensional.

Los problemas de conducción en régimen transitorio en los que intervienen condiciones de contorno de convección, vienen regidos por los números de Biot y Fourier; las temperaturas locales son función de la posición adimensional dentro del sólido, del número de Biot y del número de Fourier.

En un problema de convección, cada una de las gráficas que se obtienen, se compone de dos familias de curvas; la primera representa la temperatura adimensional del centro, eje, o plano central, en la forma:

$$\frac{\text{Centro}}{0} = \frac{C}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F}$$

Para determinar una temperatura local que se corresponda con una posición distinta de la de simetría mencionada, hay que utilizar la segunda familia de curvas propuestas, que representa la temperatura adimensional local en función de la temperatura de la línea, plano central, o centro, según el caso que, para placa infinita, cilindro, o esfera, es de la forma:

$$\frac{\text{C}}{C} = \frac{T - T_F}{T_C - T_F}$$

Para determinar el valor correspondiente a una temperatura local se puede utilizar el producto de las dos ecuaciones anteriores, obteniéndose:

$$\frac{\text{0}}{0} = \frac{T - T_F}{T_0 - T_F}$$

Una vez conocida la distribución de temperaturas, se calcula el calor transferido desde la superficie, utilizando la ecuación de Fourier evaluada en la intercara {sólido-fluido}.

Cada valor $Q(t)$ de transferencia térmica, es la cantidad total de calor que se transfiere desde la superficie hacia el fluido, en el intervalo, $0 \div t$. El valor de Q_0 es la energía inicial almacenada que existe en el sólido, en $t = 0$, siendo T_F la temperatura de referencia.

La energía almacenada en el sólido en el intervalo de tiempo, $0 \div t$, es la diferencia, $Q_0 - Q(t)$

IV.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN PLACA INFINITA CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Una situación general que tiene una gran importancia práctica es el enfriamiento o el calentamiento de una placa rodeada por un fluido convectivo a T_F ; la placa se introduce instantáneamente en el fluido en condiciones en las que la resistencia a la transferencia de calor es muy pequeña, es decir, Bi es grande; la superficie del sólido va tomando paulatinamente la temperatura del medio exterior, a medida que el efecto térmico se transmite al interior..

Si se considera una placa infinita de espesor, $e = 2L$, Fig IV.1, para la que en el tiempo, $t = 0$, existe una distribución de temperaturas conocida, y en la que no existen efectos de borde, se aplica la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ con, } T = T(x, t)$$

Haciendo el cambio de variable, $\theta = T - T_F$, con $T_F \neq 0$, la ecuación diferencial queda en la forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

y las condiciones de contorno como:

1) Para, $t = 0$, $-L \leq x \leq L$; $\theta = f(x)$ ó T_0

2) Para, $t > 0$, se cumple que,

$$\text{en, } x = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0$$

en, $x = \pm L$; $-k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\pm L} = h_C \theta$; $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\pm L} = - \frac{h_C}{k} \theta = a_1 \theta$

3) Si el fluido a ambos lados de la placa es el mismo, resulta que h_C también será el mismo entre ambas semiplacas, por lo que existirá una condición de simetría de temperaturas, de forma que

$$\theta(-x) = \theta(+x)$$

La segunda de estas condiciones se puede interpretar geométricamente, ya que

$$\frac{h_C}{k} = Cte = -a_1$$

y la igualdad se cumple para cualquier valor de x , luego el punto P, en la Fig IV.1, es un punto fijo que una vez determinado, permite calcular el gradiente de temperatura en cualquier punto de la superficie de la placa. Esta construcción se aplicará posteriormente al cálculo gráfico de temperaturas para un sólido con convección en su superficie.

La solución general es de la forma:

$$\theta = e^{-a_1^2 t} \{B_1 \operatorname{sen}(a_1 x) + B_2 \cos(a_1 x)\}$$

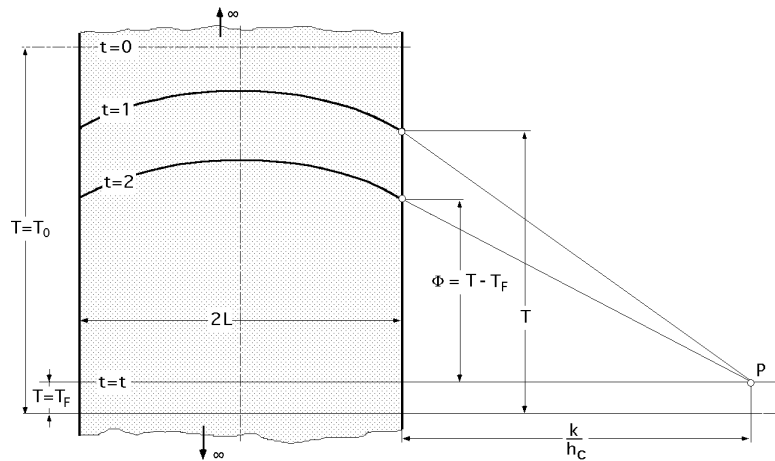


Fig IV.1.- Interpretación geométrica de la condición de contorno de convección

Teniendo en cuenta la condición de contorno en, $x = 0$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 = e^{-\lambda^2 t} \{B_1 \cos(\lambda x) - B_2 \sin(\lambda x)\}_{x=0} \quad ; \quad B_1 = 0$$

la solución se reduce a:

$$T = B e^{-\lambda^2 t} \cos(\lambda x)$$

Aplicando la condición de contorno en, $x = \pm L$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\pm L} = -\frac{h_c}{k} T \quad B e^{-\lambda^2 t} \{-\sin(\lambda x)\}_{x=L} = -\frac{h_c}{k} \{B e^{-\lambda^2 t} \cos(\lambda x)\}_{x=L}$$

simplificando:

$$\sin(\lambda L) = \frac{h_c}{k} \cos(\lambda L) \quad ; \quad \cotg(\lambda L) = \frac{L}{Bi}$$

cuya representación gráfica se indica en la Fig IV.2.

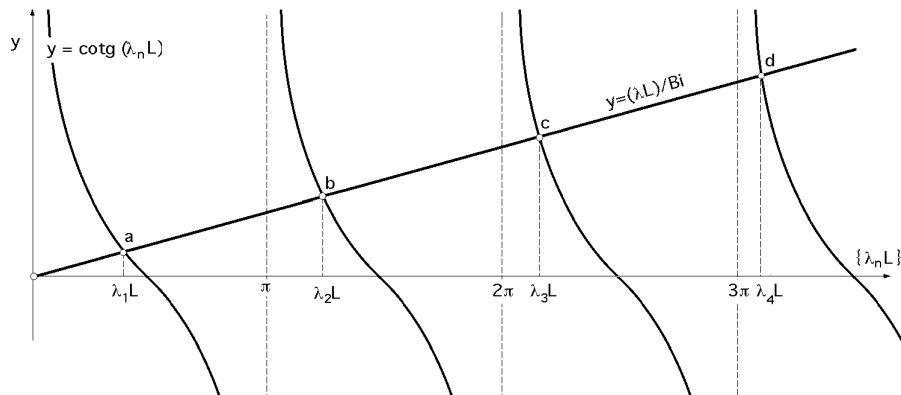


Fig IV.2.- Soluciones gráficas de la condición de contorno de convección en placa infinita

Dicha ecuación se satisface para un número infinito de valores del parámetro L , por lo que

para un valor de L dado, sus soluciones se encuentran para diversos valores de n , como intersección de las curvas:

$$y = \cotg(nL) ; y = \frac{L}{Bi}$$

Existen n valores de nL , que satisfacen la ecuación, Fig IV.2, por lo que la distribución de temperaturas es una serie de la forma:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2 L^2}{\alpha t}} \cos(n x)$$

en la que n es la raíz enésima de la ecuación:

$$(nL) \operatorname{tg}(nL) - Bi = 0 ; \frac{nL}{Bi} = \cotg(nL)$$

La condición inicial, $T = f(x)$, para, $t = 0$, es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n x)$$

a partir de la cual se calcula B_n , teniendo en cuenta la Teoría de funciones ortogonales:

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \cos(n x) dx &= \\ &= B_1 \int_0^L \cos(x) \cos(n x) dx + \dots + B_n \int_0^L \cos^2(n x) dx = B_n \int_0^L \cos^2(n x) dx \\ B_n &= \frac{\int_0^L f(x) \cos(n x) dx}{\int_0^L \cos^2(n x) dx} = \frac{\int_0^L f(x) \cos(n x) dx}{\frac{L}{2} + \frac{\operatorname{sen}(nL) \cos(nL)}{2n}} \end{aligned}$$

La expresión de la distribución de temperaturas en la placa infinita, función de la posición y del tiempo, es:

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2 L^2}{\alpha t}} \frac{\cos(n x)}{nL + \operatorname{sen}(nL) \cos(nL)} \int_0^L f(x) \cos(n x) dx$$

Para el caso particular en que la primera condición de contorno fuese de la forma:

$$T = f(x) = T_0 = \text{Cte}$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{L^2} t} \frac{\sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{n x}{L})}{\frac{nL}{L} + \sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{nL}{L})}$$

que viene representada en forma gráfica (Heisler) en la Fig IV.3.

La temperatura, $C = T_C - T_F$, en el eje de la placa $x = 0$, de espesor $2L$, es:

$$\frac{C}{T_C - T_F} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{L^2} t} \frac{\sin(\frac{nL}{L})}{\frac{nL}{L} + \sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{nL}{L})}$$

que viene representada en las Fig IV.4a.b.

El calor disipado por la placa desde, $t = 0$, hasta $t = t$, es:

$$\begin{aligned} Q &= 2A \int_0^t q \, dt = -2Ak \int_0^t \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} dt = -4kA T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{L^2} t} \sin^2(\frac{nL}{L})}{\frac{nL}{L} + \sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{nL}{L})} dt = \\ &= \frac{4kA(T_0 - T_F)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{nL}{L})}{\frac{nL}{L} + \sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{nL}{L})}} \frac{1 - e^{-\frac{\alpha^2}{L^2} t}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{nL}{L}}} \end{aligned}$$

La expresión del flujo de calor adimensional Q/Q_0 , se conoce como *fracción de energía perdida*, y es la pérdida real de energía en el tiempo t dividida entre la pérdida total necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente.

Pérdida total de calor necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente:

$$Q_0 = 2LA c_p (T_0 - T_F) = 2LA \frac{k}{\alpha} \frac{L}{\alpha}$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{nL}{L})}{\frac{nL}{L} + \sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{nL}{L})} \frac{1 - e^{-\frac{\alpha^2}{L^2} t}}{\frac{nL}{L}}$$

Considerando que el calor almacenado en la pared en el intervalo, $0 \leq t \leq t$, viene dado por:

$$Q = 2LA c_p (T_0 - \hat{T}_{final})$$

en la que, $\hat{T}_{final} L = \int_0^L dx \quad \hat{T}_{final} = \frac{1}{L} \int_0^L dx$, por lo que:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{T}_{final}}{T_0 - T_F} &= \frac{\hat{T}_{final} - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{L^2} t} \frac{\sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{n x}{L})}{\frac{nL}{L} + \sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{nL}{L})} dx = \\ &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{L^2} t} \frac{\sin^2(\frac{nL}{L})}{\frac{nL}{L} \{ \frac{nL}{L} + \sin(\frac{nL}{L}) \cos(\frac{nL}{L}) \}} \end{aligned}$$

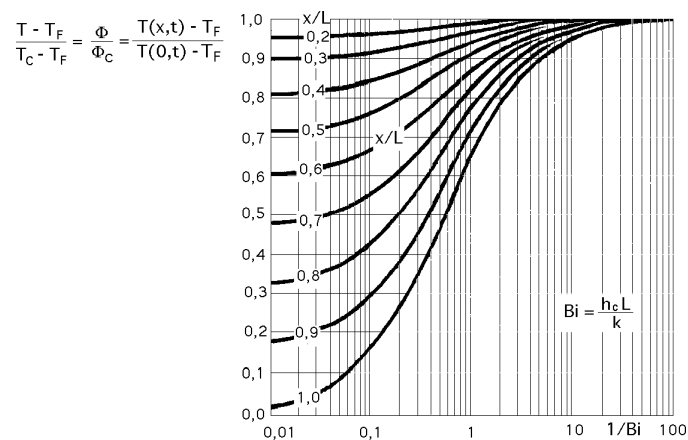


Fig IV.3.- Temperatura local adimensional en el caso de una placa infinita de espesor $2 L$, en función de la temperatura del plano medio

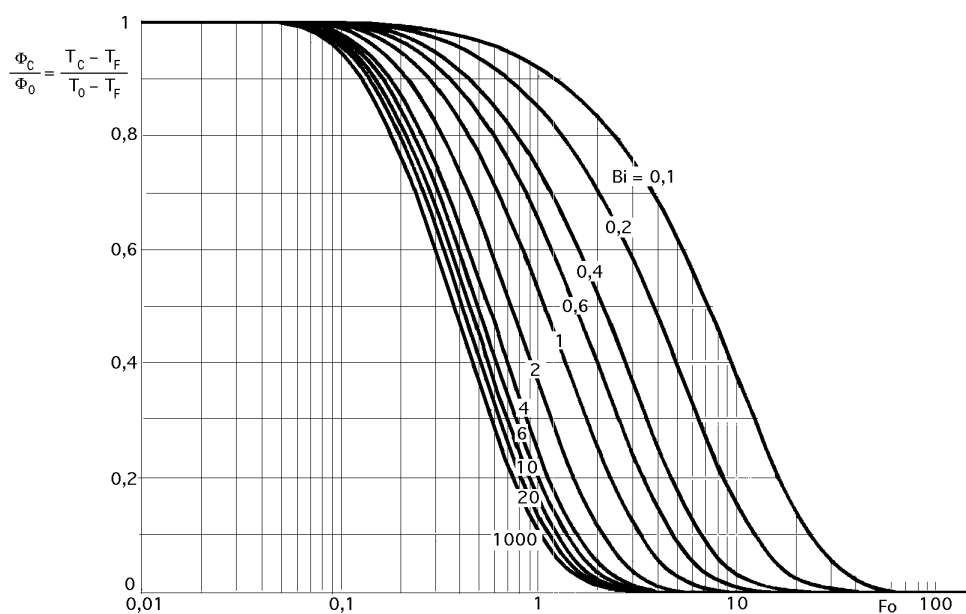
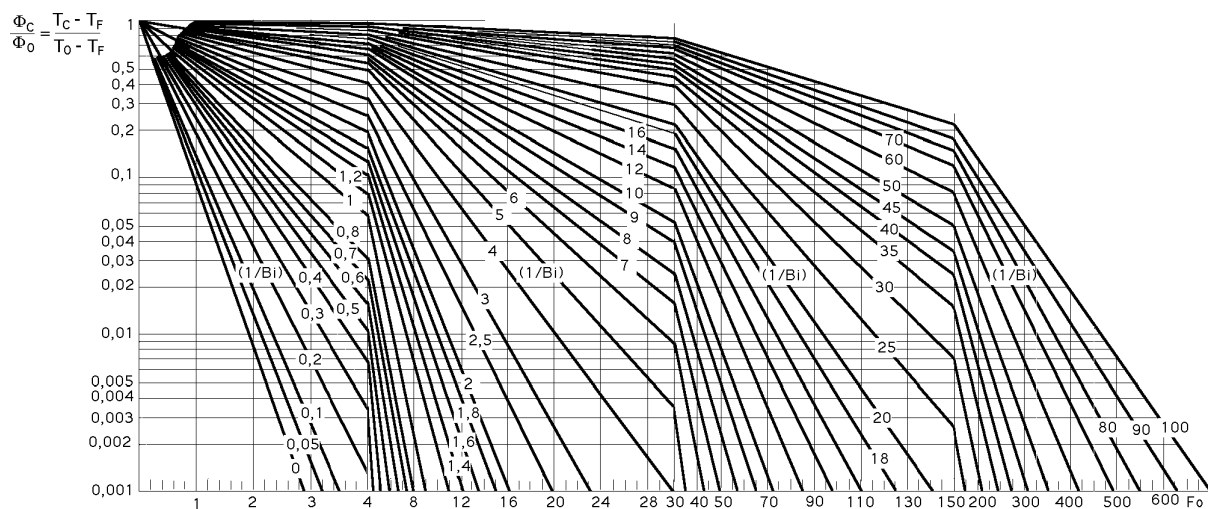


Fig IV.4.a.b.- Temperatura adimensional del plano medio de una placa infinita de espesor $2 L$

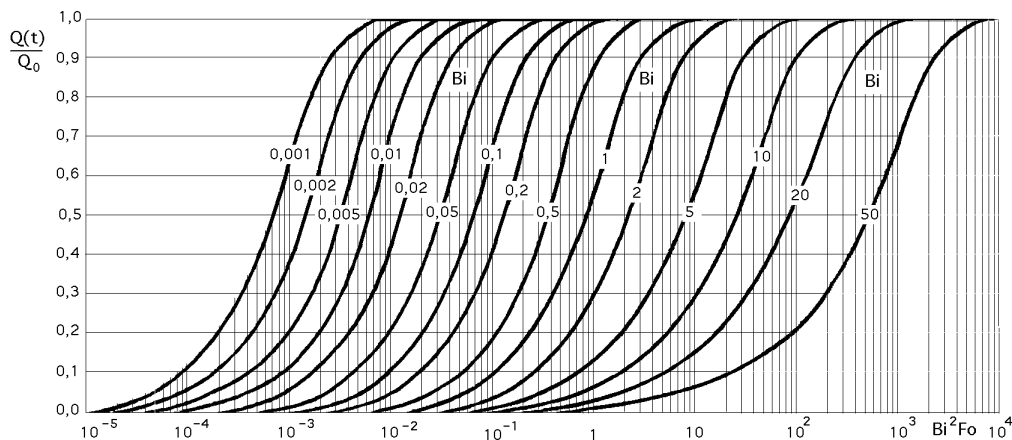


Fig IV.6.- Transferencia térmica adimensional desde la superficie de una placa infinita de espesor $2L$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{2LA \int_0^t q \, dt}{2LA c_p (T_F - T_0)} = \frac{2LA c_p (T_0 - \hat{T}_{\text{Final}})}{2LA c_p (T_0 - T_F)} = \frac{T_0 - \hat{T}_{\text{Final}} \pm T_F}{T_0 - T_T} = 1 - \frac{\hat{T}_{\text{Final}} - T_F}{T_0 - T_T} =$$

$$= 1 - \frac{2}{L} \sum_{n=1} e^{-\lambda_n^2 t} \frac{\sin^2(\lambda_n L)}{\lambda_n \{ \lambda_n L + \sin(\lambda_n L) \cos(\lambda_n L) \}}$$

Haciendo uso de las gráficas de Heisler se determinan la temperatura en el centro de la placa T_C , y la temperatura $T(x,t)$ de cualquier punto, en el mismo instante y con el mismo número de Biot. Mediante la gráfica de Gröber, Fig IV.5, se puede hallar el flujo calorífico adimensional.

Estas gráficas se pueden utilizar siempre que se mantenga la hipótesis de conducción mono-dimensional, y se desprecien los efectos de borde en la placa infinita.

IV.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UN CILINDRO INFINITO CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Este problema se resuelve análogamente al caso anterior; la ecuación de partida es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ con, } T = T_F \text{ en } r = R$$

Si llamamos R al radio exterior del cilindro que se calienta, (o enfría), y que inicialmente $t = 0$ en, $0 \leq r \leq R$, tiene una distribución de temperaturas conocida, de la forma, $T = f(r)$ ó $T_0 - T_F$, la ecuación diferencial a resolver es idéntica a la del caso de condición de contorno isotérmica; así se tiene que:

$$T = B e^{-\lambda^2 \alpha t} J_0(\lambda r)$$

con las condiciones, 1) Para, $t = 0$; $0 \leq r \leq R$; $T = f(r)$ ó $T = T_0$
 2) Para, $t > 0$; $\frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \frac{-h_c}{k} T$

Teniendo en cuenta la segunda condición de contorno y que: $\frac{1}{r} J_0(r) = -J_1(r)$, resulta:

$$B e^{-\lambda_n^2 t} \{-J_1(r)\}_{r=R} = -\frac{h_c}{k} \{B e^{-\lambda_n^2 t} J_0(r)\}_{r=R} \quad R = \frac{J_0(R)}{J_1(R)} Bi ; \quad \frac{J_0(R)}{J_1(R)} = \frac{R}{Bi} = Y$$

que se satisface para infinitos valores de λ_n como se observa en la solución gráfica que se muestra en la Fig IV.6, como intersección de las curvas:

$$Y = \frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} ; \quad Y = \frac{R}{Bi}$$

por lo que las λ_n son raíces de la ecuación, $\frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \frac{R}{Bi}$

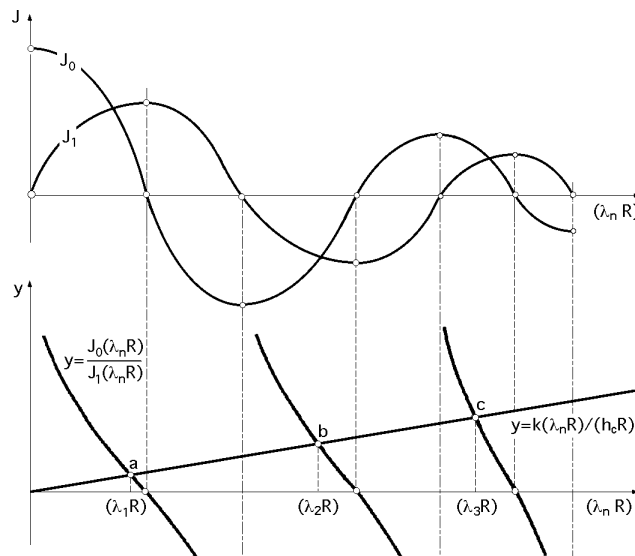


Fig IV.6.- Solución gráfica de la segunda condición de contorno de un cilindro infinito

siendo la solución correspondiente a la distribución de temperaturas:

$$= \sum_{n=1} B_n e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)$$

La primera condición de contorno, $T = f(r)$, $t = 0$, implica que:

$$f(r) = \sum_{n=1} B_n J_0(\lambda_n r) = B_1 J_0(\lambda_1 r) + B_2 J_0(\lambda_2 r) + \dots + B_n J_0(\lambda_n r)$$

obteniéndose a partir de ella el valor de B_n teniendo en cuenta la Teoría de funciones ortogonales, en la forma:

$$\int_0^R r f(r) J_0(\lambda_n r) dr = B_1 \int_0^R r J_0(\lambda_1 r) J_0(\lambda_n r) dr + B_2 \int_0^R r J_0(\lambda_2 r) J_0(\lambda_n r) dr + \dots$$

$$\dots + B_n \int_0^R r J_0^2(\alpha_n r) dr + \dots$$

Por definición de ortogonalidad: $\int_0^R r J_0(\alpha_i r) J_0(\alpha_j r) dr = 0$, con, $i \neq j$

por lo que todas las integrales del segundo miembro, a excepción de la última, son cero, es decir:

$$\int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr = B_n \int_0^R r J_0^2(\alpha_n r) dr = B_n \frac{R^2}{2} \{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)\}$$

$$B_n = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr}{\int_0^R r J_0^2(\alpha_n r) dr} = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr}{\frac{R^2}{2} \{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)\}}$$

y la distribución de temperaturas queda como sigue:

$$= \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2}{4} t} J_0(\alpha_n r) \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr}{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\int_0^R r J_0(\alpha_n r) dr = \frac{R}{\alpha_n} J_1(\alpha_n R)$$

la distribución de temperaturas para una barra cilíndrica calentada inicialmente a una temperatura uniforme, $T_0 = T_0 - T_{\infty}$ es:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha_n^2}{4} t}}{\alpha_n} \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)} = \frac{2 h_{cF}}{R k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha_n^2}{4} t} J_0(\alpha_n r)}{\left\{ \frac{\alpha_n^2}{4} + \left(\frac{h_{cF}}{k} \right)^2 \right\} J_0^2(\alpha_n R)}$$

Para, $r = 0$, eje del cilindro, la temperatura es $T_c = T_c - T_0$, y $J_0(0) = 1$, por lo que:

$$\frac{T_c - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha_n^2}{4} t}}{\alpha_n} \frac{J_1(\alpha_n R)}{J_0^2(\alpha_n R) + J_1^2(\alpha_n R)} = \frac{2 h_{cF}}{R k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha_n^2}{4} t}}{\frac{\alpha_n^2}{4} + \left(\frac{h_{cF}}{k} \right)^2}$$

La disipación de calor adimensional es:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{-k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T_c - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{r=R} dt}{R^2 k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T_c - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{r=R} dt} = - \frac{2}{R T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T_c - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right)_{r=R} dt =$$

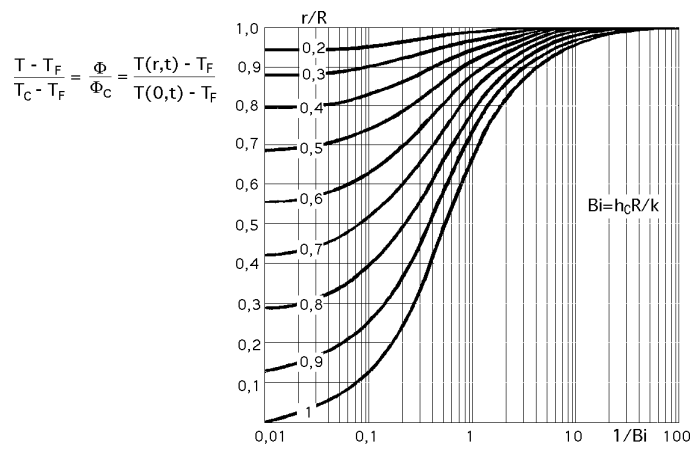


Fig IV.7.- Temperatura local adimensional para un cilindro infinito de radio R en función de la temperatura del eje

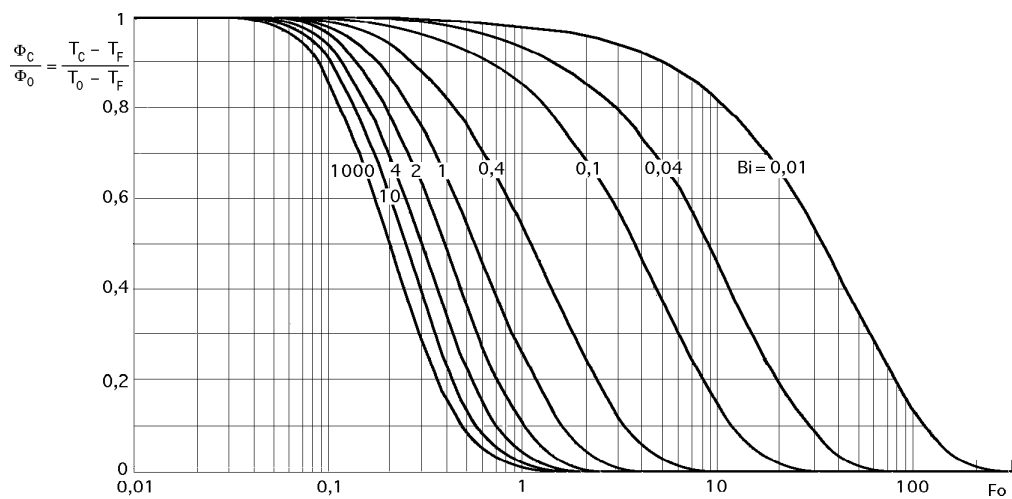
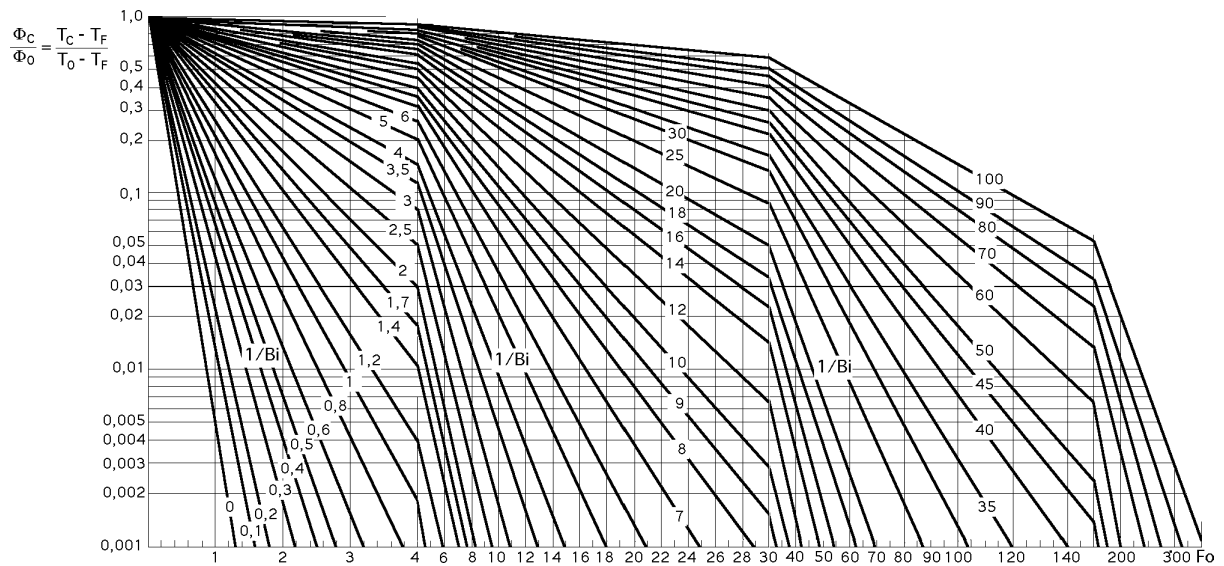


Fig IV.8.a.b.- Temperatura adimensional en el eje de un cilindro infinito de radio R

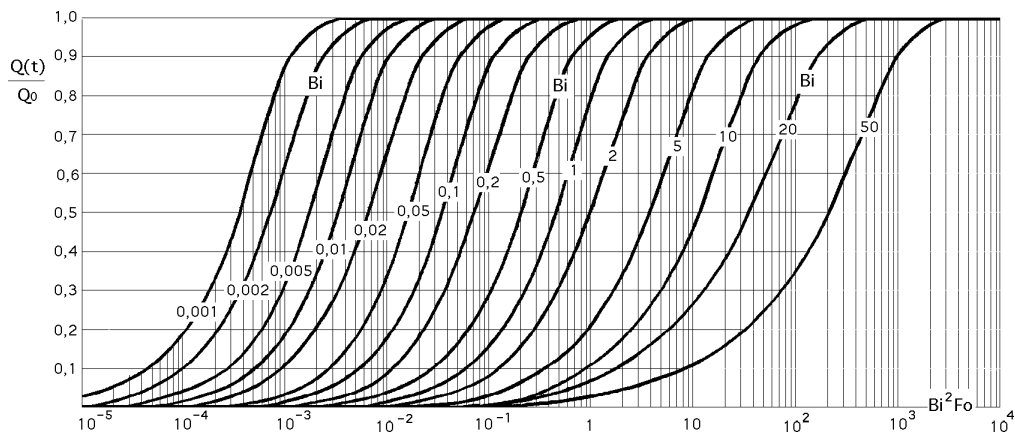


Fig IV.9.- Transferencia térmica adimensional desde un cilindro infinito de radio R

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{2}{R T_0} \int_0^t \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \frac{J_1(\lambda_n R) \{-\lambda_n J_1(\lambda_n R)\}}{\lambda_n \{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)\}} dt = \\
 &= - \frac{4}{R^2} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \frac{J_1^2(\lambda_n R)}{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)} dt = \\
 &= \frac{4}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2} \frac{J_1^2(\lambda_n R)}{J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R)} = \frac{4}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2} \frac{1}{\frac{J_0^2(\lambda_n R)}{J_1^2(\lambda_n R)} + 1}
 \end{aligned}$$

El cálculo de las temperaturas y el flujo térmico, se puede hacer con ayuda de los ábacos de Gröber y Heisler, Fig IV.7, 8 y 9.

IV.4.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UNA ESFERA CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

Para estudiar la distribución de temperaturas en una esfera que se calienta o enfría en un fluido, se parte de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

cuya solución general es:

$$T = B e^{-\lambda^2 t} \frac{\sin(\lambda r)}{r}$$

con las siguientes condiciones de contorno,

1) Para, $t = 0$; $T = f(r)$, ó $T_0 - T_F$

2) Para, $t > 0$; $\frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R} = -\frac{h_C}{k} T \bigg|_{r=R}$

Aplicando la segunda condición se obtiene la relación que define las λ_n en la forma:

$$B e^{-\frac{2}{n} t} \frac{\cos(r) - \frac{h_c}{k} \frac{\sin(r)}{r}}{r^2} \Big|_{r=R} = - \frac{h_c}{k} B e^{-\frac{2}{n} t} \frac{\sin(r)}{r} \Big|_{r=R}$$

$$(\cos(R) - \frac{h_c}{k} \frac{\sin(R)}{R}) = - \frac{h_c}{k} \frac{\sin(R)}{R} = - Bi \frac{\sin(R)}{R}$$

$$\cotg(R) = \frac{1 - Bi}{R} ; y = \cotg(R) ; y = \frac{1 - Bi}{R}$$

La ecuación, $y = \cotg(R)$, es una función trigonométrica

La ecuación, $y = \frac{1 - Bi}{R}$, es una hipérbola equilátera; su intersección con la anterior permite obtener los infinitos valores de, R .

La solución general de la distribución de temperaturas es de la forma:

$$= \sum_{n=1} B_n e^{-\frac{2}{n} t} \frac{\sin(n r)}{n r}, \text{ con, } \cotg(n R) = \frac{1 - Bi}{n R}$$

Para hallar el valor de B_n aplicamos la primera condición de contorno, $t = 0$, $\theta = f(r)$

$$f(r) = \sum_{n=1} B_n \frac{\sin(n r)}{n r} = B_1 \frac{\sin(r)}{r} + B_2 \frac{\sin(2r)}{2r} + \dots + B_n \frac{\sin(n r)}{n r}$$

por lo que haciendo uso de la teoría de funciones ortogonales:

$$\int_0^R \sin(i r) \sin(j r) dr = 0, \text{ con, } i \neq j$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^R f(r) \sin(n r) dr &= B_1 \int_0^R \frac{\sin(r)}{r} \sin(n r) dr + \\ &+ B_2 \int_0^R \frac{\sin(2r)}{2r} \sin(n r) dr + \dots + B_n \int_0^R \sin^2(n r) dr = B_n \int_0^R \sin^2(n r) dr \end{aligned}$$

y despejando B_n resulta:

$$B_n = \frac{\int_0^R f(r) \sin(n r) dr}{\int_0^R \sin^2(n r) dr} = \frac{\int_0^R f(r) \sin(n r) dr}{\frac{R}{2} - \frac{\sin(2n R) \cos(n R)}{2n}}$$

Los valores de B_n son distintos para cada superficie equipotencial, o lo que es lo mismo, para

cada valor de r .

La ecuación general que proporciona la distribución de temperaturas a lo largo del tiempo, y de las superficies isotermas de radio r , es de la forma,

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t} \frac{\text{sen}(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \frac{\int_0^R f(r) (\lambda_n r) \text{sen}(\lambda_n r) dr}{\frac{R}{2} - \frac{\text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)}{2 \lambda_n}}$$

Para, $f(r) = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_0} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t} \frac{\text{sen}(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \frac{\int_0^R (\lambda_n r) \text{sen}(\lambda_n r) dr}{R - \frac{\text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n}} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t} \frac{\text{sen}(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \left[\frac{\text{sen}(\lambda_n r) - (\lambda_n r) \cos(\lambda_n r)}{\lambda_n \left\{ R - \frac{\text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n} \right\}} \right]_0^R = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t} \frac{\text{sen}(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \frac{\text{sen}(\lambda_n R) - (\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R - \text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)} \end{aligned}$$

Si se supone que la temperatura en el centro de la esfera, $r = 0$ es, $c_c = T_C - T_F$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_0} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t} \frac{\text{sen}(\lambda_n R) - (\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R - \text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)} = \dots \\ &\dots = \frac{2 h_c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t} \frac{\{(\lambda_n R)^2 + (Bi - 1)^2\} \text{sen}(\lambda_n r) \text{sen}(\lambda_n R)}{r^2 \lambda_n \{(\lambda_n R)^2 + Bi (Bi - 1)\}} \end{aligned}$$

La disipación de calor adimensional viene determinada por la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= \frac{-k \cdot 4 \pi R^2 \left(\frac{1}{r} \right)_{r=R} dt}{\frac{4 \pi R^3}{3} c_p T_0} = - \frac{3 k}{R c_p T_0} \int_0^t \left(\frac{1}{r} \right)_{r=R} dt = \\ &= - \frac{6 k}{R c_p} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t} \frac{\text{sen}(\lambda_n R) - (\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)}{\lambda_n R - \text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)} \frac{(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R) - \text{sen}(\lambda_n R)}{\lambda_n R^2} dt = \\ &= - \frac{6}{R} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t}}{\lambda_n R^2} \frac{\{(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R) - \text{sen}(\lambda_n R)\}^2}{\lambda_n R - \text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)} dt = \\ &= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t}}{(\lambda_n R)^3} \frac{\{(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R) - \text{sen}(\lambda_n R)\}^2}{\lambda_n R - \text{sen}(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)} = \\ &= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t}}{(\lambda_n R)^3} \frac{\{(\lambda_n R) - \text{tg}(\lambda_n R)\}^2}{\frac{\lambda_n R}{\cos^2(\lambda_n R)} - \text{tg}(\lambda_n R)} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\lambda_n^2}{R^2} t}}{(\lambda_n R)^3} \frac{(\lambda_n R) - \text{tg}(\lambda_n R)}{1 + \frac{(\lambda_n R) \text{tg}^2(\lambda_n R)}{(\lambda_n R) - \text{tg}(\lambda_n R)}} \end{aligned}$$

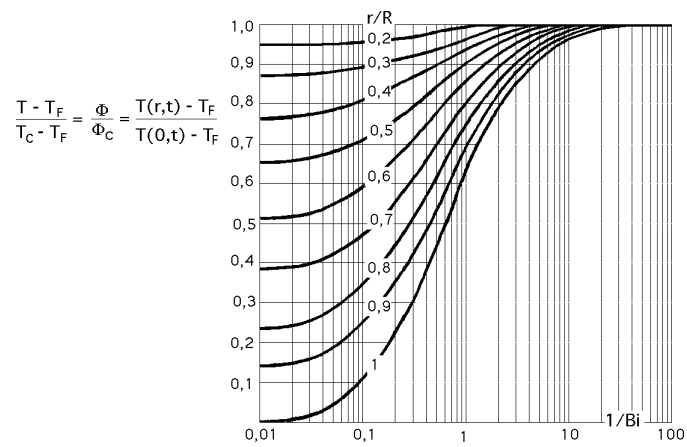


Fig IV.10.- Temperatura local adimensional en el caso de una esfera de radio R, en función de la temperatura del centro

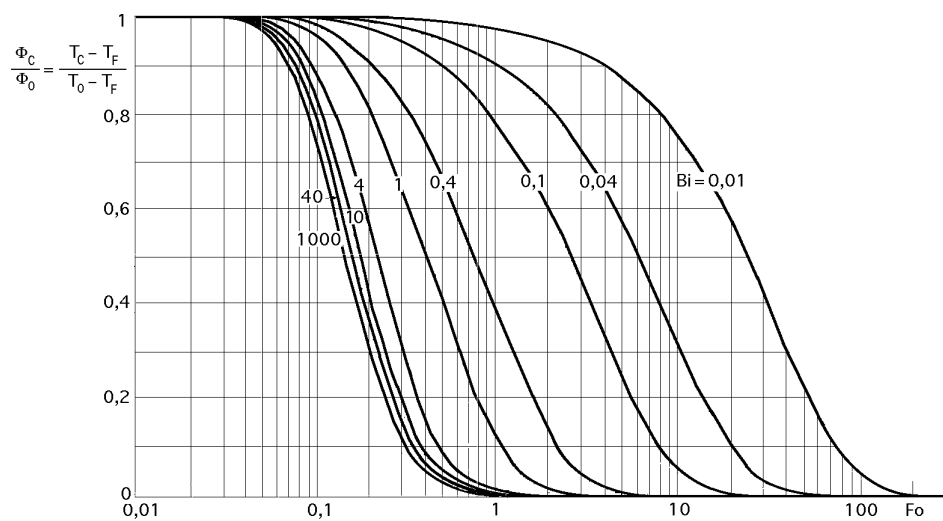
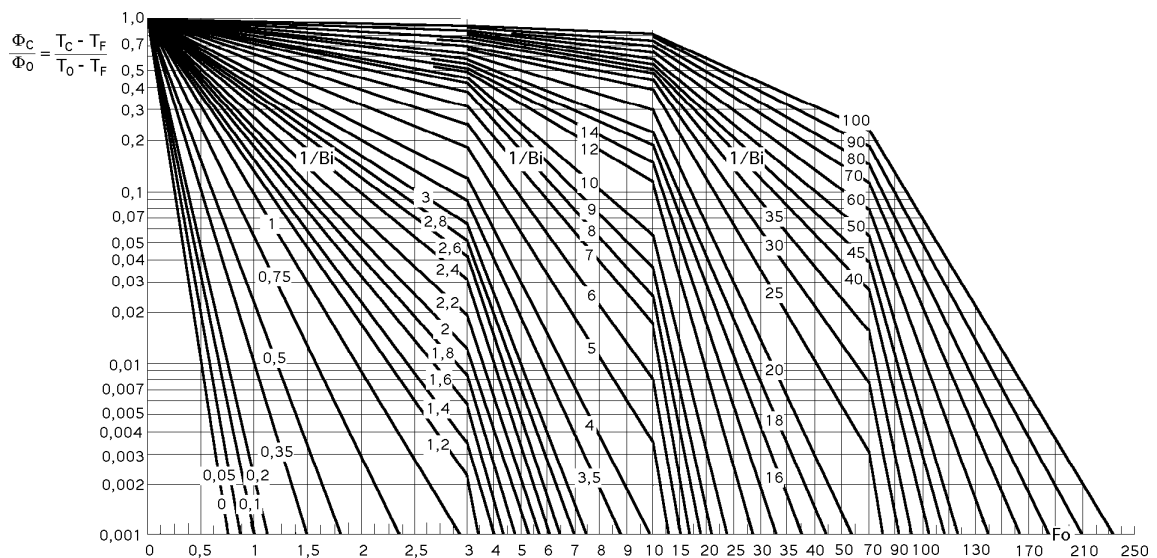


Fig IV.11a.b.- Temperatura adimensional en el centro de una esfera de radio R

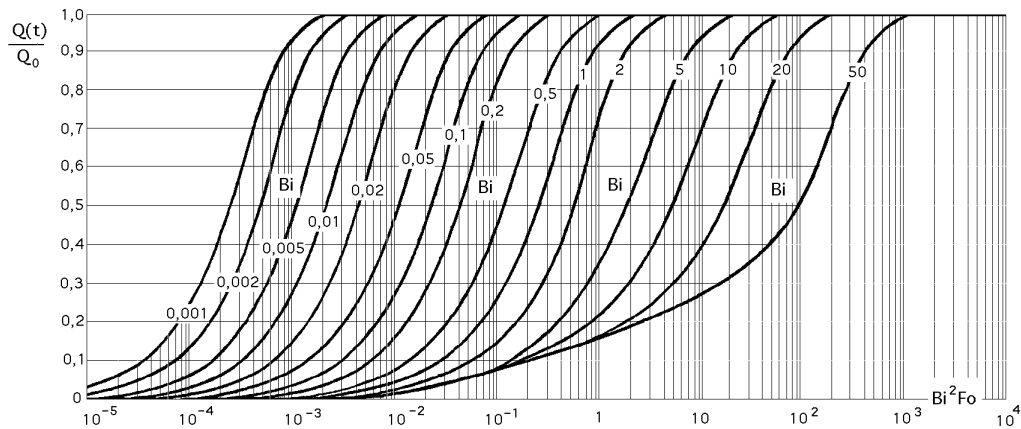


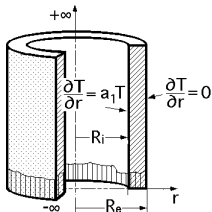
Fig IV.12.- Transferencia térmica adimensional desde una esfera de radio R

Mediante las gráficas de Heisler y Gröber, representadas en las Fig IV.10.11.12. se resuelven los problemas de transitorios en esferas en forma rápida.

Como se observa, los resultados analíticos de la conducción no estacionaria tienden a ser complicados y su uso es engorroso, por lo que siempre que sea posible se recurrirá a encontrar soluciones aproximadas de precisión adecuada, en forma gráfica.

IV.5.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN DOS Y TRES DIMENSIONES, CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

a) *Tubo infinito con convección en la superficie lateral interior y aislamiento térmico en la superficie lateral exterior.*



$$\begin{aligned}
 t = 0 ; \quad & T = T_0 - T_F ; R_e \leq r \leq R_i \\
 t > 0 ; \quad & r = R_i ; \frac{\partial T}{\partial r} = a_1 = \frac{h_C}{k} \\
 & r = R_e ; \frac{\partial T}{\partial r} = 0
 \end{aligned}$$

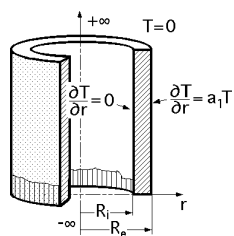
$$(r,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{ J_0'(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i) \}^2 N_0(\lambda_n r)}{\{ J_0'(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i) \}^2 - (\lambda_n^2 + a_1^2) J_0^2(\lambda_n R_e)} M e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$M = \int_{R_i}^{R_e} r \{ J_0(\lambda_n r) Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e) Y_0(\lambda_n r) \} dr = \int_{R_i}^{R_e} r N_0(\lambda_n r) dr$$

$$N_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) Y_0'(\lambda_n R_e) - J_0'(\lambda_n R_e) Y_0(\lambda_n r)$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raíces de, } \frac{\{ J_0(\lambda_n R_i) + a_1 Y_0(\lambda_n R_i) \} J_0'(\lambda_n R_e)}{\{ J_0'(\lambda_n R_i) + a_1 J_0(\lambda_n R_i) \} Y_0'(\lambda_n R_e)} = 1$$

b) *Tubo infinito con convección en la superficie lateral exterior y aislamiento térmico en la superficie lateral interior.*



$$t = 0 ; \quad T = T_0 - T_F ; R_e \leq r \leq R_i$$

$$t > 0 ; \quad r = R_e ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R_e} = a_1 T = \frac{h_C}{k}$$

$$r = R_i ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R_i} = 0$$

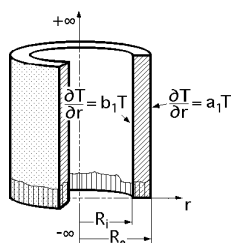
$$(r,t) = \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{2}{n} \left[J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \right]^2 N_0(\alpha_n r) \right\}}{\left\{ \frac{2}{n} \left[J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \right]^2 - \left(\frac{2}{n} + a_1^2 \right) J_0^2(\alpha_n R_e) \right\}} M e^{-\frac{2}{n} t}$$

$$M = \int_{R_i}^{R_e} r \left\{ J_0(\alpha_n r) Y_0'(\alpha_n R_e) - J_0'(\alpha_n R_e) Y_0(\alpha_n r) \right\} dr = \int_{R_i}^{R_e} r N_0(\alpha_n r) dr$$

$$N_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0'(\alpha_n R_e) - J_0'(\alpha_n R_e) Y_0(\alpha_n r)$$

$$\text{con } \alpha_n \text{ raíces de, } \frac{\left\{ \frac{2}{n} Y_0(\alpha_n R_i) + a_1 Y_0'(\alpha_n R_i) \right\} J_0'(\alpha_n R_e)}{\left\{ \frac{2}{n} J_0(\alpha_n R_i) + a_1 J_0'(\alpha_n R_i) \right\} Y_0'(\alpha_n R_e)} = 1$$

c) *Tubo infinito con convección en las superficies lateral exterior e interior.*



$$t = 0 ; \quad T = T_0 - T_F ; R_e \leq r \leq R_i$$

$$t > 0 ; \quad r = R_e ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R_e} = a_1 T = \frac{h_{Ce}}{k}$$

$$r = R_i ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R_i} = b_1 T = \frac{h_{Ci}}{k}$$

$$(r,t) = \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{2}{n} \left[J_0'(\alpha_n R_e) + b_1 J_0(\alpha_n R_e) \right]^2 N_0(\alpha_n r) \right\}}{\left(\frac{2}{n} + b_1^2 \right) \left\{ \frac{2}{n} \left[J_0'(\alpha_n R_i) + b_1 J_0(\alpha_n R_i) \right]^2 - \left(\frac{2}{n} + a_1^2 \right) \left\{ \frac{2}{n} J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \right\}^2 \right\}} M e^{-\frac{2}{n} t}$$

$$M = \int_{R_i}^{R_e} r \left\{ J_0(\alpha_n r) \left[Y_0'(\alpha_n R_i) - b_1 Y_0(\alpha_n R_i) \right] - Y_0(\alpha_n r) \left[J_0'(\alpha_n R_i) - b_1 J_0(\alpha_n R_i) \right] \right\} dr$$

$$N_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) \left[Y_0'(\alpha_n R_i) - b_1 Y_0(\alpha_n R_i) \right] - Y_0(\alpha_n r) \left[J_0'(\alpha_n R_i) - b_1 J_0(\alpha_n R_i) \right]$$

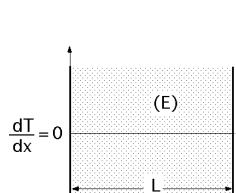
$$\text{con } \alpha_n \text{ raíces de, } \frac{\left\{ \frac{2}{n} Y_0'(\alpha_n R_i) - b_1 Y_0(\alpha_n R_i) \right\} \left\{ \frac{2}{n} J_0'(\alpha_n R_e) + b_1 J_0(\alpha_n R_e) \right\}}{\left\{ \frac{2}{n} Y_0'(\alpha_n R_e) + a_1 Y_0(\alpha_n R_e) \right\} \left\{ \frac{2}{n} J_0'(\alpha_n R_i) - b_1 J_0(\alpha_n R_i) \right\}} = 1$$

IV.6.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN TRANSITORIO CON GENERACIÓN DE CALOR E.

A continuación exponemos la casuística correspondiente a las condiciones de contorno, y distribución de temperaturas, para placa, cilindro y esfera infinitos, con generación de calor.

a) *Pared plana infinita con generación de calor E; condición de contorno de convección.*

$$t = 0 ; \quad T = T_0 - T_F ; \quad 0 \leq x \leq L$$



$$E = \text{Cte}$$

$$x = 0 ; \quad \frac{dT}{dx} = 0$$

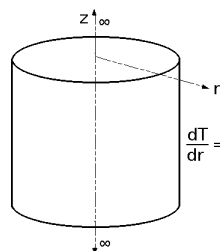
$$x = L ; \quad T = T_F$$

$$T(x,t) = \frac{2 E h_C}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n x)}{\lambda_n \left\{ L \left(\lambda_n^2 + \frac{h_C^2}{k^2} \right) + \frac{h_C}{k} \right\} \cos(\lambda_n L)} (1 - e^{-\lambda_n^2 t})$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raíces de, } \tan(\lambda_n L) = \frac{Bi}{\lambda_n L}$$

b) Cilindro infinito con generación de calor E; condición de contorno de convección

$$t = 0 ; \quad T = 0 ; \quad 0 \leq r \leq R$$



$$E = \text{Cte}$$

$$r = R ; \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{h_C}{k} = -A$$

$$T(r,t) = \frac{4 E h_C}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n \left(\lambda_n^2 + \frac{h_C^2}{k^2} \right) J_0(\lambda_n R)} (1 - e^{-\lambda_n^2 t})$$

$$T(r,t) = \frac{4 E h_C}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n \left(\lambda_n^2 + \frac{h_C^2}{k^2} \right) J_0(\lambda_n R)} (1 - e^{-\lambda_n^2 t})$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raíces de, } \lambda_n J_1(\lambda_n R) = \frac{h_C}{k} J_0(\lambda_n R)$$

c) Esfera con generación de calor E; condición de contorno de convección.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{E}{k} = 0$$

$$t = 0 ; \quad T = 0 ; \quad 0 \leq r \leq R$$

$$E = \text{Cte}$$

$$r = R ; \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{h_C}{k} = -A$$

$$T(r,t) = \frac{2 E}{k R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ \lambda_n^2 R^2 + (Bi - 1)^2 \right\} \sin(\lambda_n r) (1 - e^{-\lambda_n^2 t})}{\left\{ \lambda_n^2 R^2 + Bi (Bi - 1)^2 \right\} r \lambda_n} [\sin(\lambda_n R) + \{1 - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)\}]$$

$$\text{con } \lambda_n \text{ raíces de, } (\lambda_n R) \cotg(\lambda_n R) = 1 - Bi$$

TABLAS DE FUNCIONES DE BESSEL

Raíces de la función de Bessel, $J_n(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715	9,9361
5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386	13,5893
8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002	17,0038
11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801	20,3208
14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178	23,5861
18,0711	19,6159	21,1170	22,5827	24,0190	25,4303	26,8202

Raíces de la función de Bessel, $Y_n(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
0,8936	2,1971	3,3842	4,527	5,6452	6,7472	7,8377
3,9577	5,4297	6,7938	8,0976	9,3616	10,5972	11,811
7,0861	8,596	10,0225	11,3965	12,7301	14,0338	15,3136
10,2223	11,7492	13,21	14,6231	15,9996	17,3471	18,6707
13,3611	14,8974	16,379	17,8185	19,2244	20,6029	21,9583
16,5009	18,0434	19,539	20,9978	22,4248	23,8265	25,2062

Raíces de la función de Bessel, $J'_n(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
0	1,8412	3,0542	4,2012	5,3176	6,4156	7,5013
3,8317	5,3314	6,7061	8,0152	9,2824	10,5199	11,7349
7,0156	8,5363	9,9695	11,3459	12,6819	13,9872	15,2682
10,1735	11,706	13,1704	14,5859	15,9641	17,3128	18,6374
13,3237	14,8636	16,3475	17,7888	19,196	20,5755	21,9317
16,4706	18,0155	19,5129	20,9725	22,4048	23,8036	25,1839

Raíces de la función de Bessel, $Y'_n(x) = 0$

n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
2,1971	3,683	5,0026	6,2536	7,4649	8,6495	9,8148
5,4297	6,9415	8,3507	9,6988	11,0052	12,2809	13,5328
8,596	10,1234	11,5742	12,9724	14,3317	15,6608	16,9655
11,7492	13,2858	14,7609	16,1905	17,5844	18,9497	20,2913
14,8974	16,4401	17,9313	19,3824	20,8011	22,1928	23,5619
18,0434	19,5902	21,0929	22,5598	23,997	25,4091	26,7995

Raíces de la ecuación, $\frac{J'_0(x) Y'_0(ax)}{J'_0(ax) Y'_0(x)} = 1$

a	x_1	$(a_1) x_2$	$(a_1) x_3$	$(a_1) x_4$	$(a_1) x_5$	$(a_1) x_6$
1	1	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
1,1	0,953	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
1,2	0,910	3,1509	6,2878	9,4279	12,5687	15,7098
1,3	0,872	3,1609	6,2928	9,4312	12,5712	15,7118
1,4	0,837	3,174	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
1,5	0,805	3,188	6,3064	9,4403	12,578	15,7172
1,6	0,776	3,205	6,3146	9,4457	12,582	15,7205
2	0,677	3,282	6,353	9,4710	12,601	15,736
5	0,341	3,969	6,746	9,7320	12,79	15,89
10	0,180	4,623	7,37	10,223		
20	0,092	5,011	7,98	10,908		

$$\text{Raices de la ecuación, } \frac{J_0 \left(\frac{nL}{Bi} \right)}{J_1 \left(\frac{nL}{Bi} \right)} = \frac{nL}{Bi}$$

Bi	₁ L	₂ L	₃ L	₄ L	₅ L	₆ L
0,00	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,2960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,2	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,3	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,4	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,5	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,6	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,7	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,8	1,1490	4,0325	7,1282	10,2516	13,3835	16,5191
0,9	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

$$\text{Raices de la ecuación, } \frac{J_0 \left(\frac{nL}{a} \right) Y_0 \left(\frac{nL}{a} \right)}{Y_0 \left(\frac{nL}{a} \right) J_0 \left(\frac{nL}{a} \right)} = 1$$

a	₁ L	₂ L	₃ L	₄ L	₅ L
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2716
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2301

$$\text{Raices de la ecuación, } \cot g (\text{ }_n\text{L}) = \frac{1 - \text{Bi}}{n\text{L}}$$

Bi	(₁ L)	(₂ L)	(₃ L)	(₄ L)	(₅ L)
0	0	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662
0,005	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676
0,03	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690
0,05	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705
0,07	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719
0,09	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726
0,1	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733
0,2	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804
0,3	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875
0,4	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946
0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017
0,6	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088
0,7	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159
0,8	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230
0,9	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301
1	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372
1,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724
2	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075
3	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764
4	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434
5	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080
6	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699
7	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288
8	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847
9	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374
10	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870
11	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335
16	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251
21	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625
31	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380
41	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417
51	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090
101	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537

$$\text{Raices de la ecuación, } \cotg(\alpha_n L) = -\frac{C}{\alpha_n L}$$

C	($\alpha_1 L$)	($\alpha_2 L$)	($\alpha_3 L$)	($\alpha_4 L$)	($\alpha_5 L$)	($\alpha_6 L$)
-1,0	0,0000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
-0,995	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
-0,99	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
-0,98	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
-0,97	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
-0,96	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
-0,95	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
-0,94	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
-0,93	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
-0,92	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
-0,91	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
-0,90	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
-0,85	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
-0,8	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
-0,7	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
-0,6	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
-0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
-0,4	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
-0,3	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
-0,2	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
-0,1	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
0,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8566	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9965	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
2	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
3	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
10	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9215	17,9742
20	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
50	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6202
100	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650

$$\text{Raices de la ecuación, } \text{tg}(\alpha_n) = \frac{C}{nL}$$

C	(α_1)	(α_2)	(α_3)	(α_4)	(α_5)	(α_6)
0	0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,1835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	17,9519
60	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093

V.- CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA EN SÓLIDOS INFINITOS

V.1.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN PLACA INFINITA CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA

La conducción a través de una placa plana de espesor finito L en la dirección x , y de espesor infinito en las otras dos, por lo que en éstas se desprecian los efectos de borde, la ecuación diferencial de la conducción es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ con, } T = T(x, t) - T_F$$

La zona próxima a la periferia es de resistencia superficial despreciable por lo que $Bi < 1$ y desde ahí hasta el núcleo, $Bi > 1$.

Sí es posible representar la distribución de temperaturas, $\theta = T - T_F$, mediante una expresión de la forma:

$$\theta = X(x) \cdot \phi(t) = X$$

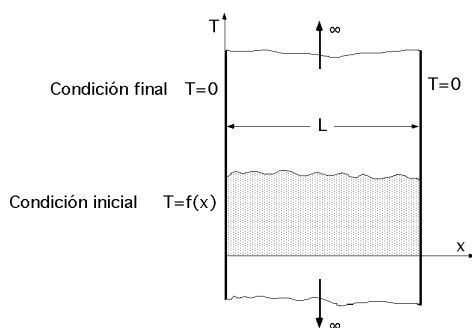


Fig V.1.- Placa plana infinita

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{X}{x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} X$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} X \quad ; \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\lambda^2$$

El parámetro λ^2 se ha introducido por cuanto cada uno de los miembros de dicha igualdad es función de una sola variable; esta separación de variables conduce al siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad T = C_1 e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda^2 T = 0 \quad ; \quad T = C_2 \sin(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x)$$

La solución general es:

$$T = C_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \{C_2 \sin(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x)\} = e^{-\alpha \lambda^2 t} \{B_1 \sin(\lambda x) + B_2 \cos(\lambda x)\}$$

La condición inicial es:

Para, $t = 0$, $0 \leq x \leq L$ $T(x, 0) = f(x)$ ó $T_0 = T_0 - T_F$

Las condiciones de contorno son:

Para, $t > 0$, $- \infty < x < + \infty$

en, $x = 0$; $T = 0 = T(0, t)$

en, $x = L$; $T = 0 = T(L, t)$

La condición de contorno se presenta para el caso límite de considerar un valor muy grande del coeficiente de transferencia térmica por convección, {metales líquidos}, por lo que la resistencia térmica de la capa de convección es despreciable y la temperatura de la superficie del cuerpo en el tiempo t es idéntica a la temperatura del fluido, situación a la que se debe llegar en un tiempo muy pequeño (*condición de contorno isotérmica*).

Aplicando las condiciones de contorno a la ecuación diferencial:

Para, $x = 0$, $T = 0$ $B_2 = 0$

$x = L$, $T = 0$ $0 = e^{-\alpha \lambda^2 t} B_1 \sin(\lambda L)$ $\sin(\lambda L) = 0$

y considerando que para cualquier valor de t , se satisface por un número infinito de valores del parámetro, λL , se puede poner:

$$\sin(nL) = 0, \text{ con, } n = \frac{\lambda L}{L} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada valor de n se obtiene uno de λ_n , siendo éstos los valores característicos del problema, por lo que la solución para la distribución de temperaturas es un desarrollo en serie de la forma:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} B_n \sin(\lambda_n x)$$

Aplicando la condición inicial, $t = 0$, $T = f(x)$, resulta:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\lambda_n x)$$

En una serie infinita de funciones de la forma:

$$\text{sen}(x), \text{sen}(2x), \text{sen}(3x), \dots, \text{sen}(nx), \dots$$

éstas son ortogonales, cuando se cumple que:

$$\int_0^L \text{sen}(ix) \text{sen}(jx) dx = 0, \text{ con, } i \neq j$$

y tiene un valor determinado en un instante considerado.

Si $f(x)$ es una función arbitraria se puede poner en función de una combinación lineal de funciones ortogonales, en la forma:

$$f(x) = B_1 \text{sen}(x) + B_2 \text{sen}(2x) + \dots + B_n \text{sen}(nx) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(nx)$$

en la que las B_i son constantes a determinar.

Si la serie anterior es convergente e integrable, y la multiplicamos por, $\text{sen}(nx)$, se obtiene:

$$\int_0^L f(x) \text{sen}(nx) dx = B_1 \int_0^L \text{sen}(x) \text{sen}(nx) dx + \dots + B_n \int_0^L \text{sen}^2(nx) dx$$

Por definición de ortogonalidad se hacen cero todas las integrales del segundo miembro, menos la correspondiente al coeficiente B_n , por lo que:

$$B_n = \frac{\int_0^L f(x) \text{sen}(nx) dx}{\int_0^L \text{sen}^2(nx) dx} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}(nx) dx$$

en la que se ha tenido en cuenta que:

$$\int_0^L \text{sen}^2(nx) dx = \frac{L}{2} - \frac{\text{sen}(nL) \cos(nL)}{2n} = \left| n = \frac{n}{L} \right| = \frac{L}{2}$$

pudiéndose poner la expresión de la distribución de temperaturas, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} e^{-\frac{n^2}{L^2} t} \text{sen}(nx) \int_0^L f(x) \text{sen}(nx) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{n}{L}\right)^2 t} \text{sen} \frac{nx}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{nx}{L} dx \end{aligned}$$

que es una ecuación función del tiempo y de la distribución de temperaturas inicial $f(x)$, que es conocida.

Si se considera, $f(x) = 0$, el valor de B_n es:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L 0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{n} \{1 - (-1)^n\} = \frac{4}{n}$$

y la ecuación de la distribución de temperaturas queda en la forma:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \frac{\{1 - (-1)^n\} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n} = \frac{4}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n}$$

Si se pone en función del nº de Fo y de un parámetro adimensional de la posición, $\eta = \frac{x}{L}$, resulta:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 Fo} \sin(n\pi \eta) \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{4}{n} e^{-(n\pi)^2 Fo} \frac{\sin(n\pi \eta)}{n}$$

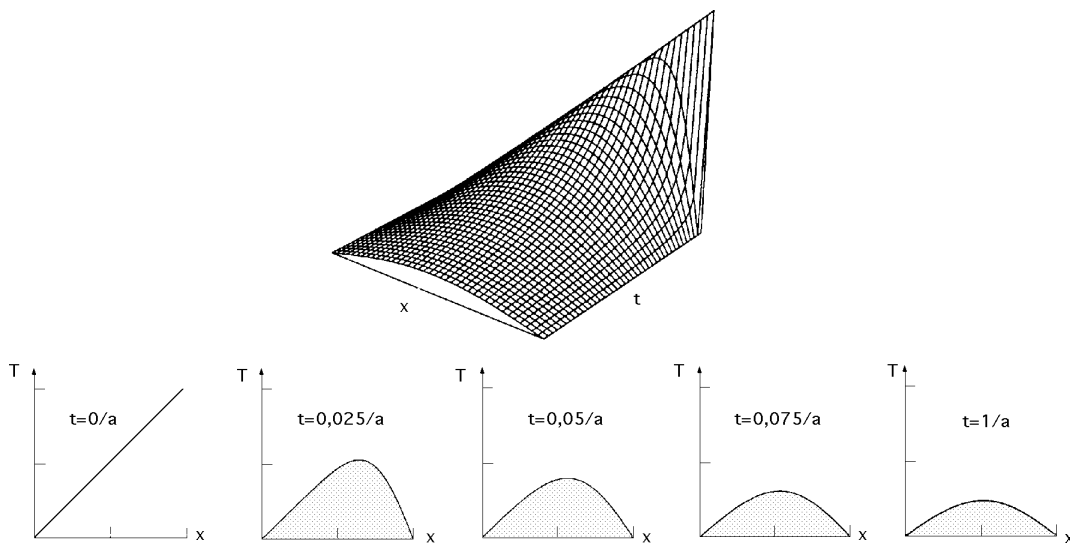


Fig V.2.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en una placa plana infinita, en régimen transitorio, con temperatura inicial de la forma, $f(x) = at$

Si la distribución de temperaturas fuese, por ejemplo, de la forma, $f(x) = ax$, con, $a = \text{Cte}$, se obtiene:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2a}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \dots = \frac{2aL}{n} (-1)^{n+1}$$

$$= \frac{2aL}{n} e^{-(n\pi)^2 Fo} \sin(n\pi \eta) \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

cuya representación gráfica tridimensional exponemos en la Fig V.2.

El flujo térmico en el instante t se obtiene en la forma:

$$q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{2 T_0 k}{L} \sum_{n=1,3,\dots} e^{-(n)^2 Fo} \frac{1 - (-1)^n}{n} = \frac{4 T_0 k}{L} \sum_{n=1,3,\dots} e^{-(n)^2 Fo} = \frac{4 T_0 k}{L} \sum_{n=1,3,\dots} e^{-\frac{n^2}{\tau} t}$$

Estas series convergen muy rápidamente a menos que el n° de Fo sea muy pequeño.

Para $Fo > 0,2$ sólo es necesario conservar el primer término de la serie, cometándose un error menor del 2%

Para valores muy pequeños del n° de $Fo < 0,2$, (es decir, poco después de que la placa se haya sumergido en el líquido), la serie converge lentamente y es necesario conservar los suficientes términos del desarrollo para obtener un resultado exacto.

Para $Fo \rightarrow 0$, se tiene que:

$$\lim_{Fo \rightarrow 0} q_{Fo} = \frac{k (T_0 - T_F)}{\sqrt{\pi \tau}}$$

que coincide con la expresión que se encontrará para el sólido semiinfinito, y que indica que la temperatura sólo cambia en una posición muy delgada cerca de la superficie, comportándose en esta zona como un sólido semiinfinito, mientras que la temperatura en el interior de la placa permanece constante; el proceso de la transmisión de calor se limita a esta delgada región y el espesor de la placa no afecta en absoluto, por cuanto L no aparece en la ecuación.

El calor Q que abandona la placa por las dos caras, de superficie de contacto $2A$, en el intervalo de tiempo, $0 \rightarrow t$, es:

$$\begin{aligned} Q &= 2A \int_0^t q \, dt = \frac{4 (T_0 - T_F) k A}{L} \sum_{n=1} e^{-(n)^2 Fo} \{1 - (-1)^n\} \int_0^t dt = \\ &= \frac{4 (T_0 - T_F) k A}{L} \sum_{n=1} \frac{L^2}{(n)^2} (e^{-(n)^2 Fo} - 1) \{1 - (-1)^n\} = \\ &= \frac{8 (T_0 - T_F) k A L}{L} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1 - e^{-(n)^2 Fo}}{(n)^2} = 8 (T_0 - T_F) c_p A L \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1 - e^{-(n)^2 Fo}}{(n)^2} = \\ &= \frac{8 (T_0 - T_F) c_p A}{L} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1 - e^{-\frac{n^2}{\tau} t}}{\frac{n^2}{\tau}} \end{aligned}$$

El calor Q_0 almacenado en la placa es:

$$\text{Para, } x = 0, T = T_F; \quad Q_0 = L A c_p (T_0 - T_F)$$

y el valor de Q/Q_0 es la pérdida o ganancia real de energía en el tiempo t , dividida entre la pérdida o ganancia total necesaria para alcanzar la temperatura del medio ambiente:

$$\frac{Q}{Q_0} = 8 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1 - e^{-\frac{n^2}{\tau} t}}{(n)^2}$$

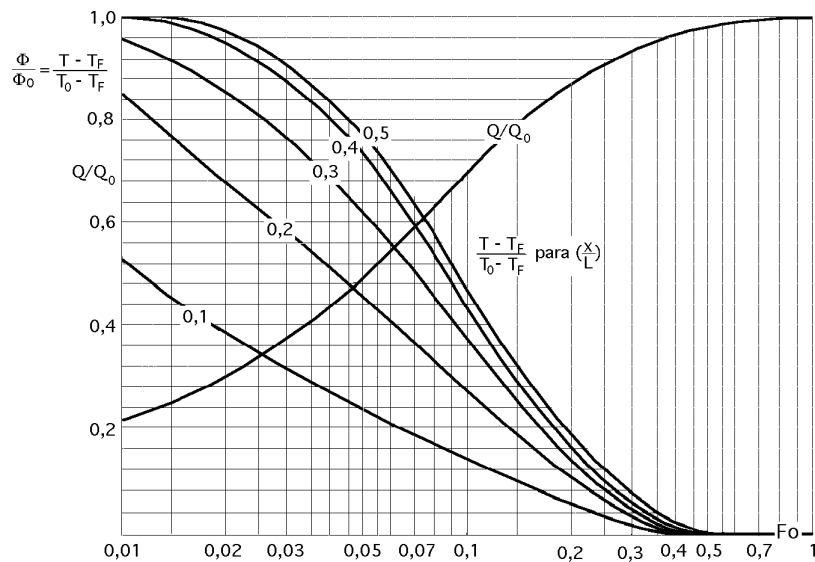


Fig V.3.- Abaco para la determinación gráfica de la temperatura y de Q/Q_0 en una placa plana infinita en régimen transitorio, con condición de contorno isotérmica

El calor almacenado en la placa desde $t = 0$, hasta $t = t$, se puede poner en la forma:

$$Q = L A \quad c_p (\hat{T}_{\text{Final}} - T_0)$$

con:

$$\hat{T}_{\text{Final}} = \frac{1}{L} \int_0^L (x) dx \quad ; \quad \frac{\hat{T}_{\text{Final}} - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{8}{2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{e^{-\frac{2}{n^2} t}}{n^2}$$

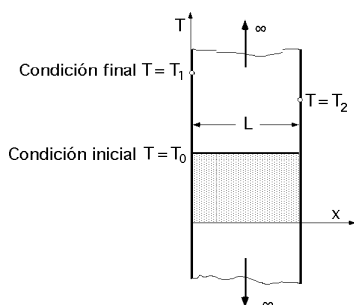
La determinación de T y de $\frac{Q}{Q_0}$ se puede hacer mediante la gráfica de la Fig V.3.

CASOS PARTICULARES

a) Pared plana infinita inicialmente a T_0 , que experimenta cambios instantáneos de temperatura en las superficies a T_1 y T_2

El problema se resuelve mediante la superposición de un problema estacionario y otro transitorio, de forma que:

$$T(x, t) = T_1(x) - T_2(x, t) \quad \text{ó} \quad (x, t) = T_1(x) - T_2(x, t)$$



$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} = 0 \quad ; \quad \frac{T_2}{t} = \frac{T_2}{x^2}$$

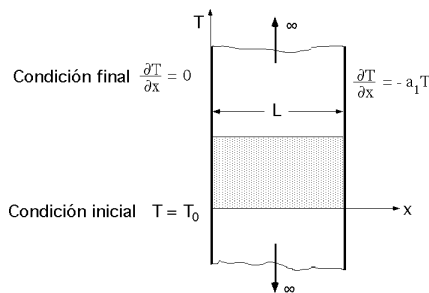
$$T = T_0 \quad ; \quad 0 < x < L \quad ; \quad t = 0$$

$$T = T_1 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad t > 0$$

$$T = T_2 \quad ; \quad x = L \quad ; \quad t > 0$$

$$T(x, t) = \frac{2}{n=1} \frac{T_1 - (-1)^n T_2}{n} \left\{ 1 - e^{-\frac{2}{n} t} + \frac{2 T_0 e^{-\frac{2}{n} t}}{n} \right\} \sin(n x) ; \quad n = \frac{(2n+1)}{L}$$

b) Pared plana infinita inicialmente a T_0 ; una de sus superficies experimenta un aislamiento térmico y la otra intercambia calor con un fluido exterior.



$$T = T_0 ; 0 < x < L ; t = 0$$

$$\frac{T}{x} = 0 ; x = 0 ; t > 0$$

$$\frac{T}{x} = -a_1 T = -\frac{h_{cF}}{k} T ; x = L ; t > 0$$

$$\frac{T}{x} = -a_1 = -\frac{h_{cF}}{k} ; x = L ; t > 0$$

$$\frac{(x, t)}{0} = 2 a_1 T_0 \frac{\cos(n x) e^{-\frac{2}{n} t}}{\{L(\frac{2}{n} + a_1^2) + a_1\} \cos(n L)} ; \quad n = \frac{(2n+1)}{L}$$

V.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN PARED CILÍNDRICA INFINITA CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA.

Se considerará que en el cilindro infinito no existen efectos de borde, debido a que se le supone longitud infinita y, por lo tanto, que la conducción del calor se verifica en la dirección radial.

La ecuación diferencial que rige el proceso, en *coordenadas cilíndricas*, es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{T}{t} ; \quad \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) = \frac{T}{t} ; \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) = \frac{1}{t}$$

$$\text{con, } \theta = T - T_F$$

Si representamos θ en la forma, $\theta = R(r) \cdot t(t)$, resulta:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = \frac{R}{t} ; \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = \frac{R}{t} ; \quad \frac{1}{t} \frac{dt}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = \frac{R}{t} ; \quad \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{t} \frac{dt}{dt} = -\lambda^2$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes y sus soluciones son:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2 R ; \quad R = B_1 J_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r)$$

$$\frac{dt}{dt} = -\lambda^2 t ; \quad t = B_3 e^{-\lambda^2 t}$$

Como el cilindro no puede admitir en su eje $r = 0$, una solución infinita, por cuanto $Y_0(0) = \infty$, resulta que B_2 tiene que ser cero, por lo que se obtiene una ecuación de la forma:

$$R = B_1 J_0(r)$$

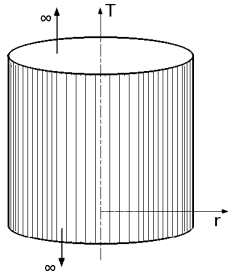


Fig V.4.- Cilindro infinito

La solución general que proporciona la distribución de temperaturas de la forma:

$$= B_3 e^{-\lambda^2 t} B_1 J_0(r) = B e^{-\lambda^2 t} J_0(r)$$

en la que B y λ son constantes, que habrá que determinar mediante las condiciones de contorno; $J_0(r)$ es la función de Bessel de primera especie y orden cero.

La condición inicial es:

$$t = 0 ; 0 \leq r \leq R ; T = f(r) \text{ ó } T_0$$

La condición de contorno *para un cambio brusco de la temperatura en la superficie lateral del cilindro infinito* a, $T = T_F$, es:

$$t > 0 ; r=R : T = 0 = B e^{-\lambda^2 t} J_0(\lambda R) ; J_0(\lambda R) = 0 ; J_0(\lambda_n R) = 0$$

que se tiene que cumplir para cualquier valor de t .

Los valores de λ_n se calculan como raíces de la ecuación, $J_0(\lambda_n R) = 0$, con, $n = 1, 2, 3, \dots$ obteniéndose una serie de valores que conforman un desarrollo en serie para la distribución de temperaturas, de la forma:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)$$

Aplicando la condición inicial, $t = 0$; $T = f(r)$, resulta:

$$f(r) = B_1 J_0(\lambda_1 r) + B_2 J_0(\lambda_2 r) + \dots + B_n J_0(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\lambda_n r)$$

Para que ésto sea así, es necesario que las funciones, $J_0(\lambda_1 r), J_0(\lambda_2 r), \dots, J_0(\lambda_n r)$, formen un agrupamiento ortogonal en el intervalo, $0 \leq r \leq R$, respecto a un factor ponderal r , de forma que:

$$\int_0^R r J_0(\lambda_i r) J_0(\lambda_j r) dr = 0, \text{ con, } i \neq j$$

Si la serie es convergente e integrable, se tiene que:

Tabla V.1.- Valores de las funciones de Bessel de primera y segunda especie, órdenes cero y uno

x	J ₀ (x)	J ₁ (x)	Y ₀ (x)	Y ₁ (x)	x	J ₀ (x)	J ₁ (x)	Y ₀ (x)	Y ₁ (x)
0,0	1,00000	0,00000	-	-	5,2	-0,11029	-0,34322	-0,33125	0,07919
0,2	0,99002	0,09950	-1,08110	-3,32380	5,4	-0,04121	-0,34534	-0,34017	0,01013
0,4	0,96039	0,19603	-0,60602	-1,78090	5,6	0,02697	-0,33433	-0,33544	-0,05681
0,6	0,91200	0,28670	-0,30851	-1,26040	5,8	0,09170	-0,31103	-0,31775	-0,11923
0,8	0,84629	0,36884	-0,08680	-0,97814	6,0	0,15065	-0,27668	-0,28819	-0,17501
1,0	0,76520	0,44005	0,08825	-0,78121	6,2	0,20175	-0,23292	-0,24830	-0,22228
1,4	0,56686	0,54195	0,33790	-0,47915	6,4	0,24331	-0,18164	-0,19995	-0,25955
1,6	0,45540	0,56990	0,42043	-0,34758	6,6	0,27404	-0,12498	-0,14523	-0,28575
1,8	0,33999	0,58152	0,47743	-0,22366	6,8	0,29310	-0,06252	-0,08643	-0,30019
2,0	0,22389	0,57672	0,51038	-0,10703	7,0	0,30007	-0,00468	-0,02595	-0,30267
2,2	0,11036	0,55596	0,52078	0,00149	7,2	0,29507	0,05432	0,03385	-0,29342
2,4	0,00251	0,52019	0,51042	0,10049	7,4	0,27859	0,10963	0,09068	-0,27315
2,6	-0,09680	0,47082	0,48133	0,18836	7,6	0,25160	0,15921	0,14243	-0,24280
2,8	-0,18503	0,40971	0,43591	0,26355	7,8	0,25541	0,20136	0,18722	-0,20389
3,0	-0,26005	0,33906	0,37685	0,32467	8,0	0,17165	0,23464	0,22352	-0,15806
3,2	-0,32019	0,26134	0,30705	0,37071	8,2	0,12222	0,25800	0,25011	-0,10724
3,4	-0,36430	0,17923	0,22962	0,40101	8,4	0,06916	0,27079	0,26622	-0,05348
3,6	-0,39177	0,09547	0,14771	0,41539	8,6	0,01462	0,27275	0,27146	-0,00108
3,8	-0,40256	0,01282	0,06450	0,41411	8,8	-0,03923	0,26407	0,26587	0,05436
4,0	-0,39715	-0,06604	-0,01694	0,39792	9,0	-0,09033	0,24531	0,24994	0,10431
4,2	-0,37656	-0,13864	-0,09375	0,36801	9,2	-0,13675	0,21471	0,22449	0,14911
4,4	-0,34226	-0,20278	-0,16333	0,32597	9,4	-0,17677	0,18163	0,19074	0,18714
4,6	-0,29614	-0,25655	-0,22345	0,27374	9,6	-0,20898	0,13952	0,15018	0,21706
4,8	-0,24042	-0,29850	-0,27230	0,21357	9,8	-0,23227	0,09284	0,10453	0,23789
5,0	-0,17760	-0,32760	-0,30851	0,14786	10,0	-0,24594	0,04347	0,05567	0,24902

$$\int_0^R r f(r) J_0(n r) dr =$$

$$= B_1 \int_0^R r J_0(n_1 r) J_0(n r) dr + B_2 \int_0^R r J_0(n_2 r) J_0(n r) dr + \dots + B_n \int_0^R r J_0^2(n r) dr + \dots$$

Por definición de ortogonalidad, todas las integrales del segundo miembro a excepción de la última, son cero, es decir:

$$\int_0^R r f(r) J_0(n r) dr = B_n \int_0^R r J_0^2(n r) dr \quad ; \quad B_n = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(n r) dr}{\int_0^R r J_0^2(n r) dr}$$

en la que:

$$\int_0^R r J_0^2(n r) dr = \frac{R^2}{2} \{J_0^2(n R) + J_1^2(n R)\} = \frac{R^2 J_1^2(n R)}{2}, \text{ con, } J_0(n R) = 0$$

$$B_n = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(n r) dr}{\frac{R^2 J_1^2(n R)}{2}}$$

obteniéndose la siguiente solución final para la distribución de temperaturas:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^R f(r) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr}{\frac{R^2 J_1^2(\alpha_n)}{2}} e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) =$$

$$= \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t} \frac{J_0\left(\frac{\alpha_n R}{R}\right)}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^R f(r) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr, \text{ con, } J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) = 0$$

en la que $J_1(\alpha_n R)$ es la función de Bessel de primera especie y orden uno, cuyos valores vienen especificados en la Tabla V.2.

Si la distribución de la temperatura inicial es uniforme: $T_0 = T_0 - T_F$

$$f(r) = T(r, 0) = T_0 = \text{Cte, para, } 0 \leq r \leq R$$

Teniendo en cuenta que $J_0(\alpha_n R) = 0$, resulta:

$$\int_0^R J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) dr = \frac{R}{\alpha_n} J_1(\alpha_n)$$

y la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{T_0 - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t} \frac{J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$$

La temperatura T_c en el eje del cilindro $r = 0$ para $T_c = T_c - T_F$, es:

$$\frac{T_c - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t}}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$$

El flujo de calor es:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \left[\frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t} \frac{-\alpha_n J_1(\alpha_n)}{R J_1(\alpha_n)} = \frac{-2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t} \right] =$$

$$= -k \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t}$$

El calor que llega a, $r = R$, en el intervalo, $0 \leq t$, es:

$$Q = A \int_0^t q dt = -4 k L \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t} dt = \dots = -4 k L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2} t}}{\frac{\alpha_n^2}{R^2}}$$

El calor Q_0 almacenado inicialmente en el cilindro a $t = 0$, es:

$$\frac{Q_0}{L} = R^2 c_p (T_0 - T_F) = \frac{R^2 k}{\alpha_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{-k \frac{2}{R^2} \int_0^t \left(\frac{1}{r}\right)_{r=R} dt}{c_p \rho} = - \frac{2}{R} \int_0^t \left(\frac{1}{r}\right)_{r=R} dt = \left| J_0 \left(\frac{nR}{1} \right) = 0 \right| =$$

$$= \frac{4}{R^2} \int_0^t e^{-\frac{n^2}{4} t} dt = - \frac{4}{R^2} \frac{e^{-\frac{n^2}{4} t}}{\frac{n^2}{4}} \Big|_0^t = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{n^2}{4} t}}{(nR)^2}$$

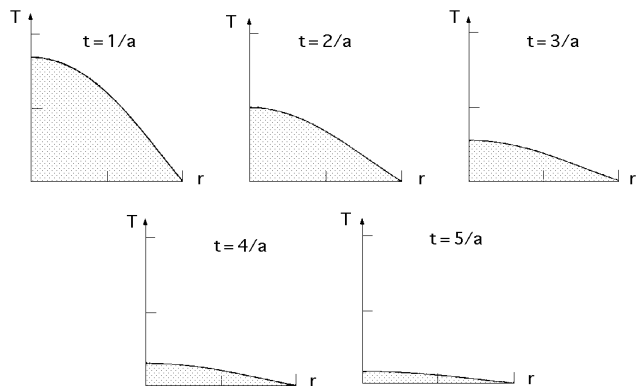
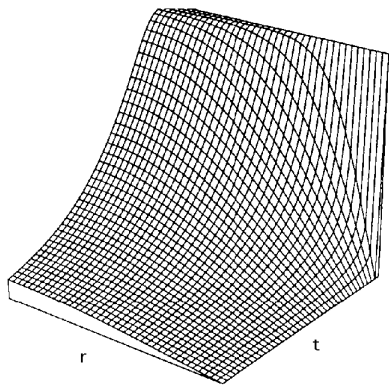


Fig V.5.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en conducción transitoria, en un cilindro infinito, con temperatura inicial constante

V.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UNA ESFERA CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA.

Para estudiar la distribución de temperaturas en una esfera que se calienta, o enfría instantáneamente en su superficie, se parte de:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

en la que \$r\$ es el radio correspondiente a un punto cualquiera de la esfera.

La solución general es de la forma:

$$T = B e^{-\frac{n^2}{4} t} \frac{\text{sen}(\frac{n}{R} r)}{r}$$

con las siguientes condiciones de contorno:

Para, $t = 0 ; r \leq R ; T(r,0) = f(r) \text{ ó } T(r,0) = 0$

$t > 0 ; r=R = 0$

Aplicando la segunda condición se obtiene:

$$0 = B e^{-\frac{n^2}{4} t} \frac{\text{sen}(\frac{n}{R} R)}{R} \quad \text{sen}(n) = 0$$

que debe cumplirse para cualquier valor de \$t\$, por lo que habrá infinitas soluciones, deduciéndose de ella

la relación que define las λ_n en la forma:

$$\sin(\lambda_n R) = 0 \quad ; \quad \lambda_n = \frac{n}{R}$$

La solución general de la distribución de temperaturas es de la forma:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha} t} \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r}$$

Para determinar el valor de la constante B_n aplicamos la primera condición de contorno:

$$t = 0, \quad u = f(r)$$

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r} = B_1 \frac{\sin(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + B_2 \frac{\sin(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + \dots + B_n \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r}$$

y haciendo uso de las propiedades de las funciones ortogonales se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^R f(r) \sin(\lambda_n r) dr &= \\ &= B_1 \int_0^R \frac{\sin(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} \sin(\lambda_n r) dr + \dots + B_n \int_0^R \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \sin^2(\lambda_n r) dr = B_n \int_0^R \sin^2(\lambda_n r) dr \end{aligned}$$

despejando B_n y teniendo en cuenta que, $\sin(\lambda_n R) = 0$, resulta:

$$B_n = \frac{\int_0^R f(r) \sin(\lambda_n r) dr}{\int_0^R \sin^2(\lambda_n r) dr} = \frac{2}{R} \int_0^R f(r) \sin(\lambda_n r) dr$$

Los valores de B_n son distintos para cada superficie equipotencial, definida por r .

La ecuación general que proporciona la distribución de temperaturas de las superficies isotermas de radio r a lo largo del tiempo, es de la forma:

$$= \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha} t} \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \int_0^R f(r) \sin(\lambda_n r) dr$$

Para, $f(r) = u_0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_0} &= \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha} t} \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \left\{ \frac{-\lambda_n r \cos(\lambda_n r) + \sin(\lambda_n r)}{\lambda_n} \right\}_0^R = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} -\cos(\lambda_n R) e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha} t} \frac{\sin(\frac{\lambda_n R}{R})}{\frac{\lambda_n R}{R}} = \frac{2R}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^n e^{-\frac{\lambda_n^2}{\alpha} t} \frac{\sin(\frac{\lambda_n R}{R})}{\lambda_n R} \end{aligned}$$

Si se supone que la temperatura en el centro de la esfera $r = 0$ es T_C , aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene:

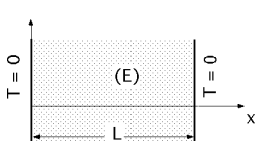
$$\frac{c}{0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{n^2} t} \frac{-\left(\frac{nR}{n}\right) \cos\left(\frac{nR}{n}\right)}{nR} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{n^2} t} \cos(n) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{n^2} t} (-1)^n$$

La disipación de calor adimensional es de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= \frac{-k \cdot 4 \cdot R^2 \int_0^t \left(\frac{1}{r}\right)_{r=R} dt}{\frac{4}{3} R^3 c_p \cdot 0} = -\frac{3k}{R c_p \cdot 0} \int_0^t \left(\frac{1}{r}\right)_{r=R} dt = \\ &= -\frac{6k}{c_p \cdot 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{2}{n^2} t} \frac{\cos\left(\frac{nr}{R}\right) \frac{n}{R} (nr) - \sin\left(\frac{nr}{R}\right) n}{n^2 R^2} \Big|_{r=R} dt = \\ &= \frac{6k}{c_p \cdot 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{2}{n^2} t} \frac{(-1)^n n^2}{n^2 R^2} dt = \frac{6k}{c_p R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{n^2} t} dt = \\ &= \frac{-6k}{c_p R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2}{n^2} t}}{\frac{2}{n}} \Big|_0^t = \frac{-6k}{c_p R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2}{n^2} t} - 1}{\frac{2}{n}} = \frac{-6k}{c_p R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2}{n^2} t} - 1}{\left(\frac{n}{R}\right)^2} = \\ &= \frac{6k}{2 c_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{2}{n^2} t}}{n^2} = \frac{6}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{2}{n^2} t}}{n^2} \end{aligned}$$

V.5.- TRANSMISIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO CON GENERACIÓN DE CALOR E.

a) Pared plana infinita con generación de calor E ; condición de contorno isotérmica.

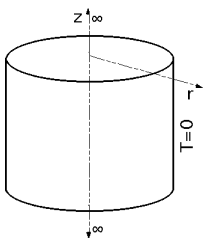


$$t = 0 ; \quad T = 0 ; \quad 0 \leq x \leq L$$

$$t > 0 \quad \begin{cases} x = 0 ; & T = 0 \\ E = Cte \end{cases}$$

$$(x,t) = \frac{4EL^2}{3k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n^3} (1 - e^{-\frac{2}{n^2} t}) , \text{ con } n = 1, 3, 5, \dots ; \quad n = \frac{n\pi}{L}$$

b) Cilindro infinito con generación de calor E ; condición de contorno isotérmica.



Condiciones de contorno:

$$t = 0 ; \quad T = 0 ; \quad 0 \leq r \leq R$$

$$t > 0 \quad \begin{cases} r = R ; & T = 0 \\ E = Cte \end{cases}$$

$$(x,t) = \frac{4E}{Rk} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{n\pi r}{R}\right)}{J_1\left(\frac{n\pi R}{R}\right)} (1 - e^{-\frac{2}{n^2} t}) , \text{ con } n \text{ raíces de } J_0\left(\frac{n\pi R}{R}\right) = 0$$

c) Esfera con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.

Condiciones de contorno,

$$t = 0 ; \quad T = T_0 ; \quad 0 \leq r \leq R$$

$$t > 0 \quad r = R ; \quad T = T_0$$

$$E = \text{Cte}$$

$$T(r,t) = \frac{2E}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right)}{\frac{n\pi R}{R}} (1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 R^2}{R^2} t}) (-1)^{n+1} ; \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{R}$$

VI.-CONDUCCIÓN DE CALOR TRANSITORIA EN SÓLIDOS SEMIINFINITOS

VI.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN SÓLIDO SEMIINFINITO

A continuación vamos a desarrollar las ecuaciones correspondientes a sistemas en los que resulte despreciable la variación espacial de las temperaturas, de modo que la ecuación que rija el proceso se reduzca a una ecuación diferencial ordinaria.

Un sólido semiinfinito se puede considerar como un cuerpo de gran extensión con una superficie plana, $0 \leq x$, en el que su temperatura resulta ser función de la distancia x y del tiempo t , es decir:

$$T = T(x, t)$$

La ecuación de la conducción simplificada, para conducción transitoria en un sólido semiinfinito, suponiendo que $E = 0$, es de la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ para, } 0 \leq x < \infty$$

en la que x se considera a partir de la superficie del sólido; antes de resolver la ecuación diferencial, hay que especificar una única condición inicial y dos condiciones de contorno.

La condición inicial viene determinada para $t = 0$, por:

$$T(x, 0) = T_0 \text{ ó } T(x, 0) = f(x)$$

como caso más general, siendo $T(x, 0)$ la temperatura inicial del sólido semiinfinito, que en princi-

pio no tiene por qué ser uniforme.

Una de las condiciones de contorno exige que el material, para cualquier tiempo t , mantenga su temperatura inicial a una distancia grande de la superficie, por lo que:

$$T(\infty, t) = f(x) \quad \text{ó} \quad T(\infty, t) = T_0$$

La otra condición de contorno permite obtener soluciones concretas teniendo en cuenta las consideraciones que se hagan sobre las mismas, lo que conduce a los tipos siguientes:

- a) Condición de contorno isotérmica
- b) Condición de contorno de convección
- c) Condición con resistencia térmica interna despreciable

CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA EN UN SÓLIDO SEMIINFINITO.- Esta condición de contorno, que es muy fácil de obtener físicamente, consiste en cambiar brusca y repentinamente la temperatura de la superficie del sólido, $x = 0$, hasta un valor T_s ó T_F Fig VI.1.

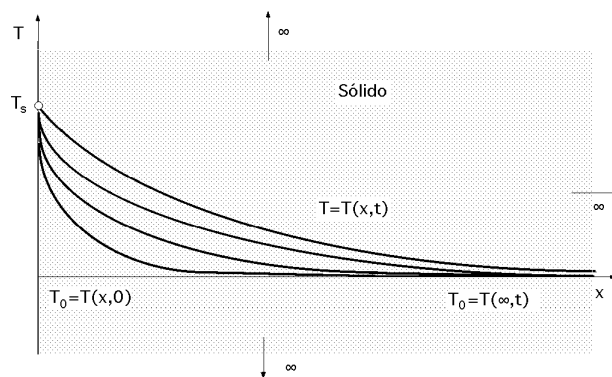


Fig VI.1.- Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito con condición de contorno isotérmica

La condición se puede conseguir cuando la superficie del sólido semiinfinito se pone en contacto con la de otro sólido a T_s y adquiere esta temperatura; si el sólido semiinfinito es un metal, y se pone en contacto con un líquido muy energético, (metal líquido) a T_F , que posee un elevado coeficiente de transferencia térmica por convección h_{CF} , también se provoca un cambio instantáneo de la temperatura superficial del sólido que pasa a T_F , la cual se mantendrá constante durante todo el proceso.

La condición de contorno isotérmica es, $T_s = T(0, t)$

La solución de la ecuación, $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dx^2}$, en la que, $u = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$, es:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{du} \frac{du}{dt} = \left| u = \frac{x}{2\sqrt{t}} \right| = \frac{d}{du} \frac{-x}{2\sqrt{t}} \frac{1}{2t\sqrt{t}} = \frac{-x}{4t\sqrt{t}} \frac{d}{du}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \frac{1}{2\sqrt{t}} ; \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{d^2}{du^2} \frac{du}{dx} = \frac{1}{4t} \frac{d^2}{du^2}$$

por lo que:

$$\frac{-x}{4t\sqrt{t}} \frac{d}{du} = \frac{1}{4t} \frac{d^2}{du^2}$$

$$\frac{d^2}{du^2} = \frac{-x\sqrt{t}}{t\sqrt{t}} \frac{d}{du} = -\frac{x}{\sqrt{t}} \frac{d}{du} = -\frac{2x}{2\sqrt{t}} \frac{d}{du} = -2u \frac{d}{du}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden, que requiere dos condiciones de contorno.

Llamando

$$\frac{d}{du} = m \quad ; \quad -2um = \frac{dm}{du} \quad ; \quad \frac{dm}{m} = -2u du = -du^2$$

$$\ln m = -u^2 + \ln C_1 \quad ; \quad m = C_1 e^{-u^2} = \frac{d}{du}$$

$$d = C_1 e^{-u^2} du \quad ; \quad = C_1 \int e^{-u^2} du + C_2$$

que sometida a las dos condiciones de contorno se resuelve en la forma:

$$= 1 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad u = 0 \quad 1 = C_2$$

$$= 0 \quad ; \quad x \quad ; \quad d = C_1 e^{-u^2} du \quad ; \quad 0 = C_1 \int_0^\infty e^{-u^2} du + 1 = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 \quad C_1 = \frac{-2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{T(x,t) - T_0}{T_s - T_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du = \text{ferc}(u), \text{ (Función de error complementaria)}$$

ó también, sumándola y restándola T_s :

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = G(u) = \text{fer}(u), \text{ (Función de error de Gauss)}$$

que se define en la forma:

$$G(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du$$

y cuyos valores se encuentran en la Tabla VI.1, o en la Fig VI.2.

El flujo térmico conducido por el interior del sólido semiinfinito se puede determinar a partir de la ley de Fourier calculada en la superficie, o lo que es lo mismo, tiene que ser igual al flujo térmico que penetra o abandona la pared:

$$q(t) = -k \frac{T}{x} \Big|_{x=0} = -k \left(\frac{T}{u} \frac{u}{x} \right)_{x=0} = \left| \frac{T}{u} = (T_0 - T_s) \frac{G(u)}{u} \right| = -k (T_0 - T_s) \left(\frac{G(u)}{u} \frac{u}{x} \right)_{x=0} =$$

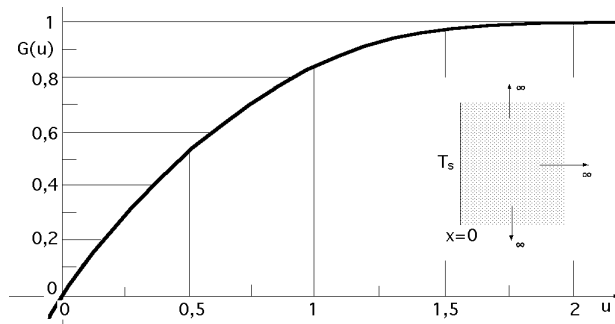


Fig VI.2.- Función de error de Gauss, G(u)

Tabla VI.1.- FUNCIÓN DE ERROR DE GAUSS

u	G(u)	u	G(u)	u	G(u)	u	G(u)	u	G(u)
0,00	0,00000	0,46	0,48466	0,92	0,80677	1,38	0,94902	1,84	0,99074
0,02	0,02256	0,48	0,50275	0,94	0,81627	1,40	0,95228	1,86	0,99147
0,04	0,45110	0,50	0,52050	0,96	0,82542	1,42	0,95538	1,88	0,99216
0,06	0,06762	0,52	0,53790	0,98	0,83423	1,44	0,95830	1,90	0,99279
0,08	0,09008	0,54	0,55494	1,00	0,84270	1,46	0,96105	1,92	0,99338
0,10	0,11246	0,56	0,57162	1,02	0,85084	1,48	0,96365	1,94	0,99392
0,12	0,13476	0,58	0,58792	1,04	0,85865	1,50	0,96610	1,96	0,99443
0,14	0,15695	0,60	0,60386	1,06	0,86614	1,52	0,96841	1,98	0,99489
0,16	0,17901	0,62	0,61941	1,08	0,87333	1,54	0,97059	2,00	0,995322
0,18	0,20094	0,64	0,63459	1,10	0,88020	1,56	0,97263	2,10	0,997020
0,20	0,22270	0,66	0,64938	1,12	0,88079	1,58	0,97455	2,20	0,998137
0,22	0,24430	0,68	0,66278	1,14	0,89308	1,60	0,97635	2,30	0,998857
0,24	0,25670	0,70	0,67780	1,16	0,89910	1,62	0,97804	2,40	0,999311
0,26	0,28690	0,72	0,69143	1,18	0,90484	1,64	0,97962	2,50	0,999593
0,28	0,30788	0,74	0,70468	1,20	0,91031	1,66	0,98110	2,60	0,999764
0,30	0,32863	0,76	0,71754	1,22	0,91553	1,68	0,98249	2,70	0,999866
0,32	0,34913	0,78	0,73001	1,24	0,92050	1,70	0,98370	2,80	0,999925
0,34	0,36936	0,80	0,74210	1,26	0,92524	1,72	0,98500	2,90	0,999959
0,36	0,38933	0,82	0,75381	1,28	0,92978	1,74	0,98613	3,00	0,999978
0,38	0,40901	0,84	0,76514	1,30	0,93401	1,76	0,98719	3,20	0,999994
0,40	0,42839	0,86	0,77610	1,32	0,93806	1,78	0,98817	3,40	0,999998
0,42	0,44749	0,88	0,78669	1,34	0,94191	1,80	0,98909	3,60	1,000000
0,44	0,46622	0,90	0,79691	1,36	0,94556	1,82	0,98994		

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{u}{x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ \left(\frac{G(u)}{u} \right)_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{t}} \end{array} \right| e^{-u^2} \Big|_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{t}} = \frac{-k(T_0 - T_s)}{\sqrt{t}}$$

La cantidad de calor total conducida por el interior del sólido y que, por lo tanto, ha ingresado durante el intervalo de tiempo comprendido entre, 0 t t, es:

$$Q(t) = \int_{t=0}^t q(t) dt = 2k(T_s - T_0) \sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{t}} (T_s - T_0) \sqrt{c_p k t}$$

Si se define, $B = \sqrt{c_p k}$, como una propiedad física del material, que se conoce como coeficien-

te de penetración térmica, resulta que:

$$Q(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_s - T_0) B \sqrt{t}$$

Materiales de elevado calor específico presentan una difusividad térmica pequeña (gran inercia térmica), mientras que B es grande, por lo que el campo de temperaturas en el material variará muy lentamente; sin embargo, la cantidad de calor que liberan al enfriarse o almacenan al calentarse, es grande; por este motivo se escoge un material con ρ pequeño y c_p grande para la pared de un horno (ladrillos refractarios), y con ρ grande y c_p relativamente pequeño para un cortafuegos, (aire). En definitiva, cuanto mayor sea α , más pequeño será el espacio necesario para el campo de temperaturas.

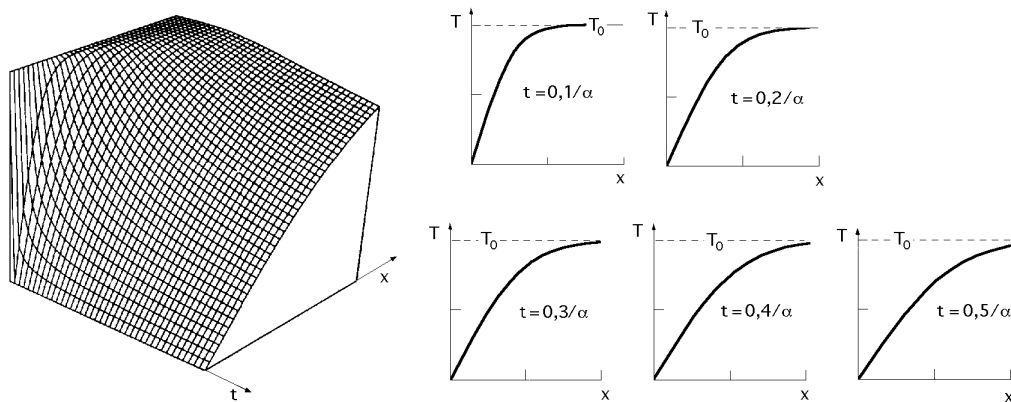


Fig VI.3.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en un cuerpo semiinfinito, con temperatura inicial T_0 y condición de contorno isotérmica

CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN EN UN SÓLIDO SEMIINFINITO.- Si en lugar de cambiar instantáneamente la temperatura superficial del sólido semiinfinito, se pone su superficie en contacto con un fluido que se encuentra a la temperatura T_F , el calor transferido al sólido debe pasar en el fluido por convección y hacia el interior del sólido por conducción, en forma más o menos lenta, por lo que la temperatura de la superficie variará hasta alcanzar la del fluido, situación de equilibrio, pero no instantáneamente.

La condición de contorno de convección es:

$$h_C \{T_F - T(0, t)\} = \pm k \left(\frac{T}{x} \right)_{x=0}$$

según sea calentamiento del sólido (-) o enfriamiento del sólido (+).

La solución de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

sometida a la condición inicial, $T(x, 0) = T_0$, y a las condiciones de contorno dadas por la ecuación

anterior y por $T(\infty, t) = T_0$, es de la forma:

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_F - T_0} = 1 - G(u) - \{1 - G(u + \sqrt{\text{Bi}_x})\} e^{\text{Bi}_x}$$

en la que:

$$\text{Fo}_x = \frac{t}{x^2} \quad ; \quad \text{Bi}_x = \frac{h_c x}{k} \quad ; \quad u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad ; \quad \frac{h_c^2 t}{k^2} = (\text{Bi})^2 \text{Fo}$$

caso que se reduce al de condición de contorno isotérmica, cuando la relación h_c/k sea muy elevada.

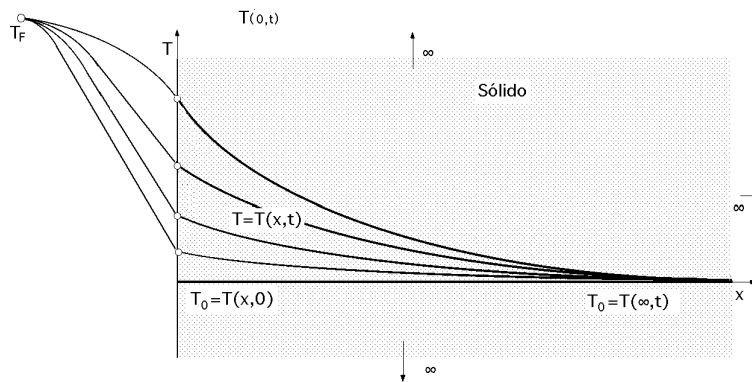


Fig VI.4.- Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito con condición de contorno de convección

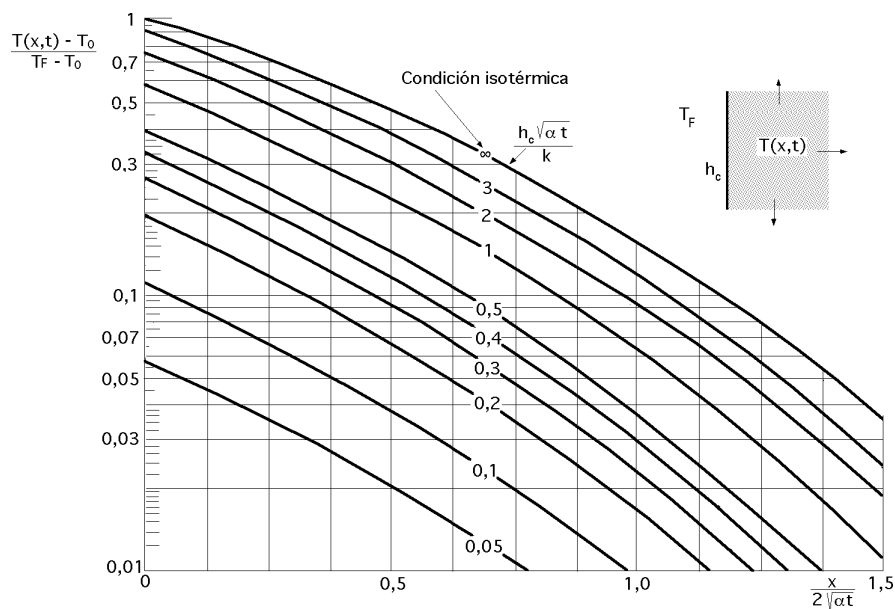


Fig VI.5.- Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito sometido a convección

En esta situación: $G(u + \sqrt{\text{Bi}_x}) = 1$, y la función de error complementaria: $1 - G(u + \sqrt{\text{Bi}_x}) = 0$.

En la gráfica de la Fig VI.5, se presenta la distribución de temperaturas en un sólido semiin-

finito sometido a convección; la condición de contorno isotérmica viene representada por la curva superior que se corresponde con, $\frac{h_s \sqrt{t}}{k} = \frac{h_s}{k} =$

La distribución de temperaturas adimensional en un sólido semiinfinito, con temperatura inicial uniforme, y sometido al contacto con un fluido a temperatura T_F en el instante, $t = 0$, es sólo función de los números de Biot y de Fourier.

Las ecuaciones del flujo térmico y de la distribución de temperaturas así obtenidas, son válidas para una geometría semiinfinita. Por lo tanto, es muy importante establecer cuándo una placa de gran tamaño y longitud característica L se puede considerar semiinfinita a efectos térmicos; Kreith propone que el número de Fourier sea menor que la unidad $Fo < 1$, condición necesaria, pero no suficiente, ya que se tiene que cumplir también que a una gran distancia de la superficie la temperatura inicial no se haya modificado, (condición de contorno del sólido semiinfinito).

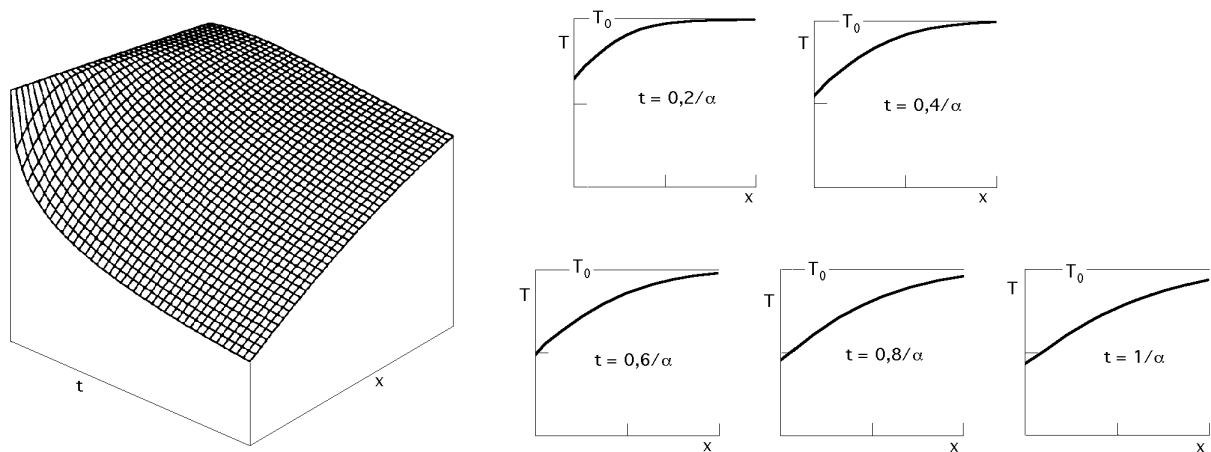


Fig VI.6.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en un cuerpo semiinfinito, con temperatura inicial T_0 y condición de contorno de convección

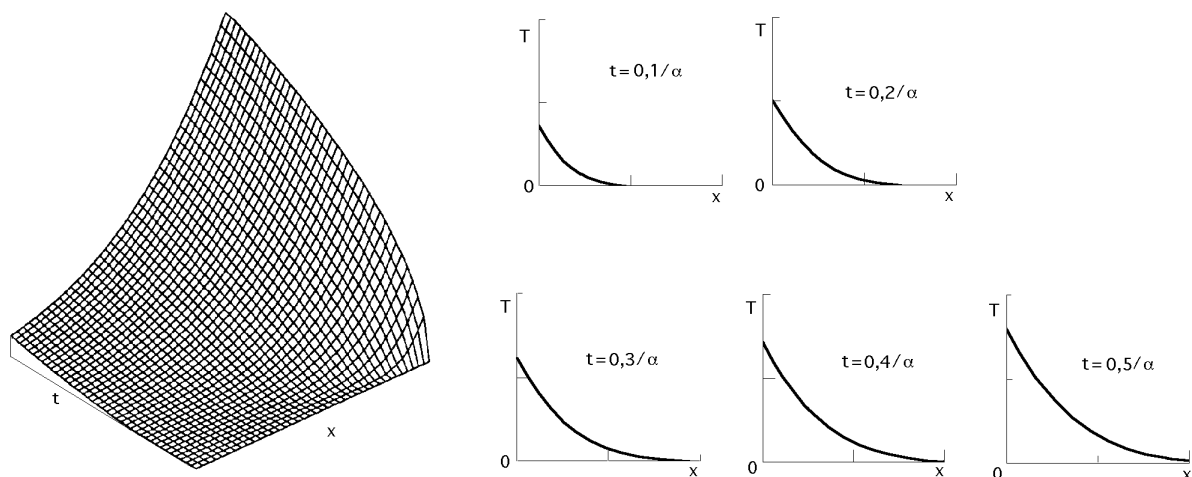


Fig VI.7.- Desarrollo temporal de la distribución de temperaturas en un cuerpo semiinfinito con temperatura inicial 0 sometido a un flujo de calor constante q_0 en la superficie

SOLIDO SEMIINFINITO SOMETIDO A UN FLUJO TÉRMICO UNIFORME EN SU SUPERFICIE.-

Si el sólido semiinfinito está inicialmente a la temperatura T_0 y para $t > 0$ la superficie $x = 0$ se somete repentinamente a un flujo de calor q_0 constante, (por ejemplo la radiación de una fuente a elevada temperatura), la distribución de temperaturas viene dada por la ecuación:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{2 q_0}{k} \sqrt{t} \left[\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{t}} - u \{1 - G(u)\} \right], \text{ con, } u = \frac{x}{2\sqrt{t}}$$

Si el calor procede de la radiación de una fuente a elevada temperatura T_{rad} , es de la forma:

$$q_0 = \epsilon (T_{\text{rad}}^4 - T_0^4)$$

siendo ϵ la absorptividad de la superficie.

CONTACTO ENTRE DOS SOLIDOS SEMIINFINITOS.- Si dos sólidos semiinfinitos a temperaturas distintas T_A y T_B se ponen en contacto en el instante $t = 0$, la solución del problema muestra que la temperatura de la superficie de contacto T_{cont} viene dada por:

$$\frac{T_A - T_{\text{cont}}}{T_{\text{cont}} - T_B} = \frac{k_B}{k_A} \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{(k c_p)_B}{(k c_p)_A}}$$

con las distribuciones de temperatura dadas por las funciones de error correspondientes a cada sólido.

SOLIDO SEMIINFINITO SOMETIDO A UN PULSO DE ENERGÍA EN SU SUPERFICIE.- Si se descarga una cierta cantidad de energía E por unidad de área sobre la superficie en el instante $t = 0$ y esta energía se absorbe totalmente por la superficie, la distribución de temperaturas viene dada por la ecuación:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{E e^{-u^2}}{c_p \sqrt{t}}$$

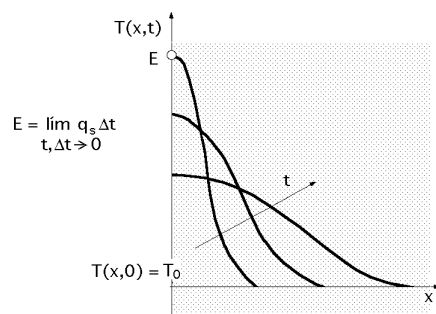
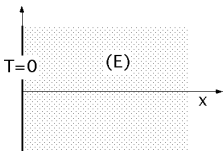


Fig VI.8.- Respuesta de la temperatura de un sólido semiinfinito sobre cuya superficie se ha descargado instantáneamente una cierta cantidad de energía E

SOLIDO SEMIINFINITO CON GENERACIÓN DE CALOR E Y CONDICIÓN DE CONTORNO ISO-TÉRMICA

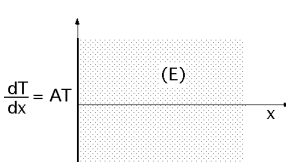


$$t = 0 ; T = 0 ; 0 \leq x$$

$$t > 0 ; E = Cte$$

$$(x, t) = \frac{E}{k} \left[-2 \{1 - G(u)\} \right] ; \quad u = \frac{x}{2\sqrt{t}}$$

SOLIDO SEMIINFINITO CON GENERACIÓN DE CALOR E Y CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN



$$t = 0 ; T = T_0 - T_F ; 0 \leq x$$

$$E = Cte$$

$$t > 0 ; x = 0 ; -\frac{dT}{dx} \bigg|_{x=0} = A = \frac{h_c}{k}$$

$$(x, t) = T_0 + \frac{E}{k} t + \left\{ -\frac{0}{\sqrt{t}} - \frac{x}{2\sqrt{t^3}} \right\} - \frac{2E}{k} \sqrt{t} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{E}{k} \left(\frac{1}{\left(\frac{h_c}{k}\right)^2} - \frac{1}{\frac{h_c}{k}} \right) - T_0 \left(1 + \frac{h_c}{k} \right) \right\} e^{\frac{h_c x}{k} + x \left(\frac{h_c}{k}\right)^2 \left\{ 1 - G\left(u + \frac{h_c}{k} \sqrt{t}\right) \right\} + \frac{E}{k} \left(1 + \frac{1}{\frac{h_c}{k}} \right) \{ 1 - G(u) \}}$$

SOLIDO SEMIINFINITO SOMETIDO A UNA VARIACIÓN PERIÓDICA DE SU TEMPERATURA SUPERFICIAL

La temperatura superficial varía en la forma:

$$T_s = \frac{T_{\text{máx}} - T_m}{T_{\text{máx}} - T_m} \cos w t, \text{ siendo la temperatura media, } T_m = \frac{T_{\text{máx}} + T_{\text{mín}}}{2}$$

$$y \quad T_s = T_x = 0$$

viniendo dada la distribución de temperaturas, Fig VI.9, por la ecuación:

$$\frac{T(x, t) - T_m}{T_{\text{máx}} - T_m} = e^{-x \sqrt{\frac{w}{2}}} \cos \left(x \sqrt{\frac{w}{2}} - w t \right) = f \left(Fo, \frac{1}{T^*} \right)$$

que consta de:

Función de amortiguación: $e^{-x \sqrt{\frac{w}{2}}} = e^{-x \sqrt{\frac{1}{T^*}}}$

Función periódica: $\cos \left(x \sqrt{\frac{w}{2}} - w t \right)$

siendo T^* el período de la onda térmica igual a, $T^* = \frac{2}{w}$, y w la frecuencia.

La amplitud de la variación de la temperatura disminuye exponencialmente a medida que

penetra en el sólido y se desarrolla con un desfase igual a, $\propto \sqrt{\frac{w}{2}}$.

El espesor de la pared es tan grande que la variación de la relación $\frac{\text{temperatura}}{\text{tiempo}}$ dentro de la misma, va a depender solamente de las condiciones impuestas en la superficie $x = 0$, por lo que se puede tratar como un sólido semiinfinito. Al ser cíclica la variación de la temperatura en la superficie, hay que suponer que su efecto ha proseguido hacia el interior del sólido, durante un cierto tiempo t , llegándose a un estado térmico vibratorio amortiguado.

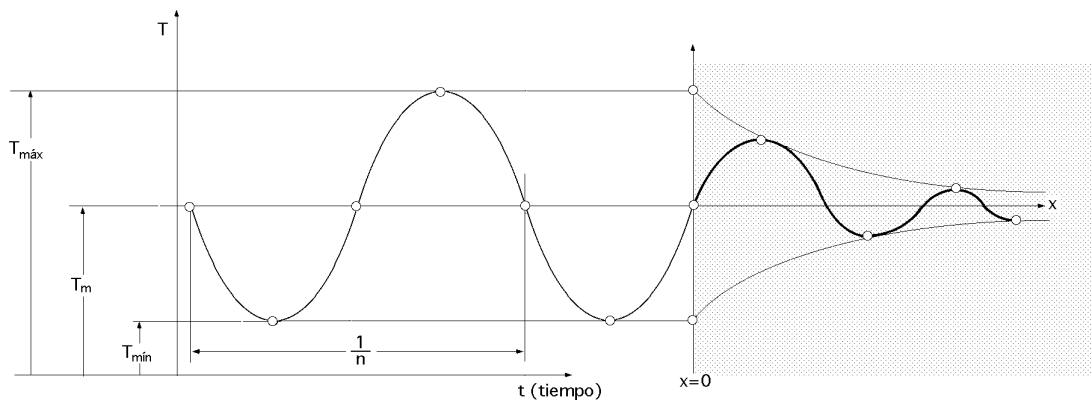


Fig VI.9.- Pared gruesa sometida a cambios periódicos de temperatura

Como el fenómeno se amortigua con la profundidad de la pared, la ley de variación de en un punto determinado sigue una ley de tipo cosenoidal, pero desfasada respecto a s debido a la profundidad; volverá a estar en fase cuando se cumpla que:

$$(x +) \sqrt{\frac{w}{T^*}} = x \sqrt{\frac{w}{T^*}} + 2 \quad ; \quad = 2 \sqrt{\frac{w}{T^*}}$$

en la que es la longitud de onda térmica.

La variación de en dos puntos separados una distancia igual a la longitud de onda se produce en fase, aunque la amortiguación sea distinta en los mismos.

El valor de es característico del material que conforma el sólido, e independiente del tiempo; si llamamos:

$$x^* = \frac{x}{\lambda} = \frac{x}{2\sqrt{\frac{w}{T^*}}}$$

el valor de queda en la forma:

$$= e^{-2 x^*} \cos 2 (x^* -) , \text{ con, } = \frac{t}{T^*}$$

La representación de en función de x^* para distintos valores de , viene dada en la Fig

Cuando se tenga que, $t = \frac{T^*}{8}$, ó, $t = \frac{5 T^*}{8}$, no habrá intercambio de calor.

La expresión del calor intercambiado con el medio exterior es:

$$q_0 = -k (T_{\text{máx}} - T_m) \left\{ -\sin\left(-2\right) \sqrt{\frac{T^*}{T^*}} + \cos\left(2\right) \left(-\sqrt{\frac{T^*}{T^*}}\right) \right\} =$$

$$= -k (T_{\text{máx}} - T_m) \sqrt{\frac{T^*}{T^*}} \left\{ \sin\left(2\right) - \cos\left(2\right) \right\}$$

Saldrá calor del muro cuando se cumpla:

$$T\left(\frac{8n+1}{8}\right) < t < T\left(\frac{8n+5}{8}\right), \text{ pasando por, } T\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

Entrará calor al muro cuando se cumpla:

$$T\left(\frac{8n+1}{8}\right) < t < T\left(\frac{8n+5}{8}\right), \text{ pasando por, } (T_n)$$

No existirá intercambio de calor cuando se cumpla:

$$t = T\left(\frac{8n+1}{8}\right) \text{ ó } t = T\left(\frac{8n+5}{8}\right)$$

En la Fig VI.10 se observa el desfase existente entre la variación de la temperatura en la superficie y la variación de calor intercambiado.

El calor almacenado en la pared para el semiperíodo, $t = \frac{T^*}{2}$, es de la forma:

$$Q_{\frac{T^*}{2}} = \frac{\frac{T^*}{8}}{\frac{5 T^*}{8}} q_0 dt = -\frac{\frac{T^*}{8}}{\frac{5 T^*}{8}} k (T_{\text{máx}} - T_m) \sqrt{\frac{T^*}{T^*}} \left\{ \sin\left(2\right) - \cos\left(2\right) \right\} dt =$$

$$= -\frac{\frac{T^*}{8}}{\frac{5 T^*}{8}} k (T_{\text{máx}} - T_m) \sqrt{\frac{T^*}{T^*}} \left\{ \sin\left(2 \frac{t}{T^*}\right) - \cos\left(2 \frac{t}{T^*}\right) \right\} dt =$$

$$= -k (T_{\text{máx}} - T_m) \sqrt{\frac{T^*}{T^*}} - \frac{T^*}{2} \cos\left(2\right) - \frac{T^*}{2} \sin\left(2\right) \frac{\frac{T^*}{8}}{\frac{5 T^*}{8}} =$$

$$= -k (T_{\text{máx}} - T_m) \sqrt{\frac{c_p}{k T^*}} \frac{T^*}{2} \cos\left(2\right) + \sin\left(2\right) \frac{\frac{T^*}{8}}{\frac{5 T^*}{8}} =$$

$$= \sqrt{k c_p} \sqrt{\frac{T^*}{4}} \text{ máx } 2 \sqrt{2} = \sqrt{2 k c_p T^*} \text{ máx}$$

y que, en el siguiente semiperíodo, será devuelto.

Si lo que varía senoidalmente es la temperatura del medio exterior, en la superficie de la placa aparecerá una variación de temperaturas también senoidal, pero atenuada y desfasada, como si entre el medio exterior y la superficie existiera otro espesor de placa que atenuase el proceso externo, Fig VI.12.

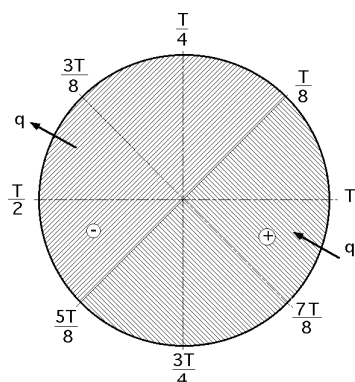


Fig VI.11.- Zonas de entrada y salida de calor

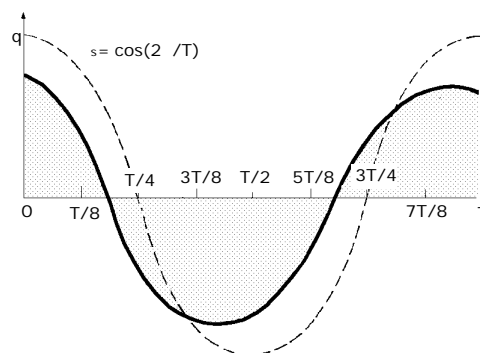


Fig VI.12.- Desfase entre la variación de temperatura y el calor intercambiado

Los cálculos anteriores están basados en el supuesto de placas muy gruesas; existen muchas aplicaciones industriales importantes sometidas a variaciones periódicas de la temperatura (como las registradas en las paredes de los cilindros de los motores de combustión interna), en las que las paredes sólidas que intervienen son de espesor finito; sin embargo, las propiedades térmicas de las mismas pueden ser tales que amortigüen la onda de temperatura hasta que, después de haber recorrido ésta una distancia relativamente pequeña desde la superficie hasta un punto situado en el interior de aquel, su amplitud sea tan pequeña que se pueda despreciar.

A título de ejemplo se puede comprobar que en un motor de cuatro tiempos, funcionando a 3000 rpm, la onda debida a la variación de la temperatura del cilindro se amortigua hasta un valor del orden del 1% del registrado en la superficie, para una profundidad de 1,75 mm, por lo que en la mayoría de las aplicaciones se puede considerar que la pared del cilindro de un motor es infinitamente gruesa, supuesto válido siempre que la película superficial en el interior del cilindro tenga resistencia térmica despreciable, cosa que no es verdad, aunque los resultados sean del orden de magnitud indicado.

VI.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN UN SOLIDO CON RESISTENCIA TÉRMICA DESPRECIABLE

Si se supone un sólido en el que la energía transferida desde el mismo se elimina por convección a un fluido, y si se considera que la temperatura del sólido varía de modo uniforme, se puede asegurar que *la resistencia a la conducción en el sólido es mucho menor que la resistencia a la convección desde la superficie*; esta situación se consigue cuando el fluido exterior tiene un bajo coeficiente de convección, de forma que la relación h_c/k sea muy pequeña; dicha condición equivale a suponer que:

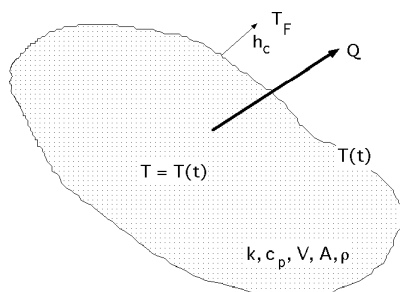


Fig VI.13.- Sólido con (r.t.i.d.)

ciente de convección, de forma que la relación h_c/k sea muy pequeña; dicha condición equivale a suponer que:

$$Bi = \frac{h_c L}{k} \ll 0,1$$

Si se hace un balance de la energía del sistema que se encuentra a $T = T(t)$ en el instante t , Fig VI.13, la variación de su energía interna en ese instante es igual a la

energía que es transferida al fluido que le rodea en dicho instante, es decir:

$$\dot{Q} = - V c_p \frac{dT}{dt} = h_c A \{T(t) - T_F\} \quad ; \quad \frac{dT}{dt} = - \frac{h_c A}{V c_p} \{T(t) - T_F\}$$

que es la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas, cuya única variable independiente es el tiempo, y en la que V es el volumen del sólido y A la superficie de contacto con el fluido.

La solución para la temperatura instantánea T(t) es la que corresponde a todos los puntos del interior del sistema, incluyendo la superficie A, por cuanto se ha supuesto que en todo él la resistencia térmica es despreciable.

Si se define una función, $\theta = T(t) - T_F$, y suponiendo se conoce la temperatura T_0 del sistema en el instante, $t = 0$, la condición inicial para la ecuación anterior será, $\theta_0 = T_0 - T_F$.

La distribución de temperaturas queda en la forma:

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{h_c A \{T(t) - T_F\}}{V c_p} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = - \frac{h_c A}{V c_p} \theta \quad ; \quad \frac{d\theta}{\theta} = - \frac{h_c A}{V c_p} dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{h_c A}{V c_p} t} = \theta_0 e^{-Bi Fo}$$

que predice la historia de la relación entre el tiempo y la temperatura.

La temperatura de equilibrio se obtiene cuando la variación de energía interna sea cero, régimen estacionario.

Lo primero que hay que hacer, en cualquier problema de este tipo, es calcular el número de Biot a partir de la longitud equivalente V/A, sacándose la conclusión de que para $Bi < 0,1$, el error cometido en la determinación de la temperatura es menor que el 5%, y si el número de Biot es aún menor, se incrementa la exactitud.

La transferencia de calor instantánea, o flujo térmico, es:

$$\dot{q}(t) = h_c A \{T(t) - T_F\} = h_c A \theta(t) = h_c A \theta_0 e^{-Bi Fo}$$

La cantidad de calor total transferida desde $t = 0$, hasta $t = t$, es:

$$Q(t) = \int_{t=0}^t \dot{q}(t) dt = h_c A (T_0 - T_F) \int_0^t e^{-Bi Fo} dt =$$

$$= - h_c A (T_0 - T_F) \frac{V c_p}{h_c A} (1 - e^{-Bi Fo}) = h_c A (T_0 - T_F) t \frac{1 - e^{-Bi Fo}}{Bi Fo}$$

Como: $Q_0 = V c_p (T_0 - T_F)$ $\frac{Q(t)}{Q_0} = 1 - e^{-Bi Fo} = \text{Fracción de pérdida de energía}$

El calor almacenado en el sólido en el intervalo, $0 \leq t \leq t$, es igual a la diferencia entre el calor en $t = 0$, y el que ha salido hasta t , es decir:

$$Q_0 - Q(t) = Q_0 e^{-Bi Fo}$$

VI.4.- PARED QUE SE CALIENTA POR UN LADO Y SE MANTIENE EN CONTACTO CON UN FLUIDO POR LA OTRA

Supongamos una pared que se calienta por una superficie, y se mantiene en contacto con un fluido a T_F por el resto, Fig VI.14. Una parte del calor aplicado se almacena en la pared incrementando su temperatura, mientras que el resto se evacúa al exterior por convección.

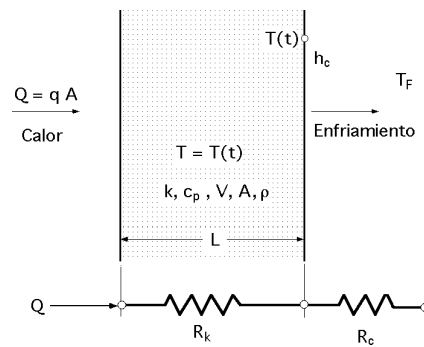


Fig VI.14.- Sólido con (r.t.i.d.) con una superficie en contacto con un foco térmico y el resto con un fluido

Un balance energético permite obtener:

$$V c_p \frac{dT}{dt} = - h_{CF} A \{T(t) - T_F\} + qA \quad ; \quad L = \frac{V}{A} \quad ; \quad L c_p \frac{dT}{dt} = - h_{CF} \{T(t) - T_F\} + q$$

Si la temperatura inicial es T_0 T_F , se puede hacer el cambio, $\theta = T - T_F$, por lo que la ecuación diferencial toma la forma:

$$L c_p \frac{d\theta}{dt} = - h_{CF} \theta + q$$

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{h_{CF}}{L c_p} \theta + \frac{q}{L c_p} \quad \left| \quad \frac{h_{CF}}{L c_p} = m \quad ; \quad \frac{q}{L c_p} = X \right| \quad = - m \theta + X$$

$$dt = \frac{d\theta}{-m\theta + X} \quad ; \quad t = \int \frac{d\theta}{-m\theta + X} = - \frac{1}{m} \ln(-m\theta + X) + C$$

Para, $t = 0$, $\theta = \theta_0$

$$C = \frac{1}{m} \ln(-m\theta_0 + X)$$

$$t = \frac{1}{m} \ln \frac{-m\theta_0 + X}{-m\theta + X} \quad ; \quad e^{mt} = \frac{-m\theta_0 + X}{-m\theta + X}$$

La distribución de temperaturas se obtiene despejando θ :

$$\theta = \frac{X}{m} + \left(\theta_0 - \frac{X}{m} \right) e^{-mt} = \frac{q}{h_{CF}} + \left(\theta_0 - \frac{q}{h_{CF}} \right) e^{-\frac{h_{CF}}{L c_p} t} = \frac{q}{h_{CF}} + \left(\theta_0 - \frac{q}{h_{CF}} \right) e^{-Bi Fo}$$

Para, $T_0 = T_F$ $\theta_0 = T_0 - T_F = 0$, por lo que,

$$t = \frac{1}{m} \ln \frac{X}{-m + X} = \frac{L c_p}{h_{cF}} \ln \frac{q}{-h_{cF} + q} = \frac{q}{h_{cF}} (1 - e^{-Bi Fo})$$

TEMPERATURA DE EQUILIBRIO.- La temperatura de equilibrio se obtiene cuando todo el calor entrante se disipa por convección al fluido exterior, es decir, a partir de un cierto tiempo, (muy grande), el sólido no puede almacenar más energía y, por lo tanto, no incrementa su temperatura, llegándose al régimen estacionario.

La temperatura de equilibrio se tiene para, $t \rightarrow \infty$, por lo que,

$$\frac{X}{m} = \frac{q}{h_{cF}} \quad q = h_{cF} (T_{pF} - T_F)$$

es decir, todo el calor que penetra, sale por convección.

Dicha condición se obtiene también haciendo, $\frac{d}{dt} = 0$

VII.- CONDUCCIÓN DE CALOR EN SÓLIDOS FINITOS

VII.1.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL

Los problemas de conducción transitoria estudiados se limitan a configuraciones especiales como son la placa, el cilindro y esfera, con diversas situaciones de contorno. Estas formas se han escogido para asegurarnos de que la temperatura del sólido depende sólo de una coordenada espacial y del tiempo. En ciertas aplicaciones el hecho de despreciar el efecto de borde (que es a lo que equivalen las simplificaciones anteriores de conducción unidimensional), puede afectar a los resultados, por lo que en muchos casos prácticos no puede hacerse una simplificación de este tipo y habrá que considerar la conducción transitoria en función de más de una dimensión espacial.

Bajo ciertas condiciones, la solución de los problemas de conducción transitoria en dos o tres dimensiones puede obtenerse por superposición de las soluciones de problemas unidimensionales; aplicando este método de superposición al problema de conducción transitoria en una barra larga rectangular, cuya sección transversal tiene por dimensiones, A en la dirección de las x , B en la de las y y ser indefinida en la dirección de las z , la conducción tendrá sólo lugar en las direcciones de las x y las y , por lo que se ha reducido el problema a un caso bidimensional y transitorio por ser las temperaturas variables con el tiempo.

Si se calienta la barra de forma que inicialmente la distribución de temperaturas es, $T = f(x,y)$, y en el instante, $t = 0$, la barra entra en contacto con un fluido convectivo, o con un foco térmico, a una temperatura, $T_F = 0$, (o a cualquier otra, constante), con un coeficiente de convección h_C constante en todas las superficies, la ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

con las condiciones de contorno:

Para, $t = 0$; $T = f(x, y)$

Para, $t > 0$,
 en, $x = 0$, y en, $x = A$, $\frac{dT}{dx} = \pm \frac{h_c T}{k}$
 en, $y = 0$, y en, $y = B$, $\frac{dT}{dy} = \pm \frac{h_c T}{k}$

Se toma el signo (+) en $x = 0$ y en, $y = 0$, y el signo (-) en, $x = A$ y en, $y = B$.

Si la función de distribución de temperatura inicial, $T = f(x, y)$, es tal que se puede descomponer en forma de producto de otras dos funciones, cada una de las cuales sólo depende de una de las variables espaciales independientes, la condición inicial puede sustituirse por:

Para, $t = 0$, $T = f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$

y si ésto es posible, la solución de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{t} T$$

con las condiciones indicadas, se puede expresar como el producto de dos soluciones transitorias unidimensionales.

Si representamos la solución que se busca, $T(x, y, t)$, por el producto:

$$T = T_x(x, t) T_y(y, t)$$

siendo $T_x(x, t)$ función de x y del tiempo t , y $T_y(y, t)$ función de y y de t .

Al sustituir la ecuación, $T = T_x(x, t) T_y(y, t)$, en la ecuación diferencial de partida se obtiene:

$$\frac{1}{T_y} \left(T_y \frac{\partial T_x}{\partial t} + T_x \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} \right) = \left(T_y \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + T_x \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} \right)$$

$$T_y \left(\frac{1}{t} \frac{T_x}{T_y} - \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} \right) + T_x \left(\frac{1}{t} \frac{T_y}{T_x} - \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} \right) = 0$$

y las condiciones de contorno e inicial, se transforman en:

Para, $t = 0$; $T = T_x T_y = f_1(x) f_2(y)$

Para, $t > 0$
 en, $x = 0$, y en, $x = A$, $T_y \frac{dT_x}{dx} = \pm \frac{h_c T_x T_y}{k}$
 en, $y = 0$, y en, $y = B$, $T_x \frac{dT_y}{dy} = \pm \frac{h_c T_x T_y}{k}$

El examen de las ecuaciones anteriores pone de manifiesto que se satisfacen, si $T_x(x, t)$ y $T_y(y, t)$, son las soluciones de los dos problemas unidimensionales siguientes:

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = \frac{1}{t} \frac{T_x}{t}$$

Para, $t = 0$; $T_x = f_1(x)$

$$\begin{aligned} \text{Para, } t > 0 \quad \text{en, } x = 0, \quad \frac{dT_x}{dx} &= \frac{h_c T_x}{k} \\ \text{en, } y = A, \quad \frac{dT_x}{dx} &= - \frac{h_c T_x}{k} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} = \frac{1}{t} \frac{T_y}{t}$$

Para, $t = 0$; $T_y = f_2(y)$

$$\begin{aligned} \text{Para, } t > 0 \quad \text{en, } y = 0, \quad \frac{dT_y}{dy} &= \frac{h_c T_y}{k} \\ \text{en, } y = B, \quad \frac{dT_y}{dy} &= - \frac{h_c T_y}{k} \end{aligned}$$

Se observa que la solución del problema de conducción transitoria bidimensional se puede obtener como el producto de las soluciones de dos problemas unidimensionales, más sencillos, de las ecuaciones anteriores, siempre que la distribución inicial de la temperatura sea susceptible de expresarse en forma del producto:

$$T = f(x,y) = f_1(x) f_2(y), \text{ para, } t = 0$$

Estas ecuaciones para placa plana finita son idénticas a las que regulan la conducción transitoria de calor en la placa plana infinita. Por tanto, la solución al problema de conducción transitoria del calor en la barra rectangular se obtiene como el producto de las soluciones para dos placas infinitas cuya intersección forma la barra en cuestión.

En el caso de la barra rectangular calentada inicialmente a una temperatura uniforme, se pueden utilizar directamente tanto las soluciones analíticas, como los resultados gráficos de Heysler para placa plana, que se encuentre inicialmente a una temperatura uniforme. Los números de Biot y de Fourier para cada una de las dos placas que forman la barra serán distintos, a menos que dicha barra sea de sección transversal cuadrada.

El principio de superposición por producto que se acaba de exponer en la conducción transitoria bidimensional en una barra rectangular se puede hacer extensivo a otros tipos de configuraciones. Así, para un paralelepípedo de dimensiones finitas la solución se puede obtener como el producto de las soluciones de tres placas infinitas, y para el cilindro circular como el producto de las soluciones para una placa infinita y para un cilindro circular de longitud infinita.

Este principio de superposición es sólo aplicable a aquellos casos en los que la distribución de temperatura inicial se pueda descomponer en producto de varias funciones, cada una de las cuales sólo depende de una de las variables espaciales independientes.

Los ejemplos que hemos abordado pueden aplicarse tanto a procesos con condición de contorno isotérmica, como de convección. El empleo de gráficos para determinar las soluciones de

problemas en régimen transitorio monodimensional, se puede ampliar a casos bi y tridimensionales; el método consiste en la utilización de datos obtenidos para casos monodimensionales y combinarlos adecuadamente en forma de productos.

Si, por ejemplo, se desea determinar la temperatura en el punto P del *cilindro de longitud finita* que se muestra en la Fig VII.1, dicho punto vendrá localizado por dos coordenadas (x,r), siendo x una coordenada axial medida desde el centro del cilindro y r su posición radial. La condición inicial y las condiciones de contorno son las mismas que se aplican en el caso de gráficos monodimensionales correspondientes a procesos transitorios.

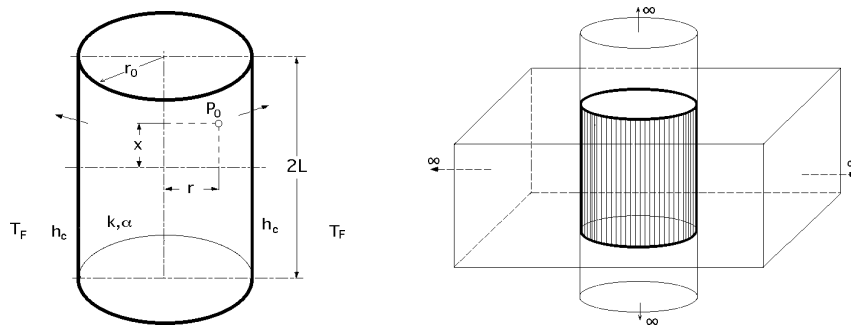


Fig VII.1.- Cilindro de longitud finita

El cilindro se puede suponer se encuentra inicialmente, $t = 0$, a una temperatura uniforme T_0 ; en ese instante, toda la superficie se pone en contacto con un fluido, que es el medio exterior, el cual se encuentra a una temperatura ambiental constante T_F .

El coeficiente de transferencia de calor por convección entre la superficie del cilindro y el fluido h_c , se puede suponer de valor constante.

Por tratarse de un cilindro de longitud finita, la distribución de temperaturas en régimen bidimensional se puede considerar como el producto de las soluciones unidimensionales correspondientes a un cilindro infinito y a una placa infinita, siempre que la distribución inicial de temperaturas se pueda descomponer en dos factores, cada uno de los cuales depende de una sola coordenada espacial, es decir:

$$\frac{T(r, x, t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{p(r, x, t)}{0} = C(r) P(x) = \frac{T(r, x, t) - T_F}{T_0 - T_F}$$

en la que los símbolos $C(r)$ y $P(x)$ son las temperaturas adimensionales que corresponden, respectivamente, al cilindro infinito y a la placa infinita:

$$C(r) = \frac{(r, t)}{0} ; \quad P(x) = \frac{(x, t)}{0}$$

La solución para $C(r)$ se obtiene de los gráficos de temperaturas correspondientes al cilindro, mientras que la solución de $P(x)$ se obtiene de los gráficos de temperaturas correspondientes a la placa plana infinita.

Mediante un procedimiento análogo al citado para el cilindro finito, se pueden obtener solu-

ciones para otras geometrías bi o tridimensionales, como el paralelepípedo representado en la Fig VII.2, intersección de tres placas infinitas.

En las gráficas que se presentan en las Fig VII.3 y 4, se hace un resumen de las soluciones mediante gráficos, en las que la simbología utilizada representa las soluciones siguientes:

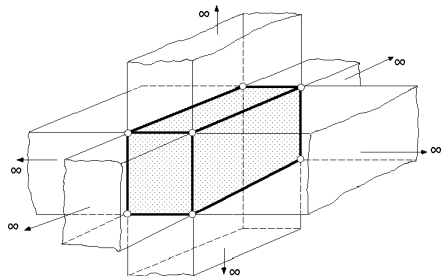


Fig VII.2.- Paralelepípedo finito

$$S(x) = \frac{(x, t)}{0} \quad (\text{sólido semiinfinito})$$

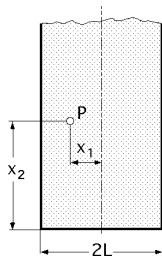
$$P(x) = \frac{(x, t)}{0} \quad (\text{placa infinita})$$

$$C(r) = \frac{(r, t)}{0} \quad (\text{cilindro infinito})$$

La ampliación de los gráficos monodimensionales a problemas con geometrías bi y tridimensionales permite resolver, en consecuencia, una diversidad sorprendentemente grande de problemas de transmisión de calor en régimen transitorio.

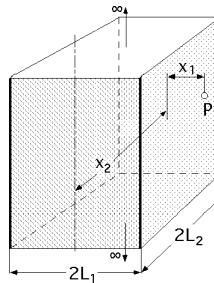
SISTEMAS BIDIMENSIONALES

a) PLACA SEMIINFINITA



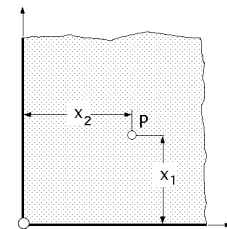
$$\frac{p(x_1, x_2)}{0} = P(x_1) S(x_2)$$

b) BARRA RECTANGULAR INFINITA



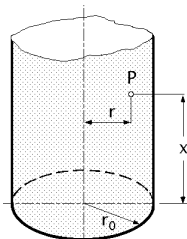
$$\frac{p(x_1, x_2)}{0} = P(x_1) P(x_2)$$

c) UN CUARTO DE SÓLIDO INFINITO



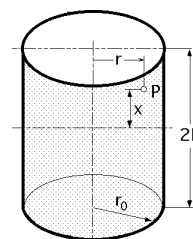
$$\frac{p(x_1, x_2)}{0} = S(x_1) S(x_2)$$

d) CILINDRO SEMIINFINITO



$$\frac{p(x, r)}{0} = S(x) C(r)$$

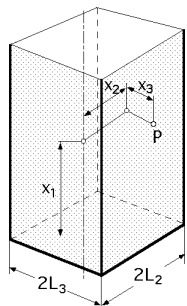
e) CILINDRO FINITO



$$\frac{p(x, r)}{0} = P(x) C(r)$$

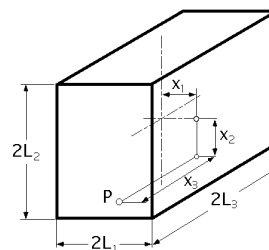
SISTEMAS TRIDIMENSIONALES

a) BARRA RECTANGULAR SEMIINFINITA



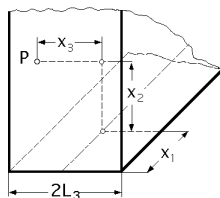
$$\frac{p(x_1, x_2, x_3)}{0} = S(x_1) P(x_2) P(x_3)$$

b) PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR



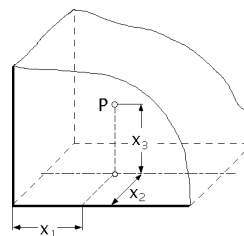
$$\frac{p(x_1, x_2, x_3)}{0} = P(x_1) P(x_2) P(x_3)$$

c) UN CUARTO DE PLACA INFINITA



$$\frac{p(x_1, x_2, x_3)}{0} = S(x_1) S(x_2) P(x_3)$$

d) UN OCTAVO DE PLACA INFINITA



$$\frac{p(x_1, x_2, x_3)}{0} = S(x_1) S(x_2) S(x_3)$$

Fig VII.3.- Soluciones en forma de productos a los problemas de conducción en régimen transitorio, utilizando la información facilitada por los gráficos

Para hallar el calor total, se puede utilizar una expresión debida a Langston, de la forma:

$$Q = c_p V (T_0 - T_F)$$

en la que es la fracción de energía disipada, $= \frac{Q(t)}{Q_0}$, que se puede aplicar en la forma:

a) Intersección de placa infinita y cilindro infinito, (cilindro):

$$= \text{placa} + \text{cilindro} (1 - \text{placa}) = \text{placa} + \text{cilindro} - \text{placa cilindro}$$

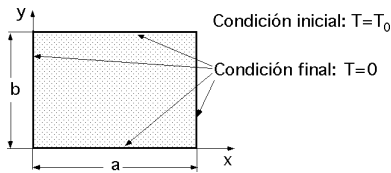
b) Intersección de 3 placas infinitas, (prisma):

$$= \text{placa (1)} + \text{placa (2)} (1 - \text{placa (1)}) + \text{placa (3)} (1 - \text{placa (1)}) (1 - \text{placa (2)})$$

Estas soluciones no son válidas cuando la temperatura inicial del cuerpo no sea uniforme, o cuando la temperatura T_F del fluido no sea la misma en toda la superficie de contacto del cuerpo.

VII.2.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN DOS Y TRES DIMENSIONES, CON CONDICIÓN DE CONTORNO ISOTÉRMICA.

a) Rectángulo con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno isotérmica



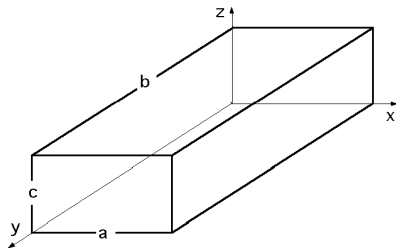
$$t = 0 ; T = T_0 ; 0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b$$

$$t > 0 ; T = 0 ; x = 0 ; x = a ; y = 0 ; y = b$$

$$\frac{(x,y,t)}{0} = \frac{8}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b})}{(2n+1)(2m+1)} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b})}{(a/n)(b/m)}$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2}{a^2} n^2 + \frac{\pi^2}{b^2} m^2 ; \quad n = \frac{(2n+1)}{a} ; \quad m = \frac{(2m+1)}{b}$$

b) Paralelepípedo con temperatura inicial uniforme T_0 , y condición de contorno isotérmica



$$t = 0 ; T = T_0 ; 0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b ; 0 \leq z \leq c$$

$$t > 0 ; T = 0 ; x = 0 ; x = a ; y = 0 ; y = b ; z = 0 ; z = c$$

$$\frac{(x,y,z,t)}{0} = 64 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b}) \sin(\frac{p\pi z}{c})}{n^2 m^2 p^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2}{a^2} n^2 + \frac{\pi^2}{b^2} m^2 + \frac{\pi^2}{c^2} p^2 ; \quad n = \frac{(2n+1)}{a} ; \quad m = \frac{(2m+1)}{b} ; \quad p = \frac{(2p+1)}{c}$$

c) Cilindro finito con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno isotérmica

$$t = 0 ; T = T_0 ; 0 \leq r \leq R ; 0 \leq z \leq H$$

$$t > 0 ; T = 0 ; r = R ; z = 0 ; z = H$$

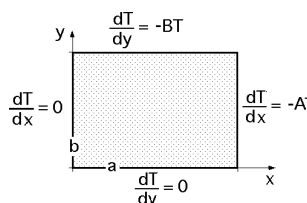
$$\frac{(r,z,t)}{0} = \frac{8}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\frac{n\pi r}{R}) \sin(\frac{(2m+1)\pi z}{H}) e^{-\lambda^2 t}}{n(2m+1) J_1(n\pi R)}$$

$$J_0(n\pi R) = 0 ; \quad \lambda^2 = \frac{\pi^2}{R^2} n^2 + \left\{ \frac{(2m+1)}{H} \right\}^2$$

VII.3.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA EN DOS Y TRES DIMENSIONES, CON CONDICIÓN DE CONTORNO DE CONVECCIÓN

a) Rectángulo con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno de convección.

$$t = 0 ; T = T_0 ; 0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b$$



$$x = y = 0 ; \frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dy} = 0$$

$$t > 0 ; x = a ; \frac{dT}{dx} = -A$$

$$y = b ; \frac{dT}{dy} = -B$$

$$\frac{(x,y,t)}{0} = 4 A B \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n x) \cos(\mu_m y) e^{-\lambda_{nm}^2 t}}{\{a(\mu_n^2 + A^2) + A\} \{b(\mu_m^2 + B^2) + B\} \cos(\mu_n a) \cos(\mu_m b)}$$

con μ_n y μ_m raíces de,

$$\mu_n \operatorname{tg}(\mu_n a) = \frac{h_{Cx}}{k} = A ; \lambda^2 = \mu_n^2 + \mu_m^2$$

$$\mu_m \operatorname{tg}(\mu_m b) = \frac{h_{Cy}}{k} = B$$

b) Paralelepípedo con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno de convección.

$$t = 0 ; T = T_0 = T_0 - T_F ; 0 \leq x \leq a ; 0 \leq y \leq b ; 0 \leq z \leq c$$

$$x = a ; \frac{dT}{dx} = -A$$

$$t > 0 ; x = y = z = 0 ; \frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dy} = \frac{dT}{dz} = 0 ; y = b ; \frac{dT}{dy} = -B$$

$$z = c ; \frac{dT}{dz} = -C$$

$$\frac{(x,y,z,t)}{0} = 8 A B C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n x) \cos(\mu_m y) \cos(\mu_p z) e^{-\lambda_{nmp}^2 t}}{\{a(\mu_n^2 + A^2) + A\} \{b(\mu_m^2 + B^2) + B\} \{c(\mu_p^2 + C^2) + C\} \cos(\mu_n a) \cos(\mu_m b) \cos(\mu_p c)}$$

$$\mu_n \operatorname{tg}(\mu_n a) = \frac{h_{Cx}}{k} = A$$

con μ_n, μ_m y μ_p raíces de, $\mu_m \operatorname{tg}(\mu_m b) = \frac{h_{Cy}}{k} = B ; \lambda^2 = \mu_n^2 + \mu_m^2 + \mu_p^2$

$$\mu_p \operatorname{tg}(\mu_p c) = \frac{h_{Cz}}{k} = C$$

c) Cilindro finito con temperatura inicial uniforme T_0 y condición de contorno de convección

$$t = 0 ; T = T_0 = T_0 - T_F ; 0 \leq r \leq R ; 0 \leq z \leq H$$

$$r = R ; \frac{dT}{dr} = -A$$

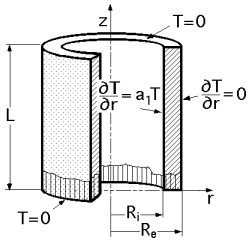
$$t > 0 ; z = 0 ; \frac{dT}{dz} = 0$$

$$z = H ; \frac{dT}{dz} = -B$$

$$\frac{(r,z,t)}{0} = \frac{4 A B}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r) \cos(\mu_m z) e^{-\lambda_{nm}^2 t}}{(\mu_n^2 + A^2) J_0(\mu_n R) \{H(\mu_m^2 + B^2) + B\} \cos(\mu_m H)}$$

con α_n y β_m raíces de,
$$\frac{A J_0(\alpha_n R)}{\alpha_n \text{tg}(\alpha_n H)} = B \quad ; \quad \alpha_n^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

d) Tubo finito con temperatura T_0 en la base superior y en la base inferior, convección en la superficie lateral interior y aislamiento térmico en la superficie lateral exterior.



$$t = 0 ; \quad T = T_0 = T_0 - T_F ; \quad 0 \leq z \leq L ; \quad R_e \leq r \leq R_i$$

$$t > 0 ; \quad r = R_i ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = a_1 T = \frac{h_C}{k}$$

$$r = R_e ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$T = 0 ; \quad z = 0 ; \quad z = L$$

$$\frac{(r,z,t)}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \{ J_0'(\alpha_n R_i) + a_1 J_0(\alpha_n R_i) \}^2 N_0(\alpha_n r)}{\{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_i) + a_1 J_0(\alpha_n R_i) \}^2 - (\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R_e)} \times$$

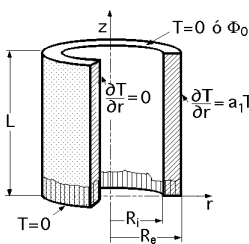
$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_m z)}{2m+1} e^{-\alpha_n^2 - \beta_m^2 t} \frac{R_e}{R_i} r \int_0^{R_e} \{ J_0(\alpha_n r) Y_0'(\beta_m R_e) - J_0'(\beta_m R_e) Y_0(\alpha_n r) \} dr$$

$$N_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0'(\beta_m R_e) - J_0'(\beta_m R_e) Y_0(\alpha_n r)$$

$$= \frac{(2m+1)}{L}$$

con α_n y β_m raíces de,
$$\frac{\{ \alpha_n Y_0(\alpha_n R_i) + a_1 Y_0(\alpha_n R_i) \} J_0'(\beta_m R_e)}{\{ \alpha_n J_0(\alpha_n R_i) + a_1 J_0(\alpha_n R_i) \} Y_0'(\beta_m R_e)} = 1 \quad ; \quad \alpha_n^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

e) Tubo finito con temperatura T_0 en la base superior y en la base inferior, convección en la superficie lateral exterior y aislamiento térmico en la superficie lateral interior.



$$t = 0 ; \quad T = T_0 = T_0 - T_F ; \quad 0 \leq z \leq L ; \quad R_e \leq r \leq R_i$$

$$t > 0 ; \quad r = R_e ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = a_1 T = \frac{h_C}{k}$$

$$r = R_i ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$T = 0 ; \quad z = 0 ; \quad z = L$$

$$\frac{(r,z,t)}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 \{ J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \}^2 N_0(\alpha_n r)}{\{ \alpha_n J_0'(\alpha_n R_e) + a_1 J_0(\alpha_n R_e) \}^2 + (\alpha_n^2 + a_1^2) J_0^2(\alpha_n R_e)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\beta_m z)}{2m+1} e^{-\alpha_n^2 - \beta_m^2 t} \frac{R_e}{R_i} r \int_0^{R_e} \{ J_0(\alpha_n r) Y_0'(\beta_m R_e) - J_0'(\beta_m R_e) Y_0(\alpha_n r) \} dr$$

$$N_0(\alpha_n r) = J_0(\alpha_n r) Y_0'(\beta_m R_e) - J_0'(\beta_m R_e) Y_0(\alpha_n r)$$

$$\text{con } n \text{ y raíces de, } \frac{(2m+1)}{L} \quad \frac{\{ {}_n Y_0({}_n R_i) + a_1 Y_0({}_n R_i) \} J'_0({}_n R_e)}{\{ {}_n J_0({}_n R_i) + a_1 J_0({}_n R_i) \} Y'_0({}_n R_e)} = 1 \quad ; \quad {}^2 = {}^2_n + {}^2$$

f) Tubo finito con temperatura T_0 en la base superior y en la base inferior, con convección en la superficie lateral exterior y en la superficie lateral interior.

$$t = 0 ; \quad T = T_0 = T_F ; \quad 0 \leq z \leq L ; \quad R_e \leq r \leq R_i$$

$$t > 0 ; \quad r = R_e ; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R_e} = a_1 = \frac{h_{C_e}}{k}$$

$$r = R_i ; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R_i} = b_1 = \frac{h_{C_i}}{k}$$

$$T = 0 ; \quad z = 0 ; \quad z = L$$

$$\frac{T(r,z,t)}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}_n^2 \{ {}_n J'_0({}_n R_e) + b_1 J_0({}_n R_e) \}^2 N_0({}_n r)}{({}_n^2 + b_1^2) \{ {}_n J'_0({}_n R_0) + b_1 J_0({}_n R_0) \}^2 - ({}_n^2 + a_1^2) \{ {}_n J'_0({}_n R_e) + a_1 J_0({}_n R_e) \}^2} \times$$

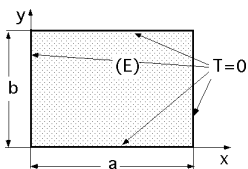
$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(\frac{z}{L})}{2m+1} e^{- {}^2 t} \int_{R_i}^{R_e} r {}_0 [J_0({}_n r) \{ {}_n Y'_0({}_n R_0) - b_1 Y_0({}_n R_i) \} - Y_0({}_n r) \{ {}_n J'_0({}_n R_0) - b_1 J_0({}_n R_i) \}] dr$$

$$N_0({}_n r) = J_0({}_n r) Y'_0({}_n R_e) - J'_0({}_n R_e) Y_0({}_n r)$$

$$\text{con } n \text{ y raíces de, } \frac{(2m+1)}{L} \quad \frac{\{ {}_n Y'_0({}_n R_i) - b_1 Y_0({}_n R_i) \} \{ {}_n J'_0({}_n R_e) + a_1 J_0({}_n R_e) \}}{\{ {}_n Y'_0({}_n R_e) + a_1 Y_0({}_n R_e) \} \{ {}_n J'_0({}_n R_i) - b_1 J_0({}_n R_i) \}} = 1 \quad ; \quad {}^2 = {}^2_n + {}^2$$

VII.4.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN EN RÉGIMEN TRANSITORIO CON GENERACIÓN DE CALOR E.

a) Rectángulo con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.



$$t = 0 ; \quad T = 0 ; \quad \{ 0 \leq x \leq a \} ; \quad \{ 0 \leq y \leq b \}$$

$$t > 0 ; \quad x = 0 , \quad T = 0 ; \quad y = 0 , \quad T = 0$$

$$x = a , \quad T = 0 ; \quad y = b , \quad T = 0$$

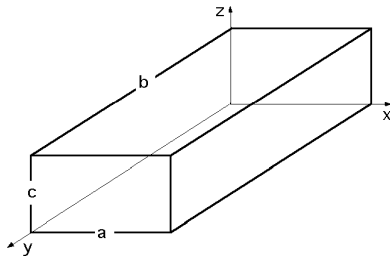
$$t > 0 ; \quad E = \text{cte}$$

$$T(x,y,t) = \frac{4E}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\frac{n}{a} x) \text{sen}(\frac{m}{b} y)}{n^2 m^2} \{ 1 - e^{- {}^2 t} \}$$

$$n = 1,3,5,7... ; \quad m = 1,3,5,7... ; \quad \frac{n}{a} = \frac{n}{a} ; \quad \frac{m}{b} = \frac{m}{b} ; \quad {}^2 = {}^2_n + \mu_m^2$$

b) Paralelepípedo con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E}{k}$$



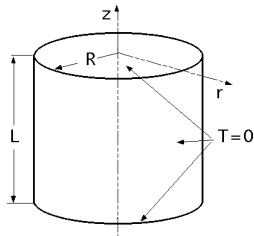
$$\begin{aligned} t=0; T=0; \{0 \leq x \leq a\}; \{0 \leq y \leq b\}; \{0 \leq z \leq c\} \\ t>0; x=0, T=0; y=0, T=0; z=0, T=0 \\ x=a, T=0; y=b, T=0; z=c, T=0 \\ t>0; E = \text{Cte} \end{aligned}$$

$$T(x,y,z,t) = \frac{8E}{3k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b}) \sin(\frac{p\pi z}{c})}{n^2 m^2 p^2} \{1 - e^{-\alpha_n^2 t}\}$$

$$n = m = p = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}; \quad \mu_m = \frac{m\pi}{b}; \quad p = \frac{p\pi}{c}; \quad \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{p^2\pi^2}{c^2}$$

c) Cilindro finito con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E}{k}$$



$$\begin{aligned} t=0; T=0; \{0 \leq r \leq R\}; \{0 \leq z \leq L\} \\ t>0; r=R; T=0 \\ t>0; z=0; T=0 \\ t>0; z=L; T=0 \\ t>0; E = \text{Cte} \end{aligned}$$

$$T(r,z,t) = \frac{4E}{Rk} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\frac{n\pi r}{R}) \sin(\frac{m\pi z}{L})}{n^2} \{1 - e^{-\alpha_n^2 t}\}; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

con α_n raíces de: $J_0(\frac{n\pi R}{R}) = 0$, y μ_m de: $\mu_m = \frac{m\pi}{L}$

d) Esfera con generación de calor E; condición de contorno isotérmica.

Condiciones de contorno,

$$t=0; T=0; 0 \leq r \leq R$$

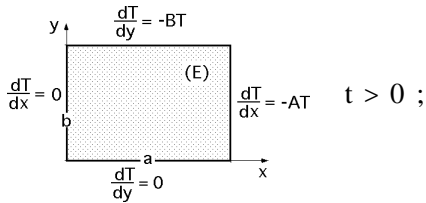
$$t>0; r=R; T=0 \\ E = \text{Cte}$$

$$T(r,t) = \frac{2E}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi r}{R})}{n^2} (1 - e^{-\alpha_n^2 t}) (-1)^n; \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{R}$$

e) Rectángulo con generación de calor E ; condición de contorno de convección.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E}{k}$$

$$t = 0; T = 0; 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$$



$$E = \text{Cte}$$

$$x = 0; y = 0; \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0; \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_{y=0} = 0$$

$$x = a; \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=a} = -\frac{h_{Cx}}{k}; y = b; \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_{y=b} = -\frac{h_{Cy}}{k}$$

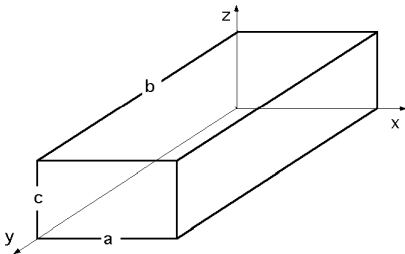
$$T(x,y,t) = \frac{4E}{k} \frac{h_{Cx}}{k} \frac{h_{Cy}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n x) \cos(\mu_m y) (1 - e^{-\lambda_{nm}^2 t})}{\{a(\mu_n^2 + \frac{h_{Cx}^2}{k^2}) + \frac{h_{Cx}}{k}\} \{b(\mu_m^2 + \frac{h_{Cy}^2}{k^2}) + \frac{h_{Cy}}{k}\} \cos(\mu_n a) \cos(\mu_m b)}$$

con μ_n y μ_m raíces de,

$$\mu_n \tan(\mu_n a) = \frac{h_{Cx}}{k}; \quad \lambda^2 = \mu_n^2 + \mu_m^2$$

$$\mu_m \tan(\mu_m b) = \frac{h_{Cy}}{k}$$

f) Paralelepípedo con generación de calor E ; condición de contorno de convección.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E}{k}$$

$$t = 0; T = 0; 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; 0 \leq z \leq c$$

$$E = \text{Cte}$$

$$x = 0; y = 0; z = 0; \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0; \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_{y=0} = 0; \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=0} = 0$$

$$t > 0; x = a; \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=a} = -\frac{h_{Cx}}{k} = -A$$

$$y = b; \frac{\partial T}{\partial y} \bigg|_{y=b} = -\frac{h_{Cy}}{k} = -B$$

$$z = c; \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=c} = -\frac{h_{Cz}}{k} = -C$$

$$T(x,y,z,t) =$$

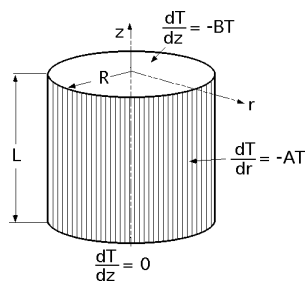
$$= \frac{8E_0 A B C}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n x) \cos(\mu_m y) \cos(\mu_p z) \{1 - e^{-\lambda_{nmp}^2 t}\}}{\{a(\mu_n^2 + A^2) + A\} \{b(\mu_m^2 + B^2) + B\} \{c(\mu_p^2 + C^2) + C\} \cos(\mu_n a) \cos(\mu_m b) \cos(\mu_p c)}$$

$$\begin{aligned} \mu_n \operatorname{tg}(\mu_n a) &= \frac{h_{Cx}}{k} \\ \text{con } \mu_n, \mu_m \text{ y } \mu_p \text{ raíces de, } \mu_m \operatorname{tg}(\mu_m b) &= \frac{h_{Cy}}{k} \quad ; \quad \mu^2 = \mu_n^2 + \mu_m^2 + \mu_p^2 \quad ; \quad n = m = p = 1, 3, 5, \dots \\ \mu_p \operatorname{tg}(\mu_p c) &= \frac{h_{Cz}}{k} \end{aligned}$$

g) Cilindro finito con generación de calor E; condición de contorno de convección.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{E}{k}$$

$$t = 0 \quad ; \quad T = 0 \quad ; \quad 0 \leq r \leq R \quad ; \quad 0 \leq z \leq L$$



$$E = Cte$$

$$r = R \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{h_C}{k} T = -A$$

$$t > 0 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$z = L \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{h_{Cz}}{k} T = -B$$

$$(r, z, t) = \frac{4 E A B}{k R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r) \cos(\mu_m z)}{\{L(\mu_m^2 + B^2) + B\}^2 (\mu_n^2 + A^2) J_0(\mu_n R) \cos(\mu_m L)} (1 - e^{-\mu_n^2 \alpha t})$$

$$\begin{aligned} \text{con } \mu_n \text{ y } \mu_m \text{ raíces de, } \quad \frac{J_0(\mu_n R)}{J_1(\mu_n R)} &= \frac{\mu_n R}{Bi} = \frac{\mu_n}{A} \\ \mu_m \operatorname{tg}(\mu_m L) &= B \end{aligned}$$

VIII.- CONDUCCIÓN TRANSITORIA DEL CALOR

MÉTODO GRÁFICO

VIII.1.- SOLUCIONES NUMÉRICAS A PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN MONODIMENSIONALES EN RÉGIMEN TRANSITORIO

El método numérico aplicado a los problemas de conducción en régimen transitorio es semejante al utilizado para el caso de conducción en régimen estacionario. El sólido se divide en un cierto número de celdillas y en el centro de cada una se sitúa un nodo ficticio en el que se supone están concentradas las propiedades térmicas de las mismas.

Un balance de energía en cada nodo permite hallar una expresión algebraica para determinar su temperatura, función de las temperaturas de los nodos vecinos, y de las características térmicas y geométricas del nodo en cuestión; asimismo hay que tener en cuenta un factor adicional, que es la energía almacenada en cada nodo de la celdilla, en el tiempo considerado, la cual se puede expresar como la variación de la energía interna del mismo.

NODOS INTERIORES.- Vamos a considerar un nodo interno 0, según se muestra en la Fig VIII.1; la ecuación correspondiente a la variación de la energía interna del nodo 0 respecto al tiempo, para un problema monodimensional, viene dada por:

$$\sum_{i=1}^2 Q_{0i} = 0 \quad \text{ó} \quad Q_{10} + Q_{20} = \frac{U}{t} \text{ nudo}(0) = \frac{U_0}{t}$$

Los términos de conducción de la ecuación anterior pueden aproximarse mediante la expresión, en diferencias finitas, de la ecuación de Fourier:

$$Q_{10} = k A \frac{T_1^t - T_0^t}{x} \quad ; \quad Q_{20} = k A \frac{T_2^t - T_0^t}{x}$$

en las que los superíndices t indican que las temperaturas han de calcularse en el instante t , es decir, especifican la variación temporal de la temperatura; los subíndices se refieren a la posición de los nodos y especifican la variación espacial a lo largo del eje x .

La variación de la energía interna del nodo 0 en el tiempo t , suponiendo constantes la densidad ρ , y el calor específico c_p del material, se puede expresar en la forma:

$$\frac{U_0}{t} = m c_p \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{t} = A \cdot \rho \cdot c_p \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{t}$$

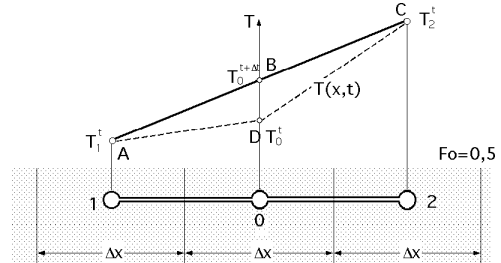
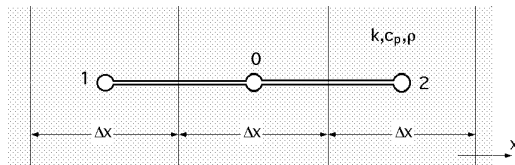
luego:

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} = \frac{U_0}{t} \quad k A \frac{T_1^t - T_0^t}{x} + k A \frac{T_2^t - T_0^t}{x} = A \cdot \rho \cdot c_p \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{t}$$

Despejando $T_0^{t+\Delta t}$ se obtiene:

$$T_0^{t+\Delta t} = T_0^t + \frac{k \cdot t}{c_p \cdot x^2} (T_1^t + T_2^t - 2 T_0^t) = \left| F_0 = \frac{t}{x^2} = \frac{k \cdot t}{c_p \cdot x^2} \right| =$$

$$= T_0^t + F_0 (T_1^t + T_2^t - 2 T_0^t) = F_0 (T_1^t + T_2^t) + T_0^t (1 - 2 F_0)$$



Teniendo en cuenta la construcción geométrica de la Fig VIII.2 en la que:

$$\overline{OB} = \frac{T_1^t + T_2^t}{2} = T_0^{t+\Delta t} = F_0 (T_1^t + T_2^t) + T_0^t (1 - 2 F_0)$$

se obtiene:

$$\frac{T_1^t + T_2^t - 2 T_0^t}{2} = F_0 (T_1^t + T_2^t - 2 T_0^t) \quad F_0 = \frac{1}{2}$$

que dice, que si en esta ecuación seleccionamos el número de Fourier igual a $F_0 = 0,5$, se obtiene una solución gráfica sencilla para los problemas de conducción transitoria, ya que para el caso de un nodo interior 0, la ecuación anterior se simplifica en la forma:

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{T_1^t + T_2^t}{2}$$

que establece el que una temperatura futura de un nodo interior sea la media aritmética de la temperatura de los dos nodos vecinos en el momento actual.

La construcción gráfica para la determinación de temperaturas que acabamos de exponer, mediante técnicas de métodos numéricos, se denomina método de Binder-Schmidt; tiene el inconveniente de que da el mismo valor para la temperatura de los nodos correspondientes a dos intervalos de tiempos consecutivos, consecuencia de la necesidad de seleccionar el valor del número de $Fo = 0,5$.

El intervalo de tiempos t se fija en la forma:

$$Fo = 0,5 = \frac{t}{x^2} \quad ; \quad t = \frac{x^2}{2}$$

Este método tiene limitadas sus aplicaciones a geometrías y procesos térmicos monodimensionales. Su aplicación es sencilla, pero presenta el inconveniente de que el tamaño de los pasos temporales viene limitado por condiciones de estabilidad; para evitar que aparezcan oscilaciones divergentes en la solución, el coeficiente del término en T_0^t no debe ser negativo.

La restricción del valor del número de Fourier se denomina *límite de estabilidad*.

El criterio de estabilidad exige que el coeficiente del término en T_0^t que aparece en la ecuación:

$$\frac{T_1^t + T_2^t - 2 T_0^t}{2} = T_0^{t+\tau} = Fo (T_1^t + T_2^t) + T_0^t (1 - 2 Fo)$$

sea positivo. Si, $Fo > 0,5$, se dice que la solución correspondiente a las temperaturas es inestable.

La temperatura en el nodo 0 en el instante $t + t$ se obtiene dibujando una línea recta entre los puntos T_1^t y T_2^t .

En la Fig VIII.3 se desarrolla esta construcción en un caso general, observándose que:

La isócrona inicial en t es, $T_1^0, T_2^0, T_3^0, T_4^0, T_5^0, T_6^0, T_7^0, \dots$

La isócrona inicial en $t + t$ es, $T_2^1, T_3^1, T_4^1, T_5^1, T_6^1, \dots$

La isócrona inicial en $t + 2t$ es, $T_3^2, T_4^2, T_5^2, \dots$

La isócrona inicial en $t + 3t$ es, T_4^3, \dots

El número de puntos de la isócrona disminuye por cuanto no se conocen las condiciones en los límites.

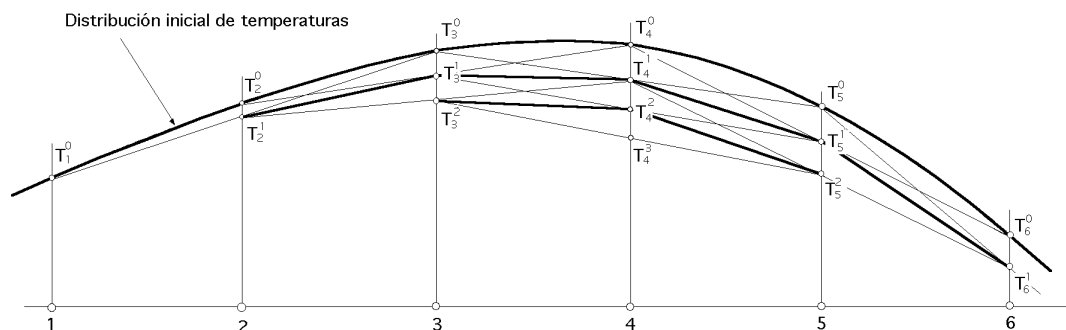


Fig VIII.3.- Cálculo de temperaturas por el método de Binder-Schmidt

NODOS PERIFÉRICOS.- Si se sitúa un nodo en el contorno o frontera de un cuerpo, el balance de energía depende de la condición de contorno en la superficie. Una condición muy interesante es

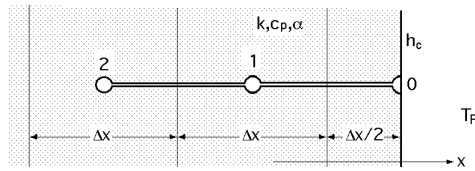


Fig VIII.4.-Nodo periférico en contacto con un fluido

la convección desde la superficie a un fluido exterior. Para su estudio consideraremos de nuevo un problema monodimensional en el que el nodo 0 está situado sobre la superficie como se muestra en la Fig VIII.4; el balance de energía para este nodo 0 es:

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{F \rightarrow 0} = \frac{U}{t} \text{ nodo}(0) = \frac{U_0}{t}$$

$$k A \frac{T_1^t - T_0^t}{x} + h_c A (T_F - T_0^t) = \frac{A x c_p}{2} \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{t}$$

ya que el intervalo del nodo en la superficie es $x/2$ debido a que el nodo 0 tiene sólo la mitad de la anchura que un nodo interior; los nodos interiores tienen una anchura igual a x ; los nodos en la frontera tienen una anchura $x/2$.

Despejando la temperatura futura del nodo superficial, se tiene:

$$T_0^{t+\Delta t} = 2 F_0 \{T_1^t + Bi T_F\} + \{1 - 2 F_0 - 2 F_0 Bi\} T_0^t ;$$

$$F_0 = \frac{t}{x^2}$$

$$Bi = \frac{h_c x}{k}$$

Si los nodos están situados bastante próximos, la masa que el nodo 0 superficial representa es pequeña y es posible despreciar la energía almacenada en dicho nodo, es decir, se puede despreciar la capacidad térmica del mismo; en esta situación se cumple que, $T_0^{t+\Delta t} = T_0^t$, y la ecuación anterior se reduce a:

$$T_0^t = \frac{T_1^t + Bi T_F}{1 + Bi}$$

siendo suficientes los valores de T_1 y T_F en el instante actual para determinar el valor, también actual, de la temperatura superficial T_0

Si la capacidad térmica del nodo de la superficie no se desprecia y se utiliza la ecuación

$$T_0^{t+\Delta t} = 2 F_0 \{T_1^t + Bi T_F\} + \{1 - 2 F_0 - 2 F_0 Bi\} T_0^t$$

el conocimiento de las temperaturas en un instante dado en la superficie del cuerpo y la temperatura de otro nodo que no esté en la superficie, determina la temperatura en el nodo superficial en el instante posterior $T_0^{t+\Delta t}$.

Si deseamos encontrar el límite de estabilidad para un nodo de la superficie en el que se trans-

fiere calor a un fluido por convección, el coeficiente del término en T_0^t de la ecuación anterior tiene que ser positivo, por lo que:

$$1 - 2 Fo - 2 Fo Bi \geq 0 ; \quad Fo \leq \frac{1}{2(1 + Bi)}$$

En el caso de un problema de conducción particular, las ecuaciones de los nodos interiores y del contorno o frontera, deben ser estables. Si por ejemplo se selecciona el valor, $Fo = 1/4$, para hacer que las temperaturas correspondientes a los nodos interiores sean estables, el requisito de estabilidad para el nodo de la frontera es, $Bi < 1$.

Si se hubiese hecho el número de $Fo = 0,5$, habría sido imposible ajustar la condición de estabilidad para los nodos del contorno debido a que ahora, $Fo(1 + Bi) \geq 0,5$, habría exigido que el número de Biot fuese negativo.

El criterio de estabilidad hace que Δt no pueda ser mayor que $x^2/2$, y menor, si el n° de Bi de la red no es pequeño, por lo que si se desea aumentar la precisión reduciendo a la mitad el tamaño x de la red, el paso temporal Δt tiene que dividirse por cuatro.

Antes de proceder a resolver un problema de conducción en régimen transitorio mediante técnicas numéricas es necesario el conocimiento de la distribución de temperaturas inicial.

Con frecuencia el cuerpo está originalmente a la misma temperatura, es decir, es isotermo, y de este modo basta con hacer que todas las temperaturas de los nodos sean iguales a la temperatura inicial conocida.

Se continúa entonces la resolución numérica mediante el cálculo de las temperaturas en el instante t posterior para todos los nodos interiores y para el nodo superficial, si en el contorno se transfiere calor a un fluido a temperatura T_F .

Conociendo las temperaturas en t se repite el proceso para calcular la distribución de temperaturas completa en el instante $2t$, y así sucesivamente.

Un método alternativo al anterior (explícito), es el *método implícito* que permite evaluar el flujo de calor transferido por conducción por unidad de área en el tiempo $(t + \Delta t)$, en lugar del tiempo t .

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} = \frac{U_0}{t} = k \frac{T_1^{t+\Delta t} - T_0^{t+\Delta t}}{x} + k \frac{T_2^{t+\Delta t} - T_0^{t+\Delta t}}{x} = x c_p \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{t}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo (T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2 Fo}$$

en la que hay tres temperaturas desconocidas en cada ecuación nodal.

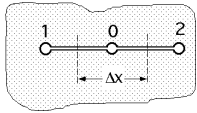
El sistema de ecuaciones algebraicas se puede expresar en forma matricial, observándose que todos los elementos de la matriz son nulos excepto los que están sobre la diagonal principal.

El método implícito siempre es estable, y la elección del tamaño del intervalo Δt obedece a criterios de precisión y no de estabilidad.

ECUACIONES TÉRMICAS DE LOS NODOS Y CONDICIONES DE ESTABILIDAD

La primera ecuación es la explícita, y la segunda es implícita

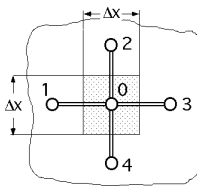
a) Conducción monodimensional; nodo interior.



$$T_0^{t+\Delta t} = Fo (T_1^t + T_2^t) + (1 - 2 Fo) T_0^t ; \quad Fo \leq \frac{1}{2}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo (T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2 Fo}$$

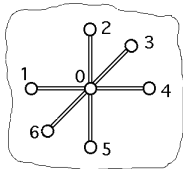
b) Conducción bidimensional; nodo interior; celdilla cuadrada



$$T_0^{t+\Delta t} = Fo (T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t) + (1 - 4 Fo) T_0^t ; \quad Fo \leq \frac{1}{4}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo (T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t} + T_4^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 4 Fo}$$

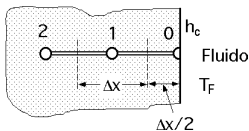
c) Conducción tridimensional; nodo interior; celdilla cúbica



$$T_0^{t+\Delta t} = Fo (T_1^t + T_2^t + T_3^t + T_4^t + T_5^t + T_6^t) + (1 - 6 Fo) T_0^t ; \quad Fo \leq \frac{1}{6}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{Fo (T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t} + T_4^{t+\Delta t} + T_5^{t+\Delta t} + T_6^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 6 Fo}$$

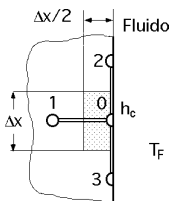
d) Conducción monodimensional; nodo en la superficie; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = 2 Fo \{ T_1^t + Bi T_F \} + \{ 1 - 2 Fo - 2 Fo Bi \} T_0^t ; \quad Fo \leq \frac{1}{2(1 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2 Fo (T_1^{t+\Delta t} + Bi T_F^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2 Fo + 2 Bi Fo}$$

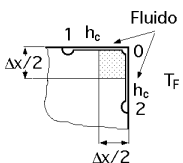
e) Conducción bidimensional; nodo en la superficie; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = 2 Fo \left\{ T_1^t + \frac{T_2^t + T_3^t}{2} + Bi T_F \right\} + \{ 1 - 4 Fo - 2 Fo Bi \} T_0^t ; \quad Fo \leq \frac{1}{2(2 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2 Fo (T_1^{t+\Delta t} + \frac{T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t}}{2} + Bi T_F^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 2 Fo (2 + Bi)}$$

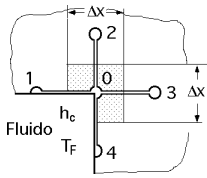
f) Conducción bidimensional; nodo en la superficie esquina exterior; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = 2 Fo \{ T_1^t + T_2^t + 2 Bi T_F \} + \{ 1 - 4 Fo - 4 Fo Bi \} T_0^t ; \quad Fo \leq \frac{1}{4(1 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2 Fo (T_1^{t+\Delta t} + T_2^{t+\Delta t} + 2 Bi T_F^{t+\Delta t}) + T_0^t}{1 + 4 Fo (1 + Bi)}$$

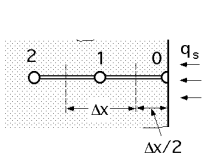
g) Conducción bidimensional; nodo en la superficie esquina interior; convección con un fluido exterior.



$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{4}{3} Fo \left\{ \frac{T_1^t + T_4^t}{2} + T_2^t + T_3^t + Bi T_F \right\} + \left\{ 1 - 4 Fo - \frac{4}{3} Fo Bi \right\} T_0^t ; Fo \leq \frac{3}{4(3 + Bi)}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{\frac{4}{3} Fo \left(\frac{T_1^{t+\Delta t} + T_4^{t+\Delta t}}{2} + T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t} + Bi T_F^{t+\Delta t} \right) + T_0^t}{1 + 4 Fo \left(1 + \frac{Bi}{3} \right)}$$

h) Conducción monodimensional; nodo en la superficie; flujo de calor por unidad de superficie conocido

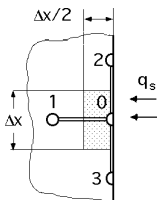


$$T_0^{t+\Delta t} = 2 Fo \left\{ T_1^t + \frac{q_s^t x}{k} \right\} + \{ 1 - 2 Fo \} T_0^t ; Fo \leq \frac{1}{2}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2 Fo \left(T_1^{t+\Delta t} + \frac{q_s^{t+\Delta t} x}{k} \right) + T_0^t}{1 + 2 Fo}$$

Para superficies adiabáticas o planos de simetría se considera $q_s = 0$

i) Conducción bidimensional; nodo en la superficie; flujo de calor por unidad de superficie conocido



$$T_0^{t+\Delta t} = 2 Fo \left\{ T_1^t + \frac{T_2^t + T_3^t}{2} + \frac{q_s^t x}{k} \right\} + \{ 1 - 4 Fo \} T_0^t ; Fo \leq \frac{1}{4}$$

$$T_0^{t+\Delta t} = \frac{2 Fo \left(T_1^{t+\Delta t} + \frac{T_2^{t+\Delta t} + T_3^{t+\Delta t}}{2} + \frac{q_s^{t+\Delta t} x}{k} \right) + T_0^t}{1 + 4 Fo}$$

Para superficies adiabáticas o planos de simetría se considera $q_s = 0$

VIII.2.- APLICACIÓN DEL MÉTODO GRÁFICO A PAREDES COMPUESTAS

Para el caso en que las paredes sean compuestas, Fig VIII.5, el problema de la construcción gráfica de las isócronas radica en calcular las sucesivas temperaturas que se alcanzan en la interfase de contacto. Así se puede poner:

$$Q_{1 \rightarrow 0} + Q_{2 \rightarrow 0} = \frac{U_0}{t}$$

en la que cada sumando es de la forma:

$$Q_{1 \rightarrow 0} = k_1 A \frac{T_1^t - T_0^t}{x_1} ; Q_{2 \rightarrow 0} = k_2 A \frac{T_2^t - T_0^t}{x_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{t} &= \frac{1}{2} A \frac{x_1 c_{p1}}{x_1} \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t} + \frac{2}{2} A \frac{x_2 c_{p2}}{x_2} \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t} = \\ &= \left(\frac{1}{2} A \frac{x_1 c_{p1}}{x_1} + \frac{2}{2} A \frac{x_2 c_{p2}}{x_2} \right) \frac{T_0^{t+\Delta t} - T_0^t}{\Delta t} \end{aligned}$$

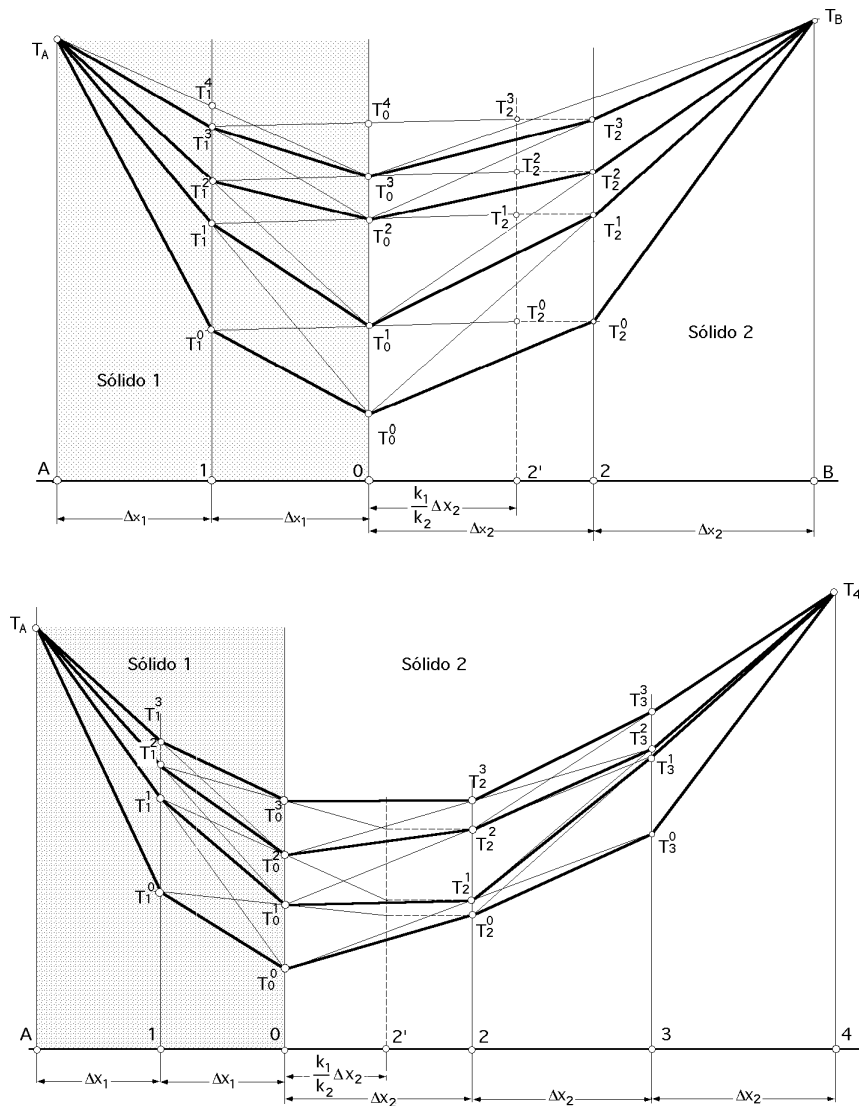


Fig VIII.5 a.b.- Aplicación del método de Binder-Schmidt a pared compuesta

por lo que, sustituyendo:

$$k_1 A \frac{T_1^t - T_0^t}{x_1} + k_2 A \frac{T_2^t - T_0^t}{x_2} = (\frac{1}{2} A x_1 c_{p1} + \frac{2}{2} A x_2 c_{p2}) \frac{T_0^{t+} - T_0^t}{\Delta t}$$

$$\frac{k_1 T_1^t}{x_1} + \frac{k_2 T_2^t}{x_2} - (\frac{k_1}{x_1} + \frac{k_2}{x_2}) T_0^t = (\frac{1}{2} x_1 c_{p1} + \frac{2}{2} x_2 c_{p2}) \frac{T_0^{t+} - T_0^t}{\Delta t}$$

$$T_0^{t+} \frac{1}{2} \frac{x_1 c_{p1} + x_2 c_{p2}}{\Delta t} = \frac{k_1 T_1^t}{x_1} + \frac{k_2 T_2^t}{x_2} - (\frac{k_1}{x_1} + \frac{k_2}{x_2} - \frac{1}{2} \frac{x_1 c_{p1} + x_2 c_{p2}}{\Delta t}) T_0^t$$

Como:

$$Fo = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{x_1^2} = \frac{2}{2} \frac{\Delta t}{x_2^2} = \frac{k_1 \Delta t}{x_1^2 c_{p1}} = \frac{k_2 \Delta t}{x_2^2 c_{p2}}$$

$$\Delta t = \frac{x_1^2}{2 c_{p1}} = \frac{x_2^2}{2 c_{p2}} = \frac{x_1^2 c_{p1}}{2 k_1} = \frac{x_2^2 c_{p2}}{2 k_2}$$

$$\frac{x_1 - 1}{2} \frac{c_{p1}}{t} = \frac{k_1}{x_1} ; \quad \frac{x_2 - 2}{2} \frac{c_{p2}}{t} = \frac{k_2}{x_2}$$

sustituyendo se obtiene:

$$T_0^{t+\tau} \left(\frac{k_1}{x_1} + \frac{k_2}{x_2} \right) = \frac{k_1}{x_1} T_1^t + \frac{k_2}{x_2} T_2^t$$

$$(T_0^{t+\tau} - T_1^t) \frac{k_1}{x_1} = (T_2^t - T_0^{t+\tau}) \frac{k_2}{x_2} ; \quad \frac{T_0^{t+\tau} - T_1^t}{x_1} = \frac{1}{\frac{k_1}{k_2}} \frac{T_2^t - T_0^{t+\tau}}{x_2}$$

que permite calcular gráficamente las sucesivas temperaturas de la interfase mediante líneas rectas, reubicando el nodo 2 a una distancia de la unión, nodo 0, igual a un valor $\frac{k_1}{k_2} x_2$, que será diferente al x_2 inicial, como se indica en la Fig VIII.5.

El valor de $T_0^{t+\tau}$ es:

$$T_0^{t+\tau} = \frac{\frac{k_1}{k_2} T_1^t x_2 + x_1 T_2^t}{\frac{k_1}{k_2} x_2 + x_1} = \frac{\frac{k_2}{k_1} T_2^t x_1 + x_2 T_1^t}{\frac{k_2}{k_1} x_1 + x_2} = \frac{\frac{k_1}{x_1} T_1^t + \frac{k_2}{x_2} T_2^t}{\frac{k_1}{x_1} + \frac{k_2}{x_2}}$$

VIII.3.- RESOLUCIÓN GRÁFICA CON CHOQUE TÉRMICO, C.C. ISOTÉRMICA.

El choque térmico es un cambio repentino de la temperatura en la superficie de la pared del sólido. Teniendo en cuenta la Fig VIII.6, podemos suponer que el eje de abscisas se corresponde con la temperatura inicial constante T_0 , siendo T_s la temperatura final a la que se lleva bruscamente a la pared.

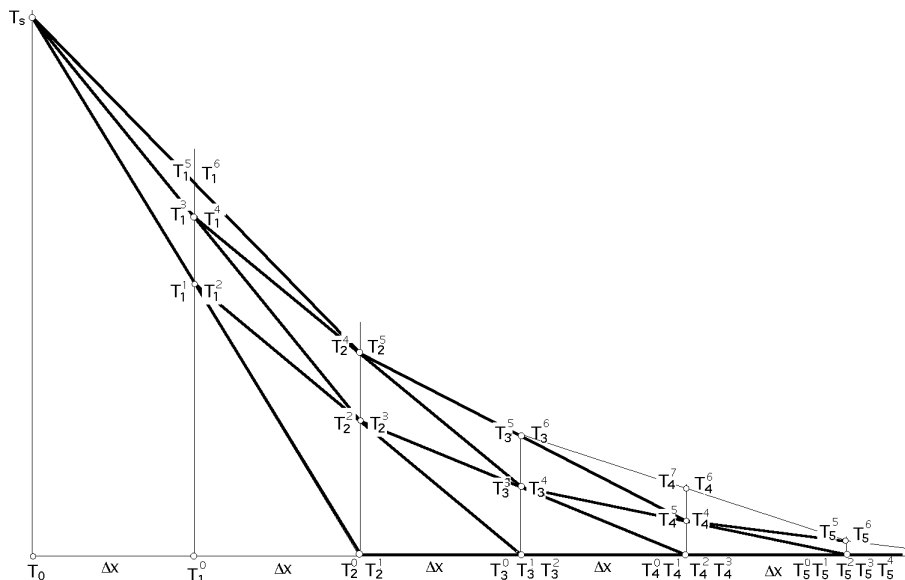


Fig VIII.6.- Aplicación del método de Bindera un sólido con choque térmico en su superficie y temperatura inicial T_s

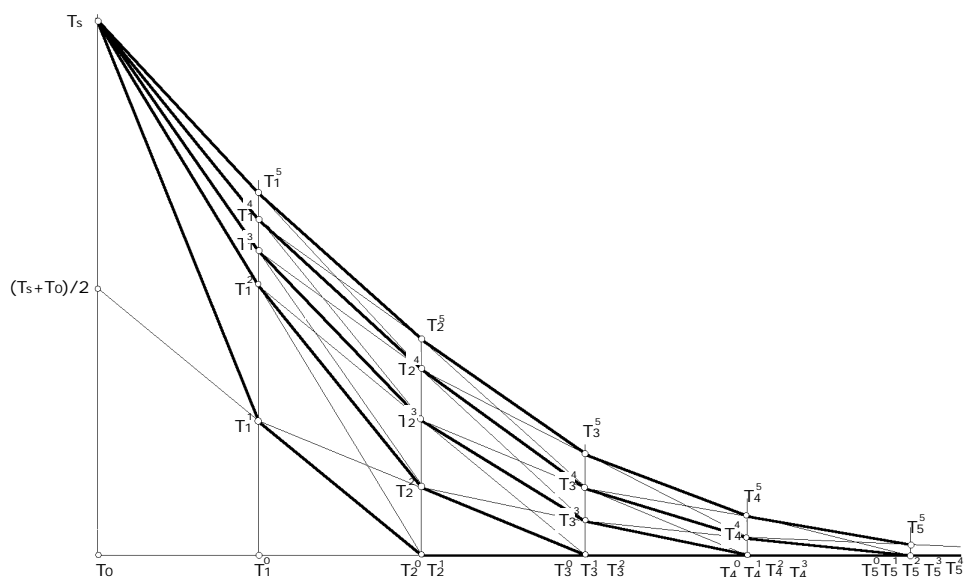


Fig VIII.7.- Sólido con choque térmico en su superficie con temperatura media inicial, $(T_0 + T_s)/2$

Si en el primer intervalo de tiempo t la temperatura superficial se toma como $(T_0 + T_s)/2$, la isócrona vendrá dada por, $T_s, T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1, \dots$

Para 2 $t \quad T_s, T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2, T_5^2, \dots$

En los intervalos t posteriores, las isócronas son, Para 3 $t \quad T_s, T_1^3, T_2^3, T_3^3, T_4^3, T_5^3, \dots$

Para 4 $t \quad T_s, T_1^4, T_2^4, T_3^4, T_4^4, T_5^4, \dots$

Se ha comprobado analíticamente que la construcción con temperatura inicial en la superficie, $\frac{T_0 + T_s}{2}$ proporciona una mejor aproximación que la de considerar T_s en el instante inicial, como se indica en la Fig VIII.7.

VIII.4.- RESOLUCIÓN GRÁFICA CON CONVECCIÓN EN LA SUPERFICIE

Sabemos que la tangente a la línea de distribución de temperaturas en la superficie del sólido, Fig VIII.1, pasa por el punto M situado a una distancia de la misma igual a k/h_c y a una altura T_F .

La construcción gráfica de temperaturas por el método de Binder-Schmidt se basa en hallar este punto M de referencia y en la colocación de un nodo ficticio 0 en la zona de fluido, de forma que si el intervalo normal entre los nodos 1, 2, 3, ..., del sólido es x , para la zona del sólido comprendida entre el nodo 1 y la superficie será $x/2$, y para la zona de fluido comprendida entre la superficie y el nodo 0 será también $x/2$. Se han hecho dos tipos de representación; en una se ha considerado una distribución de temperaturas no uniforme en el instante $t = 0$, Fig VIII.8, mientras que en la otra, Fig VIII.9, se ha considerado que la temperatura inicial del sólido es constante e igual a T_0 .

En ambos casos, el sólido se introduce en un fluido a menor temperatura T_F ; se une el punto m correspondiente a la isócrona sobre la superficie del sólido, con el punto M, obteniéndose el punto a

IX.- SUPERFICIES AMPLIADAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

IX.1.- INTRODUCCIÓN

Las superficies ampliadas tienen un extenso campo de aplicaciones en problemas de transmisión de calor, desde radiadores de automóviles o equipos de aire acondicionado, hasta los elementos combustibles de reactores nucleares refrigerados por gases, o los elementos de absorción y disipación de energía en vehículos espaciales, o los equipos de refrigeración y calentamiento en la industria química, etc.

Antes de entrar en la resolución de los problemas térmicos en superficies específicas, es conveniente hacer una interpretación intuitiva de la necesidad de las superficies ampliadas, que se conocen con el nombre de *aletas*, así como de sus secciones transversales, laterales y perfiles (sección recta), que se corresponden con figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas, con dimensiones en las que la relación (longitud/espesor) es del orden de 5/1 a 50/1, siendo el espesor del orden de 0,5 mm a 10 mm.

Las aletas se pueden disponer sobre superficies planas o curvas. Si la disposición es de tipo longitudinal, se puede admitir que la superficie de encastre donde se apoya la aleta es plana, siempre que el radio del tubo sea elevado frente al espesor de la aleta.

Cuando las aletas son sólidos de revolución o paralelepípedos se denominan *protuberancias* y su disposición puede admitirse sobre superficies planas cuando la superficie de la protuberancia en la base sea pequeña frente a la superficie de esta última. Las protuberancias se tratan con distribución de temperatura constante para cada sección recta paralela a la base, lo que equivale a admitir que la relación entre la longitud L de la protuberancia y el diámetro o longitud equivalente en la base, es elevada, pudiéndose considerar la transmisión de calor como unidireccional; cuando esta hipótesis no se cumpla se estudia el fenómeno de la transmisión de calor en tres dimensiones.

Las aletas y las protuberancias se disponen en la superficie base constituyendo un conjunto, siendo el más frecuente un tubo en el que el número de aletas o protuberancias es variable, con

una separación del orden de 1 a 6 centímetros para las aletas, y una distribución de retícula cuadrada o triangular para las protuberancias. Para satisfacer las necesidades térmicas, los elementos se acoplan en serie o en paralelo constituyendo un intercambiador de calor.

Cuando el fluido que circula por las aletas está confinado y se mueve mediante un sistema de bombeo, hay que tener en cuenta la energía necesaria para mantener el coeficiente de convección h_c a través de las aletas, procurando que la energía térmica extraída sea máxima frente a la energía utilizada en mover el fluido.

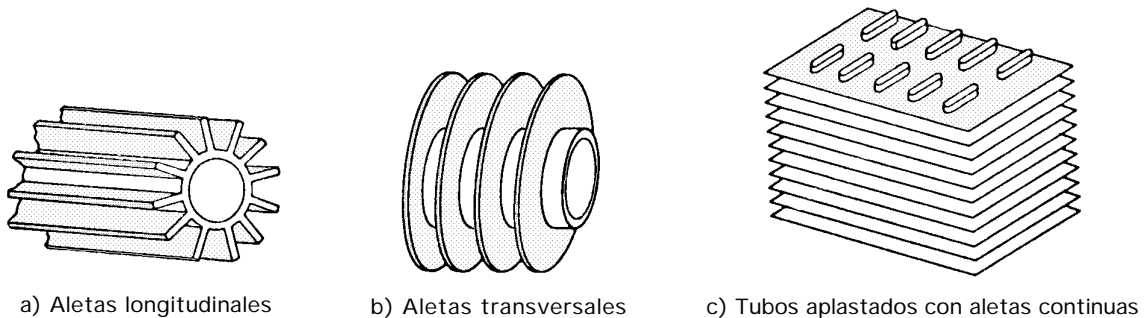


Fig IX.1.- Diferentes tipos de aletas

Esta situación conduce a un estudio de métodos y costes de fabricación, mantenimiento y rendimiento de los elementos de las aletas, cuyos valores óptimos pueden no coincidir con los óptimos térmicos, por lo que un análisis de estos últimos es importante desde el punto de vista de la fabricación de modelos normalizados, así como de la elección del modelo más adecuado para el usuario.

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

Los perfiles rectangulares sobre superficies planas constituyen el caso más simple de superficies ampliadas. Se pueden disponer en una pared plana, o sobre la longitud axial de un tubo en dirección longitudinal, con hélices de paso elevado o sobre superficies arbitrarias de gran radio de curvatura. El conjunto constituido con aletas longitudinales rectangulares es de fácil fabricación por extrusión, fundición, colada continua, etc.

En casos especiales, las aletas longitudinales se mecanizan sobre el material de aleación de la base. Las aletas unidas a la base sin discontinuidades, mediante soldadura o presión, no tienen resistencias térmicas de contacto y son adecuadas para temperaturas elevadas dado que la base no se altera por dilataciones térmicas diferenciales siempre que no sufran efectos corrosivos o una excesiva deformación.

En régimen estacionario, el calor que se conduce a través de un sistema de aletas se elimina al exterior mediante un proceso de convección, siendo la energía disipada, en la unidad de tiempo, proporcional a su área superficial.

En primer lugar vamos a considerar una aleta de sección transversal constante, de longitud a igual a la longitud del tubo; aunque en la Fig IX.2 hemos representado una de sección transversal rectangular, de altura L , el método es válido para cualquier otra geometría, por la forma que toma el número de Biot. El calor se transmite por conducción a través del material de la aleta y

luego se elimina por convección al fluido que le rodea. La temperatura del fluido ambiente es T_F , y el coeficiente de transmisión de calor por convección es h_c , siendo constantes ambos valores.

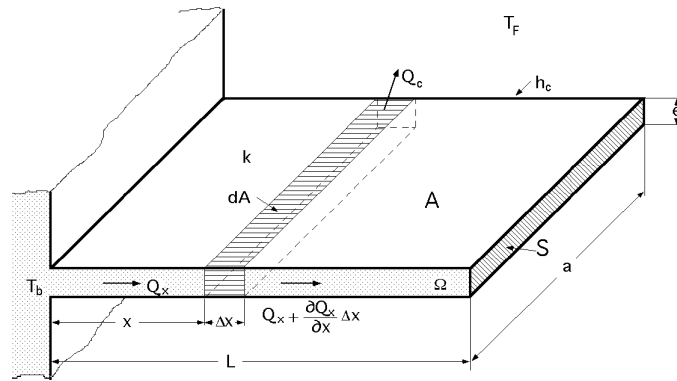


Fig IX.2.- Aleta de sección transversal constante

El balance de flujos térmicos en régimen estacionario, en la unidad de tiempo, en el volumen elemental situado en la posición x , es igual a la suma del calor conducido en dicho tiempo fuera del volumen en $x + \Delta x$, más el calor transferido por convección en dicho tiempo, desde la superficie del volumen elemental, es decir:

$$Q_x - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x) - Q_c = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + Q_c = 0$$

$$Q_x = -k S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x \quad ; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} = -k S \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x$$

$$Q_c = h_c dA (T_x - T_F) = h_c (p \Delta x) (T_x - T_F)$$

siendo p el perímetro y S el área de la sección transversal.

La ecuación diferencial de la distribución de temperaturas es:

$$-k S \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x \Delta x + h_c p \Delta x (T_x - T_F) = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x - \frac{h_c p}{k S} (T_x - T_F) = 0$$

Uno de los cambios que se pueden hacer es de la forma:

$$\theta = \frac{T_x - T_F}{T_b - T_F} \quad ; \quad T_x = T_F + \theta (T_b - T_F)$$

por lo que:

$$\frac{dT}{dx} = (T_b - T_F) \frac{d\theta}{dx} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{L} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{L} \quad \left| \quad \frac{dT}{dx} = (T_b - T_F) \frac{d\theta}{dx} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{L} \quad \right| = \frac{T_b - T_F}{L} \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{T_b - T_F}{L} \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{T_b - T_F}{L^2} \frac{d^2 \theta}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{h_c p L^2}{k S} \theta = 0$$

La distribución de temperaturas se puede expresar en forma adimensional, en función del número de Biot; teniendo en cuenta que el perímetro p multiplicado por la longitud L de la aleta, es igual al área total de la superficie lateral $A = p L$, resulta:

$$\frac{p L^2}{S} = \frac{A L}{S} = L^*$$

que tiene dimensiones de longitud, por lo que se puede considerar como la longitud característica L^* de la aleta; el número de Biot se define en la forma:

$$Bi = \frac{h_c p L^2}{k S} = \frac{h_c L^*}{k}$$

La expresión de la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas en forma adimensional, correspondiente a la aleta, en función del número de Biot, es:

$$\frac{d^2}{dx^2} - Bi = 0$$

cuya solución general es:

$$() = C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}}$$

Los valores de las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan una vez se especifiquen las condiciones de contorno.

CONDICIONES DE CONTORNO.- La temperatura que se suele conocer inicialmente es la correspondiente a la base de la aleta, $x = 0$, $T_{x=0} = T_b$, que es la primera condición de contorno, por lo que:

$$x = 0 ; \quad = 0 ; \quad (0) = \frac{T_b - T_F}{T_b - T_F} = 1 ; \quad C_1 + C_2 = 1$$

común a los tipos de aletas de sección transversal constante.

La segunda condición de contorno toma diversas formas, según sea:

a) Aleta muy larga.- La temperatura de su extremo libre es igual a la del medio exterior del fluido que la rodea:

$$T_x = T_F ; \quad = \frac{x}{L} = 1 ; \quad (1) = \frac{T_F - T_F}{T_b - T_F} = 0 = C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}}$$

y como L es muy grande y Bi es proporcional en este caso a L^2 resulta:

$$0 + C_2 e^{\sqrt{Bi}} = 0 ; \quad C_2 = 0 ; \quad C_1 = 1$$

$$\left(\frac{T - T_F}{T_b - T_F}\right) = e^{-\sqrt{Bi} x} \quad ; \quad T = T_F + (T_b - T_F) e^{-\sqrt{Bi} x}$$

que es la ecuación correspondiente a la distribución de temperaturas.

Para determinar la cantidad de calor disipada, hay que tener en cuenta que el calor que se elimina por convección, es igual al que entra a la aleta por conducción por la base, $x = 0$, por lo que:

$$Q = -k S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{k S}{L} (T_b - T_F) \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) = \left| \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{matrix} \right| = \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi}$$

b) Aleta con su extremo libre térmicamente aislado.- Este tipo de aletas no disipa calor por el extremo libre, $x = L$ ó $\eta = 1$, por lo que:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = \frac{T_b - T_F}{L} \left(\frac{dT}{dx}\right)_{\eta=1} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_{\eta=1} = 0$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen en la forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{dx}\right)_{\eta=1} = 0 \quad & -\sqrt{Bi} C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi} C_2 e^{\sqrt{Bi}} = 0 \\ C_1 = C_2 \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}} \quad & C_2 \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}} + C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 1 \quad & C_1 = \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{2 \operatorname{Ch} \sqrt{Bi}} \end{aligned}$$

La solución general para la distribución de temperaturas es:

$$\left(\frac{T - T_F}{T_b - T_F}\right) = \frac{e^{\sqrt{Bi} x} e^{-\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi} x} e^{\sqrt{Bi}}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{e^{\sqrt{Bi}(1-x)} + e^{-\sqrt{Bi}(1-x)}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{\operatorname{Ch}\{\sqrt{Bi}(1-x)\}}{\operatorname{Ch}\sqrt{Bi}}$$

La temperatura T_L en el extremo libre de la aleta, $\eta = 1$, es:

$$\frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = \frac{1}{\operatorname{Ch}\sqrt{Bi}} \quad ; \quad T_L = T_F + \frac{T_b - T_F}{\operatorname{Ch}\sqrt{Bi}}$$

El calor disipado por la aleta en la unidad de tiempo, se puede determinar como en el caso anterior, considerando que la cantidad de calor que se elimina por convección, es la misma que entra por conducción por el entronque de la aleta, $x = 0$, es decir:

$$Q = -k S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{k S}{L} (T_b - T_F) \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) =$$

$$= k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{Bi} \frac{e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}}}{2 \operatorname{Ch}\sqrt{Bi}} = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{Bi} \frac{\operatorname{Sh}\sqrt{Bi}}{\operatorname{Ch}\sqrt{Bi}} = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{Bi} \operatorname{Th}\sqrt{Bi}$$

c) Aleta con convección desde su extremo libre.- La condición de contorno en el extremo libre, = 1, es:

$$\begin{aligned} -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} &= h_C (T - T_F) \Big|_{x=L} = h_C (1) (T_b - T_F) \\ -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} &= -k \frac{T_b - T_F}{L} \frac{d}{d} = 1 \end{aligned}$$

por lo que:

$$\frac{d}{d} \Big|_{=1} = -\frac{h_C L}{k} (1) = -\frac{h_C L}{k} [C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}}]$$

que igualada a:

$$\frac{d}{d} \Big|_{=1} = -\sqrt{Bi} C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi} C_2 e^{\sqrt{Bi}}$$

permite obtener otra relación entre las constantes C_1 y C_2 :

$$-\frac{h_C L}{k} [C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}}] = -\sqrt{Bi} C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi} C_2 e^{\sqrt{Bi}}$$

$$C_1 e^{-\sqrt{Bi}} [-\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}] + C_2 e^{\sqrt{Bi}} [\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}] = 0$$

$$C_1 = C_2 \frac{e^{\sqrt{Bi}} [\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}]}{e^{-\sqrt{Bi}} [-\sqrt{Bi} - \frac{h_C L}{k}]}$$

y como, $C_1 + C_2 = 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}) e^{\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} (e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}) + \frac{h_C L}{k} (e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k}) e^{\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k} \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} \\ C_2 &= \frac{(\sqrt{Bi} - \frac{h_C L}{k}) e^{-\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} (e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}) + \frac{h_C L}{k} (e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{Bi} - \frac{h_C L}{k}) e^{-\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k} \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} \end{aligned}$$

La distribución de temperaturas es:

$$() = \frac{T() - T_F}{T_b - T_F} = C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left[\sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \right] e^{-\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}} \left[\sqrt{Bi} - \frac{h_c L}{k} \right] e^{\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch} \sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}} = \\
&= \frac{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch}[(1 -)\sqrt{Bi}] + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Sh}[(1 -)\sqrt{Bi}]}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch} \sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}} = \left| \begin{array}{l} Bi = \frac{h_c p L^2}{k S} \\ \frac{h_c L}{k} = \frac{S Bi}{p L} \end{array} \right| = \\
&= \frac{\operatorname{Ch}[(1 -)\sqrt{Bi}] + \frac{S \sqrt{Bi}}{p L} \operatorname{Sh}[(1 -)\sqrt{Bi}]}{\operatorname{Ch} \sqrt{Bi} + \frac{S \sqrt{Bi}}{p L} \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}}
\end{aligned}$$

El calor disipado en la unidad de tiempo es:

$$\begin{aligned}
Q &= - \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \frac{d}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) = \\
&= \frac{k S}{2 L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} \frac{e^{\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \right) - e^{-\sqrt{Bi}} \left(\sqrt{Bi} - \frac{h_c L}{k} \right)}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch} \sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}} = \\
&= \frac{k S (T_b - T_F) \sqrt{Bi}}{L} \frac{\sqrt{Bi} \operatorname{Sh} \sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Ch} \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch} \sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}} = \frac{k S (T_b - T_F) \sqrt{Bi}}{L} \frac{\operatorname{Th} \sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k \sqrt{Bi}}}{1 + \frac{h_c L}{k \sqrt{Bi}} \operatorname{Th} \sqrt{Bi}} = \\
&= \frac{k S (T_b - T_F) \sqrt{Bi}}{L} \frac{\operatorname{Th} \sqrt{Bi} + \frac{S \sqrt{Bi}}{p L}}{1 + \frac{S \sqrt{Bi}}{p L} \operatorname{Th} \sqrt{Bi}} = \left| \begin{array}{l} Bi = \frac{h_c p L^2}{k S} = \frac{h_c 2 a L^2}{k a e} = \frac{2 h_c L^2}{k e} = m^2 L^2 \\ \sqrt{Bi} = m L ; m = \sqrt{\frac{2 h_c}{k e}} \end{array} \right| = \\
&= k S (T_b - T_F) m \frac{\operatorname{Th}(mL) + \frac{h_c}{k m}}{1 + \frac{h_c}{k m} \operatorname{Th}(mL)}
\end{aligned}$$

d) Aleta entre dos paredes a temperaturas distintas, T_b y T_L . La condición de contorno en el extremo T_L es:

$$x = L ; T = T_L ; \quad \frac{x}{L} = 1$$

$$\begin{aligned}
(1) = \frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} &= C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} = | C_1 = 1 - C_2 | = (1 - C_2) e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}} = \\
&= e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 (e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}}) = e^{-\sqrt{Bi}} + 2 C_2 \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}
\end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2 \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}}$$

$$C_1 = 1 - \frac{(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2 \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}} = \frac{e^{\sqrt{Bi}} - (1)}{2 \operatorname{Sh} \sqrt{Bi}}$$

en las que T_b , T_L y T_F son conocidas y (1) es dato.

Distribución de temperaturas:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{e^{\sqrt{Bi}x} - (1)}{2 \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} e^{-\sqrt{Bi}x} + \frac{(1) - e^{-\sqrt{Bi}x}}{2 \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} e^{\sqrt{Bi}x} = \\ &= \frac{e^{\sqrt{Bi}(1-x)} - (1) e^{-\sqrt{Bi}x} + (1) e^{\sqrt{Bi}x} - e^{-\sqrt{Bi}(1-x)}}{2 \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} = \frac{\operatorname{Sh}\{\sqrt{Bi}(1-x)\} + (1) \operatorname{Sh}(\sqrt{Bi}x)}{\operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} \end{aligned}$$

El calor Q para cualquier valor de x es:

$$\begin{aligned} Q &= -kS \frac{dT}{dx} = -\frac{kS}{L} (T_b - T_F) \frac{d\theta(x)}{dx} = \\ &= -\frac{kS}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} \frac{-\operatorname{Ch}\{\sqrt{Bi}(1-x)\} + (1) \operatorname{Ch}(\sqrt{Bi}x)}{\operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} \end{aligned}$$

El calor disipado por la aleta es igual al calor entrante por la pared a T_b , menos el calor saliente por la pared a T_L , es decir:

$$\begin{aligned} Q &= Q_{x=0} - Q_{x=L} = -\frac{kS}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} \frac{(1) - \operatorname{Ch}\sqrt{Bi} - (1) \operatorname{Ch}\sqrt{Bi} + 1}{\operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} = \\ &= -\frac{kS}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} \frac{(1 - \operatorname{Ch}\sqrt{Bi}) \{ (1) + 1 \}}{\operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} \end{aligned}$$

IX.3.- CAMPO DE APLICACIÓN DE LAS ALETAS RECTAS DE PERFIL UNIFORME

La condición $\frac{dQ}{dL} = 0$, aplicada a la ecuación:

$$\begin{aligned} Q &= kS (T_b - T_F) m \frac{\operatorname{Th}(mL) + \frac{h_c}{k m}}{1 + \frac{h_c}{k m} \operatorname{Th}(mL)} \\ \frac{dQ}{dL} &= kS (T_b - T_F) m \frac{\frac{m}{\operatorname{Ch}^2(mL)} \{1 + \frac{h_c}{k m} \operatorname{Th}(mL)\} - \{\operatorname{Th}(mL) + \frac{h_c}{k m}\} \frac{h_c}{k m} \frac{m}{\operatorname{Ch}^2(mL)}}{\{1 + \frac{h_c}{k m} \operatorname{Th}(mL)\}^2} = 0 \end{aligned}$$

proporciona:

$$1 + \frac{h_c}{k m} \operatorname{Th}(mL) = \{\operatorname{Th}(mL) + \frac{h_c}{k m}\} \frac{h_c}{k m} ; \quad 1 = \left(\frac{h_c}{k m}\right)^2 = \frac{h_c}{2k}$$

que se cumple para cualquier valor de L , e indica las condiciones técnicas a tener en cuenta para colocar aletas sobre una superficie y el efecto que estas producen.

Esta ecuación indica que si la resistencia térmica por unidad de superficie frontal de la aleta es menor que la resistencia térmica correspondiente a la convección, hay que colocar aletas, mientras que en el caso contrario, las aletas producen un efecto refrigerante.

Al sustituir este valor en la segunda derivada se obtiene un punto de inflexión, que se corresponde con una evacuación de calor del tubo sin aletas.

a) Cuando $\frac{h_c e}{2 k} > 1$, resulta que la adición de aletas produce un efecto aislante o refrigerante, por cuanto el calor que se elimina es inferior al del tubo sin aletas, llegando a ser, incluso, un calor negativo que se interpreta como el que las aletas absorben calor del medio ambiente y lo transmiten al fluido (Vaporizador de una máquina frigorífica)

b) Cuando $\frac{h_c e}{2 k} = 1$, las aletas no producen ningún efecto, y es equivalente al tubo sin aletas

c) Cuando $\frac{h_c e}{2 k} < 1$, la adición de aletas produce un incremento del flujo de calor al fluido ambiente, sistemas de calefacción

En los procesos de calefacción, por razones de tipo económico, es mejor que la superficie primaria carezca de aletas, a menos que se cumpla que, $h_c e/2 k \ll 1$. Por razones de espacio o de resistencia mecánica, se tiende a que las aletas no sean muy largas.

En aletas cortas, para que tenga interés la disipación de calor, se tiene que cumplir que:

$$\frac{h_c e}{2 k} \geq \frac{1}{5} ; \quad \frac{p}{S} = \frac{2(a + e)}{a e} \geq \frac{2}{e} ; \quad \frac{h_c S}{p k} \geq \frac{1}{5}$$

ya que de no ser así, no merece la pena poner aletas.

Para que una aleta sea eficaz, debe tener un espesor e muy pequeño, y estar construida por un material de elevada conductividad térmica.

IX.4.- PERFIL OPTIMO

Es interesante lograr un valor óptimo de q para una superficie del perfil dada, por unidad a de longitud de tubo; el espesor óptimo cumple que $\frac{dQ}{de} = 0$; para el caso de una aleta con su extremo libre aislado, se dispone de las siguientes ecuaciones:

$$Q = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{Bi} \operatorname{Th} \sqrt{Bi} = k S (T_b - T_F) m \operatorname{Th} (m L) = \left| m = \sqrt{\frac{2 h_c}{k e}} \right| =$$

$$= k S (T_b - T_F) \sqrt{\frac{2 h_c}{k e}} \operatorname{Th} \left(\sqrt{\frac{2 h_c}{k e}} L \right) = \left| \begin{array}{l} S = a e ; a = 1 \\ S = e ; \quad = L e \end{array} \right| = (T_b - T_F) \sqrt{2 h_c k e} \operatorname{Th} \left(\sqrt{\frac{2 h_c}{k e^3}} \right)$$

Para una aleta cuya masa esté fijada, es constante, por lo que esta ecuación indica la variación del flujo térmico en función del espesor e de la aleta.

Derivando Q respecto de e , e igualando a cero, resulta:

$$\frac{dQ}{de} = (T_b - T_F) \left\{ \frac{2 h_c k}{2 \sqrt{2 h_c e k}} \operatorname{Th} \left(\sqrt{\frac{2 h_c}{k e^3}} \right) - \frac{\sqrt{2 h_c e k}}{\operatorname{Ch}^2 \left(\sqrt{\frac{2 h_c}{k e^3}} \right)} - \frac{1}{2 \sqrt{\frac{2 h_c}{k e^3}}} \frac{6 h_c}{k e^4} \right\} = 0$$

$$\text{Th} \left(\sqrt{\frac{2 h_c}{k e^3}} \right) = 3 \left(\sqrt{\frac{2 h_c}{k e^3}} \right) \text{Sech}^2 \left(\sqrt{\frac{2 h_c}{k e^3}} \right) ; \quad \text{Th} \sqrt{\text{Bi}} = 3 \sqrt{\text{Bi}} \text{Sech}^2 \sqrt{\text{Bi}}$$

Resolviendo se obtiene: $\text{Bi}_{\text{ópt}} = 2,0141945$, por lo que el espesor y longitud óptimas son:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{2 h_c}{k e} & \frac{2 h_c}{k e} &= \frac{\text{Bi} e^2}{2} ; & e_{\text{ópt}} &= \sqrt[3]{\frac{2 h_c}{k \text{Bi}_{\text{ópt}}}} = 0,997 \sqrt[3]{\frac{h_c}{k}} \\ m^2 &= \frac{\text{Bi}}{L^2} = \frac{\text{Bi} e^2}{2} \\ L_{\text{ópt}} &= \frac{1}{e_{\text{ópt}}} = \frac{1}{0,997 \sqrt[3]{\frac{2 h_c}{k}}} = 1,007 \sqrt[3]{\frac{k}{h_c}} \end{aligned}$$

En general se suelen conocer las constantes físicas y las condiciones de funcionamiento de la aleta, como son, h_c , k , Q , $(T_b - T_F)$, por lo que se puede obtener otra formulación para las dimensiones óptimas en función de éstos parámetros y de $\text{Bi}_{\text{ópt}}$ en la forma:

$$\begin{aligned} Q &= (T_b - T_F) \sqrt{2 h_c e k} \text{Th} \sqrt{\text{Bi}_{\text{ópt}}} \\ e_{\text{ópt}} &= \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)^2 \frac{1}{2 h_c k \text{Th}^2 \sqrt{\text{Bi}_{\text{ópt}}}} = \frac{0,6321}{h_c k} \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)^2 \end{aligned}$$

Igualando los valores de $e_{\text{ópt}}$ se obtienen las ecuaciones que se utilizan para diseñar la aleta recta de espesor constante, de *mínimo material*:

$$\begin{aligned} e_{\text{ópt}} &= \frac{0,6321}{h_c k} \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)^2 = 0,997 \sqrt[3]{\frac{2 h_c}{k}} \\ l_{\text{ópt}} &= \frac{0,5048}{h_c^2 k} \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)^3 & L_{\text{ópt}} &= \frac{0,7979}{h_c} \frac{Q}{T_b - T_F} \end{aligned}$$

Las aletas no deben emplearse nunca en aquellos casos en que el coeficiente de película h_c sea grande.

Para aletas normales en las que $e < 1,5$ mm, construidas con materiales corrientes, como el acero o el aluminio, no se recomienda el empleo de superficies ampliadas si el fluido ambiente es un líquido sometido a convección forzada, o un vapor que condensa, ya que es fácil encontrar coeficientes $h_c > 5000$ W/m²°C, que proporcionan valores de, $h_c e/2 k$, del orden de la unidad, por lo que el empleo de la aleta sería antieconómico.

Con aletas de dimensiones normales se hace un intercambio térmico muy efectivo entre la superficie y el gas que la rodea.

En los gases convectores es frecuente obtener coeficientes de película del orden de 50 a 120 W/m²°C, que permiten valores de, $h_c e/2 k$, lo bastante bajos como para que las aletas ejerzan un efecto conveniente, y de ahí que algunas de sus aplicaciones más interesantes sean, por ejemplo en:

- Motores enfriados por aire
- Precalentadores de aire y economizadores de calderas
- Serpentes de calentamiento y enfriamiento de los acondicionadores de aire
- Radiadores de automóviles
- Intercambiadores de calefacción agua-aire, etc.

Para aletas con convección en el extremo se puede hacer uso del concepto de *longitud corregida* L_C , despreciando los efectos de convección en dicho extremo, mediante la expresión:

$$L_C = L + \frac{e}{2}$$

y se tratan como aletas con su extremo libre aislado térmicamente.

IX.5.- CASOS ESPECIALES

Una de las características fundamentales del análisis de protuberancias de sección constante, consiste en que dado el pequeño espesor de las mismas se puede considerar la conducción como unidireccional y, por lo tanto, que la variación de la temperatura a través de su sección transversal permanece prácticamente constante.

Esta suposición se puede aplicar a una serie de situaciones como:

a) Determinadas superficies conductoras, hilos o placas, recubiertas con un aislante, de forma que a lo ancho de las mismas, entre el hilo o placa y el medio que les rodea, apenas varía la temperatura, pero que a lo largo de los mismos existe una diferencia de temperatura significativa; aunque esta situación no se corresponde físicamente con la de la protuberancia, el proceso térmico que acontece sí, ya que en la protuberancia existe un gradiente de temperaturas a lo largo de ella, pero no transversalmente, por lo que esta casuística se puede aplicar de alguna forma a dicha situación.

b) La instalación de un termopar utilizado para medir la temperatura de una corriente de gases calientes, hace que la esfera del termopar se encuentre a una temperatura inferior a la de los gases cuya temperatura va a medir, existiendo un flujo térmico conductivo a lo largo de los hilos del termopar que le unen con la pared más fría, que está equilibrado por la convección desde los gases, por lo que la variación de la temperatura transversal de los hilos del termopar es prácticamente uniforme, existiendo una diferencia de temperaturas entre el termopar, caliente, y el equipo de registro, frío, similar a la de la protuberancia, lo que permite determinar el error esperado en la lectura del termopar.

c) Existen intercambiadores de calor de placas perforadas que se pueden asimilar a aletas, ya que la variación de la temperatura a través de ellas es pequeña comparada con la variación de temperaturas en la región que separa la corriente caliente de la corriente fría.

d) Los conductores de cobre en un circuito impreso se pueden considerar como aletas, al igual que la porción del circuito que los separa.

Queda claro con estos ejemplos que no es obvio que la situación guarde parecido alguno con el caso geométrico de la protuberancia y, sin embargo, la suposición de que la variación de la temperatura es mínima en la sección transversal del hilo o de la placa permite obtener una ecuación diferencial similar a la deducida para la protuberancia.

X.- SUPERFICIES AMPLIADAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL VARIABLE

X.1.- ALETAS DE SECCIÓN VARIABLE

Para aquellos tipos de aleta en los que su perfil no sea constante, podemos considerar un elemento diferencial de anchura dx , tal como se muestra en la Fig X.1, sobre el que se definen los siguientes calores:

Q_1 es el calor entrante, en x , por conducción

Q_2 es el calor saliente, en $(x + dx)$, por conducción

Q_C es el calor disipado por convección en el elemento diferencial

Haciendo un balance de flujos térmicos similar al efectuado en el caso anterior de aleta de sección constante, se obtiene:

$$Q_1 = -k S \frac{dT}{dx} \bigg|_x$$

$$Q_2 = Q_1 + \frac{Q_1}{x} dx + \frac{1}{2} \frac{d^2 Q_1}{dx^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots = Q_1 + \frac{Q_1}{x} dx$$

$$Q_C = h_C dA (T_x - T_F)$$

El balance de flujos térmicos es:

$$Q_1 = Q_2 + Q_C = Q_1 + \frac{Q_1}{x} dx + Q_C \quad \frac{Q_1}{x} dx + Q_C = 0$$

Llamando, $\theta = T_x - T_F$, a la diferencia entre las temperaturas de la aleta y del fluido en que está inmersa, se tiene:

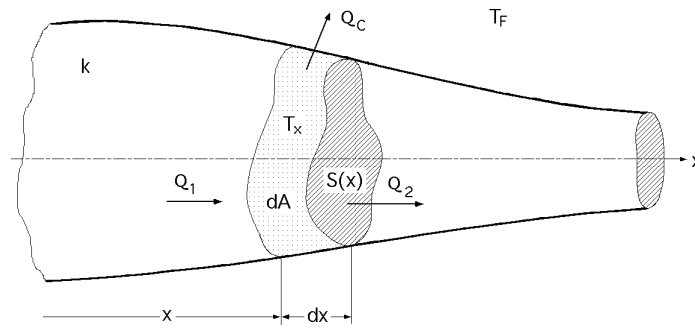


Fig X.1.- Aleta de sección variable

$$\frac{d}{dx} \left(-k S \frac{dT}{dx} \right) dx + h_c dA = 0 \quad ; \quad -k \frac{dS}{dx} \frac{dT}{dx} dx - k S \frac{d^2 T}{dx^2} dx + h_c dA = 0$$

en la que S es la sección transversal variable y dA la superficie lateral del elemento elegido de la aleta expuesta a la convección.

Dividiéndola por, $k S dx$, se obtiene:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{dT}{dx} - \frac{h_c}{k} \left(\frac{1}{S} \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

que es de aplicación general a cualquier tipo de configuración de superficie ampliada en la que la conducción de calor sea monodimensional.

Para el caso particular de aleta recta de sección transversal constante, se tiene:

$$S = \text{Cte} \quad \frac{dS}{dx} = 0 \quad ; \quad A = p x \quad \frac{dA}{dx} = p$$

obteniéndose la forma ya conocida:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h_c}{k} \frac{p}{S} = 0$$

ALETA ANULAR DE ESPESOR CONSTANTE.- Este tipo de aletas, Fig X.2, se utiliza principalmente en cambiadores de calor líquido-gas, y en cilindros de motores refrigerados por aire; para su estudio supondremos que el espesor de la aleta e es mucho más pequeño que la diferencia entre sus radios, $e \ll r_e - r_b$, por lo que la conducción de calor dentro de la aleta dependerá únicamente de la coordenada radial, $r = x$.

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dr} \frac{dT}{dr} - \frac{h_c}{k} \left(\frac{1}{S} \frac{dA}{dr} \right) = 0$$

en la que,

$$S = 2 \pi r e \quad ; \quad \frac{dS}{dr} = 2 \pi e$$

$$A = 2 \pi (r^2 - r_b^2) \quad ; \quad \frac{dA}{dr} = 4 \pi r$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial se obtiene:

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{r e} \frac{d}{dr} - \frac{h_c}{k} \frac{4}{2} \frac{r}{r e} = 0$$

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - m^2 = 0, \text{ siendo, } m = \sqrt{\frac{2 h_c}{k e}}$$

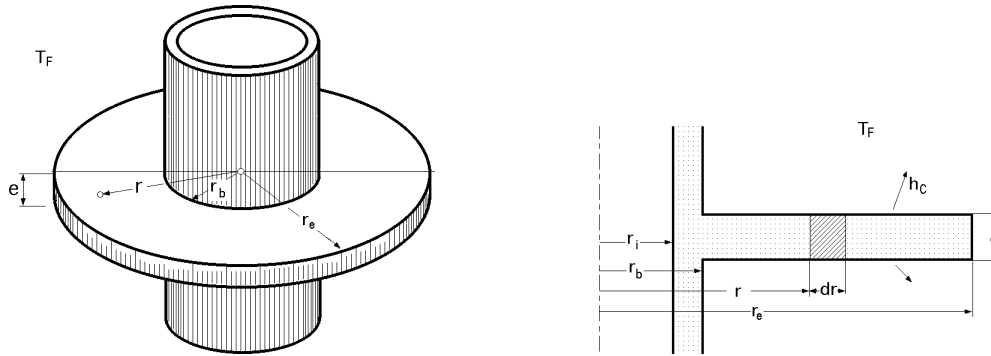


Fig X.2.- Aleta anular de espesor constante

que es la ecuación diferencial de Bessel de orden cero; su solución es de la forma:

$$= B I_0(m r) + C K_0(m r)$$

siendo I_0 la función de Bessel modificada de primera especie y orden cero y K_0 la función de Bessel modificada de segunda especie y orden cero, cuyos valores vienen indicados en la Tabla X.1; B y C son las constantes de integración.

De las condiciones de contorno se obtiene lo siguiente:

a) Para, $r = r_b$
 $T = T_b$ $T_b = T_F = B I_0(m r_b) + C K_0(m r_b)$

b) Para, $r = r_e$, la convección es nula, ya que se desprecia el calor evacuado por el extremo de la aleta; por lo tanto:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_e} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{d}{dr}\right)_{r=r_e} = 0$$

y como:

$$\frac{d}{dr} \{I_0(m r)\} = m I_1(m r) \quad ; \quad \frac{d}{dr} \{K_0(m r)\} = -m K_1(m r)$$

$$\left(\frac{d}{dr}\right)_{r=r_e} = 0 = B m I_1(m r_e) - m C K_1(m r_e)$$

Las constantes B y C se obtienen del sistema de ecuaciones,

$$T_b = B I_0(m r_b) + C K_0(m r_b)$$

$$0 = B I_1(m r_e) - C K_1(m r_e)$$

$$B = \frac{C K_1(m r_e)}{K_1(m r_e) I_0(m r_b) + K_0(m r_b) I_1(m r_e)}$$

Tabla X.1.- Valores de las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie, órdenes cero y uno

x	I ₀ (x)	I ₁ (x)	$\frac{2}{x} K_0(x)$	$\frac{2}{x} K_1(x)$	x	I ₀ (x)	I ₁ (x)	$\frac{2}{x} K_0(x)$	$\frac{2}{x} K_1(x)$
0	1	0			5	27,2399	24,3356	0,002350	0,002575
0,1	1,0025	0,0501	1,5451	6,273	5,2	32,5336	29,2543	0,001888	0,002062
0,2	1,0100	0,1005	1,11580	3,0405	5,4	39,0088	35,1821	0,001518	0,001653
0,4	1,0404	0,2040	0,70953	1,3906	5,6	46,7376	42,3283	0,001221	0,001326
0,6	1,0920	0,3137	0,49498	0,82941	5,8	56,0381	50,9462	0,000983	0,001064
0,8	1,1665	0,4329	0,35991	0,54862	6	67,2344	61,3419	0,000792	0,0008556
1	1,2661	0,5652	0,26803	0,38318	6,2	80,7179	73,8859	0,0006382	0,0006879
1,2	1,3937	0,7147	0,20270	0,27667	6,4	96,9616	89,0261	0,0005146	0,0005534
1,4	1,5534	0,8861	0,15512	0,20425	6,6	116,537	107,305	0,0004151	0,0004455
1,6	1,7500	1,0848	0,11966	0,15319	6,8	140,136	129,378	0,0003350	0,0003588
1,8	1,9896	1,3172	0,092903	0,11626	7	168,593	156,039	0,0002704	0,0002891
2	2,2796	1,5906	0,072507	0,089041	7,2	202,921	188,250	0,0002184	0,0002321
2,2	2,6291	1,9141	0,056830	0,068689	7,4	244,341	227,175	0,0001764	0,0001880
2,4	3,0493	2,2981	0,044702	0,053301	7,6	294,332	274,222	0,0001426	0,0001517
2,6	3,5533	2,7554	0,035268	0,041561	7,8	354,685	331,099	0,0001153	0,0001244
2,8	4,1573	3,3011	0,027896	0,032539	8	427,564	399,873	0,00009325	0,00009891
3	4,8808	3,9534	0,022116	0,025564	8,2	515,593	483,048	0,00007543	0,00007991
3,2	5,7472	4,7343	0,017568	0,020144	8,4	621,944	583,657	0,00006104	0,00006458
3,4	6,7848	5,6701	0,013979	0,015915	8,6	750,461	705,377	0,00004941	0,00005220
3,6	8,0277	6,7028	0,011141	0,012602	8,8	905,797	852,663	0,00004000	0,00004221
3,8	9,5169	8,1404	0,008891	0,009999	9	1093,59	1030,91	0,00003239	0,00003415
4	11,3019	9,7595	0,007105	0,007947	9,2	1320,66	1246,68	0,00002624	0,00002763
4,2	13,4425	11,706	0,005684	0,006327	9,4	1595,28	1507,88	0,00002126	0,00002236
4,4	16,0104	14,046	0,004551	0,005044	9,6	1927,48	1824,14	0,00001722	0,00001810
4,6	19,0926	16,8626	0,003648	0,004027	9,8	2329,39	2207,13	0,00001396	0,00001465
4,8	22,7937	20,2528	0,002927	0,003218	10	2815,72	2670,99	0,00001131	0,00001187

$$C = \frac{I_1(m r_e)}{K_1(m r_e) I_0(m r_b) + K_0(m r_b) I_1(m r_e)}$$

La distribución de temperaturas en la aleta es:

$$\frac{T}{T_b} = \frac{K_1(m r_e) I_0(m r) + I_1(m r_e) K_0(m r)}{K_1(m r_e) I_0(m r_b) + K_0(m r_b) I_1(m r_e)}$$

La cantidad de calor disipada por la aleta se puede encontrar a partir del calor que atraviesa la base de la misma por conducción:

$$Q = -k S_b \frac{dT}{dr} \bigg|_{r=r_b} = \left| S_b = 2 \pi r_b \right| =$$

$$= -2 \pi r_b k m \frac{K_1(m r_e) I_1(m r_b) - I_1(m r_e) K_1(m r_b)}{K_1(m r_e) I_0(m r_b) + I_1(m r_e) K_0(m r_b)}$$

Estas ecuaciones para la distribución de temperaturas y del flujo de calor se pueden escribir de modo más general en forma adimensional; al considerar el problema de tipo monodimensional, las expresiones adimensionales de la temperatura y del flujo térmico, se pueden obtener en función de parámetros adimensionales, que se definen en la forma:

es un parámetro adimensional del coeficiente de película

es un parámetro adimensional del tamaño de la aleta

es un parámetro adimensional de la coordenada (posición)

que se pueden aplicar a otras configuraciones de aletas.

$$m = \sqrt{\frac{2 h_c r_e}{k_e}}$$

Para la aleta anular de perfil de sección constante se tiene,

$$r_b = r_e$$

$$r = r_e$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la distribución de temperaturas, resulta:

$$\frac{T_b - T_F}{T_e - T_F} = \frac{K_1(r_e/r_e) I_0(r_e/r_e) + I_1(r_e/r_e) K_0(r_e/r_e)}{K_1(r_e/r_e) I_0(r_e/r_e) + I_1(r_e/r_e) K_0(r_e/r_e)} = 1$$

realizándose los cálculos con ayuda de las Tablas de las funciones de Bessel modificadas.

Para cálculos rápidos, que proporcionan una precisión suficiente, en la mayor parte de los problemas que se plantean en ingeniería, se puede obtener la distribución de temperaturas con ayuda de una gráfica que representa la ecuación anterior para $r = r_e$; $r_e/r_e = 1$, mediante una función $G_1(r/r_e)$, Fig X.3, haciendo $r_e/r_e = 1$, de la forma:

$$G_1(r/r_e) = \frac{K_1(r_e/r_e) I_0(r_e/r_e) + I_1(r_e/r_e) K_0(r_e/r_e)}{K_1(r_e/r_e) I_0(r_e/r_e) + I_1(r_e/r_e) K_0(r_e/r_e)} = \frac{T_e - T_F}{T_b - T_F}$$

La distribución de temperaturas en la aleta anular se calcula en la forma siguiente:

a) Conocidas la geometría, las propiedades térmicas y las temperaturas, se pueden calcular los valores de r_b , r_e y r a partir de las ecuaciones anteriores.

b) La gráfica de la Fig X.3, permite obtener la temperatura T_e en el extremo haciendo, $r = r_e$ y $r_e/r_e = 1$, mediante la relación:

$$\frac{T_e - T_F}{T_b - T_F} = G_1(r/r_e)$$

c) Conocido T_e , se puede calcular también el valor de T_b para cualquier radio comprendido entre r_b y r_e , haciendo que r/r_e represente a, $r/r_e = a$, para valores de a comprendidos en el intervalo $0 < a < 1$, en la forma:

$$\frac{T_e - T_F}{T_b - T_F} = G_1(a) \quad ; \quad 0 < a < 1$$

El flujo calorífico se calcula mediante gráficas y una ecuación de Q de la forma:

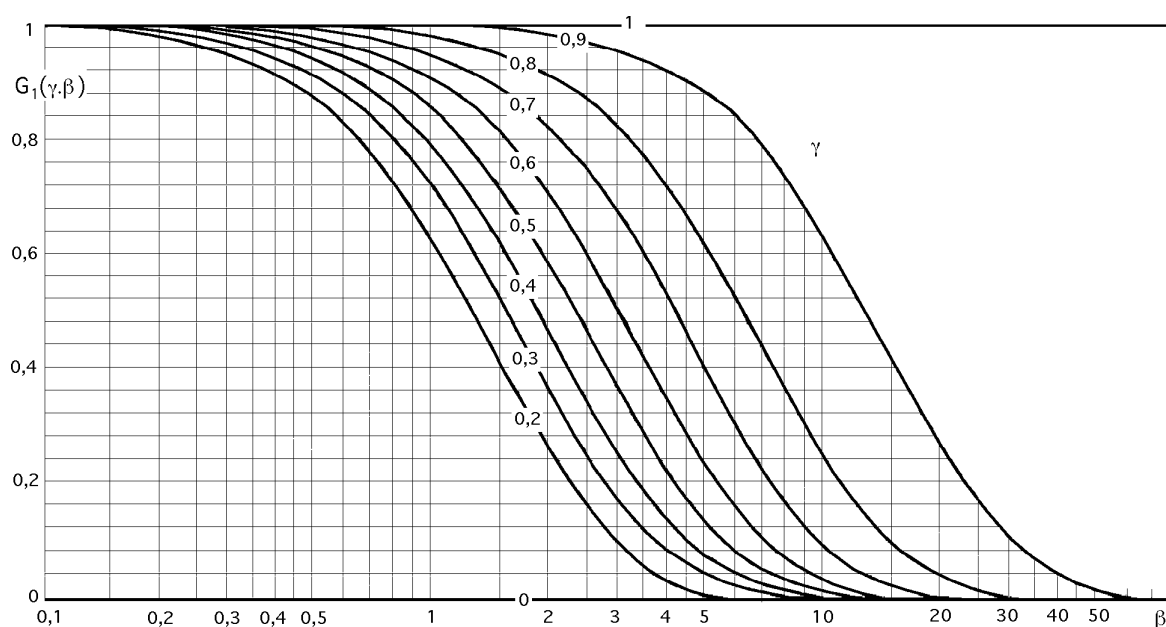


Fig X.3.- La función G_1 para la distribución de la temperatura en aleta anular de espesor uniforme

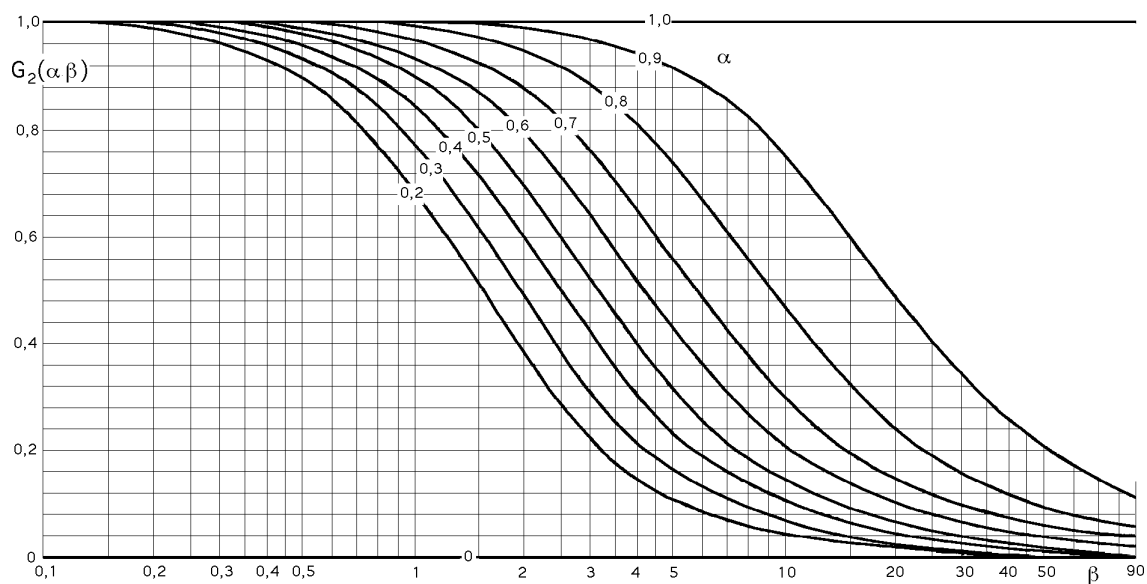


Fig X.4.- La función G_2 para el flujo calorífico en aleta anular de espesor uniforme

$$Q = - 2 \quad k \, e \, (m \, r_b) \quad b \quad \frac{K_1(m \, r_e) \, I_1(m \, r_b) - I_1(m \, r_e) \, K_1(m \, r_b)}{K_1(m \, r_e) \, I_0(m \, r_b) + I_1(m \, r_e) \, K_0(m \, r_b)} =$$

$$= 2 \quad k \, e \, \left(\frac{a_n}{a_n} \right) \quad b \quad \frac{1 - \frac{2}{a_n} \quad \frac{K_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, I_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) - I_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, K_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right)}{1 - \frac{2}{a_n} \quad \frac{K_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, I_0\left(\frac{a_n}{a_n}\right) + I_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, K_0\left(\frac{a_n}{a_n}\right)}}{}$$

$$\frac{Q}{k \, e \, \left(1 - \frac{2}{a_n}\right) \quad \frac{2}{a_n} \quad b} = \frac{2 \quad a_n}{a_n \left(1 - \frac{2}{a_n}\right)} \quad \frac{K_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, I_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) - I_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, K_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right)}{K_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, I_0\left(\frac{a_n}{a_n}\right) + I_1\left(\frac{a_n}{a_n}\right) \, K_0\left(\frac{a_n}{a_n}\right)} =$$

$$= G_2\left(\frac{a_n}{a_n}\right)$$

$$Q = k \, e \, \left(1 - \frac{2}{a_n}\right) \quad \frac{2}{a_n} \quad b \quad G_2\left(\frac{a_n}{a_n}\right)$$

en la que la función $G_2(\cdot, \cdot)$ se ha definido en la forma:

$$G_2(x_{an}, x_{an}) = \frac{2 x_{an}}{x_{an}(1 - \frac{2}{x_{an}})} \frac{K_1(\frac{x_{an}}{x_{an}}) I_1(\frac{x_{an}}{x_{an}}) - I_1(\frac{x_{an}}{x_{an}}) K_1(\frac{x_{an}}{x_{an}})}{K_1(\frac{x_{an}}{x_{an}}) I_0(\frac{x_{an}}{x_{an}}) + I_1(\frac{x_{an}}{x_{an}}) K_0(\frac{x_{an}}{x_{an}})} =$$

y viene representada en la Fig X.4.

ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRIANGULAR Y TRAPEZIAL.- Para proceder al estudio de la aleta longitudinal de perfil triangular y trapezoidal resulta conveniente situar el origen de coordenadas en el punto de intersección de las caras de la aleta, para el caso triangular, o de su prolongación, para el trapezoidal, Fig X.5, por cuanto se simplifica el cálculo de las constantes de integración.

Partiendo del hecho de que la aleta sea lo suficientemente delgada, como para suponer un espesor, $e \ll L - x_e$, existirá flujo monodimensional.

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{d}{dx} - \frac{h_c}{k} \left(\frac{1}{S} \frac{dA}{dx} \right) = 0$$

Para la aleta longitudinal de anchura unidad, en la que se pueden despreciar las pérdidas laterales, el área de las secciones lateral A, y transversal S, varía con x en la forma:

$$S = \frac{bx}{L} \quad ; \quad \frac{dS}{dx} = \frac{b}{L}$$

$$A = 2 \overline{cd} = 2 \sqrt{\overline{ad}^2 + \overline{ac}^2} = 2 \sqrt{(x - x_e)^2 + \left(\frac{b}{2} \frac{x - x_e}{L}\right)^2} = 2 (x - x_e) \sqrt{1 + \frac{b^2}{4 L^2}} = 2 (x - x_e) f$$

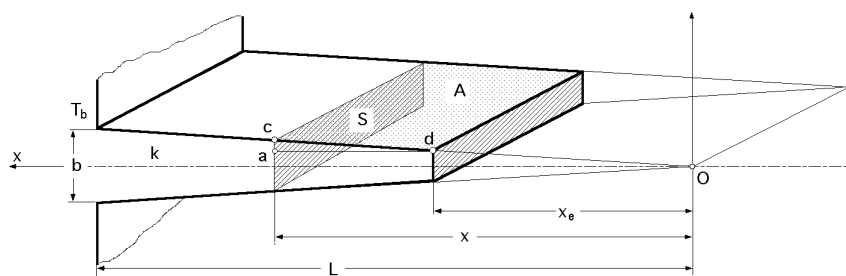


Fig X.5.- Aleta recta de perfil triangular y trapezoidal

siendo, $f = \sqrt{1 + \frac{b^2}{4 L^2}}$, una constante que depende de las características de la aleta.

Si, $L \gg b$ $f = 1$, se satisface la condición monodimensional:

$$A = 2 (x - x_e) \quad ; \quad \frac{dA}{dx} = 2$$

Aplicando estos valores a la ecuación diferencial general se obtiene:

$$\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{L}{b x} - \frac{b}{L}\right) \frac{d}{dx} - \frac{h_c}{k} \left(\frac{L}{b x} - 2f\right) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x} = 0, \text{ con, } n = \sqrt{\frac{2 f h_c L}{k b}} = m \sqrt{L}$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$= B I_0(2 n \sqrt{x}) + C K_0(2 n \sqrt{x})$$

ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRIANGULAR.. Para calcular las constantes de integración de la aleta triangular B y C, partiremos de las condiciones en los extremos; de acuerdo con la Fig X.5, se tiene:

a) Para, $x = x_e = 0$, $C = 0$, por cuanto la función de Bessel modificada K_0 tiende a infinito cuando el argumento tiende a cero; por lo tanto:

$$= B I_0(2 n \sqrt{x})$$

b) Para, $x = L$, $T = T_b$, que se supone constante, luego, $\frac{dT}{dx} = 0$, y por lo tanto, el valor de B es:

$$0 = B I_0(2 n \sqrt{L}) \quad B = \frac{b}{I_0(2 n \sqrt{L})}$$

La distribución de temperaturas queda en la forma:

$$= \frac{b}{I_0(2 n \sqrt{L})} I_0(2 n \sqrt{x}) \quad \frac{T - T_b}{b} = \frac{I_0(2 n \sqrt{x})}{I_0(2 n \sqrt{L})}$$

El calor disipado al exterior por la aleta longitudinal de anchura unidad será igual al que penetra por conducción por su base, por lo que:

$$Q = -k \left(S \frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = -k b \left[\frac{\frac{2n}{2\sqrt{L}} I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})} \right] = - \frac{k b \frac{2n}{2\sqrt{L}} I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})}$$

Las ecuaciones de T y de Q se pueden expresar en forma adimensional, haciendo:

$$\tau = 2 n \sqrt{L} = \sqrt{\frac{8 f h_c L^2}{k b}} \quad ; \quad \tau = \sqrt{\frac{x}{L}}$$

obteniéndose para la distribución de temperaturas que:

$$\frac{T - T_b}{b} = \frac{I_0(\tau)}{I_0(1)} = G_3(\tau)$$

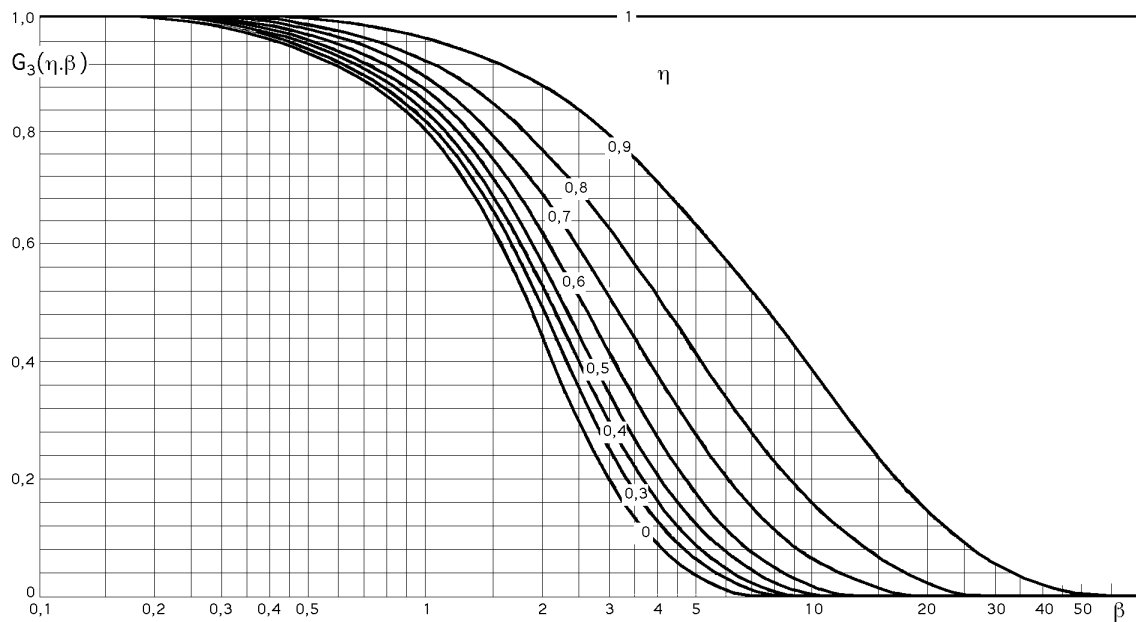


Fig X.6.- La función G_3 para la distribución de la temperatura en la aleta recta de perfil triangular

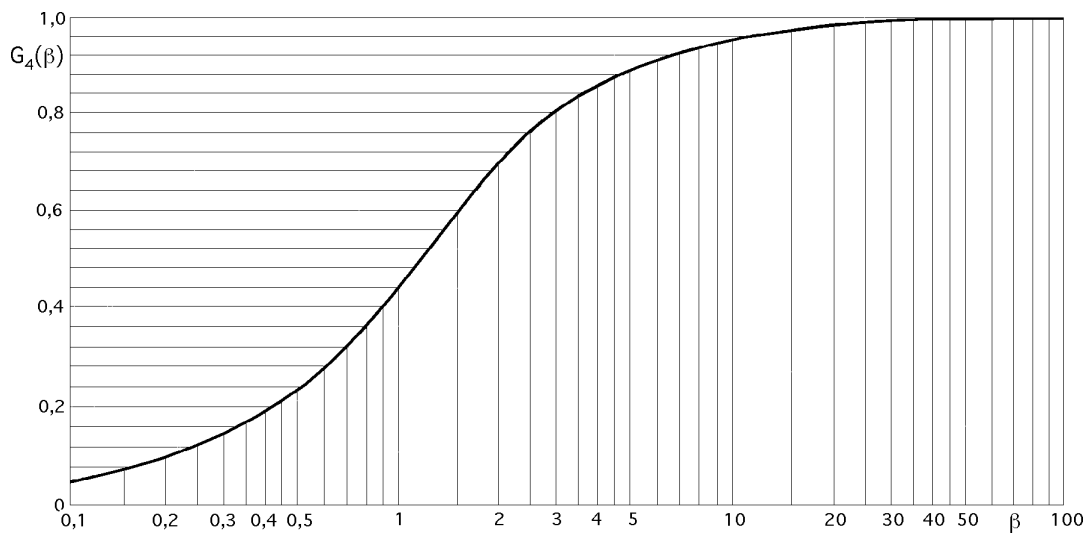


Fig X.7.- La función G_4 para el flujo calorífico en la aleta recta de perfil triangular

y para el flujo de calor :

$$Q = - b k b \frac{t}{2 L} \frac{I_1(t)}{I_0(t)} = - b k b \frac{t}{2 L} G_4(t)$$

en las que se han definido las nuevas funciones, $G_3(t)$ y $G_4(t)$, Fig X.6.7, en la forma:

$$G_3(t) = \frac{I_0(t)}{I_0(t)} \quad ; \quad G_4(t) = \frac{I_1(t)}{I_0(t)}$$

Para cálculos rápidos se utilizan las gráficas de $G_3(t)$ y $G_4(t)$.

X.2.- PERFIL OPTIMO DE LA ALETA LONGITUDINAL DE PERFIL TRIANGULAR

El perfil óptimo de la aleta triangular longitudinal de sección $= \frac{b L}{2}$, se obtiene haciendo $dQ/db = 0$, con Q en la forma:

$$Q = - \frac{k b}{\sqrt{L}} \frac{I_1(2 n \sqrt{L})}{I_0(2 n \sqrt{L})} = \left| n = \sqrt{\frac{2 h_c L}{k b}} \right| = - b \sqrt{2 h_c k} \frac{I_1(2 L \sqrt{\frac{2 h_c}{k b}})}{I_0(2 L \sqrt{\frac{2 h_c}{k b}})} =$$

$$= - b \sqrt{2 h_c k} \frac{I_1(4 \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}})}{I_0(4 \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}})}$$

que derivada respecto de b proporciona la siguiente condición de máximo:

$$\frac{4}{3} \frac{I_1(4 \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}})}{I_0(4 \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}})} = \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}} \left\{ 1 - \left(\frac{I_1(4 \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}})}{I_0(4 \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}})} \right)^2 \right\} \quad 4 \sqrt{\frac{2 h_c}{k b^3}} = 2,6168$$

de la que se deduce,

$$\text{Base, } b_{\text{ópt}} = 1,6718 \sqrt[3]{\frac{2 h_c}{k}}$$

$$\text{Longitud, } L_{\text{ópt}} = 1,196 \sqrt[3]{\frac{k}{h_c}} = \frac{2}{b_{\text{ópt}}}$$

Teniendo en cuenta las variables de trabajo, h_c , L , Q , $(T_b - T_F)$, resulta:

$$Q = - b \sqrt{2 h_c k b_{\text{ópt}}} \frac{I_1(2,6168)}{I_0(2,6168)} = - 0,7754 b \sqrt{2 h_c k b_{\text{ópt}}}$$

$$b_{\text{ópt}} = \frac{0,8273}{k h_c} \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)^2$$

$$L_{\text{ópt}} = \frac{0,3483}{k h_c^2} \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)^3$$

$$L_{\text{ópt}} = \frac{0,8420}{h_c} \left(\frac{Q}{T_b - T_F} \right)$$

X.3.- RENDIMIENTO DE LA ALETA

Se define el rendimiento de una aleta μ , como la relación entre la cantidad de calor transferida realmente por la aleta Q_a y el calor transferido a través de una aleta ideal Q_i :

$$= \frac{Q_{\text{real}}}{Q_{\text{ideal}}}$$

La aleta ideal transfiere la máxima cantidad de calor respecto a una aleta cualquiera del mismo tamaño e igual temperatura en la base. La aleta ideal tiene una conductividad térmica infinita y, por consiguiente, toda ella es isotérmica, por lo que estará a la temperatura de la base T_b .

La transferencia de calor, por unidad de tiempo, desde una aleta ideal es:

$$Q_i = h_c A_a (T_b - T_F)$$

siendo, $A_a = p L$, la superficie lateral de la aleta expuesta al fluido a temperatura T_F .

Por lo tanto, la transferencia de calor por unidad de tiempo, procedente de la aleta real, en función del rendimiento, será:

$$Q_{real} = Q = h_c A_a (T_b - T_F)$$

Si se tiene en cuenta la sección A_t , perteneciente al tubo, el calor Q total disipado por la aleta y el tubo es:

$$Q = Q_t + Q_a = (h_c A_t + A_a) (T_b - T_F)$$

Casos particulares:

a) Aleta longitudinal de sección uniforme, de superficie constante y extremo libre aislado:

$$= \frac{\sqrt{Bi} \frac{kS}{L} (T_b - T_F) Th\sqrt{Bi}}{h_c p L (T_b - T_F)} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} \quad ; \quad Bi = \frac{h_c p L^2}{k S} \quad ; \quad p = 2(a + e) \quad 2a$$

que viene representada en la Fig X.8.

b) Aleta longitudinal de perfil triangular:

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{k b}{\sqrt{L}} \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})}}{2 h_c L} = \frac{n}{\frac{2 h_c L}{k b} \sqrt{L}} \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})} = \left| n = \sqrt{\frac{2 f h_c L}{k b}} = m \sqrt{L} \right| = \\ &= \frac{1}{n\sqrt{L}} \frac{I_1(2n\sqrt{L})}{I_0(2n\sqrt{L})} = \left| G_4(\) = \frac{I_1(\)}{I_0(\)} \right| = \frac{G_4(2n\sqrt{L})}{n\sqrt{L}} = \frac{2 G_4(\ t)}{t} \end{aligned}$$

c) Aleta anular de espesor constante:

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 - \frac{r_{an}^2}{r_e^2}) k e}{h_c} \frac{2_{an} G_2(\frac{r_{an}}{r_e})}{b A} = \left| \begin{aligned} A &= 2 (r_e^2 - r_b^2) \\ \frac{r_{an}}{r_e} &= \frac{r_b}{r_e} \quad ; \quad r_b = r_e \frac{r_{an}}{r_e} \\ \frac{2_{an}}{2_{an}} &= \frac{2 h_c r_e^2}{k e} \quad ; \quad 2 h_c r_e^2 = k e \frac{2_{an}}{2_{an}} \end{aligned} \right| = \\ &= \frac{(1 - \frac{r_{an}^2}{r_e^2}) k e}{h_c} \frac{2_{an} G_2(\frac{r_{an}}{r_e})}{2 r_e^2 (1 - \frac{r_{an}^2}{r_e^2})} = G_2(\frac{r_{an}}{r_e}) \end{aligned}$$

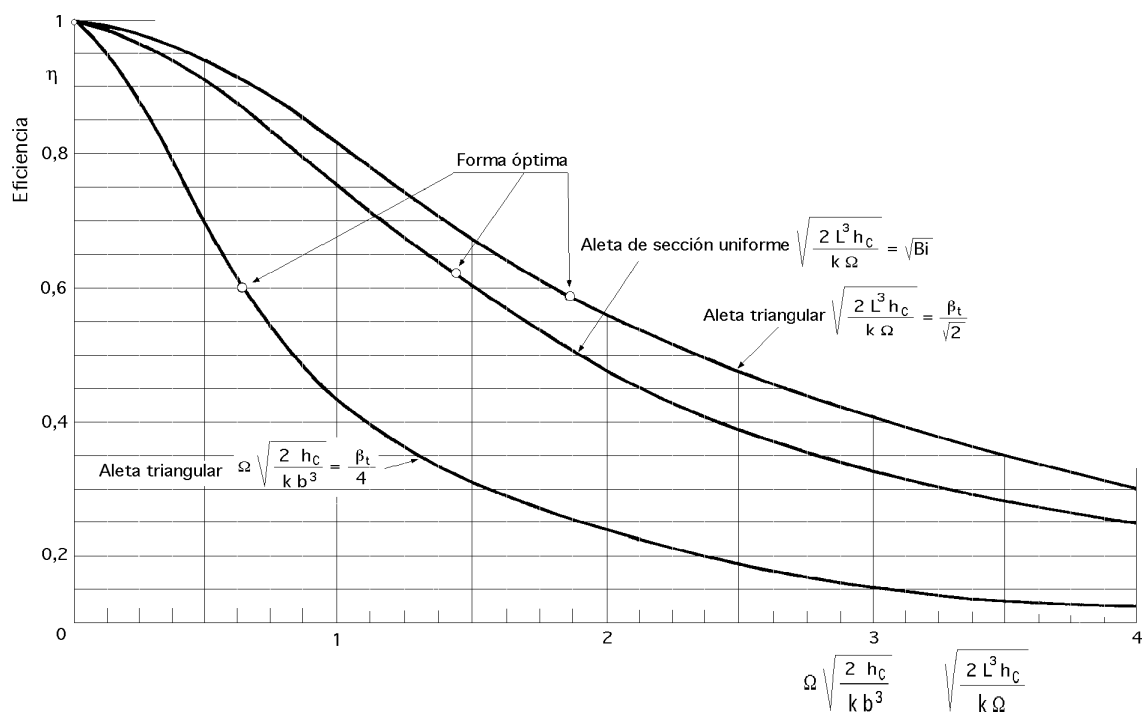


Fig X.8.- Efectividad de las aletas de sección uniforme y de sección triangular

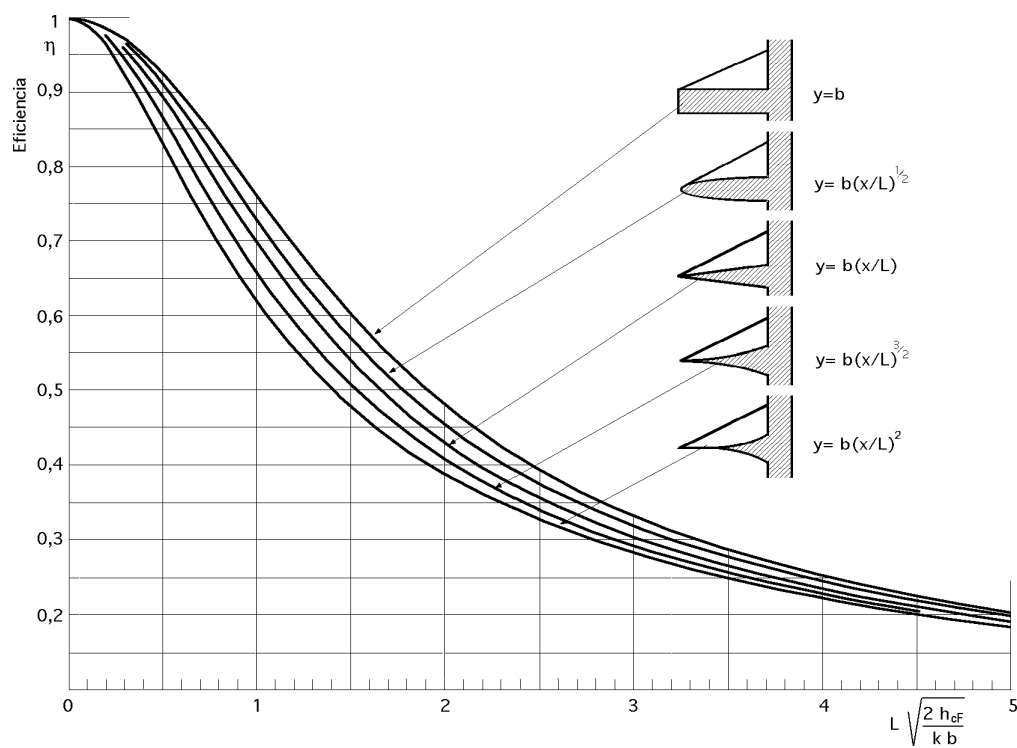


Fig X.9.- Eficiencia de aletas de perfil triangular

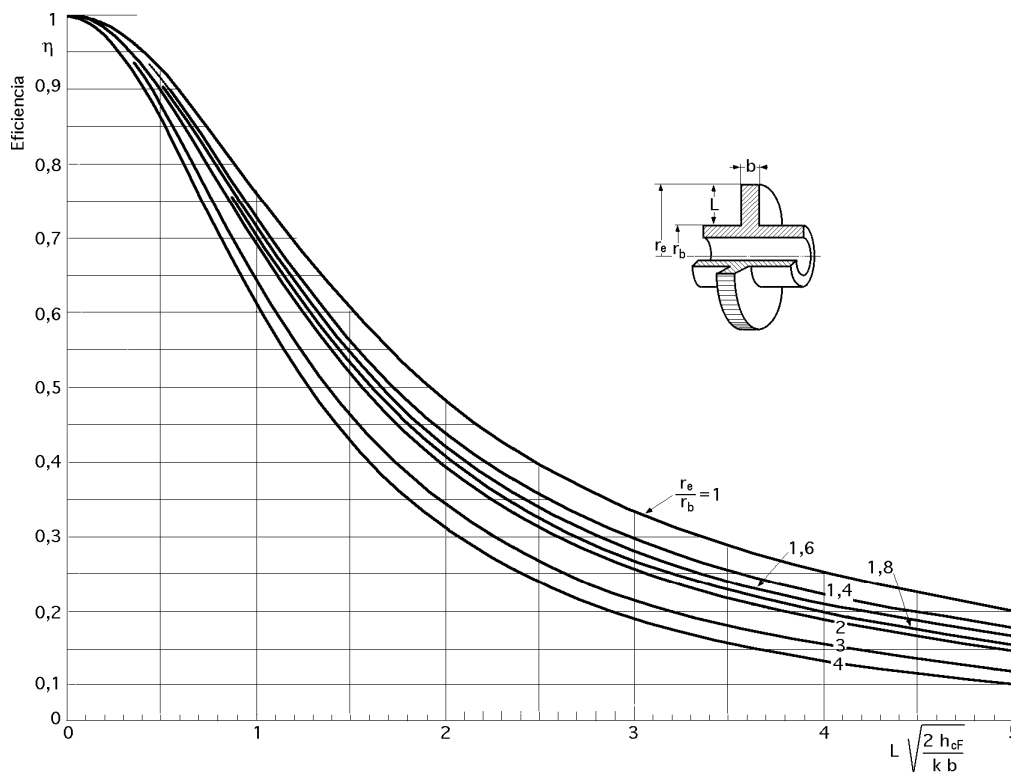


Fig X.10.- Eficiencia de aletas anulares

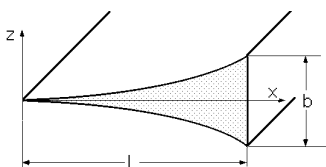
Cuando las aletas son muy largas, $L \gg b$, la eficiencia de la aleta se puede poner en función del parámetro:

$$L \sqrt{\frac{2 h_c}{k b}} = L \sqrt{m}$$

Las Fig X.9 y 10, muestran la variación de la eficiencia de la aleta en función de dicho parámetro para algunas secciones transversales típicas; así, en la Fig X.9 se representa la eficiencia de aletas longitudinales en las que el espesor de la aleta varía con la distancia x medida desde la base de la aleta; en la Fig X.10 se representa la eficiencia de aletas anulares en forma de disco de espesor e constante. Al aumentar el número de aletas en una superficie se aumenta el área de transferencia térmica, pero también aumenta la resistencia térmica de la superficie en donde se fijan las aletas, por lo que se pueden presentar situaciones en las que al aumentar el número de aletas no se incremente la transferencia de calor.

X.4.- PERFILES DE ALETAS PARABÓLICOS

PERFIL PARABÓLICO CÓNCAVO



$$\text{Ecuación del perfil: } z = \frac{b}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2$$

$$\text{Area del perfil: } = \frac{b L}{3}$$

Distribución de temperaturas: $\frac{T - T_F}{T_b - T_F} = \left(\frac{x}{L}\right)^a$; $a = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 m^2 L^2}}{2}$; $m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k b}}$

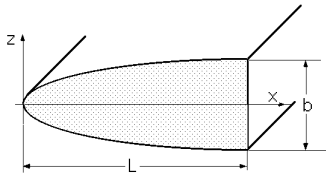
Calor evacuado al exterior: $Q = \frac{4 h_C b L}{1 + \sqrt{1 + 4 m^2 L^2}}$

Eficacia: $\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 m^2 L^2}}$

Condición para el perfil óptimo,

$m L = \sqrt{\frac{2 h_C}{k b}} L = \sqrt{2}$; $b_{\text{ópt}} = 2,08 \sqrt[3]{\frac{2 h_C}{k}}$; $L_{\text{ópt}} = \frac{3}{b_{\text{ópt}}} = 1,4423 \sqrt[3]{\frac{k}{h_C}}$

PERFIL PARABÓLICO CONVEXO



Ecuación del perfil: $z = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{x}{L}}$

Area del perfil: $= \frac{2 b L}{3}$

Distribución de temperaturas: $\frac{T - T_F}{T_b - T_F} = \sqrt[4]{\frac{x}{L}} \frac{I_{(-1/3)}(\frac{4}{3} m \sqrt[4]{L x^3})}{I_{(-1/3)}(\frac{4}{3} m L)}$; $m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k b}}$

Calor evacuado al exterior: $Q = \frac{I_{(2/3)}(\frac{4}{3} m L) 2 h_C b}{m L I_{(-1/3)}(\frac{4}{3} m L)}$

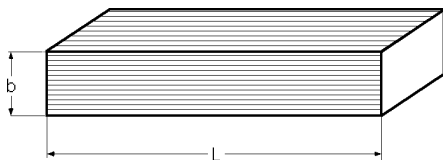
Eficacia: $\mu = \frac{I_{(2/3)}(\frac{4}{3} m L)}{m L I_{(-1/3)}(\frac{4}{3} m L)}$

Condición para el perfil óptimo: $\frac{4}{3} m L = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2 h_C}{k}} \frac{3}{2} \frac{1}{b^{(2/3)}} = 1,705$

$b_{\text{ópt}} = 1,4013 \sqrt[3]{\frac{h_C}{k}}$; $L_{\text{ópt}} = \frac{3}{2 b_{\text{ópt}}} = 1,07 \sqrt[3]{\frac{k}{h_C}}$

X.5.- PROTUBERANCIAS

PROTUBERANCIA PARALELEPÍPEDO DE SECCIÓN CUADRADA



Volumen: $V = b^2 L$; $p = 2 a$; $S = a e$

Superficie de evacuación de calor: $A = 4 b L + b^2$; $4 b L$

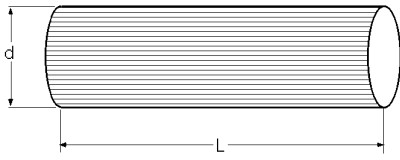
Eficiencia: $\mu = \frac{Th(\sqrt{2} m L)}{\sqrt{2} m L} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}}$; $m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k b}}$; $Bi = \frac{h_C p L^2}{k S}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F) \mu A h_C$

Condición para el perfil óptimo: $b L^{(3/2)} = 1,4192$ ó $Bi_{\text{ópt}} = 2,01419$

$L_{\text{ópt}} = 0,75 \left\{ \frac{k \sqrt{V}}{h_C} \right\}^{(2/5)} = 0,75 \left\{ \frac{k b \sqrt{L}}{h_C} \right\}^{(2/5)}$

PROTUBERANCIA CILÍNDRICA



Superficie de evacuación de calor:

$$A = d L + \frac{d^2}{4} \pi$$

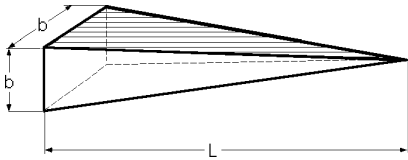
$$\text{Volumen: } V = \frac{d^2}{4} L \pi ; p = d ; S = \frac{d^2}{4} \pi$$

$$\text{Eficiencia: } \mu = \frac{Th(\sqrt{2} m L)}{\sqrt{2} m L} = \frac{Th\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} ; m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k b}} ; Bi = \frac{h_C p L^2}{k S}$$

$$\text{Calor evacuado al exterior: } Q = (T_b - T_F) \mu A h_C$$

$$\text{Condición para el perfil óptimo: } m L = 0,925 ; L_{\text{ópt}} = 0,42 \left\{ \frac{k \sqrt{V}}{h_C} \right\}^{(2/5)} = 0,328 \sqrt{\frac{k d}{h_C}}$$

PROTUBERANCIA PIRÁMIDE CUADRANGULAR



$$\text{Superficie de evacuación de calor: } A = \sqrt{L^2 + \frac{b^2}{4}} 2 b$$

$$\text{Volumen: } V = \frac{b^2}{3} L$$

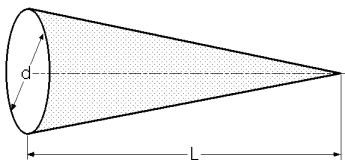
$$\text{Distribución de temperaturas: } \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{L}{x}} \frac{I_1(2 m \sqrt{L x})}{I_1(2 m L)} = \frac{T - T_F}{T_b - T_F}$$

$$\text{Eficiencia: } \mu = \frac{4 I_2(2 m L)}{2 m L I_1(2 m L)} ; m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k b}}$$

$$\text{Calor evacuado al exterior: } Q = (T_b - T_F) \mu A h_C$$

$$\text{Condición para el perfil óptimo: } m L = 0,45 ; L_{\text{ópt}} = 0,48 \left\{ \frac{k \sqrt{V}}{h_C} \right\}^{(2/5)} = 0,318 \sqrt{\frac{k b}{h_C}}$$

PROTUBERANCIA CÓNICA



$$\text{Superficie de evacuación de calor: } A = \frac{d L}{2}$$

$$\text{Volumen: } V = \frac{d^2}{4} \frac{L}{3}$$

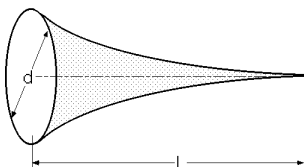
$$\text{Distribución de temperaturas: } \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{L}{x}} \frac{I_1(2 \sqrt{2} m \sqrt{L x})}{I_1(2 \sqrt{2} m L)} = \frac{T - T_F}{T_b - T_F}$$

$$\text{Eficiencia: } \mu = \frac{4 I_2(2 \sqrt{2} m L)}{2 \sqrt{2} m L I_1(2 \sqrt{2} m L)} ; m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k d}}$$

$$\text{Calor evacuado al exterior: } Q = (T_b - T_F) \mu A h_C$$

$$\text{Condición para el perfil óptimo: } 2 \sqrt{2} m L = 1 ; m L = 0,3535 ; L_{\text{ópt}} = 0,43 \left\{ \frac{k \sqrt{V}}{h_C} \right\}^{(2/5)} = 0,25 \sqrt{\frac{k d}{h_C}}$$

PROTUBERANCIA PARABÓLICA CÓNCAVA



$$\text{Superficie de evacuación de calor: } A = \frac{d L}{3}$$

$$\text{Volumen: } V = \frac{d^2 L}{20}$$

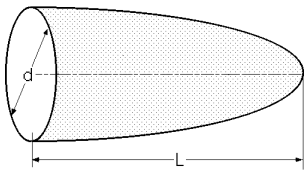
Distribución de temperaturas: $T = T_b \left(\frac{x}{L}\right)^a$, con: $a = \frac{-3 + \sqrt{9 + 8 m^2 L^2}}{2}$

Eficiencia: $\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{8 m^2 L^2}{9}}}$; $m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k d}}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F) \mu A h_C$

Condición para el perfil óptimo: $\sqrt{2} m L = 2$; $m L = 1,4142$; $L_{\text{ópt}} = 1,44 \left\{ \frac{k \sqrt{V}}{h_C} \right\}^{(2/5)} = \sqrt{\frac{k d}{h_C}}$

PROTUBERANCIA PARABÓLICA CONVEXA



Superficie de evacuación de calor: $A = \frac{d L}{3}$

Volumen: $V = \frac{d^2 L}{8}$

Distribución de temperaturas: $T = T_b \frac{I_0 \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{2} m (L x^3)^{1/4} \right\}}{I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m L \right)}$

Eficiencia: $\mu = \frac{I_0 \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{2} m (L x^3)^{(1/4)} \right\}}{I_0 \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{2} m L \right\}}$; $m = \sqrt{\frac{2 h_C}{k d}}$

Calor evacuado al exterior: $Q = (T_b - T_F) \mu A h_C$

Condición para el perfil óptimo: $\frac{4 \sqrt{2}}{3} m L = 1,05$; $m L = 0,5568$; $L_{\text{ópt}} = 0,56 \left\{ \frac{k \sqrt{V}}{h_C} \right\}^{(2/5)} = 0,393 \sqrt{\frac{k d}{h_C}}$

X.6.- COEFICIENTE GLOBAL DE TRANSMISIÓN DE CALOR PARA ALETAS REFRIGERADAS POR AIRE

En la ecuación básica, $Q = U A \Delta T$, común a cualquier tipo de intercambiador de calor, el valor de Q normalmente se conoce, mientras que la superficie de intercambio térmico A es desconocida. El coeficiente global de transmisión de calor U , es función de la resistencia térmica de la capa límite del fluido que circula por el interior de los tubos, de la conductividad térmica del material del tubo y aletas, y de la resistencia térmica de la capa límite en la parte del tubo más las aletas en contacto con el aire.

La primera de estas resistencias se determina mediante las ecuaciones clásicas conocidas, dependiendo de la naturaleza del flujo, mientras que la contribución de la suciedad depende del tipo de fluido que se esté experimentando.

El coeficiente de película a través de las aletas se puede determinar mediante la fórmula de Joung de la forma:

$$Nu = 0,134 (Re)^{0,681} (Pr)^{0,33} (FH)^{0,20} (FT)^{0,1134}$$

en la que (FH) y (FT) vienen dadas por las siguientes relaciones:

$$(FH) = \frac{\text{Espaciado entre aletas}}{\text{Longitud de la aleta}} ; (FT) = \frac{\text{Espaciado entre aletas}}{\text{Espesor de la aleta}}$$

Tabla XIV.11.- Coeficientes de transferencia de calor típicos para el aire de refrigeración

LÍQUIDOS	U(W/m ² °C)	VAPORES	U(W/m ² °C)		
Aceite 20° API.- Temp.media 100°C	55-90	Vapor (x=1)	810		
Aceite 20° API.- Temp.media 150°C	74-125	Vapor (x=0,9)	600		
Aceite 20° API.- Temp.media 200°C	170-230	Vapor (x=0,6)	415		
		Hidrocarburos ligeros	425		
Aceite 40° API.- Temp.media 80°C	140-200	Hidrocarburos medios	270		
Aceite 40° API.- Temp.media 100°C	285-345	Amoníaco	600		
Aceite 40° API.- Temp.media 150°C	315-370		Presión		
Aceite 40° API.- Temp.media 200°C	340-400	GASES	0,7 atm	7 atm	35 atm
Gasóleo	255-315	Vapor	70	155	325
Queroseno	315-340	Hidrocarburos	100	270	410
Nafta	330-400	Aire	50	155	270
Hidrocarburos ligeros	400-450	Amoníaco	70	185	300
Agua	685-800	Hidrógeno	145	385	555

El coeficiente de transmisión de calor h_c así obtenido se modifica mediante un elemento corrector, en el que están comprendidos el rendimiento de la aleta μ , la superficie exterior del tubo A_t , la de la aleta A_a , y la total A .

El valor medio, $\hat{h}_c = \frac{h_c (\mu A_a + A_t)}{A}$

El área total disponible, puede ser del orden de 20 a 30 veces la del tubo.

Si llamamos T_1 y T_2 las temperaturas de entrada y salida del fluido que circula por el interior de la tubería, y T_{F1} y T_{F2} las temperaturas inicial y final del aire, de las que sólo se conoce T_{F1} , la temperatura T_{F2} se calcula en la forma general:

$$T_{F2} = T_{F1} + \frac{Q}{G_{\text{aire}} c_{p(\text{aire})}} = T_{F1} + \frac{Q}{G_F c_{pF}}$$

o por la propuesta por Brown, que sugiere un procedimiento para el cálculo de T_{F2} asumiendo un valor para el coeficiente U basado en la experiencia, en la forma:

$$T_{F2} = T_{F1} + 0,0009 U \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_{F1} \right)$$

viniendo U expresada en W/m²°C.

XI.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

CAPA LIMITE TÉRMICA E HIDRODINÁMICA

XI.1.- INTRODUCCIÓN

Antes de entrar en la metodología que permite determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección h_C , examinaremos con cierto detalle el proceso y fenomenología de la convección, así como su relación con el movimiento del fluido.

Si a título de ejemplo se supone una placa plana sobre la que fluye una corriente fluida, lo primero que se observa es que la velocidad del fluido disminuye a medida que nos aproximamos hacia la superficie de la misma, como consecuencia de las fuerzas de viscosidad.

Como la velocidad de la capa de fluido en contacto con la pared es cero, $u_{pF} = 0$, la transferencia de calor entre la superficie y esta capa de fluido está originada únicamente por conducción, cumpliéndose que:

$$q_C = -k_F \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} = h_C (T_{pF} - T_F)$$

y aunque ésto sugiere que el proceso térmico pudiera considerarse como de conducción, lo cierto es que el gradiente de temperaturas en la superficie:

$$\frac{dT}{dy} \Big|_{y=0}$$

viene determinado por la velocidad a que puede ser transportada la energía por el fluido más alejado de la pared, hacia el interior de la corriente principal, por lo que el gradiente de temperaturas en la superficie del sólido depende del campo de flujo, de forma que las velocidades más elevadas son las que originan mayores gradientes de temperatura y mayores velocidades de transferencia de calor.

No obstante, hay que tener presente la conductividad térmica k_F del fluido que está interviniendo directamente; para el caso del agua, el valor del coeficiente k_F es de un orden de magnitud mayor que el del aire, lo que implica el que el coeficiente de transferencia térmica por convección sea también mayor en el caso del agua, que en el caso del aire.

La situación es muy parecida cuando se estudia la convección libre; la diferencia principal radica en que en el caso de la convección forzada, la velocidad tiende hacia el valor de la corriente sin perturbar impuesta por una fuerza exterior, mientras que en la convección libre la velocidad crece al principio, a medida que va aumentando la distancia desde el plano, debido a que el efecto de la viscosidad disminuye más rápidamente que la variación de densidades, que lo hace más lentamente; sin embargo, la fuerza ascensional disminuye cuando la densidad del fluido se acerca al valor de la del fluido que lo rodea; ésta es la causa de que la velocidad alcance un valor máximo y tienda a cero bastante lejos de la superficie caliente.

La distribución de temperaturas en la convección forzada y libre tienen formas análogas y en ambos casos el mecanismo de transferencia de calor en la interfase (fluido/sólido) es la conducción.

El coeficiente de transferencia de calor por convección h_C depende, en general, de algunas propiedades inherentes al flujo del fluido, como son su densidad, viscosidad y velocidad, y de sus propiedades térmicas (conductividad térmica y calor específico):

$$h_C = f(\rho, \mu, u, k_F, c_p)$$

Mientras que en la convección forzada la velocidad del fluido viene impuesta normalmente por la acción de una bomba o un ventilador, y puede especificarse directamente, en la convección libre la velocidad depende de una serie de factores como son,

a) La diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido, $T_{pF} - T_F$

b) El coeficiente de dilatación térmica del fluido (que determina la variación de su densidad por unidad de diferencia de temperaturas), por cuanto:

$$\nu = \nu_F \{1 + \beta_F (T - T_F)\} \quad ; \quad \frac{\rho}{\rho_F} = 1 - \beta_F (T - T_F)$$

c) El campo de fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema que, en la mayoría de las situaciones, se reduce únicamente al campo gravitatorio g .

Para adquirir una cierta comprensión del significado de los parámetros que intervienen en la convección forzada, se puede examinar con mayor detalle el campo de fuerzas; así, para una placa plana inmersa en una corriente fluida, el flujo a diversas distancias del borde de ataque de la placa se desarrolla en una región en la que las fuerzas de viscosidad frenan al fluido, disminuyendo su velocidad.

Las fuerzas de viscosidad dependen de la tensión de corte:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

La región del flujo próxima a la placa, en donde la velocidad del fluido se ve frenada por las fuer-

zas de viscosidad, se denomina *capa límite*, siendo su espesor igual a la distancia existente entre la placa y la región del fluido donde éste tiene una velocidad igual al 99% de la correspondiente a la corriente libre; la región de fluido que se encuentra más allá de esta región se denomina *régimen de flujo potencial o régimen no perturbado*.

Inicialmente el flujo de un fluido dentro de la capa límite es completamente laminar; el espesor de la capa límite va creciendo a medida que aumenta la distancia respecto al borde de ataque, llegándose así a que a una cierta distancia x_c el efecto de las fuerzas de inercia llega a ser lo suficientemente importante, en comparación con la acción amortiguadora de la viscosidad, que en el flujo empiezan a aparecer y a crecer pequeñas perturbaciones; a esta distancia se la conoce como *distancia crítica*.

Cuando comienzan a amplificarse estas perturbaciones, la regularidad del flujo viscoso se ve alterada y tiene lugar una transición, de forma que el flujo pasa de laminar a turbulento. En la región del flujo turbulento, las partículas de fluido se mueven a través de líneas de corriente que transportan con más o menos violencia tanto la energía térmica, como la cantidad de movimiento.

El coeficiente de transferencia de calor por convección h_C varía con la posición, respecto al borde de entrada para una placa plana o desde la entrada de un tubo o conducto cerrado.

El parámetro que describe la variación espacial es el coeficiente de transferencia de calor local h_{Cx} , siendo x la distancia que hay desde el borde de ataque de la placa o entrada del tubo a la sección considerada.

Si se desea calcular en el intervalo, $0 \leq x \leq L$, el coeficiente medio de transferencia térmica por convección h_C , hay que conocer el coeficiente de transferencia de calor local h_{Cx} , siendo la relación existente entre ellos de la forma:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx$$

en la que L es la longitud de la placa o del tubo considerada.

XI.2.- ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA TRANSMISIÓN DE CALOR EN UN MEDIO EN MOVIMIENTO

Cuando se hace el estudio de la convección forzada hay que tener en cuenta que los fenómenos que influyen en ella son, un transporte de materia y la conductividad térmica. Para su comprensión vamos a considerar un paralelepípedo de fluido elemental, de volumen unidad, Fig XI.1, de dimensiones dx, dy, dz , teniendo en cuenta que en el proceso intervienen tanto la temperatura T_F como la velocidad $V_F = V(u,v,w)$ del fluido, y que el calor producido por rozamiento interno es despreciable. Mediante un balance de energía se obtiene:

Calor que penetra según Ox en la unidad de tiempo debido a la velocidad:

$$Q_{1x} = m c_F T = (\rho dy dz) c_F T = (\rho T) c_F dy dz$$

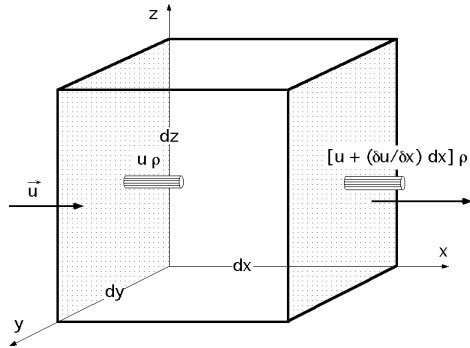


Fig XI.1.- Paralelepípedo elemental de fluido

Calor disipado según Ox:

$$Q_{2x} = c_F \left[u T + \frac{(u T)}{x} dx \right] dy dz$$

habiendo reagrupado u y T porque ambas intervienen en el interior del paralelepípedo elemental.

El calor que se almacena en el paralelepípedo según Ox, en la unidad de tiempo, debido a las masas entrantes y salientes es:

$$Q_{1x} - Q_{2x} = - c_F \frac{(uT)}{x} dx dy dz$$

Teniendo en cuenta el conjunto de las tres direcciones, se obtiene la expresión del **calor total “almacenado” dentro del paralelepípedo elemental, debido a las variaciones de velocidades y temperaturas de las masas de fluido circulante:**

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_2 &= - c_F dx dy dz \left\{ \frac{(uT)}{x} + \frac{(vT)}{y} + \frac{(wT)}{z} \right\} = \\ &= - c_F dx dy dz \left\{ u \frac{T}{x} + v \frac{T}{y} + w \frac{T}{z} + T \left(\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} \right) \right\} = \\ &= - c_F dx dy dz \left\{ u \frac{T}{x} + v \frac{T}{y} + w \frac{T}{z} + T \operatorname{div} \vec{V} \right\} \end{aligned}$$

El calor que se almacena en el volumen elemental debido a la conducción en la unidad de tiempo, según el eje Ox, es:

$$\begin{aligned} Q_{1x}^* &= - k (dy dz) \frac{T}{x} \\ Q_{2x}^* &= Q_{1x}^* + \frac{Q_{1x}^*}{x} dx = - k \frac{T}{x} \left(T + \frac{T}{x} dx \right) dy dz = - k \left(\frac{T}{x} + \frac{2T}{x^2} dx \right) dy dz \end{aligned}$$

luego en la dirección Ox se tiene:

$$Q_{1x}^* - Q_{2x}^* = k \frac{2T}{x^2} dx dy dz$$

Sumando los calores almacenados por conducción en las tres direcciones y en la unidad de tiempo, se obtiene:

$$Q_1^* - Q_2^* = k \left(\frac{2T}{x^2} + \frac{2T}{y^2} + \frac{2T}{z^2} \right) dx dy dz = k (\nabla^2 T) dx dy dz$$

Finalmente, el calor total almacenado en el elemento de volumen considerado en el tiempo dt ,

será el mismo que la suma de los calores almacenados, anteriormente deducidos; por lo tanto, en el tiempo t se tiene:

$$Q_t = \int_V dx dy dz c_F T$$

y en el tiempo, $t + dt$:

$$Q_{t+dt} = \int_V dx dy dz c_F (T + \frac{T}{t} dt)$$

por lo que el calor almacenado en dt es:

$$Q_{t+dt} - Q_t = \int_V dx dy dz c_F \frac{T}{t} dt$$

El balance térmico es de la forma:

$$\begin{aligned} k(\nabla^2 T) \int_V dx dy dz - \int_V c_F dx dy dz (u \frac{T}{x} + v \frac{T}{y} + w \frac{T}{z} + T \operatorname{div} \vec{V}) &= \int_V dx dy dz c_F \frac{T}{t} dt \\ (\nabla^2 T) - (u \frac{T}{x} + v \frac{T}{y} + w \frac{T}{z} + T \operatorname{div} \vec{V}) &= \frac{T}{t} dt \end{aligned}$$

Si se considera fluido incompresible, $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, y si además el régimen es permanente, tanto térmico, como dinámico:

$$\frac{T}{t} dt = 0$$

quedando con estas dos condiciones lo siguiente:

$$(\nabla^2 T) = u \frac{T}{x} + v \frac{T}{y} + w \frac{T}{z}$$

que es una ecuación diferencial con 4 incógnitas T, u, v, w , por lo que serán necesarias otras 3 ecuaciones, que son las de *Navier-Stokes*, de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \mu \nabla^2 u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{dv}{dt} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \mu \nabla^2 v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{dw}{dt} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \mu \nabla^2 w \end{aligned}$$

completándose así el sistema de ecuaciones que rige el fenómeno termohidrodinámico.

En las ecuaciones de Navier-Stokes, las componentes (X, Y, Z) de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema elemental de fluido quedan reducidas para fluidos pesados a $X = 0; Y = 0; Z = g$, pudiéndose poner para la tercera ecuación de Navier-Stokes, $Z = g$, para

el caso en que T permanezca constante.

A su vez, como el fluido al calentarse o enfriarse modifica su densidad, en el intervalo de temperaturas T_0 y T , se tiene:

$$\rho(T - T_0) = \rho_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)$$

siendo ρ_0 la densidad del fluido a la temperatura T_0 ; como el volumen específico del fluido es:

$$v = v_0 \{1 + \beta(T - T_0)\} ; \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \beta(T - T_0) ; \quad \frac{\rho_0}{\rho} - 1 = \beta(T - T_0)$$

resulta:

$$\rho_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) = \rho_0 \beta(T - T_0) = \rho_0 \beta T$$

y la tercera ecuación de Navier-Stokes queda en la forma:

$$\frac{1}{z} \frac{dp}{dz} = \rho_0 \beta T - \frac{dw}{dt} + \nu \nabla^2 w$$

XI.3.- CAPA LIMITE LAMINAR EN FLUJO SOBRE PLACA PLANA

En el movimiento de fluidos sobre una placa plana, la Hidrodinámica clásica se limita a imponer, como condición de contorno, la tangencia del vector velocidad, mientras que la Mecánica de Fluidos viscosos exige la condición adicional de adherencia al contorno de la placa, que es mucho más restrictiva que la de tangencia. En los fluidos poco viscosos, los esfuerzos tangenciales son, con frecuencia, muy inferiores a los de inercia o a los de gravedad, pero ésto no autoriza a prescindir de los esfuerzos viscosos, que pueden llegar a ejercer una influencia considerable sobre la configuración del movimiento.

Prandtl, en 1904, propone que el estudio del movimiento de un fluido de viscosidad pequeña, se podía asimilar al de un fluido perfecto, salvo en una capa próxima al contorno, de espesor δ , en la que concentraba los fenómenos de fricción, y que llamó *capa límite*; en el exterior de dicha capa, las tensiones tangenciales son despreciables, predominando las fuerzas de inercia sobre las de viscosidad, mientras que en el interior de la capa límite la proximidad del contorno hace que el gradiente de velocidades sea muy grande y, por lo tanto, que la tensión tangencial $\tau = \mu \frac{du}{dy}$, sea también muy grande; en esta situación las fuerzas de fricción son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia.

El espesor de la capa límite puede estar comprendido entre unas pocas moléculas y algunos milímetros, según los casos; fuera de la capa límite se pueden utilizar las ecuaciones de Euler o métodos experimentales basados en las líneas y redes de corriente, que una vez configuradas alrededor del contorno o perfil deseado, permiten obtener el campo de velocidades y la distribución de presio-

nes correspondiente.

En el estudio de la capa límite hay que tener presentes las siguientes consideraciones,

a) Aunque la perturbación producida por la fricción se propaga a todo el fluido, se admite que la propagación queda limitada a una zona del mismo de espesor finito, en sentido normal al contorno.

b) La forma de la curva de distribución de velocidades en las distintas secciones a lo largo de la capa límite, se puede expresar, en general, mediante las siguientes ecuaciones, Fig XI.2:

Régimen laminar, $\frac{u}{V_0} = C + C_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + C_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + C_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \dots$

Régimen turbulento, $\frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{\delta}}$

en la que V_0 es la velocidad uniforme del fluido no perturbado; la capa límite en su desarrollo longitudinal, muestra una tendencia progresiva al ensanchamiento, Fig VII 2.b.

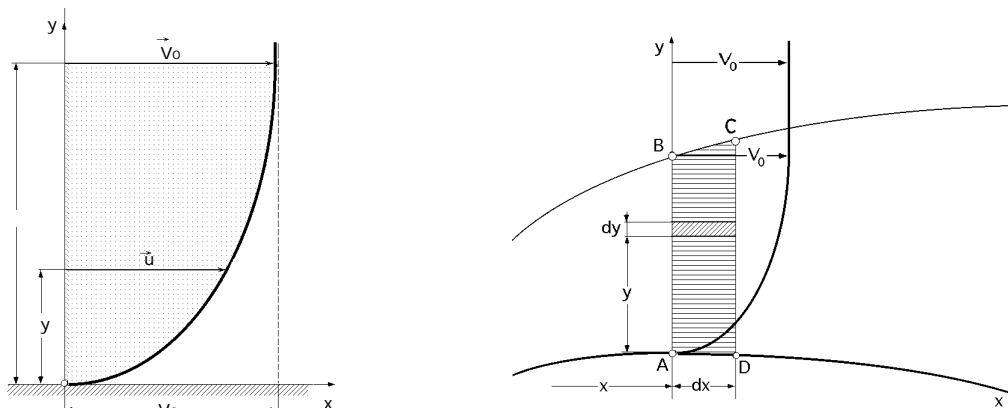


Fig XI.2.a.b.- Capa límite

POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO.- Si la distribución de velocidades es de la forma,

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + C_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Para, $y = 0$, $u = 0$; $C = 0$

con las condiciones, Para, $y = \delta$, $u = V_0$ $1 = C_1 + C_2$

Para, $y = \delta$, $\frac{u}{y} = 0$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{y} = \left(\frac{C_1}{y} + \frac{2 C_2 y}{\delta^2} \right)_{y=\delta} = \frac{C_1}{\delta} + \frac{2 C_2}{\delta} = 0 \quad ; \quad C_1 + 2 C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 + 2 C_2 = 0$$

$$C_1 = 2 \quad ; \quad C_2 = -1$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, con un

polinomio de segundo grado, sería:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2}{3} \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

POLINOMIO DE TERCER GRADO.- Si el polinomio es de tercer grado:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + C_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + C_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\text{Para, } y = 0, u = 0 ; C = 0$$

$$\text{con las condiciones, Para, } y = \delta, u = V_0 \quad 1 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\text{Para, } y = \delta, \frac{u}{y} \bigg|_{y=\delta} = 0$$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{y} \bigg|_{y=\delta} = \left\{ \frac{C_1}{1} + \frac{2 C_2}{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{3 C_3 y}{\delta^2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right\}_{y=\delta} = 0 ; C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0$$

$$\text{Para, } y = 0 ; \frac{2u}{y^2} \bigg|_{y=0} = 0 ; \frac{1}{V_0} \frac{2u}{y^2} \bigg|_{y=0} = \left\{ 0 + \frac{2 C_2}{\delta} + \frac{6 C_3}{\delta^2} \left(\frac{y}{\delta}\right) \right\}_{y=0} = 0 ; C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0 \quad C_1 = \frac{3}{2} ; C_2 = 0 ; C_3 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = 0$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, con un polinomio de tercer grado, sería:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

La experiencia ha permitido comprobar, para placa plana, que el movimiento laminar en la capa límite llega a hacerse inestable cuando se sobrepasa un valor crítico del número de Reynolds:

$$Re_c = \frac{V_0 x_c}{\nu}$$

siendo x_c la distancia a partir del borde de ataque de la placa.

La capa límite continua su desarrollo, como se muestra en la Fig XI.3; a partir de x_c , se origina la capa límite turbulenta, que se divide en dos subcapas, una de las cuales, en las proximidades de la placa, permite definir una delgada subcapa marcadamente laminar.

Los valores críticos del número de Reynolds que definen la transición para placa plana, son:

$$Re_{laminar} < 5 \cdot 10^5 ; Re_{turbulento} > 3 \cdot 10^6$$

Para fluidos que circulan entre dos paredes próximas, el ensanchamiento progresivo de la capa límite de cada contorno determina que éstas se unan, a una cierta distancia de la entrada, desapareciendo la zona en que el movimiento podía ser asimilable a un fluido perfecto, para realizarse todo él bien en régimen laminar, o bien en régimen turbulento, según el valor del número de Reynolds.

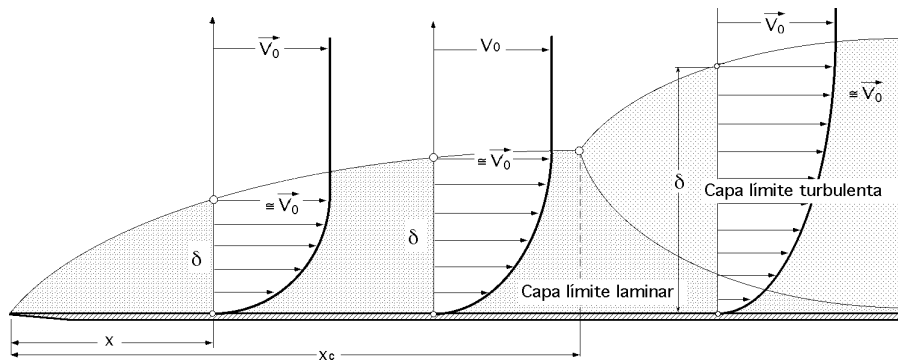


Fig XI.3.- Desarrollo de la capa límite laminar

En tuberías sólo se puede considerar el movimiento como irrotacional, en las proximidades de la embocadura; con flujo totalmente desarrollado, no.

ESPESORES Y CAUDALES DE LA CAPA LIMITE.- Mediante el concepto de capa límite es posible concentrar en un espesor los fenómenos de fricción; ello implica el que se tengan que cumplir las siguientes condiciones:

a) El valor de la velocidad \bar{u} correspondiente a, $y = \delta$, tiene que estar muy próximo a \bar{V}_0 , pues entonces el gradiente de velocidades será despreciable; suele tomarse, $u = 0,99 V_0$.

b) El esfuerzo de fricción evaluado en la zona de espesor δ , (a lo largo del contorno), mediante la ecuación de la cantidad de movimiento, tiene que coincidir con el obtenido analíticamente para la capa límite laminar, o con el deducido experimentalmente en la capa límite turbulenta.

En ambas situaciones la distribución de velocidades viene dada, para el régimen laminar, por polinomios de grado m (parábolas de segundo o tercer grado en general) y para el régimen turbulento por polinomios de grado $1/m$.

Espesor de desplazamiento de la capa límite.- El espesor de desplazamiento de la capa límite δ_1 está basado en la conservación del caudal a lo largo de la normal al contorno, mediante la equivalencia de las áreas rayadas, como se indica en la Fig XI.4.

Si se admite que la ley de velocidades es asintótica a \bar{V}_0 , se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^\delta (V_0 - u) dy$$

y si la ley de distribución de velocidades alcanza el valor \bar{V}_0 para el espesor δ , se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^\delta (V_0 - u) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = \delta - \int_0^\delta \frac{u}{V_0} dy = \delta - \frac{Q}{V_0}$$

que se puede interpretar como la diferencia entre el espesor δ y el espesor δ_1 de una corriente que tuviese la misma velocidad \bar{V}_0 que la corriente exterior, y transportase la misma masa de fluido, caudal q , que la capa límite real.

Considerando capa límite turbulenta, $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, resulta:

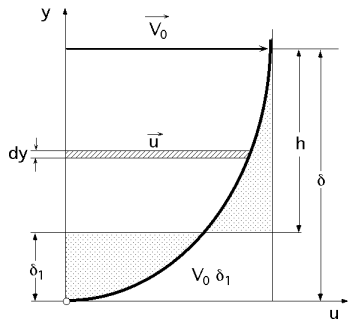


Fig XI.4.- Espesor de desplazamiento de la capa límite

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/m} dy = \int_0^1 \frac{1}{1/m} y^{1/m} dy = \frac{m}{m+1} \delta$$

Espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 se define en la forma:

$$\delta_2 = \frac{1}{V_0^2} \int_0^{\delta} u (V_0 - u) dy = \int_0^1 \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0} \right) dy$$

y se corresponde con el espesor de una corriente fluida que tenga la misma velocidad V_0 que la corriente exterior, y la misma variación de la cantidad de movimiento que la debida a la fuerza de arrastre de la capa límite real.

Considerando, $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, resulta:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/m} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/m} \right\} dy = \frac{1}{2/m} \int_0^1 y^{1/m} (1 - y^{1/m}) dy = \frac{m}{(m+1)(m+2)} \delta$$

La relación entre el espesor de desplazamiento δ_1 y el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 , se denomina Factor de forma del perfil F ; para una placa plana, en función de m se tiene:

$$F = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{m}{m+1} \delta}{\frac{m}{(m+1)(m+2)} \delta} = \frac{m+2}{m}$$

Un valor elevado del factor de forma del perfil implica que está próximo a producirse el desprendimiento de la capa límite.

Espesor de energía de la capa límite.- El espesor de energía de la capa límite δ_3 se define en la forma:

$$\delta_3 = \frac{1}{V_0^3} \int_0^{\delta} u (V_0^2 - u^2) dy = \int_0^1 \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u^2}{V_0^2} \right) dy$$

Considerando, $\frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{Y}}$, resulta:

$$\delta_3 = \int_0^Y \sqrt{\frac{y}{Y}} \left\{ 1 - \sqrt{\left(\frac{y}{Y}\right)^2} \right\} dy = \frac{2m}{(m+1)(m+2)}$$

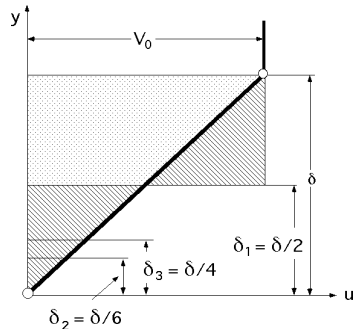


Fig XI.5.- Espesores de la capa límite en distribución triangular

Para hacernos una idea del orden de magnitud y del significado, de los diversos espesores de la capa límite así definidos, indicamos en la Fig XI.5, para el caso particular de una distribución de velocidades triangular, $m = 1$, el orden de magnitud de los mismos, de la forma:

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} ; \quad \delta_2 = \frac{\delta}{6} ; \quad \delta_3 = \frac{\delta}{4}$$

Caudal de la capa límite..- El caudal q a través de la capa límite se ha definido en la forma:

$$q = \int_0^{\delta} u \, dy$$

Teniendo en cuenta el espesor de desplazamiento δ_1 , resulta:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} dy - \int_0^{\delta} \frac{u \, dy}{V_0} = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u \, dy}{V_0} ; \quad \delta_1 = \int_0^{\delta} \frac{u \, dy}{V_0} = \frac{q}{V_0}$$

por lo que:

$$q = V_0 (\delta - \delta_1) = V_0 \delta \left(1 - \frac{1}{m+1} \right)$$

Caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite q_M se define en la forma:

$$q_M = \int_0^{\delta} u^2 \, dy = V_0^2 \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{V_0} \right)^2 \, dy$$

Teniendo en cuenta la expresión del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 se obtiene:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left\{ 1 - \frac{u}{V_0} \right\} dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} dy - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy = \delta_1 - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy$$

$$\int_0^{\delta} u^2 dy = (\delta - \delta_1 - \delta_2) V_0^2$$

quedando la expresión del caudal de la cantidad de movimiento en la forma:

$$q_M = \int_0^{\delta} u^2 dy = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) V_0^2 = \frac{1}{6} V_0^2 \frac{m}{m+2}$$

función del espesor de la capa límite, del espesor de desplazamiento δ_1 y del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 .

XI.4.- ECUACIÓN INTEGRAL DEL IMPULSO DE LA CAPA LIMITE

CAUDAL DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.- Como consecuencia de la viscosidad del fluido y de su deformación, aparece un esfuerzo tangencial sobre el contorno de la placa que determina lo que se conoce como *Resistencia de Superficie o de Forma*. Para calcular este esfuerzo se aplica el Teorema de la Cantidad de movimiento al volumen de fluido comprendido en el interior de la capa límite entre las secciones (AB) y (DC) de la Fig XI.6. Como el movimiento irrotacional exterior a la capa límite es uniforme, no existe gradiente de presiones y, al expresar el equilibrio, la única fuerza actuante es la de arrastre sobre la placa, de la forma, $\tau_0 dx$.

Para una anchura de placa unidad, el caudal de la cantidad de movimiento se evalúa como sigue:

Sobre la cara (AB), el caudal de la cantidad de movimiento entrante es:

$$q_{M(AB)} = \int_0^{\delta} u^2 dy = \frac{1}{6} V_0^2 \frac{m}{m+2}$$

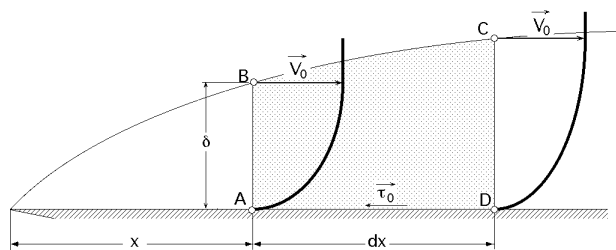


Fig XI.6.- Volumen de fluido en la capa límite

Sobre la cara (CD), el caudal de la cantidad de movimiento saliente es:

$$q_{M(CD)} = q_M + \frac{q_M}{x} dx = q_M + \frac{1}{x} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx$$

por lo que en el volumen de control (ABCD) se tiene una variación del caudal de la cantidad de movimiento, $q_{M(AB)} - q_{M(CD)}$, en la forma:

$$-\frac{q_M}{x} dx = -\frac{1}{x} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx$$

Sobre el contorno (BC) no existe ningún tipo de esfuerzo cortante porque está fuera de la capa límite, $\frac{du}{dy} = 0$; teniendo en cuenta que sobre este contorno la velocidad es V_0 , el caudal de la cantidad de movimiento entrante por (BC) se obtiene en la forma:

$$Q_{M(B)} = m V_0 = Q \int_0^{V_0} V_0 - u \, dy$$

$$Q_{M(C)} = Q_{M(B)} + \frac{Q_{M(B)}}{x} \, dx = Q_{M(B)} + V_0 \frac{1}{x} \left(\int_0^{V_0} u \, dy \right) dx$$

$$Q_{M(BC)} = V_0 \frac{1}{x} \left(\int_0^{V_0} u \, dy \right) dx$$

Sobre el contorno (AD) de contacto con la placa no hay caudal saliente de la cantidad de movimiento.

FUERZA DE ARRASTRE..- Igualando el caudal de la cantidad de movimiento con la fuerza de arrastre F_a sobre la placa en dx , y aplicando el Teorema del Impulso se obtiene:

$$\int_0^{V_0} u \, dx = - \frac{1}{x} \int_0^{V_0} (u^2 dy) \, dx + V_0 \frac{1}{x} \int_0^{V_0} (u \, dy) \, dx = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{V_0} u (V_0 - u) \, dy \right\} dx$$

$$F_a = \int_0^{V_0} u \, dx = \int_0^{V_0} u (V_0 - u) \, dy = V_0^2 \int_0^{V_0} \frac{C_w x}{2} \frac{V_0^2}{2} \, dy$$

$$\frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{V_0} u (V_0 - u) \, dy \right\} \quad ; \quad \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{V_0} u (V_0 - u) \, dy \right\}$$

$$\frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{C_w}{2} \frac{V_0^2}{2}$$

en la que, $\frac{C_w x}{2} = \frac{C_w x}{2}$, se deduce comparándola con la obtenida por análisis dimensional; los valores de C_w se obtienen mediante formulación, ábacos y tablas.

a) Para una distribución de velocidades de la capa límite laminar, de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2y}{V_0} - \left(\frac{y}{V_0}\right)^2$$

con:

$$\frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{V_0} u (V_0 - u) \, dy \right\} = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{V_0} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\}$$

se obtiene:

$$\frac{u}{y} \Big|_{y=0} = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{V_0} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\}$$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{2}{V_0} \quad ; \quad \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{2 V_0}{V_0}$$

$$\frac{2 V_0}{V_0} = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^{V_0} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{V_0} \left\{ \frac{2y}{V_0} - \left(\frac{y}{V_0}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{2y}{V_0} + \left(\frac{y}{V_0}\right)^2 \right\} dy \right\} =$$

$$= V_0^2 \frac{1}{x} \left(2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{15} V_0^2 \frac{1}{x}$$

$$\frac{15}{V_0} dx = d \quad ; \quad \frac{15}{V_0} x = \frac{2}{2} + C \quad ; \quad 2 = \frac{30 x^2}{Re_x} \quad ; \quad \frac{2}{x} = \frac{5,477}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha tenido en cuenta que para, $y = 0$; $x = 0$ $C = 0$

Los valores de los coeficientes C_x (local), y C_w (medio), son:

$$0 = \frac{u}{y} \quad y=0 = C_x \quad \frac{V_0^2}{2} = \frac{2 V_0}{x}$$

$$C_x = \frac{4}{V_0} = \frac{4 x}{Re_x} = \frac{4}{\frac{2}{x} Re_x} = \frac{4}{5,477 \sqrt{Re_x}} = \frac{0,7303}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \quad x=L = \frac{1,4606}{\sqrt{Re_L}}$$

b) Para una distribución de velocidades de la capa límite de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3 y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^3$$

resulta:

$$0 = \frac{u}{y} \quad y=0 = \frac{3 V_0}{2}$$

$$0 = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{\frac{u}{V_0}} \left(1 - \frac{u}{V_0} \right) dy \right\} = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{\frac{3 y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^3} \left\{ 1 - \frac{3 y}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right\} dy \right\} = 0,139 V_0^2 \frac{1}{x} = \frac{3 V_0}{2}$$

Igualándolas:

$$d = 10,79 \frac{dx}{V_0} \quad ; \quad \frac{2}{x} = 10,79 \frac{1}{V_0} x + Cte = \left| \text{Para, } \begin{cases} x = 0 \\ Cte = 0 \end{cases} \right| = 10,79 \frac{1}{V_0} x$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}$$

$$0 = \frac{3 V_0}{2} = \frac{3 V_0 \sqrt{Re_x}}{2 \times 4,64 x} = \frac{0,323 V_0 \sqrt{Re_x}}{x} = 0,323 \sqrt{\frac{V_0^3}{x}} = \frac{V_0^2 C_x}{2}$$

$$C_x = \frac{0,646 \sqrt{Re_x}}{x V_0} = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \quad x=L = \frac{1,292}{\sqrt{Re_L}}$$

El valor de C_w así obtenido para placa plana, está muy próximo al valor exacto (Blasius), y es de la forma:

$$C_x = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad ; \quad \frac{2}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

siendo la fuerza de arrastre F_a sobre cada cara de la placa de longitud L y anchura unidad:

$$F_a = \int_0^L 0,323 \sqrt{\frac{V_0^3}{x}} dx = 0,646 \sqrt{V_0^3 L}$$

ECUACIONES DE PRANDTL DE LA CAPA LIMITE.- Si se supone un fluido incompresible, en movimiento laminar permanente, en flujo bidimensional sobre una pared cualquiera en la que el radio de curvatura es muy superior al espesor de la capa límite, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican, quedando en la siguiente forma:

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = X - \frac{du}{dt} + u$$

en la que, $\frac{du}{dt} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}$; $x = 0$, en la dirección del movimiento

La ecuación de continuidad es, $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 0$, y como:

$$v = 0 ; \frac{v}{y} = 0 ; \frac{u}{x} = 0 ; \frac{u^2}{x^2} = 0$$

la ecuación de Navier-Stokes queda en la forma:

$$\frac{1}{x} \frac{p}{x} = -u \frac{u}{x} - v \frac{u}{y} + \frac{u^2}{y^2}$$

En el borde de la capa límite se tiene la velocidad V_0 del movimiento irrotacional exterior, por lo que aplicando la ecuación de Bernoulli se puede hallar la variación longitudinal de la presión, resultando:

$$\frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} = - \frac{1}{x} \frac{p}{x} \quad \frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} + \frac{u^2}{y^2} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}$$

Si se introduce la función línea de corriente , de la forma:

$$u = - \frac{1}{y} ; v = \frac{1}{x}$$

la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, y sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{1}{x} \frac{p}{y} - \frac{1}{y^2} \frac{p}{x} = - \frac{1}{x} \frac{p}{x} - \frac{1}{y^3}$$

de aplicación a la obtención de la capa límite laminar sobre un contorno plano.

ECUACIÓN CLÁSICA DE KÀRMÀN.- Los caudales de la cantidad de movimiento, en proyección paralela a la pared, manteniendo la anchura de la capa límite igual a la unidad, son los siguientes:

Sobre (AB), $q_{M(AB)} = q_M$, (entrante)

Sobre (CD), $q_{M(CD)} = q_M + \frac{q_M}{x} dx$, (saliente)

Sobre (BC), $\frac{q}{x} dx V_0$, (entrante)

La variación de la cantidad de movimiento es:

$$-q_M + (q_M + \frac{q_M}{x} dx) - \frac{q}{x} dx V_0 = \frac{q_M}{x} dx - \frac{q}{x} dx V_0$$

El impulso mecánico:

$$p - (p + \frac{p}{x} dx) (1 + \frac{dx}{x}) - 0 dx = - (p_0 + \frac{p}{x}) dx$$

Igualándolas se obtiene:

$$\frac{q_M}{x} - V_0 \frac{q}{x} = -p_0 - \frac{p}{x}$$

$$\frac{q_M}{x} - V_0 \frac{q}{x} = \left| \begin{array}{l} q_M = (1 - \frac{1}{2}) V_0^2 \quad ; \quad q = (V_0 - 1) \quad ; \quad 1 - \frac{1}{2} = Cte \\ \frac{q_M}{x} = \frac{1}{x} \{ (1 - \frac{1}{2}) V_0^2 \} = -\frac{2}{x} V_0^2 + (1 - \frac{1}{2}) 2 V_0 \frac{V_0}{x} \\ \frac{q}{x} = (V_0 - 1) \frac{V_0}{x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2}{x} V_0^2 + (1 - \frac{1}{2}) 2 V_0 \frac{V_0}{x} - (V_0 - 1) V_0 \frac{V_0}{x} = -p_0 - \frac{p}{x} =$$

$$= \left| p + \frac{V_0^2}{2} = Cte ; \frac{p}{x} = -V_0 \frac{V_0}{x} \right| = -p_0 + V_0 \frac{V_0}{x}$$

que simplificada convenientemente queda en la forma:

$$0 = \frac{2}{x} V_0^2 + V_0 \frac{V_0}{x} (1 + 2 \frac{1}{2})$$

ecuación que se conoce como ecuación de Kàrmàn, en la que las variables V_0 , $\frac{1}{x}$ y $\frac{2}{x}$ no dependen más que de x .

XI.5.- ECUACIÓN INTEGRAL DE LA ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE

El Primer Principio de la Termodinámica aplicado a un sistema abierto en régimen estacionario, permite calcular el calor Q puesto en juego en una transformación, en la forma:

$$Q = \dot{i} + \dot{T} + E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}}$$

e indica que la energía se puede considerar en forma de entalpía, calor o energía cinética, con las mismas unidades que el trabajo de cizalladura o de corte.

A pequeñas velocidades, los términos asociados a la energía cinética y potencial y al trabajo de cortadura son pequeños en comparación con las demás magnitudes, y se pueden despreciar.

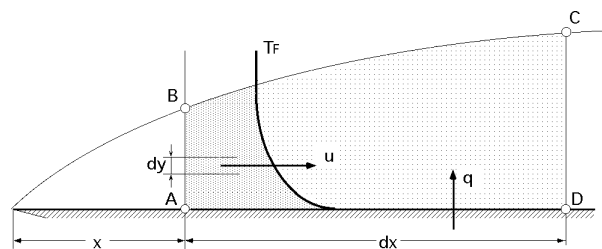


Fig XI.7.- Capa límite térmica

La velocidad a la que la entalpía entra a través de la cara (AB) de la capa límite representada en la Fig XI.7 viene dada por:

$$\dot{i}_{(AB)} = m c_p T = c_p \int_0^T u T dy$$

mientras que la velocidad del flujo de entalpía a través de la cara (CD) es:

$$\dot{i}_{(CD)} = \dot{i}_{(AB)} + \frac{\dot{i}_{(AB)}}{x} dx = \dot{i}_{(AB)} + c_p \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx$$

por lo que dentro de la capa límite quedará:

$$\dot{i}_{(AB)} - \dot{i}_{(CD)} = - c_p \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx$$

La entalpía transportada al interior del volumen de control a través de la superficie (BC), viene dada por:

$$\dot{i}_{(BC)} = c_p T_F \frac{1}{x} \left\{ \int_0^T u dy \right\} dx$$

A su vez, el calor conducido a través de la capa límite es:

$$q_k = - k dx \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0}$$

Sumando todas las contribuciones energéticas, se obtiene la ecuación integral para la conservación de la energía:

$$c_p \int_0^T \frac{T_F}{x} \left\{ \int_0^T u \, dy \right\} dx - c_p \int_0^T \frac{T}{x} \left\{ \int_0^T u \, dy \right\} dx - k \, dx \left(\frac{T}{Y} \right)_{y=0} = 0$$

Como fuera de la capa límite térmica la temperatura es T_F , sólo se integrará hasta el límite, $y = T$, de la misma; por lo tanto:

$$c_p \int_0^T \frac{T_F}{x} \int_0^T u \, dy - c_p \int_0^T \frac{T}{x} \int_0^T u \, dy - k \left(\frac{T}{Y} \right)_{y=0} = 0$$

$$\frac{T_F}{x} \int_0^T (T_F - T) u \, dy = \frac{k}{c_p} \left(\frac{T}{Y} \right)_{y=0} = \left(\frac{T}{Y} \right)_{y=0}$$

que es la ecuación integral de la energía de la capa límite laminar para el caso de un flujo de baja velocidad, en la que dx se comporta como un intervalo y es independiente de dy .

Si se utiliza un perfil de velocidades de tercer grado, de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3}{2} \frac{Y}{T} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} \right)^3$$

y una distribución de temperaturas:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F + T_F - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F}{T_F - T_{pF}} + 1 = \frac{3}{2} \frac{Y}{T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T(x)} \right)^2$$

en la que se han tenido en cuenta las condiciones:

Para,

$$Y = 0 \quad ; \quad T = T_{pF} \quad ; \quad \frac{2T}{Y^2} = 0$$

$$Y = T \quad ; \quad T = T_F \quad ; \quad \frac{T}{Y} = 0$$

se obtiene:

$$\left(\frac{T}{Y} \right)_{y=0} = (T_{pF} - T_F) V_0 \frac{d}{dx} \int_0^T \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{Y}{T} + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} \right)^3 \right\} \left\{ \frac{3}{2} \frac{Y}{T} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} \right)^3 \right\} dy =$$

$$= (T_F - T_{pF}) V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{T^2}{T} - \frac{3}{280} \frac{T^4}{T^3} \right)$$

Teniendo en cuenta que, $\left(\frac{T}{Y} \right)_{y=0} = (T_F - T_{pF}) \frac{3}{2} \frac{k}{T}$, resulta:

$$\frac{3}{2} \frac{T}{T} = V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{T^2}{T} - \frac{3}{280} \frac{T^4}{T^3} \right)$$

Llamando, $\theta = \frac{T}{T_F}$, se tiene:

$$\frac{3}{2} = V_0 \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{3}{20} x^2 - \frac{3}{280} x^4 \right) \right\}$$

En la ecuación de Pohlhausen se demuestra que:

$$\frac{T}{T_s} = (Pr)^{-1/3}$$

El valor de Pr es del orden de la unidad para la mayor parte de los gases, $0,6 < Pr < 1$, mientras que para la mayor parte de los líquidos varía en un campo muy grande, con valores elevados para los aceites muy viscosos y bajas temperaturas, y valores muy bajos para los metales líquidos; en consecuencia, cuando:

$$\frac{T}{T_s} \ll 1 ; \quad x \ll 1 \quad x^4 \ll x^2$$

resulta:

$$\frac{3}{2} = V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} x^2 \right) = \frac{3 V_0}{20} \left(2 \frac{dx}{dx} + 2 \frac{d}{dx} \right)$$

$$\frac{10}{V_0} dx = x^3 \frac{d}{dx} + 2 x^2 \frac{d}{dx}$$

Derivando la solución hidrodinámica:

$$x^2 = 21,58 \frac{x}{V_0} \quad x^2 \frac{d}{dx} = 21,58 \frac{dx}{V_0}$$

sustituyendo, y simplificándola, resulta:

$$\frac{10}{V_0} dx = x^3 \frac{10,79}{V_0} \frac{dx}{V_0} + 2 \times 21,58 x^2 \frac{x}{V_0} \frac{d}{dx}$$

$$x^3 + 4 x^2 \frac{d}{dx} = \frac{13}{14} = \frac{13}{14 (Pr)}$$

La solución general es, $x^3 = C x^{-3/4} + \frac{10}{10,79 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92678}{Pr}$

La solución exacta es, $x^3 = C x^{-3/4} + \frac{13}{14 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92857}{Pr}$

y con la condición:

$$x = x_i ; \quad x^2 = \left(\frac{T}{T_s} \right)^3 = 0 ; \quad C = - \frac{13}{14} \frac{\sqrt[3]{x_i}}{Pr}$$

resulta, Fig XI.8:

$$= 0,976 \sqrt[3]{\frac{1 - \left(\frac{x_i}{x} \right)^{3/4}}{Pr}}$$

por lo que:

$$h_{Cx} = \frac{3 k}{2 T} = \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}} = \left| = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \right| = \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}} =$$

$$= \frac{3 k}{2 x} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{0,976 \times 4,64 \sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}} = 0,332 k \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{x}$$

$$Nu_x = \frac{h_{Cx} x}{k} = \frac{0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}}$$

De haber considerado la ecuación de tercer grado de partida, se hubiera obtenido:

$$Nu_x = \frac{0,323 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}}$$

Haciendo, $\frac{x_i}{x} = 0$, se obtiene la ecuación de Pohlhausen, en la forma,

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

Teniendo en cuenta que:

$$= \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} = \frac{T}{x} ; \quad T = \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} = 4,534 \frac{x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}$$

el coeficiente medio de transmisión de calor por convección h_C en el intervalo, $0 \leq x \leq L$, a lo largo de la superficie plana es:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx} \big|_{x=L} = \frac{0,664 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{exacto})$$

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx} \big|_{x=L} = \frac{0,646 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{ecuación de tercer grado})$$

El calor transmitido desde la placa, de anchura unidad, al fluido, es:

$$Q = L h_C (T_{pF} - T_F)$$

Si se considera existen dos zonas longitudinales sobre la placa, perfectamente diferenciadas, una sin aporte de calor, Fig XI.8, resulta:

$$x < x_1 ; Q = 0$$

Para, $x > x_1 ; Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \frac{T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}}$

con, $T = T_{pF} - T_F$

Para una zona de la placa comprendida entre, $x_1 < x < x_2$, a la que se aplica un flujo de calor Q , Fig XI.9, se tiene:

$$Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \left(\frac{T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} + \frac{-T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_2}{x})^{3/4}}} \right)$$

observándose que el flujo de calor en la región, $x_1 > x_2$, es (-) lo cual significa que en la citada sección la pared reabsorbe parte del calor comunicado a la capa límite en la región, $x_1 < x < x_2$.

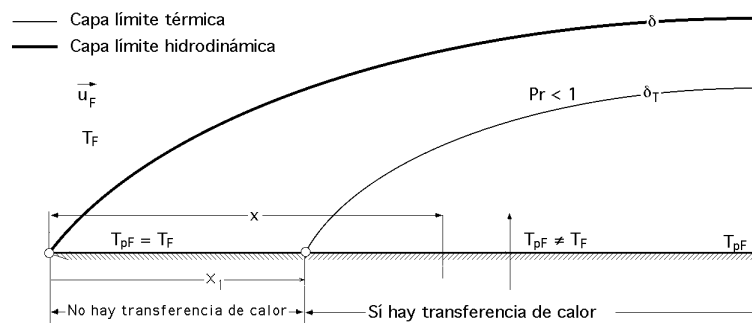


Fig XI.8- Capa límite térmica e hidrodinámica superpuestas

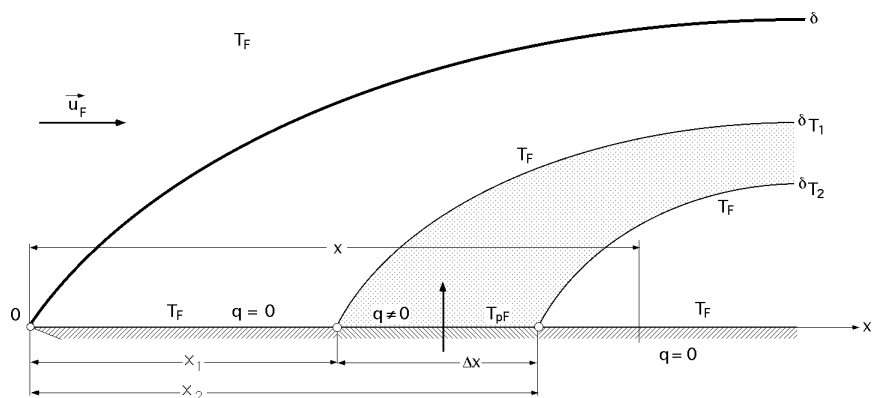


Fig XI.9 - Placa con una capa límite laminar y dos capas límite térmicas

RELACION ENTRE C_x y h_{Cx} EN FLUJO LAMINAR SOBRE PLACA PLANA.- A partir de la expresión exacta de Blasius para el coeficiente de arrastre local C_x a lo largo de una placa plana:

$$\frac{C_x}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha supuesto que para el espesor de la capa límite el gradiente de presiones es cero y las propiedades del fluido constantes, y del número de Nu local para el flujo laminar, (Pohlhausen):

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

y como el número de Stanton local St_x es:

$$St_x = \frac{h_{cx}}{c_p V_0} = \frac{Nu_x}{Pr Re_x} = \frac{0,332}{Pr^{2/3} \sqrt{Re_x}} = \frac{0,332 C_x}{Pr^{2/3} 2 \times 0,332} = \frac{C_x}{2 Pr^{2/3}}$$

$$\frac{C_x}{2} = St_x Pr^{2/3} ; \quad Pr > 0,5$$

que se conoce como analogía de Reynolds-Colburn que relaciona el coeficiente de arrastre local C_x con el número de Stanton St_x para flujo laminar a lo largo de una placa plana.

Como es mucho más fácil hacer medidas de la fuerza de arrastre que de la transferencia de calor, para el caso de valores medios se puede poner:

$$\frac{C_w}{2} = St Pr^{2/3} = \frac{h_c}{c_p V_0} Pr^{2/3}$$

en la que C_w es el coeficiente de arrastre medio y St el número de Stanton medio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la fuerza de arrastre F_a queda en la forma:

$$F_a = \frac{(L a) C_w V_0^2}{2} = \frac{(L a) h_c V_0^2}{c_p V_0} = (L a) \frac{h_c}{c_p} V_0$$

XI.6.- CAPA LIMITE TURBULENTA PARA PLACA PLANA

No existe una teoría exacta que permita estudiar la capa límite turbulenta; sin embargo sí existen modelos empíricos que han permitido la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones de la capa límite.

El reparto de velocidades para la placa plana es aproximadamente logarítmico, habiéndose obtenido al efecto los siguientes resultados experimentales:

$$\text{Para, } 10^5 < Re < 10^7 ; \quad \frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{F}} , \text{ con, } m = 7, F = \frac{9}{7}$$

El valor de θ de la forma:

$$\theta = \frac{1}{x} \int_0^x u (V_0 - u) dy$$

se puede aplicar también al régimen turbulento, por cuanto en su demostración no se ha fijado la forma de la distribución de velocidades en la capa límite, por lo que la distribución de velocidades u/V_0 puede ser, para placa plana, de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{R}}$$

y para flujo turbulento por el interior de tuberías, (Nikuradse):

$$\frac{u}{V_{\text{máx}}} = \sqrt{\frac{y}{R}}$$

En estas circunstancias Blasius dedujo experimentalmente que:

$$\delta_0 = 0,0288 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{x}{V_0}}, \text{ con, } 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$$

Siguiendo el mismo método que para el cálculo de la capa límite laminar:

$$\delta_0 = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^{\frac{u}{V_0}} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\} = V_0^2 \frac{1}{x} \left[\int_0^{\sqrt{\frac{y}{R}}} \left\{1 - \sqrt{\frac{y}{R}}\right\} dy \right] = \frac{7}{72} V_0^2 \frac{d}{dx}$$

Igualando las expresiones en δ_0 :

$$\frac{7}{72} V_0^2 \frac{d}{dx} \delta_0 = \delta_0 = 0,0228 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{x}{V_0}}$$

$$\sqrt[4]{x} d\delta_0 = 0,234 \sqrt[4]{\frac{x}{V_0}} dx ; \quad \delta_0^{5/4} = 0,292 \sqrt[4]{\frac{x}{V_0}} x ; \quad \frac{\delta_0}{x} = \frac{0,376}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

en donde se ha supuesto que la capa límite es turbulenta en el total de la longitud de la placa L de forma que para: $x = 0, \delta_0 = 0$.

El esfuerzo cortante τ_0 es:

$$\tau_0 = 0,0228 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{x}{V_0}} = 0,0228 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{0,376 x}{V_0 \sqrt[5]{Re_x}}} = 0,029 V_0^2 \sqrt[5]{\frac{x}{V_0}}$$

La fuerza de arrastre F_a por unidad de anchura de la placa es:

$$F_a = \int_0^L \tau_0 dx = 0,036 \frac{V_0^2 L}{\sqrt[5]{Re_L}} ; \quad C_x = \frac{0,0576}{\sqrt[5]{Re_x}} ; \quad C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} = \frac{1}{2} \frac{P}{V_0^2 L}$$

ecuaciones válidas en el intervalo en que lo es la ecuación de Blasius.

Para el número de Re crítico, $Re_c = 5 \cdot 10^5$, se tiene:

$$C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - 0,00334 \frac{x_c}{L} = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - \frac{1700}{Re_L}$$

Para valores del número de Re comprendidos en el intervalo, $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^9$, resulta:

$$C_{wx} = \frac{0,455}{(\log_{10} Re_L)^{2,58}}$$

El coeficiente de arrastre, que es exacto para toda la placa, y que incluye las zonas laminar y turbulenta, se determina mediante las expresiones:

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}} \frac{Re_C}{Re_L} + 0,074 Re_L^{-1/5} \left\{ 1 - \left(\frac{Re_C}{Re_L} \right)^{4/5} \right\} ; \quad Re_L > 10^7$$

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}} \frac{Re_C}{Re_L} + \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_L)} - \left(\frac{Re_C}{Re_L} \right) \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_C)} ; \quad Re_L < 10^7$$

XI.7.- DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LIMITE

Cuando el gradiente de presiones se mantiene nulo a lo largo de la placa plana, la capa límite se desarrolla a lo largo de la misma, independientemente de su longitud. Pero si el gradiente de presiones es *adverso*, la presión aumenta en el sentido de la corriente, y el espesor de la capa límite crece rápidamente.

Por otro lado, el gradiente de presión adverso junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, si ambos actúan a lo largo de una distancia suficiente, el fluido de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo; en este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie a partir del punto de separación, conociéndose este fenómeno como *desprendimiento de la capa límite*.

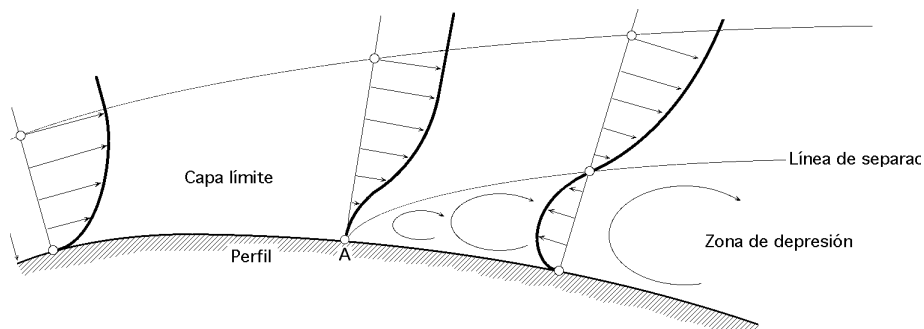


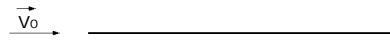
Fig XI.10.- Desprendimiento de la capa límite

El fenómeno se acentúa cuando el perfil es un conducto divergente; el flujo en las proximidades del contorno se va frenando continuamente hasta alcanzar el punto A de la Fig XI.10, en el que la velocidad se hace cero. La forma del contorno puede exigir una disminución mayor de la velocidad, cosa imposible, por lo que el fluido se separará de él, produciéndose al mismo tiempo un contraflujo originado por el gradiente de presiones adverso, es decir, aguas abajo del punto de desprendimiento se origina una zona de bajas presiones, que provocan la aparición de una fuerza depresiva dirigida en el sentido de la corriente, denominada *Resistencia de forma*, por depender hasta cierto punto de la geometría del perfil.

Tabla XI.2.- Coeficiente de arrastre C_w de algunos perfiles inmersos en una corriente fluida de velocidad V_0

$$F_a = \frac{C_w V_0^2 A_{\text{Frontal}}}{2}$$

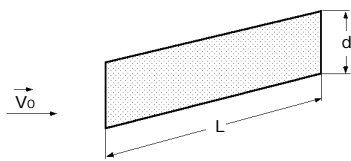
a) Placa plana paralela a la corriente



Régimen laminar: $C_w = \frac{1,33}{\sqrt{Re}}$

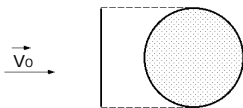
$$Re < 10^7 \quad C_w = \frac{0,074}{\sqrt[3]{Re}} \quad ; \quad Re > 10^7 \quad C_w = \frac{0,455}{\{\log_{10} Re\}^{2,58}}$$

b) Placa plana perpendicular a la corriente, $Re > 10^3$



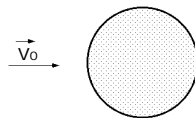
L/d	1	5	10	20	30	
C_w	1,18	1,2	1,3	1,5	1,6	1,95

c) Disco circular normal a la corriente



$Re > 10$; $C_w = 1,17$

d) Esfera

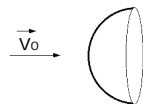


$Re < 1$ $C_w = 24 \sqrt{Re}$

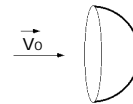
$10^3 < Re < 3 \times 10^5$ $C_w = 0,47$

$Re > 3 \times 10^5$ $C_w = 0,20$

e) Hemisferio hueco

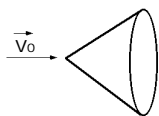


$10^4 < Re < 10^6$ $C_w = 0,34$



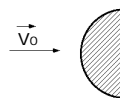
$10^4 < Re < 10^6$ $C_w = 1,42$

f) Cono de 60°

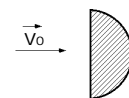


$Re = 10^5$; $C_w = 0,50$

g) Semicilindro

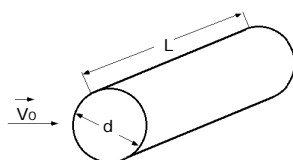


$10^4 < Re < 10^6$; $C_w = 0,42$



$10^4 < Re < 10^6$; $C_w = 1,17$

h) Cilindro normal a la corriente



$Re < 0,2$; $C_w = \frac{8 p}{Re \{2,2 - \lg_{10} Re\}}$

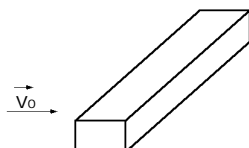
$10^3 < Re < 10^5$

L/d	1	5	10	20	30	
C_w	0,63	0,8	0,83	0,93	1	1,2

$Re > 5 \times 10^5$

L/d	5	
C_w	0,35	1,6

i) Prisma

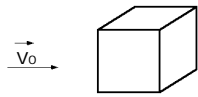


$Re = 3,5 \times 10^4$; $C_w = 2$

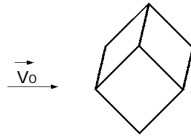


$10^4 < Re < 10^5$; $C_w = 1,6$

j) Cubo

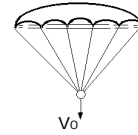


$Re = 10^5$; $C_w = 1,07$



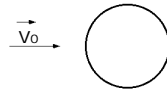
$Re = 10^5$; $C_w = 0,81$

k) Paracaídas (Baja porosidad),



$Re = 10^5$; $C_w = 1,2$

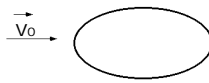
l) Cilindros elípticos



Relación 1/1

Régimen laminar, $C_w = 1,20$

Régimen turbulento, $C_w = 0,30$



Relación 2/1

Régimen laminar, $C_w = 0,60$

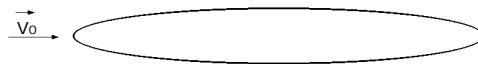
Régimen turbulento, $C_w = 0,20$



Relación 4/1

Régimen laminar, $C_w = 0,35$

Régimen turbulento, $C_w = 0,15$

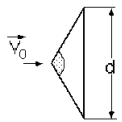


Relación 8/1

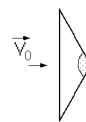
Régimen laminar, $C_w = 0,25$

Régimen turbulento, $C_w = 0,10$

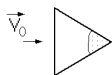
m) Cilindro triangular



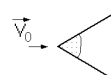
120° ; $Re > 10.000$; $C_w = 1,72$



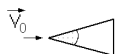
120° ; $Re > 10.000$; $C_w = 2,0$



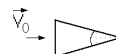
60° ; $Re > 10.000$; $C_w = 1,72$



60° ; $Re > 10.000$; $C_w = 1,39$

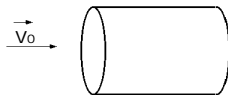


30° ; $Re > 100.000$; $C_w = 1,00$



30° ; $Re > 100.000$; $C_w = 1,80$

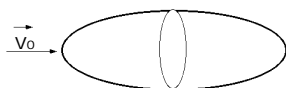
n) Cilindro de sección lenticular



$Re > 10^3$

L/d	0,5	1	2	4	8
C_w	1,15	0,9	0,85	0,87	0,99

o) Elipsoide



Relación $L/d = 0,75$

Régimen laminar, $C_w = 0,50$

Régimen turbulento, $C_w = 0,20$

Relación $L/d = 1,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,47$

Régimen turbulento, $C_w = 0,20$

Relación $L/d = 2,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,27$

Régimen turbulento, $C_w = 0,13$

Relación $L/d = 4,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,25$

Régimen turbulento, $C_w = 0,1$

Relación $L/d = 8,00$

Régimen laminar, $C_w = 0,20$

Régimen turbulento, $C_w = 0,08$

XII.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN FLUJO EN CONDUCTOS

XII.1.- FLUJO ISOTÉRMICO EN CONDUCTOS CIRCULARES; ECUACIÓN DE POISEUILLE

En un flujo laminar la corriente es relativamente lenta y no es perturbada por las posibles protuberancias del contorno, mientras que la viscosidad es relativamente grande, de forma que si por cualquier circunstancia se iniciase un fenómeno de turbulencia, la viscosidad lo destruiría.

La formulación que a continuación se desarrolla sirve tanto para tuberías lisas como para tuberías rugosas, suponiendo que las partículas de fluido, en un flujo laminar a lo largo de un tubo, se mueven en capas cilíndricas coaxiales; en el eje del tubo, el desplazamiento se realiza a mayor velocidad, mientras que en las paredes permanece en reposo.

La distribución de velocidades en una sección transversal cualquiera del tubo obedece a las fuerzas de rozamiento transmitidas de capa en capa.

Región de entrada.- La fricción y la velocidad de transferencia de calor son, por regla general, mayores en la región cercana a la entrada de un tubo que en una región lejana aguas abajo, donde los perfiles de velocidad y temperatura están totalmente desarrollados.

La longitud hidrodinámica de entrada L_H se define como la distancia que debe recorrer el fluido para que el coeficiente de rozamiento disminuya a menos del 5% de su valor totalmente desarrollado. Si el flujo es laminar y si el fluido penetra en el tubo por una entrada lisa y redondeada, el perfil inicial de la velocidad es uniforme; la longitud requerida para que el perfil de velocidades en flujo laminar sea invariante respecto a la posición axial, es la longitud de entrada hidrodinámica L_H que se puede aproximar por la ecuación de Langhaar:

$$L_H = 0,056 \text{ Re}_d d$$

siendo en la mayor parte de los casos despreciable, comparada con la longitud total.

También se puede definir una longitud térmica de entrada L_T que se puede definir como la distancia necesaria para que el número de Nusselt decrezca a menos del 5% de su valor totalmente desarrollado. Si en $x = 0$ el flujo es laminar y está ya totalmente desarrollado hidrodinámicamente, si la temperatura de la pared es uniforme, se tiene que:

$$L_T = 0,017 Re_d Pr d$$

y el n° de Nu para un tubo de longitud L es:

$$Nu_d = 3,66 + \frac{0,065 \frac{d}{L} Re_d Pr}{1 + 0,04 \left(\frac{d}{L} Re_d Pr \right)^{2/3}} ; \quad Re_d < 2300$$

Región de flujo desarrollado hidrodinámicamente.- Si se considera una parte del tubo, Fig XII.2, de diámetro $2R$, y un cilindro de fluido coaxial de diámetro $2r$, y longitud l , las condiciones de contorno implican que en su cara frontal la presión es p , y en la posterior la presión es, $p - p$, sobre el cilindro actuará una *fuerza de empuje* de la forma:

$$F_{emp} = r^2 p$$

La fuerza de rozamiento:

$$F_{roz} = S \frac{du}{dr} = \left| S = 2 r l \right| = 2 r l \frac{du}{dr}$$

es igual a la de empuje, por lo que:

$$2 r l \frac{du}{dr} = r^2 p ; \quad \frac{du}{dr} = \frac{r p}{2 l} \quad u = \frac{p}{2 l} \int_r^R r dr = \frac{p}{4 l} (R^2 - r^2)$$

que es la distribución del campo de velocidades, de tipo parabólico, en un plano longitudinal.

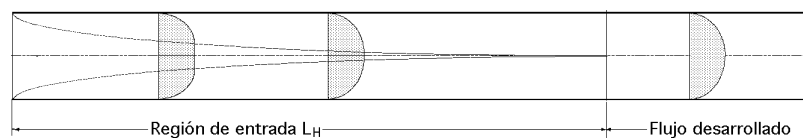


Fig XII.1.- Isotaquias de velocidades en la región de entrada

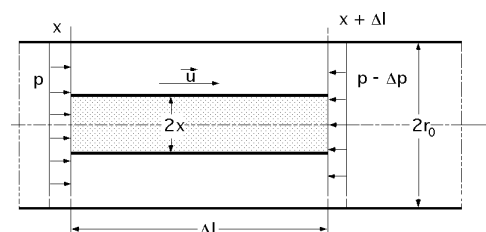


Fig XII.2.- Región de fluido desarrollado para la ecuación de Poiseuille

La expresión del *caudal* es:

$$Q = \int_0^R u \, d = \int_0^R u \, 2r \, dr = \frac{P}{4L} \int_0^R (R^2 - r^2) \, 2r \, dr = \frac{R^4}{8L} \frac{P}{L}$$

que es directamente proporcional a la variación de presión entre las secciones A y B, tramo de longitud $l = L$, a la cuarta potencia del radio de la conducción, e inversamente proporcional al tramo de tubería considerada de longitud L y a la viscosidad dinámica μ .

El caudal en función de la velocidad media \hat{u}_F es, $Q = \hat{u}_F$, por lo que la velocidad media se puede poner en la forma:

$$\hat{u}_F = u_F = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{R^4}{8L} \frac{P}{L}}{R^2} = \frac{R^2}{8} \frac{P}{L}$$

La *velocidad máxima* se tiene para $r = 0$, y es de la forma:

$$u_{\text{máx}} = \frac{R^2}{4} \frac{P}{L}$$

La relación entre la velocidad máxima y la velocidad media es: $u_{\text{máx}} = 2 u_F$

Despejando de la expresión de la velocidad media el valor de p , se obtiene la ecuación de *Poiseuille*:

$$P = \frac{8L}{R^2} u_F = \frac{32L}{d^2} u_F$$

La pérdida de carga total p correspondiente a la longitud de tubería L se puede poner en función de la pérdida de carga por unidad de longitud de tubería J , en la forma:

$$p = h = J L$$

expresión que se puede poner teniendo en cuenta el número de Reynolds, y el coeficiente de rozamiento, en la forma:

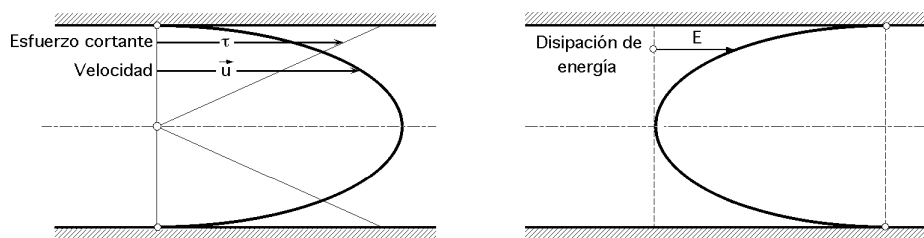


Fig XII.3.- Distribución del coeficiente de cortadura, y disipación de energía

$$J = \frac{1}{L} \frac{p}{g} = \frac{1}{g} \frac{32}{d^2} \frac{u_F}{Re} = \frac{64}{2 g d Re} = \frac{u_F^2}{2 g d}$$

Para el régimen laminar, $J = \frac{64}{Re}$

La ecuación de Poiseuille demuestra que la pérdida de carga en régimen laminar, para tuberías lisas o rugosas, es directamente proporcional a la primera potencia de la velocidad.

En la Fig XII.3 se muestran las distribuciones correspondientes al coeficiente de cortadura, velocidad \bar{u} y disipación de energía.

XII.2.- FLUJO EN CONDUCTOS NO CIRCULARES

FLUJO LAMINAR, INCOMPRESIBLE Y PERMANENTE, ENTRE DOS PLACAS PARALELAS.- En primer lugar se puede suponer que las placas son inclinadas formando un ángulo θ respecto a la horizontal, teniendo la placa superior una velocidad constante \bar{u}_0 ; el flujo entre las dos placas fijas es un caso particular, al hacer la velocidad de la placa móvil $u_0 = 0$.

La placa superior se mueve paralelamente en la dirección del flujo, existiendo a lo largo del mismo, en la dirección de x , una variación de presión.

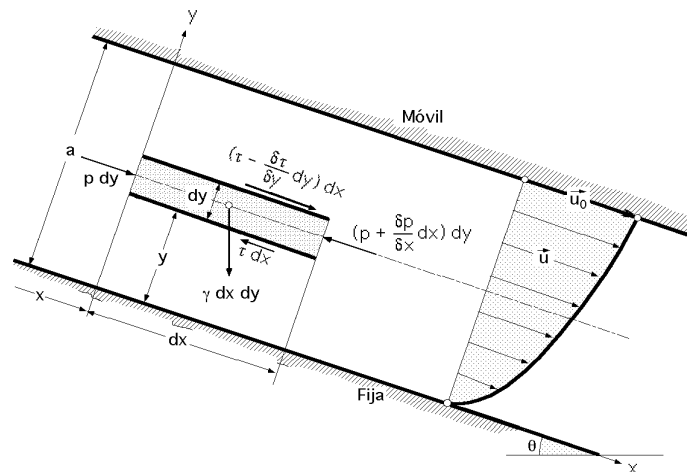


Fig XII.4.- Flujo laminar entre placas paralelas

Si se toma un elemento de fluido en forma de lámina, Fig XII.4, de dimensiones (dx, dy) , y anchura unidad, para un flujo permanente, la lámina se moverá con velocidad constante \bar{u} , siendo la ecuación del movimiento:

$$p dy - (p + \frac{p}{x} dx) dy - dx + (\tau - \frac{d\tau}{dy} dy) dx + dx dy \sin \theta = 0$$

que simplificada se reduce a:

$$\frac{p}{x} = \frac{p}{y} + \sin \theta ; -\frac{p}{x} + \frac{p}{y} - \frac{h}{x} = 0 ; \frac{p}{y} = \frac{p}{x} (p + h)$$

en las que se ha tenido en cuenta que:

$$\text{sen } \theta = - \frac{h}{x}$$

Como no existe aceleración en la dirección y el segundo miembro de esta ecuación no será función de y; integrándola se obtiene:

$$= y \frac{1}{x} (p + h) + C_1$$

Como, $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dy}$, sustituyendo resulta:

$$\frac{du}{dy} = y \frac{1}{x} (p + h) + C_1 ; \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{y} y \frac{1}{x} (p + h) + \frac{C_1}{y}$$

cuya integral es:

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) y^2 + \frac{C_1}{y} y + C_2$$

Para calcular C_1 y C_2 utilizaremos las condiciones en los límites, de la forma:

$$\text{Para, } \begin{matrix} y = 0, u = 0 \\ y = a, u = u_0 \end{matrix} \quad C_2 = 0$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) a^2 + \frac{C_1}{a} ; \quad \frac{C_1}{a} = \frac{u_0}{a} - \frac{a}{2} \frac{1}{x} (p + h)$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) y^2 + \frac{u_0}{a} y - \frac{a}{2} \frac{1}{x} (p + h) y = \frac{u_0}{a} y - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) (a y - y^2)$$

El gasto a través de una sección transversal cualquiera, es:

$$Q = \int_0^a u dy = \frac{u_0 a}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{x} (p + h) a^3$$

siendo la velocidad media \hat{u} entre placas:

$$\hat{u} = \frac{Q}{a} = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{x} (p + h) a^2$$

y el esfuerzo en la pared:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{du}{dy} \Big|_{y=0} = \left\{ y \frac{1}{x} (p + h) + \frac{u_0}{a} - \frac{a}{x} (p + h) \frac{a}{2} \right\} \Big|_{y=0} = \\ &= - \frac{1}{x} \left\{ (p + h) \left(y + \frac{a}{2} \right) \right\} \Big|_{y=0} + \frac{u_0}{a} = - \frac{1}{x} (p + h) \frac{a}{2} + \frac{u_0}{a} \end{aligned}$$

que demuestra que dicho esfuerzo cortante en la pared, es constante.

El caso particular en que las dos placas sean fijas se resuelve haciendo: $u_0 = 0$.

XII.3.- FLUIDOS QUE CIRCULAN POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS EN CONVECCIÓN FORZADA EN RÉGIMEN LAMINAR, CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE

Vamos a considerar un flujo forzado laminar por el interior de un conducto de sección circular de radio R , sometido a un flujo de calor uniforme q desde una pared a T_{pF} , Fig XII.5. Si se toma un volumen de control anular de longitud dx y espesor dr , en la región donde los perfiles de velocidad y temperatura están completamente desarrollados, un balance de energía permite determinar la distribución de temperaturas en la forma:

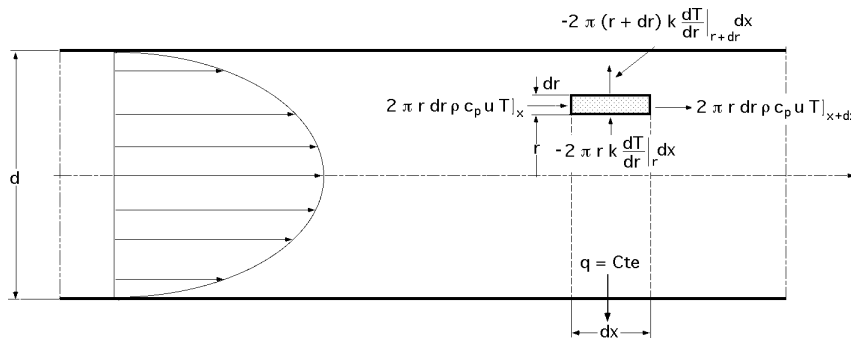


Fig XII.5.- Flujo forzado laminar con flujo de calor constante

Variación del flujo térmico en la dirección radial:

Entrada, $q_1 = -2 \pi r k \frac{T}{r} dx$

Salida, $q_2 = q_1 + \frac{q_1}{r} dr = q_1 - 2 \pi k \frac{T}{r} (r \frac{T}{r})_r dx dr$

Variación del flujo térmico en la dirección axial:

Entrada, $q_1^* = 2 \pi r dr c_p u T$

Salida, $q_2^* = q_1^* + \frac{q_1^*}{x} dx = q_1^* + 2 \pi r dr c_p u \frac{T}{x} dx$

Ecuación de la energía:

$$- 2 \pi k \frac{T}{r} (r \frac{T}{r})_r dx dr + 2 \pi r dr c_p u \frac{T}{x} dx = 0$$

$$\frac{T}{r} (r \frac{T}{r})_r = \frac{r c_p u}{k} \frac{T}{x} = \frac{r u}{k} \frac{T}{x}$$

Como para la distribución de velocidades de tipo parabólico (Régimen laminar), se tiene:

$$\frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \frac{r^2}{R^2} ; \quad u = u_{\text{máx}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2 V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$-\frac{1}{r} \left(r \frac{T}{r}\right) = \frac{1}{x} \frac{T}{x} \{2 V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\}$$

en la que para un flujo térmicamente desarrollado, $\frac{T}{x} = \text{Cte.}$

Integrándola se obtiene la distribución de temperaturas:

$$r \frac{T}{r} = \frac{2}{x} \frac{T}{x} V_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4 R^2}\right) + C_1 ; \quad dT = \left\{ \frac{2}{x} \frac{T}{x} V_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4 R^2}\right) + \frac{C_1}{r} \right\} dr$$

$$T = \frac{1}{x} \frac{T}{x} V_0 \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16 R^2}\right) + C_1 \ln r + C_2$$

Las constantes de integración se calculan teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

a) Para, $r = 0$; $T = T_C$, (Temperatura en el eje de la tubería), $u = 2 V_0$; $C_1 = 0$
 $C_2 = T_C$

$$T - T_C = \frac{V_0}{x} \frac{T}{x} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16 R^2}\right) ; \quad u = 2 V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

b) Para, $r = R$, se determina el coeficiente de transmisión de calor h_C .

La temperatura T_{pF} es, $T_{pF} = T_C + \frac{V_0}{x} \frac{T}{x} \frac{3 R^2}{16}$

El flujo de calor es, $q = \text{Cte}$; $-k \left(\frac{T}{x}\right)_{r=R} = h_C (T_{pF} - T_F)$; $h_C = \frac{-k \left(\frac{T}{x}\right)_{r=R}}{T_{pF} - T_F}$

que permite determinar el coeficiente de transmisión de calor por convección.

Como la temperatura media del fluido T_F se puede obtener a partir de la expresión:

$$T_F = \frac{\int_0^R c_p u 2 r dr}{\int_0^R u r dr} = \frac{\int_0^R T c_p u 2 r dr}{\int_0^R u r dr} = \frac{\int_0^R T u r dr}{\int_0^R u r dr} = \frac{\int_0^R 2 V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left\{ T_C + \frac{2 V_0}{x} \frac{T}{x} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16 R^2}\right) \right\} r dr}{\int_0^R 2 V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr} = T_C + \frac{7}{48} \frac{V_0 R^2}{x} \frac{T}{x}$$

por lo que la *distribución de temperaturas* y el *coeficiente de convección* se pueden poner en la forma:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{24}{11} \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^4 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right\}$$

$$h_C = \frac{k}{T_{pF} - T_F} \frac{T}{r} \Big|_{r=R} = \frac{\frac{k}{2} \frac{V_0 R}{x} \frac{T}{x}}{\left(T_C + \frac{3}{8} \frac{V_0 R^2}{x} \frac{T}{x}\right) - \left(T_C + \frac{7}{48} \frac{V_0 R^2}{x} \frac{T}{x}\right)} = \frac{24}{11} \frac{k}{R} = \frac{48}{11} \frac{k}{d}$$

Para flujo de calor uniforme:

$$h_c = \frac{48}{11} \frac{k}{d} = 4,3636 \frac{k}{d} ; \quad Nu = 4,3636$$

Para temperatura de pared constante (p.e. vapor condensando sobre la superficie exterior), a una distancia suficiente del punto en el que empieza el calentamiento corriente abajo, **el flujo se vuelve totalmente desarrollado térmicamente**, la forma del perfil de temperatura no cambia, y el n° de Nu tiene un valor constante dado por la ecuación:

$$T_{pF} = Cte \quad Nu_d = 3,656$$

La longitud de entrada hidrodinámica para flujo laminar es: $L_H = 0,056 Re_d d$

La longitud de entrada térmica para flujo laminar es: $L_T = 0,043 Re_d Pr d$

Una formulación analítica de la que se derivan los resultados de la Fig XII.6, fue desarrollada por Hausen en la forma:

$$\text{Flujo de calor uniforme, } Nu_x = Nu_d + \frac{K_1 \frac{d}{x} Re_d Pr}{1 + K_2 \left(\frac{d}{x} Re_d Pr \right)^n}$$

$$\text{Temperatura de pared uniforme, } Nu = Nu_d + \frac{K_1 \frac{d}{L} Re_d Pr}{1 + K_2 \left(\frac{d}{L} Re_d Pr \right)^n}$$

en la que Nu_x es el coeficiente de transmisión de calor local, y Nu es el coeficiente medio en el intervalo, $0 < x < L$.

Para aceites y otros fluidos en que la viscosidad varía con la temperatura, el término K_1 se multiplica por, $\left(\frac{F}{p_F} \right)^{0,14}$.

Para Q/A uniforme y distribución de velocidades parabólica:

$$Nu_d = 4,36 ; \quad K_1 = 0,023 ; \quad K_2 = 0,0012 ; \quad n = 1$$

Para Q/A uniforme y flujo desarrollado:

$$Nu_d = 4,36 ; \quad K_1 = 0,036 ; \quad K_2 = 0,0011 ; \quad n = 1 ; \quad Pr = 0,7$$

Para $T_{pF} = Cte$, y distribución de velocidades parabólica:

$$Nu_d = 3,66 ; \quad K_1 = 0,0668 ; \quad K_2 = 0,04 ; \quad n = 0,66$$

Para $T_{pF} = Cte$, y flujo desarrollado:

$$Nu_d = 3,66 ; \quad K_1 = 0,104 ; \quad K_2 = 0,016 ; \quad n = 0,8 ; \quad Pr = 0,7$$

evaluándose las propiedades del fluido a la temperatura media T_F entre la entrada y la salida.

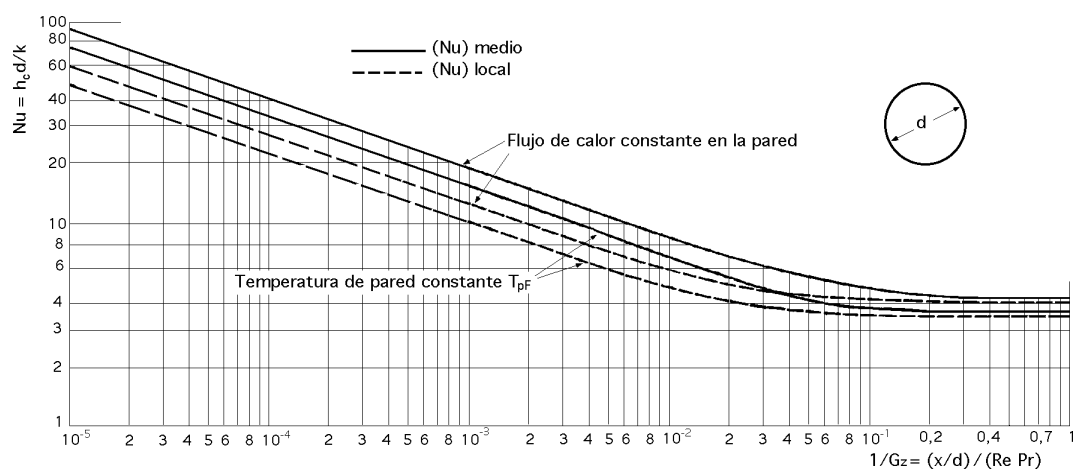
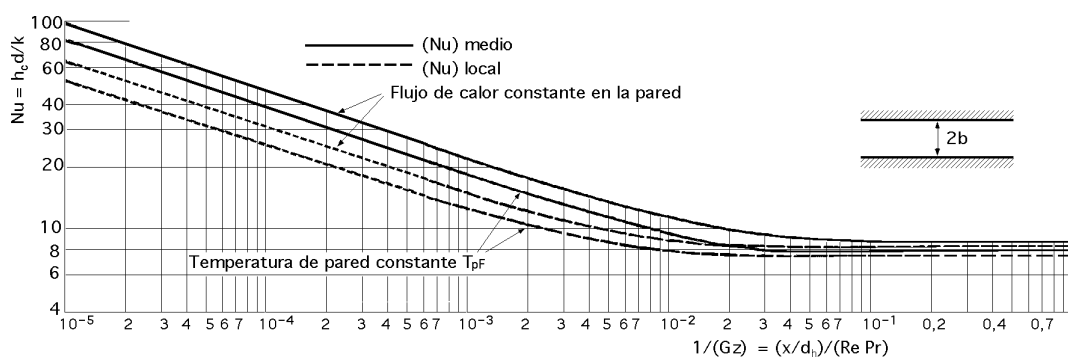
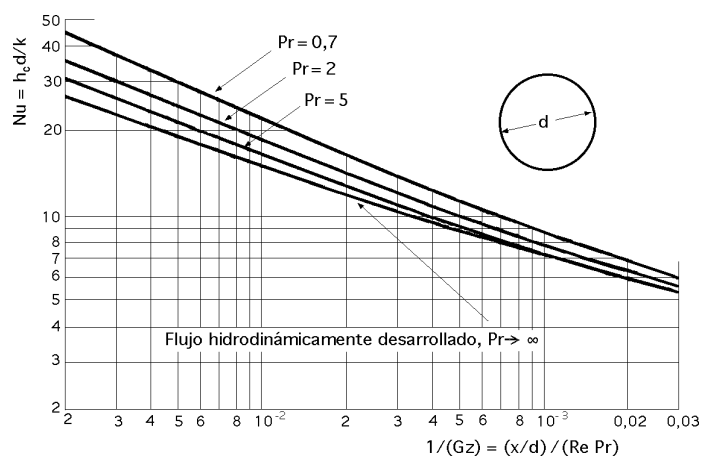


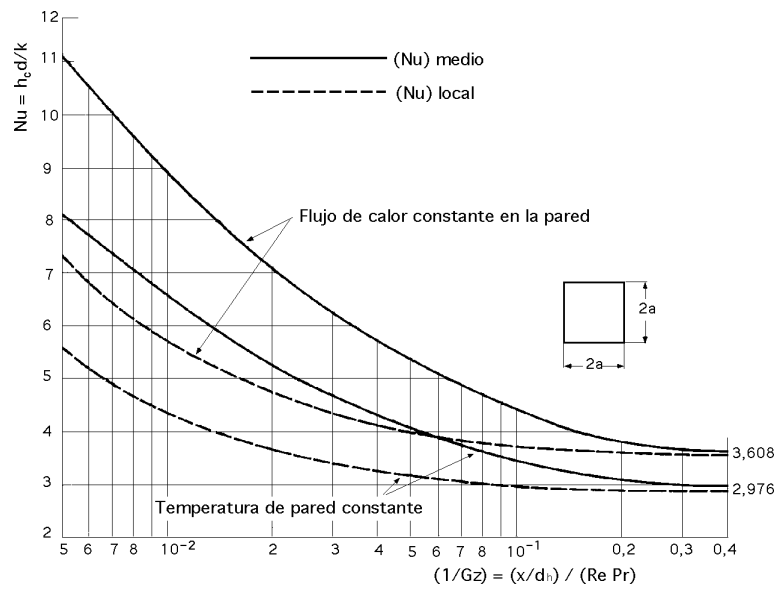
Fig XII.6.- Números de Nu medio y local para flujo laminar por el interior de un tubo cilíndrico, térmica e hidrodinámicamente desarrollados



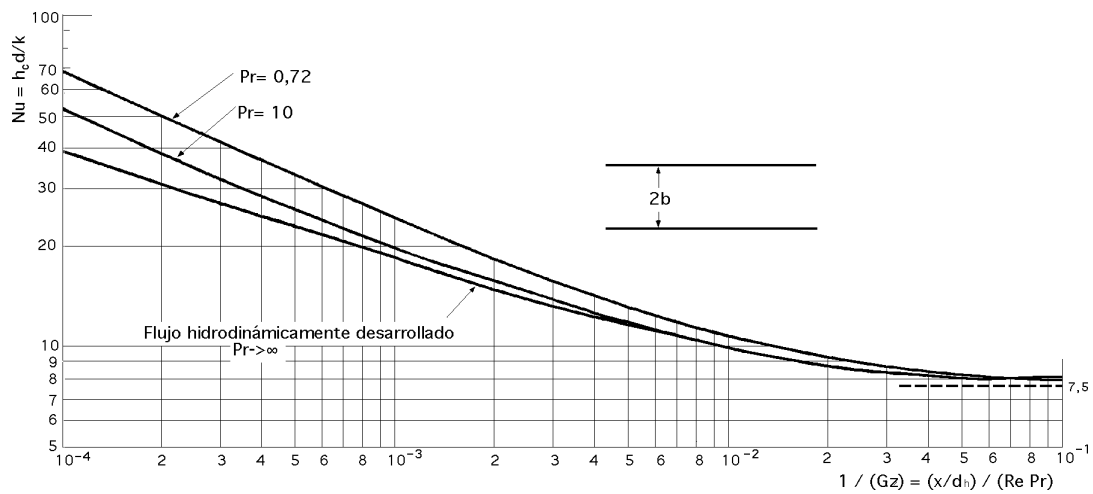
XII.7.- Números de Nu medio y local para flujo laminar entre placas planas paralelas, térmica e hidrodinámicamente desarrollados



XII.8.- Números de Nu medio y local para flujo laminar por el interior de un tubo cilíndrico, con temperatura de pared constante



XII.9.- Números de Nu medio y local para flujo laminar por el interior de un conducto cuadrado, térmica e hidrodinámicamente desarrollados



XII.10.- Números de Nu medio para flujo laminar entre dos placas paralelas con temperatura de pared constante

XIII.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN, ANALOGÍAS Y ANÁLISIS DIMENSIONAL

XIII.1.- ANALOGÍA ENTRE LA TRANSMISIÓN DE CALOR Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN FLUJO TURBULENTO

CAPA LÍMITE TÉRMICA SOBRE PLACA PLANA.- En una corriente fluida que circula sobre una placa plana en régimen turbulento, se pueden distinguir dentro de la capa límite según una misma sección transversal, tres subcapas de fluido contenidas en la capa límite térmica, con unos límites de separación no muy bien diferenciados, Fig XIII.1.

a) La primera, *subcapa viscosa*, se encuentra en las proximidades de la pared; en ella prácticamente no existen remolinos y, por lo tanto, la variación de la cantidad de movimiento se debe exclusivamente a la viscosidad.

b) La segunda zona, *subcapa de transición*, se corresponde con un régimen intermedio, y en ella se produce una variación de la cantidad de movimiento debido a la viscosidad y a la turbulencia.

c) La tercera zona, *subcapa turbulenta*, se corresponde con la parte principal de la corriente que ocupa casi toda la sección transversal del tubo; es la zona en la que existen turbulencias de intensidad relativamente pequeña, aunque los remolinos sean grandes; los gradientes de la velocidad respecto a la distancia a la pared son relativamente pequeños, por lo que las variaciones de la cantidad de movimiento predominantes, son debidas a los esfuerzos de Reynolds τ_{turb} en régimen turbulento.

En lo que sigue se supondrá que tanto los gradientes de temperatura dentro de la capa límite térmica, como los gradientes de velocidades dentro de la capa límite hidrodinámica, están perfectamente desarrollados y superpuestos, cumpliéndose:

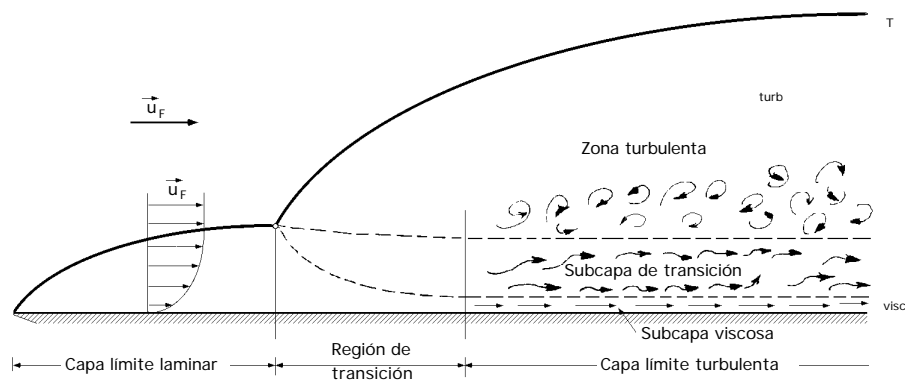


Fig XIII.1.- Subcapas de la capa límite térmica en régimen turbulento

Como, $\frac{\delta_T}{\delta} = \sqrt[3]{Pr}$, cuando, $Pr = 1$, las dos capas límite coinciden.

Si $Pr < 1$, la capa límite térmica es más gruesa que la hidrodinámica y cuando $Pr > 1$, sucede todo lo contrario.

Conductividad térmica.- Dentro de la subcapa viscosa el calor fluye principalmente por conducción, aunque también interviene algo la convección, debido a que en esa zona existe algún remolino; a medida que se avanza transversalmente dentro de la capa límite, los efectos de la turbulencia se hacen más notorios, predominando la transmisión de calor por convección.

En los fluidos ordinarios con números de Prandtl superiores a 0,6 la conducción térmica es totalmente despreciable en la subcapa turbulenta, y puede llegar a ser considerable en la zona de transición cuando el número de Prandtl se aproxime a la unidad; para números de Prandtl elevados, la conducción térmica es despreciable en esa zona.

Cantidad de movimiento.- El esfuerzo cortante en régimen turbulento sigue una regla similar a lo anterior respecto a la viscosidad. Bajo ciertas condiciones ideales, existe una correspondencia exacta entre el flujo de calor y la variación de la cantidad de movimiento; sin embargo, en un caso general, esta correspondencia será sólo aproximada y el considerarla como exacta podría conducir a grandes errores.

EXPRESIÓN GENERAL DE LA RELACIÓN BÁSICA DE LA ANALOGÍA ENTRE EL CALOR Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.- Cuando se conoce el coeficiente de rozamiento entre el fluido y la pared del conducto por el que circula, se puede determinar el coeficiente de transferencia de calor h_C , mediante la analogía entre la transferencia de calor y la cantidad de movimiento.

El **esfuerzo cortante** en la **capa límite turbulenta** se compone de dos términos:

$$\tau = \tau_{\text{visc}} + \tau_{\text{turb}} = \mu \frac{du}{dx} - \rho u_F^* v_F^*$$

en la que τ_{turb} se conoce como **esfuerzo de Reynolds**, siendo u_F^* la velocidad de agitación, o fluctuación de la velocidad instantánea u_i , alrededor del valor medio u_F :

$$u_i = u_F \pm u_F^* = u_F \pm u_{agit}$$

mientras que v_F^* es la fluctuación transversal de la velocidad instantánea v_i , de la forma:

$$v_i = v_F \pm v_F^* = v_F \pm v_{agit}$$

Para el flujo turbulento de calor, se puede considerar que el flujo total de calor q^* está compuesto por una componente conductiva q_{cond} y por una componente turbulenta q_{turb} , es decir:

$$q^* = q_{cond} + q_{turb} = -k \frac{dT}{dx} + c_F v_F^* T_F^*$$

$T_i = T_F \pm T_F^*$, es la temperatura instantánea
 en donde, $T_F = T$, es la temperatura media del fluido
 T_F^* , es la temperatura debida a la fluctuación

El término, $u_F^* v_F^*$, se obtiene a partir del significado físico del número de Prandtl que sugiere que la fluctuación u_F^* de la velocidad se relaciona con $\frac{du}{dx}$ a través de la ecuación:

$$u_F^* = l_m \frac{du}{dx}$$

en la que l_m es la longitud de mezcla del espesor l_m de la cantidad de movimiento de la capa límite hidrodinámica.

Asimismo, la fluctuación transversal v_F^* se admite es del mismo orden de magnitud que u_F^* pero de signo opuesto:

$$v_F^* = -l_m \frac{du}{dx}; \quad u_F^* v_F^* = -(l_m \frac{du}{dx})^2 = -l_m^2 \frac{du}{dx}$$

en la que l_m es la difusividad turbulenta de la cantidad de movimiento, $l_m = l_m^2 \frac{du}{dx}$

Para hallar la relación del término $v_F^* T_F^*$, con el gradiente de temperaturas local medio, se aplica un método similar, en la forma

$$T_F^* = l_c \frac{dT}{dx} \quad \text{y} \quad v_F^* = l_c \frac{du}{dx}$$

en la que l_c es la longitud de mezcla del espesor de energía l_c de la capa límite, por lo que se puede poner:

$$v_F^* T_F^* = -l_c^2 \frac{du}{dx} \frac{dT}{dx} = -l_c \frac{dT}{dx}$$

siendo l_c la difusividad turbulenta del calor: $l_c = l_c^2 \frac{du}{dx}$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de u y de q^* , se obtiene:

$$u = \frac{du}{dx} + \frac{m}{c} \frac{du}{dT} ; \quad - = \left(\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c} \right) \frac{du}{dT}$$

$$q^* = -k \frac{dT}{dx} + c_F v_F^* T_F^* = -k \frac{dT}{dx} - c_F \frac{dT}{dT} = - \left(k + c_F \right) \frac{dT}{dT}$$

$$\frac{q^*}{c_F} = - \left(\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c} \right) \frac{dT}{dT} = - \left(\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c} \right) \frac{dT}{dT}$$

ecuaciones que divididas entre sí, proporcionan las relaciones básicas para la circulación de fluidos por tuberías:

$$\frac{q^*}{c_F} = - \frac{\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c}}{\left(\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c} \right)} \frac{dT}{dT}$$

en las que tanto k como v_F^* son propiedades del fluido, mientras que m y c lo son del flujo. A partir de ellas se deducen las analogías entre la transferencia de calor y la cantidad de movimiento.

XIII.2.- ANALOGÍA DE REYNOLDS

Esta analogía es de aplicación al *flujo de fluidos por tubos rectos de sección circular*; se puede estudiar en su forma más general, teniendo en cuenta que la relación entre las difusividades moleculares α y ν , es igual a la relación entre las difusividades α_m y α_c .

Como el número de Prandtl es una relación entre difusividades, se puede poner:

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_c} = \frac{m}{c} = Pr ; \quad \frac{\alpha}{\nu} = Pr ; \quad \alpha_m = \alpha_c Pr$$

$$\frac{q^*}{c_F} = \frac{q_0^*}{c_F} = - \frac{\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c}}{\left(\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c} \right)} \frac{dT}{dT} = \frac{- \left(\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c} \right) Pr}{\left(\frac{k}{c_F} + \frac{m}{c} \right)} \frac{dT}{dT} = - \frac{Pr}{c_F} \frac{dT}{dT}$$

$$\int_0^{u_F} du = - \frac{c_F}{Pr} \frac{q_0^*}{c_F} \int_{T_{pF}}^{T_F} dT ; \quad u_F = \frac{c_F}{Pr} \frac{q_0^*}{c_F} (T_{pF} - T_F)$$

en la que q_0^* y q_0^* se toman en la superficie.

Al ser:

$$dL_0 = P \frac{d^2}{4} ; \quad P = \frac{4 L_0}{d} = \frac{L}{2 d} ; \quad \frac{u_F^2}{8} = \left| C_w = \frac{4}{4} \right| = \frac{C_w}{2} \frac{u_F^2}{2}$$

$$q_0^* = h_C (T_{pF} - T_F)$$

resultando finalmente:

$$u_F = \frac{C_w}{8 Pr h_C} \frac{u_F^2}{(T_{pF} - T_F)} (T_{pF} - T_F) = \frac{C_w}{8 Pr h_C} \frac{u_F^2}{(T_{pF} - T_F)} ; \quad h_C = \frac{C_w}{8 Pr} \frac{u_F}{(T_{pF} - T_F)}$$

$$St = \frac{Nu}{Re \, Pr} = \frac{h_c}{c_{pF} u_F} = \frac{1}{8 \, Pr} = \frac{C_w}{2 \, Pr}$$

que concuerda bastante bien con la ecuación:

$$C_w = 2 \, St_x \, Pr^{2/3}$$

para números de Pr próximos a la unidad.

Si los valores de St_x se toman de la ecuación:

$$St_x = 0,184 \, Re_d^{-0,2}, \text{ en el campo, } \frac{L}{d} = 0,623 \, Re_d^{0,8} \sqrt{Pr}$$

siendo L la distancia necesaria para que en el flujo turbulento el factor de fricción f_x llegue a ser constante, se tiene:

$$Nu = St \, Re_d \, Pr = \frac{0,184}{8 \sqrt{Pr}} \, Re_d \, Pr = \frac{0,184}{8} \, Re_d^{0,8} \sqrt{Pr} = 0,023 \, Re_d^{0,8} \sqrt{Pr}$$

$$10^4 < Re < 10^5 \quad ; \quad 0,5 < Pr < 100 \quad ; \quad \frac{L}{d} > 60$$

Reynolds propuso que todo el flujo está formado por una región altamente turbulenta, es decir, no considera la presencia de la subcapa viscosa, ni la subcapa de transición, por lo que las difusividades moleculares del momento μ y del calor λ son despreciables en comparación con las difusividades turbulentas $\mu_t \ll \mu$; $\lambda_t \ll \lambda$ por lo que no intervienen en el proceso.

Si se considera $Pr = 1$, resulta, $\mu_t = \lambda_t$, por lo que:

$$\frac{q^*}{q_0^*} = \frac{0}{q_0^*} = - \frac{\mu_t}{c} \frac{du}{c_F dT} = - \frac{du}{c_F dT}$$

ecuación que se puede integrar entre las condiciones de la pared $T = T_{pF}$, $u = u_F$ y las condiciones medias del flujo principal $T = T_F$, $u = u_F$ obteniéndose:

$$\int_{T_{pF}}^{T_F} dT = - \frac{q^*}{c_F} \int_0^{u_F} du \quad ; \quad T_{pF} - T_F = \frac{q_0^* u_F}{c_F} = \frac{q_0^* u_F}{0 \, c_F}$$

y como:

$$q_0^* = h_c (T_{pF} - T_F) = h_c \frac{q_0^* u_F}{0 \, c_F} \quad ; \quad 0 = \frac{u_F^2}{8}$$

se obtiene:

$$h_c = \frac{0 \, c_F}{u_F} = \frac{u_F \, c_F}{8}$$

El número de Stanton vale:

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{h_c}{u_F c_F} = \frac{1}{8} = \frac{C_w}{2}$$

que se podía haber obtenido haciendo $Pr = 1$, en la ecuación, $St = \frac{1}{8 Pr}$

$$St = \frac{1}{8 (Pr)}$$

XIII.3.- ANALOGÍA DE PRANDTL

Prandtl considera al flujo dividido en dos zonas, viscosa y turbulenta.

En la zona viscosa supone predominan las difusividades moleculares y en la zona turbulenta supone predominan las difusividades turbulentas.

Para la subcapa viscosa se tiene que, $m \ll 1$; $c \ll 1$

$$\frac{q^*}{q_0^*} = \frac{0}{q_0^*} = - \frac{du}{c_F dT} = - \frac{Pr}{c_F} \frac{du}{dT} \quad dT = - Pr \frac{q^*}{c_{pF}} du$$

que integrada entre las condiciones de la pared $T = T_{pF}$, $u = 0$ y las del borde de la subcapa viscosa $T = T_1$, $u = u_1$ proporciona:

$$T_{pF} - T_F = - Pr \frac{q_0^*}{c_{pF}} u_1$$

Para la *subcapa turbulenta* supone que $m \ll 1$, $c \ll 1$ y si m y c son del mismo orden $m = c$, se obtiene:

$$\frac{q^*}{q_0^*} = \frac{0}{q_0^*} = - \frac{m}{c} \frac{du}{c_F dT} = - \frac{du}{c_F dT} \quad dT = - \frac{q_0^*}{c_F} du$$

$$u = u_1, T = T_1$$

que integrada entre los límites,

$$u = u_F, T = T_F$$

proporciona la diferencia de temperaturas entre el borde de la capa límite y el borde de la subcapa turbulenta:

$$T_1 - T_F = \frac{q_0^*}{c_{pF}} (u_F - u_1)$$

y sumada a la obtenida anteriormente $T_{pF} - T_1$, permite obtener:

$$T_{pF} - T_F = \frac{q_0^*}{c_{pF}} Pr u_1 + \frac{q_0^*}{c_{pF}} (u_F - u_1) = \frac{q_0^* u_F}{c_{pF}} \left\{ 1 + \frac{u_1}{u_F} (Pr - 1) \right\}$$

Como el coeficiente de transmisión de calor h_C y el factor de fricción para el flujo por el interior del tubo, son de la forma:

$$q_0^* = h_C (T_{PF} - T_F) \quad ; \quad \tau_0 = \frac{\rho u_F^2}{8}$$

sustituidos en la ecuación anterior, se obtiene finalmente:

$$h_C = \frac{1}{8} \frac{c_F u_F}{1 + \frac{u_1}{u_F} (Pr - 1)} \quad ; \quad St = \frac{h_C}{c_F u_F} = \frac{1}{8 \left\{ 1 + \frac{u_1}{u_F} (Pr - 1) \right\}}$$

La velocidad u_1 del borde de la subcapa viscosa, se determina con ayuda de la ley de distribución de velocidades para flujos turbulentos, mediante, por ejemplo, la siguiente ecuación empírica:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \left(\frac{u_1}{5} \right)^2 = \frac{\rho u_F^2}{8} \quad ; \quad \frac{u_1}{u_F} = 5 \sqrt{\frac{1}{8}}$$

por lo que el número de St queda finalmente en la forma:

$$St = \frac{1}{8} \frac{1}{1 + 5 \sqrt{\frac{1}{8}} (Pr - 1)}$$

que se reduce a la analogía de Reynolds haciendo $Pr = 1$.

XIII.4.- ANALOGÍA DE VON KÀRMÀN

Von Kàrmàn amplió la analogía de Prandtl, dividiendo el campo de flujo en *tres subcapas diferentes, viscosa, de transición y turbulenta*. Hizo suposiciones similares a las de Prandtl sobre las magnitudes relativas de las difusividades moleculares y turbulentas del calor, y de las variaciones de la cantidad de movimiento en la subcapa viscosa y en la zona turbulenta, incorporando además los efectos de la subcapa de transición, considerando que las difusividades molecular y turbulenta α_m de esta subcapa, eran del mismo orden de magnitud.

La analogía de Kàrmàn entre la transferencia de calor y la cantidad de movimiento en un flujo turbulento, dentro de un tubo circular, se expresa por la siguiente ecuación:

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{h_C}{c_F u_F} = \frac{1}{8} \frac{1}{1 + 5 \sqrt{\frac{1}{8}} \left\{ (Pr - 1) + \ln \frac{5 Pr + 1}{6} \right\}} = \left| \frac{C_w}{2} \right| = \frac{\frac{C_w}{2}}{1 + 5 \sqrt{\frac{C_w}{2}} \left\{ (Pr - 1) + \ln \frac{5 Pr + 1}{6} \right\}}$$

que da muy buenos resultados para valores de $Pr < 30$.

Si, $C_w = \frac{0,0576}{\sqrt[5]{Re_x}}$, resulta:

$$Nu_x = \frac{0,0288 Re_x^{0,8} Pr}{1 + 0,849 Re_x^{-0,1} \{ (Pr - 1) + \ln \frac{5 Pr + 1}{6} \}}$$

Para un flujo totalmente desarrollado hidrodinámicamente el valor del coeficiente de rozamiento se obtiene del diagrama de Moody, o de las ecuaciones que lo definen, de la forma:

Para tuberías lisas, $\frac{\bar{d}}{d} = 0$

$$= 0,3164 Re^{-0,25} \quad ; \quad 2000 < Re < 10^5 \quad \text{Blasius}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(\frac{Re \sqrt{f}}{2,51} \right) \quad ; \quad Re > 10^5 \quad \text{1ª Ec. de Kàrmàn-Prandtl}$$

Para tuberías rugosas:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \left(\frac{\bar{d}}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad ; \quad = f(Re, \frac{\bar{d}}{d}) \quad \text{Colebrook -White}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \frac{d}{2} + 1,74 \quad ; \quad = f(\frac{\bar{d}}{d}) \quad \text{2ª Ec. de Kàrmàn-Prandtl}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} \frac{d}{2} + 1,14 \quad ; \quad = f(\frac{\bar{d}}{d}) \quad \text{Nikuradse}$$

XIII.5.- ANALOGÍA DE COLBURN

Colburn modifica la ecuación de la analogía de Reynolds, por otra de la forma:

$$St = \frac{1}{2 Pr^{2/3}}, \quad \begin{array}{l} \text{(para tubos)} \quad ; \quad 0,7 < Pr < 160 \quad ; \quad Re > 10.000 \\ \text{(para placas)} \quad ; \quad 0,7 < Pr < 160 \quad ; \quad Re > 3,5 \cdot 10^5 \end{array}$$

Como la mayor resistencia a la transmisión de calor procede de la capa de fluido que se mueve en régimen turbulento, las propiedades del fluido se toman a la temperatura media de película, que representa fielmente las propiedades físicas de esta capa.

Para tubos lisos, el número de Stanton es de la forma:

$$St = \frac{1}{2 Pr^{2/3}} = \left| \right| = 0,046 Re^{-0,2} \left| \right| = \frac{0,023 Re^{-0,2}}{Pr^{2/3}} = \frac{h_c}{c_F u_F} = \frac{Nu}{Re Pr}$$

y el número de Nusselt como:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/3}$$

que es casi idéntica a la de Dittus-Boelter, no especificando si se trata de un calentamiento o un enfriamiento.

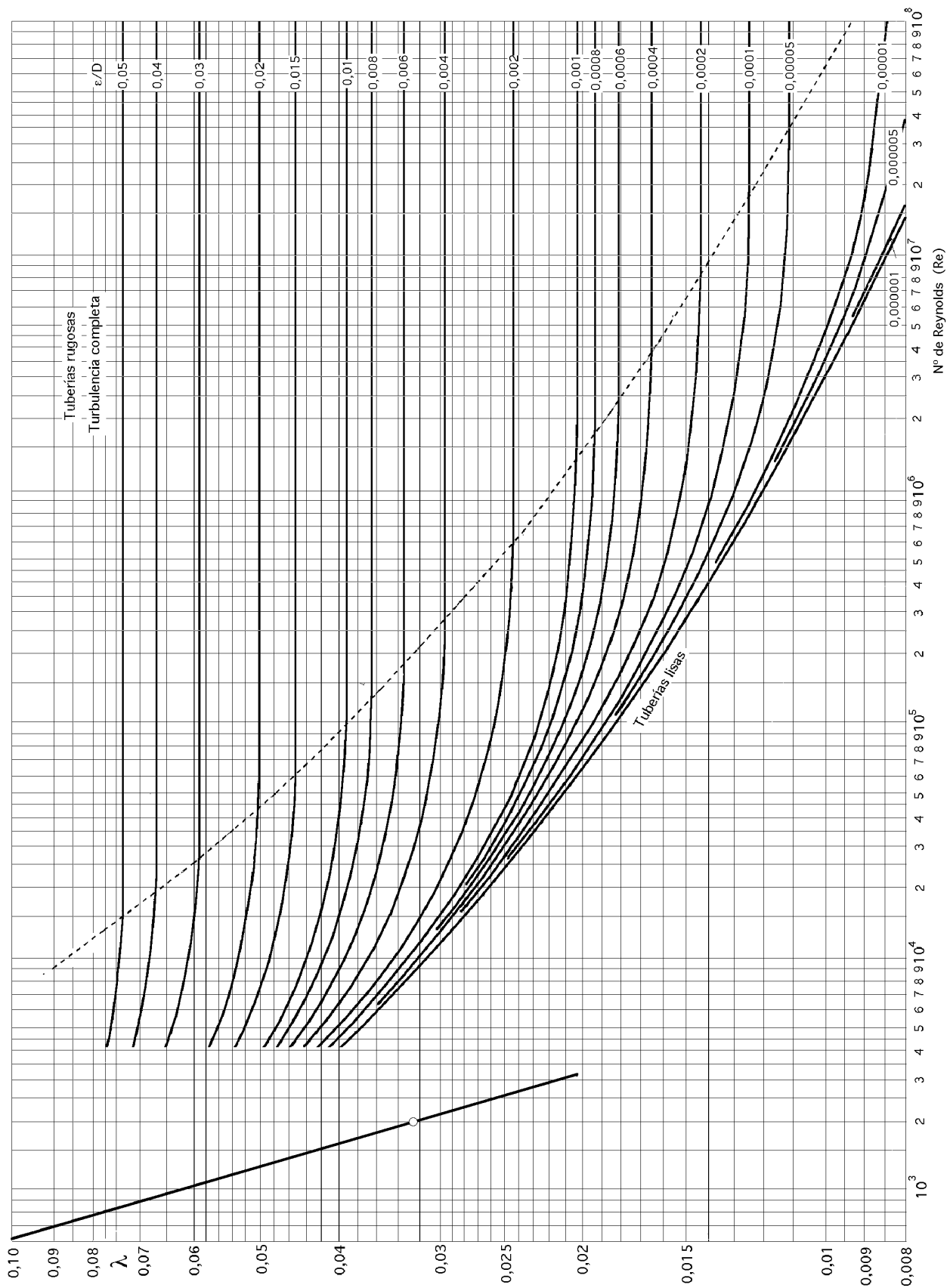


Fig XIII.11. - Diagrama de Moody

Para, $Re > 10.000$, la relación $\frac{L_i}{d}$ no influye en los fluidos que se calientan.

Para tener en cuenta el efecto de las variaciones radiales de la viscosidad debidas al gradiente de temperatura (pared calefactora-fluido), se introduce el factor adimensional, $(\frac{F}{pF})^{0,14}$, que se utiliza únicamente cuando la viscosidad varía marcadamente con la temperatura, tomando la ecuación que determina el valor de h_C la siguiente forma:

$$h_C = 0,023 \frac{k_F}{d} Re^{0,8} Pr^{1/3} (\frac{F}{pF})^{0,14}$$

Asimismo, la analogía de Colburn define un factor adimensional, función del número de Reynolds, de la forma:

$$= \frac{h_C}{c_F G} (\frac{c_F}{k})^{2/3} = 0,023 (\frac{d_i G}{k})^{-0,2}$$

que se utiliza en gran número de ecuaciones empíricas.

Con carácter aproximado se puede tomar, $= \frac{1}{8}$

XIII.6.- ANÁLISIS DIMENSIONAL

TEOREMA DE BUCKINGHAN.- El Teorema de Buckingham establece que en un problema físico en el que se tienen n variables linealmente independientes, que incluye m dimensiones, las variables se pueden agrupar en $(n-m)$ parámetros adimensionales, linealmente independientes.

Algunas de las variables que pueden intervenir en un determinado fenómeno son:

F , fuerza ; L , longitud ; u , velocidad ; densidad ; viscosidad dinámica ; g , gravedad ; c_s velocidad del sonido ; tensión superficial ; k_F conductividad térmica del fluido ; c_F calor específico a presión constante ; h_C coeficiente de convección.

Las **dimensiones** son: Longitud L , masa M , tiempo t y temperatura T .

Las **fuerzas** F pueden ser:

$F_{inercia}$ (debida a un gradiente de presiones); $F_{elástica}$; $F_{gravedad}$; $F_{viscosidad}$ (rozamiento); $F_{capilaridad}$ (tensión superficial).

Si A_1, A_2, \dots, A_n son las variables consideradas, como presión, velocidad, viscosidad, etc., que se supone son esenciales a la hora de resolver un problema, podemos suponer vienen relacionadas mediante una expresión funcional de la forma:

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$$

y si $1, 2, \dots, n-m$ representan los parámetros adimensionales que agrupan a las variables A_1, A_2, \dots, A_n , que incluyen, entre todas ellas, las m dimensiones, el Teorema de Buckingham establece

la existencia de una ecuación, función de estos parámetros, de la forma:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

El método que permite obtener los parámetros π consiste en seleccionar m de las n variables A_i , las cuales pueden tener diferentes dimensiones, pero deben ser linealmente independientes, de forma que contengan entre todas ellas las m dimensiones, pudiéndose emplear como variables repetitivas al combinarlas con las variables A restantes, formándose así cada parámetro adimensional π .

Por ejemplo se puede suponer que A_1, A_2 y A_3 contienen las dimensiones (M, L, t), masa, longitud y tiempo, no necesariamente en cada una de ellas, pero sí en forma colectiva.

El primer parámetro adimensional es, $\pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{x_2} A_3^{x_3} A_4$

El segundo parámetro adimensional es, $\pi_2 = A_1^{y_1} A_2^{y_2} A_3^{y_3} A_5$

y así sucesivamente hasta el parámetro $\pi_{n-m} = A_1^{z_1} A_2^{z_2} A_3^{z_3} A_n$

Los exponentes de estas ecuaciones se tienen que examinar de tal manera que cada parámetro resulte adimensional; se sustituyen las dimensiones de las variables A_i y los exponentes de M, L, t,... se igualan a cero por separado, formándose un sistema de ecuaciones (tres para el ejemplo propuesto), con tres incógnitas para cada parámetro π , pudiéndose determinar los exponentes x, y, z , y por lo tanto, los parámetros π correspondientes.

ECUACIÓN GENERAL DE RESISTENCIA.-Las variables que intervienen en el movimiento de un sólido inmerso en una corriente fluida se pueden relacionar mediante la ecuación:

$$\frac{F}{A_L} = f(V_0, L, \mu, \rho)$$

siendo la matriz correspondiente de la forma:

	F/A _L	V ₀	L	μ	ρ
M	1	0	0	1	1
L	-1	1	1	-3	-1
t	-2	-1	0	0	-1

Si por ejemplo se eligen como variables linealmente independientes V_0, L, ρ , su determinante es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

y como el número de variables n que intervienen en el fenómeno es 5 y el número de dimensiones m

es 3, resulta que el número de parámetros adimensionales que se pueden formar son 2, π_1 y π_2 :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (V_0)^{x_1} (L)^{x_2} (\mu)^{x_3} = (L t^{-1})^{x_1} (L)^{x_2} (M L^{-3})^{x_3} (M L^{-1} t^{-1}) = \\ &= (L)^{x_1+x_2-3x_3-1} (M)^{x_3+1} (t)^{-x_1-1} = (L)^0 (M)^0 (t)^0 \\ \pi_2 &= (V_0)^{y_1} (L)^{y_2} (\mu)^{y_3} \frac{F}{A_L} = (L t^{-1})^{y_1} (L)^{y_2} (M L^{-3})^{y_3} (M L^{-1} t^{-2}) = \\ &= (L)^{y_1+y_2-3y_3-1} (M)^{y_3+1} (t)^{-y_1-2} = (L)^0 (M)^0 (t)^0\end{aligned}$$

Los parámetros π_1 y π_2 proporcionan los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_3 + 1 &= 0 \\ x_1 + 1 &= 0 & x_1 = -1 ; \quad x_2 = -1 ; \quad x_3 = -1 ; \quad \pi_1 &= V_0^{-1} L^{-1} \mu^{-1} = Re^{-1} \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 1 &= 0 \\ y_3 + 1 &= 0 \\ y_1 + y_2 - 3y_3 - 1 &= 0 & y_1 = -2 ; \quad y_2 = 0 ; \quad y_3 = -1 ; \quad \pi_2 &= V_0^{-2} L^{-1} \frac{F}{A_L} \\ y_1 + 2 &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{F}{A_L} = \pi_2 V_0^2 = \frac{1}{2} (2 - \pi_2) V_0^2 = \frac{1}{2} C_w V_0^2$$

que es la forma que toma la ecuación de resistencia, ya demostrada anteriormente.

ECUACIÓN GENERAL DE LA PERDIDA DE CARGA EN UNA CONDUCCIÓN CILÍNDRICA.-

En un conducto de sección circular la pérdida de presión debida a la fricción se conoce como pérdida de carga P , que multiplicada por la sección transversal A_T tiene que ser igual a la pérdida por fricción F , o fuerza de arrastre, en la forma:

$$\begin{aligned}F &= P \frac{d^2}{4} = \frac{1}{2} (2 - \pi_2) V_0^2 A_L = \frac{1}{2} C_w V_0^2 d L \\ P &= \frac{1}{2 d} (8 - \pi_2) V_0^2 L = \frac{V_0^2 L}{2 d} = \frac{8 C_w V_0^2 L}{2 d}\end{aligned}$$

en la que el valor de π_2 se determina mediante formulación empírica o ábacos y diagramas, de entre los que destaca el diagrama de Moody.

MÉTODO BÁSICO DE ANÁLISIS DIMENSIONAL.- Consiste en reducir al mínimo el número de variables que pueden intervenir en un problema, formando con las mismas una serie de grupos adimensionales independientes. En este método todas las ecuaciones racionales se pueden hacer adimensionales con un cierto número de términos independientes; las variables se acomodan en una ecuación dimensional única, de forma que la combinación de variables para formar grupos o términos adimensionales, proporciona un número de grupos independientes siempre menor que el de variables originales.

El proceso se puede iniciar identificando sólo aquellas variables que son significativas del problema; después se agrupan en una ecuación funcional y se determinan sus dimensiones.

Como aplicación directa del método, vamos a hacer un estudio inicial de la transmisión de calor desde un tubo cilíndrico a un fluido que circula por su interior en régimen turbulento.

Si se considera un flujo en convección forzada, y que el tubo está limpio y sin incrustaciones, los coeficientes de película h_C se determinan experimentalmente como función de un cierto número de factores que representan las características dinámicas del flujo y las propiedades físicas del fluido.

El frotamiento del fluido supone un intercambio de energía entre el mismo y la superficie interna del tubo, mientras que la transmisión de calor por convección forzada supone un intercambio de energía térmica entre la superficie del tubo y el fluido; ambos fenómenos dependen del grado de turbulencia del fluido.

En general el frotamiento de un fluido en circulación forzada depende de los siguientes factores:

a) *Diámetro interior del tubo d_i* ; b) *Longitud del tubo L* ; c) *Velocidad media del fluido u_F en el intervalo correspondiente a la longitud L* ; d) *Densidad del fluido* ; e) *Viscosidad dinámica del fluido* ; f) *Rugosidad relativa del tubo ϵ/d_i*

La transmisión de calor depende de la conductividad k_F del fluido y de su calor específico a presión constante c_F ; la determinación del coeficiente h_C de la transmisión de calor por convección forzada, se puede iniciar a partir de la ecuación:

$$\frac{Q}{A_L T} = h_C = f(d_i, u_F, \rho, \mu, L, k_F, c_F, \frac{\epsilon}{d_i})$$

que se puede poner también en la forma:

$$F(d_i, u_F, \rho, \mu, L, k_F, c_F, \frac{\epsilon}{d_i}) = 0$$

y que adimensionalmente puede expresarse por la matriz que se indica a continuación:

	d_i	u_F	ρ	μ	L	k_F	c_F	h_c
Masa M	0	0	1	1	0	1	0	1
Longitud L	1	1	-3	-1	1	1	2	0
Tiempo t	0	-1	0	-1	0	-3	-2	-3
Temperatura T	0	0	0	0	0	-1	-1	-1

de 7 variables y cuyo discriminante es de razón 4, por lo que habrá que especificar de antemano el valor de 3 variables cualesquiera.

El valor de h_C se puede expresar en la forma adimensional siguiente:

$$h_C = d_i^a u_F^b \rho^c \mu^d L^e k_F^f c_F^i$$

$$(M t^{-3} T^{-1}) = (L)^a (L t^{-1})^b (M L^{-3})^c (M L^{-1} t^{-1})^d (L)^e (M L t^{-3} T^{-1})^f (L^2 t^{-2} T^{-1})^i =$$

$$= M^{c+d+f} L^{a+b-3c-d+e+f+2i} t^{-b-d-3f-2i} T^{-f-i}$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$c + d + f = 1$$

$$a + b - 3c - d + e + f + 2 = 0$$

$$b + d + 3f + 2i = 3$$

$$f + i = 1$$

que es un sistema de 4 ecuaciones linealmente independientes, con 7 incógnitas, pudiéndose fijar 3 incógnitas, por ejemplo (i, b, e) y poner las otras 4 en función de ellas, quedando:

$$f = 1 - i$$

$$d = 1 - c - f = i - c = 3 - b - 3f - 2i = 3 - b - 3 + 3i - 2i = -b + i$$

$$c = b$$

$$a = -b + 3c + d - e - f - 2i = -1 + b - e$$

por lo que:

$$h_C = d_i^{-1+b-e} u_F^b b^{-b+i} L^e k_F^{1-i} c_F^i = \left(\frac{d_i}{k_F}\right)^{-1} \left(\frac{d_i u_F}{L}\right)^b \left(\frac{d_i}{L}\right)^{-e} \left(\frac{c_F}{k_F}\right)^i$$

que a su vez se puede poner en la forma:

$$\frac{h_C d_i}{k_F} = \left(\frac{d_i u_F}{L}, \frac{d_i}{L}, \frac{c_F}{k_F}\right)$$

y que para la transmisión de calor por convección forzada, indica que si se efectúan una serie de pruebas que difieran solamente en el valor de la velocidad u_F , con los valores que así se obtengan, junto con los de h_C medidos experimentalmente, se pueden determinar la función o funciones que ligan a los grupos adimensionales

$$Re = \frac{d_i u_F}{\nu} = \frac{d_i u_F}{\mu/\rho} ; \quad Nu = \frac{h_C d_i}{k_F} ; \quad Pr = \frac{c_F}{k_F}$$

que sólo serán válidas para valores particulares de los demás grupos adimensionales; por lo tanto:

$$Nu = (Re, Pr, \frac{d_i}{L})$$

modelo que no admite cambios de estado en el fluido que circula; la formulación desarrollada es muy adecuada para estudiar la influencia de la velocidad u_F sobre el coeficiente de transmisión de calor por convección forzada h_C de un sistema cualquiera, pues estas dos variables aparecen una sola vez.

El procedimiento normal para determinar los exponentes (b, e, i) a partir de datos experimentales consiste en igualar el calor transmitido al fluido por convección, con la variación de entalpía que experimenta por esta causa.

Calor transmitido al fluido por convección:

$$Q = h_C A_L (T_{pF} - T_F)$$

Variación de entalpía del fluido:

$$Q = m c_F (T_{sal} - T_{ent}) = A_T u_F c_F (T_{sal} - T_{ent}) = G A_T c_F (T_{sal} - T_{ent}) = G A_T (i_{sal} - i_{ent})$$

en la que:

G es la velocidad másica = $3600 u_F$, Kg/m² hora, viniendo u_F en m/seg

A_T es el área de la sección transversal del tubo correspondiente al diámetro interior

A_L es el área de la superficie de la pared en contacto con el fluido

Igualándolas se obtiene:

$$\frac{h_C}{c_F G} = \frac{A_T (T_{sal} - T_{ent})}{A_L (T_{pF} - T_F)} = St = \frac{Nu}{Re Pr}$$

El número de Stanton St se calcula a partir de datos de Laboratorio mediante la ecuación anterior.

Para *fluidos que se calientan en el interior de tubos*, se aplica satisfactoriamente la ecuación de Dittus-Boelter, de la forma:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4}$$

El número de Prandtl se define como la relación entre las difusividades moleculares y en la forma:

$$Pr = \frac{c_F}{k_F} = \frac{c_F}{k_F}$$

y el número de Nusselt, $Nu = \frac{h_C}{k_F} \frac{T}{T} L = \frac{h_C L}{k_F}$

como la relación entre el calor transmitido por convección y el transmitido por conducción, en la longitud L , siendo un número que tiene la misma forma que el de Biot, y del que se diferencia en que la conductividad térmica k_F es la del fluido.

XIV.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL

La complejidad de la mayoría de los casos en los que interviene la transferencia de calor por convección, hace imposible un análisis exacto, teniéndose que recurrir a correlaciones de datos experimentales; para una situación particular pueden existir diversas correlaciones procedentes de distintos grupos de investigación; además, con el paso del tiempo, determinadas correlaciones antiguas se pueden sustituir por otras más modernas y exactas, de forma que al final, los coeficientes de transferencia de calor calculados a partir de correlaciones distintas no son iguales, y pueden diferir, en general, en más de un 20%, aunque en circunstancias complicadas las discrepancias pueden ser mayores. En la convección natural, el fluido próximo a la pared se mueve bajo la influencia de fuerzas de empuje originadas por la acción conjunta de los cambios en su densidad y el campo gravitatorio terrestre.

XIV.1.- CORRELACIONES ANALÍTICAS PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN PLACA PLANA VERTICAL

Uno de los problemas más simples y comunes de convección natural acontece cuando una superficie vertical se somete a un enfriamiento o a un calentamiento mediante un fluido.

Por comodidad supondremos que las capas límite térmica e hidrodinámica coinciden $Pr = 1$; en principio, la capa límite es laminar, pero a una cierta distancia del borde, y dependiendo de las propiedades del fluido y del gradiente térmico, puede suceder la transición a régimen turbulento, lo cual sucede cuando $(Gr Pr) > 10^9$, Fig XIV.1; el número de Grashoff es de la forma:

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} \quad ; \quad = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\nu}{T} \right)_p = \frac{1}{\nu_F} \frac{\nu - \nu_F}{T - T_F} \quad ; \quad \text{Para un gas ideal,} \quad = \frac{1}{T} (K)$$

Dado que la convección natural es consecuencia de una variación de la densidad, el flujo correspondiente es un flujo compresible; pero, como la diferencia de temperaturas entre la pared y el

fluido es pequeña, se puede hacer un análisis, tanto de las componentes de la velocidad $u(x,y)$, $v(x,y)$ como de la temperatura $T(x,y)$, considerando a la densidad constante, excepto en el término

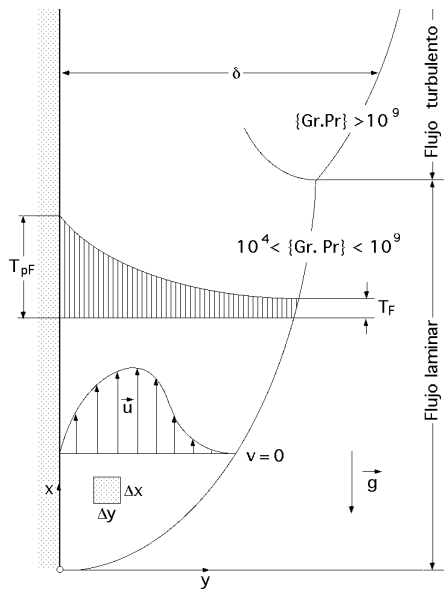


Fig XIV.1.- Convección natural en placa vertical

g , en el que debe considerarse como función de la temperatura, ya que la variación de g en este término es el causante de la fuerza ascensional correspondiente.

La tercera ecuación de Navier-Stokes proporciona:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -g - \frac{du}{dt} + \nu \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - g + \nu \frac{d^2u}{dy^2}$$

El gradiente de presiones a lo largo de la placa vertical es:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_F g ; \frac{1}{\rho} (-\rho_F g) = -g - \frac{du}{dt} + \nu \frac{d^2u}{dy^2}$$

siendo ρ_F la densidad del fluido fuera de la capa límite.

Como el fluido al calentarse o enfriarse modifica su densidad, en el intervalo de temperaturas T_F y T , se tiene:

$$g \left(\frac{\rho_F}{\rho} - 1 \right) = g \left(\frac{\rho_F}{\rho} - 1 \right)$$

siendo ρ_F la densidad del fluido a la temperatura T_F y ρ la densidad del fluido del interior de la capa límite a la temperatura T ; como el volumen específico del fluido es:

$$v = v_F \left\{ 1 + \beta (T - T_F) \right\} ; \frac{\rho_F}{\rho} = 1 + \beta (T - T_F) ; \frac{\rho_F}{\rho} - 1 = \beta (T - T_F)$$

$$g \left(\frac{\rho_F}{\rho} - 1 \right) = g \beta (T - T_F) = g \beta \Delta T$$

Teniendo en cuenta ecuaciones anteriores, la tercera ecuación de Navier-Stokes, (ecuación del momento), la ecuación de la energía y la ecuación de continuidad, quedan en la forma:

$$\text{Ecuación del momento, } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_F) + \nu \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\text{Ecuación de la energía, } u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{d^2T}{dy^2}$$

$$\text{Ecuación de continuidad, } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Las condiciones de contorno para una placa vertical isoterma son:

$$\text{Para, } y = 0 ; u = 0 ; v = 0 ; T = T_{pF}$$

$$y = \quad ; u = 0 ; T = T_F ; \frac{u}{Y} = 0 ; \frac{T}{Y} = 0$$

SOLUCIÓN INTEGRAL EN PARED ISOTERMA.- La ecuación integral del momento de la cantidad de movimiento de la capa límite es:

$$\frac{1}{x} \int_0^x u^2 dy = \frac{g}{0} (T - T_F) dy + \frac{2u}{Y^2} \Big|_{y=0}$$

en la que se ha supuesto que los espesores de las capas límite térmica e hidrodinámica son iguales.

La ecuación integral de la energía de la capa límite es:

$$\frac{1}{x} \int_0^x (T_F - T) u dy = \frac{T}{Y} \Big|_{y=0}$$

y los perfiles de velocidades y temperaturas:

$$\frac{u}{V} = \frac{Y}{x} (1 - \frac{Y}{x})^2 ; \quad \frac{T - T_F}{T_{pF} - T_F} = (1 - \frac{Y}{x})^2$$

en la que V es una velocidad ficticia, función de x.

Las expresiones de V y d se pueden poner en la forma:

$$V = C_1 x^a ; \quad d = C_2 x^b, \text{ con: } \begin{matrix} a = 0,5 \\ b = 0,25 \end{matrix}$$

Integrando las ecuaciones del momento y de la energía, resultan:

$$\frac{1}{105} \frac{1}{x} (V^2) = \frac{1}{3} g (T_{pF} - T_F) - \frac{V}{g} \quad (\text{Ecuación del momento})$$

$$2 \frac{T_{pF} - T_F}{30} = \frac{1}{30} (T_{pF} - T_F) \frac{1}{x} (V) \quad (\text{Ecuación de la energía})$$

y teniendo en cuenta que: $V = C_1 x^a ; \quad d = C_2 x^b$, resulta:

$$\frac{1}{x} = 3,93 \sqrt[4]{\frac{0,952 + Pr}{Gr_x Pr^2}}$$

$$V = 5,17 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{Gr_x}{0,952 + Pr}}$$

$$\frac{Q}{A} = -k \frac{T}{Y} \Big|_{y=0} = h_{cF} (T_{pF} - T_F) = \frac{2k}{x} (T_{pF} - T_F) ; \quad h_{cF} = \frac{2k}{x}$$

$$Nu_x = 0,508 \sqrt[4]{\frac{Gr_x Pr^2}{0,952 + Pr}} ; \quad Nu = \frac{4 Nu_x}{3} ; \quad Gr.Pr < 10^9$$

Si, $Ra > 10^9$, el flujo comienza a ser turbulento, y suponiendo un perfil de velocidades $m = 7$, se encuentra:

$$Nu_x = 0,0295 \left(\frac{Gr_x Pr^{7/6}}{1 + 0,494 Pr^{2/3}} \right)^{2/5}$$

$$Nu = 0,021 Ra_L^{2/5}$$

viniedo expresado h_C en, Kcal/hora m^2 $^{\circ}C$, la conductividad térmica k_F del fluido en, Kcal/ $m^{\circ}C$ y la velocidad másica G en, Kg/ m^2 hora.

PLACA ISOTÉRMICA.- Pohlhausen considera que los perfiles de velocidad y temperatura en convección natural presentan propiedades similares, en forma análoga a las observadas por Blasius para la convección forzada, de forma que:

$$= \frac{y}{x} \sqrt[4]{\frac{Gr_x}{4}} ; \quad = \frac{T - T_F}{T_{pF} - T_F} = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^2$$

La distribución de temperaturas permite determinar el flujo de calor local, de la forma:

$$\frac{Q}{A} = -k \frac{T}{y} \Big|_{y=0} = -\frac{k}{x} (T_{pF} - T_F) \sqrt[4]{\frac{Gr_x}{4}} \frac{d}{dx} \Big|_{x=0} = h_{cF} (T_{pF} - T_F)$$

obteniéndose el número de Nu_x local:

$$Nu_x = f(Pr) \sqrt[4]{\frac{Gr_x}{4}}$$

viniedo los valores de $f(Pr)$ en la Tabla XIV.1.

El número de Nu medio es:

$$Nu = \frac{4}{3} f(Pr) \sqrt[4]{\frac{Gr_L}{4}}$$

resultado válido para convección forzada en régimen laminar, en el intervalo, $10^4 < (Gr Pr) < 10^9$, con propiedades del fluido constantes, excepto la densidad; las propiedades se evalúan a la temperatura de referencia, de la forma:

$$T_{ref} = T_{pF} + 0,38 (T_F - T_{pF})$$

Tabla XIV.1

Pr	0,01	0,72	0,733	1	2	10	100	1000
f(Pr)	0,0812	0,5046	0,508	0,5671	0,7165	1,1694	2,191	3,966

PLACA CON FLUJO DE CALOR CONSTANTE.- Las ecuaciones del momento, energía y conti-

nuidad anteriores, son válidas para un flujo de calor uniforme, $\frac{Q}{A} = \text{cte}$, a lo largo de la placa; con esta condición se tiene:

$$Nu = F(Pr) \sqrt[4]{\frac{Gr_L}{4}}, \text{ siendo, } 0,95 F(Pr) = \frac{4}{3} f(Pr)$$

Los valores de $F(Pr)$ vienen dados en la Tabla XIV.2,

Pr	0,01	1	10	100
$F(Pr)$	0,335	0,811	1,656	3,083

XIV.2.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN PLACAS

Para la determinación de los coeficientes de transmisión de calor por convección natural, con *superficie isoterma* a T_p , en los casos de:

a) Pared vertical de altura L , (no se define la anchura)

b) Tubo vertical con, $\frac{d}{L} > \frac{35}{\sqrt[4]{Gr_L}}$

c) Tubo horizontal de diámetro d

se utiliza una ecuación general de la forma:

$$Nu_L = C (Ra_L)^n$$

El nº de Grashoff es, $Gr = \frac{g}{\alpha} T L^3$, y el nº de Rayleigh, $Ra = Gr Pr$

Las propiedades térmicas del fluido se toman a la temperatura media de la película, a excepción del coeficiente de dilatación térmica que se evalúa a la temperatura del fluido T_F .

Para el caso de un gas ideal el valor de α se puede aproximar por, $\frac{1}{T_F}$, con T_F en °K

T es la diferencia entre la temperatura de la pared y la del fluido

L es una longitud característica y los valores de C y n vienen dados en la Tabla XIV.3.

Estas ecuaciones se pueden aplicar a la convección libre laminar desde placas verticales isothermas o superficies con flujo térmico uniforme, tomando la temperatura de la superficie en el punto medio de la placa.

Para el estudio de la convección libre alrededor de placas planas rectangulares horizontales, se toma como longitud característica la media aritmética de sus dos dimensiones, o bien el 90% de su diámetro en el caso de discos circulares horizontales.

Tabla XIV.3.- Valores de las constantes de la ecuación de Nusselt para convección natural
Planos verticales y cilindros verticales

	$10^4 < Gr.Pr < 10^8$	$10^8 < Gr.Pr < 10^{10}$	$10^{10} < Gr.Pr < 10^{13}$
C	0,59	0,13	0,021
n	0,25	0,33	0,4

Planos horizontales y cilindros horizontales

	$10^4 < (Gr.Pr) < 10^9$	$10^9 < (Gr.Pr) < 10^{12}$
C	0,53	0,13
n	0,25	0,33

Superficie superior de placas calientes
o superficie inferior de una placa fría

	$2 \times 10^4 < (Gr.Pr) < 8 \cdot 10^6$	$8 \times 10^6 < (Gr.Pr) < 10^{11}$
C	0,54	0,15
n	0,25	0,33

Superficie inferior de placas calientes
o superficie superior de placas frías

$10^5 < (Gr.Pr) < 10^{11}$	C = 0,58	n = 0,20
----------------------------	----------	----------

CONVECCIÓN NATURAL SOBRE PLACA VERTICAL.- El espesor de la capa límite viene dado por la expresión:

$$\frac{\delta}{x} = 3,93 \sqrt[4]{\frac{0,952 + Pr}{Gr_x Pr^2}}$$

y el número de Nu_x local visto anteriormente, y que reproducimos por:

$$Nu_x = 0,508 \sqrt[4]{\frac{Gr_x Pr^2}{0,952 + Pr}} \quad ; \quad Nu = \frac{4 Nu_x}{3} \quad ; \quad Gr.Pr < 10^9$$

o por:

$$Nu_x = 0,0295 \left(\frac{Gr_x Pr^{7/6}}{1 + 0,494 Pr^{2/3}} \right)^{2/5} \quad ; \quad Ra > 10^9$$

El n° de Nusselt medio es:

$$Nu_L = 0,021 Ra_L^{2/5} \quad ; \quad Ra > 10^9$$

CONVECCIÓN NATURAL SOBRE PLACA VERTICAL A TEMPERATURA UNIFORME

a) Para la determinación del coeficiente de convección natural en *flujo laminar*, con temperatura de pared vertical uniforme, se pueden utilizar los valores de la Tabla XIV.1

$$\begin{aligned} n &= 0,25 \\ C &= 0,59 \end{aligned} \quad ; \quad Nu_L = 0,59 Ra_L^{0,25}, \text{ para: } \begin{aligned} 1700 &< Ra_L < 10^8 \\ 1 &< Pr < 10 \end{aligned}$$

b) Otra expresión para flujo laminar y cualquier valor del número de Prandtl es:

$$Nu_L = 0,68 + \frac{0,67 Ra_L^{0,25}}{\left\{ 1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right\}^{4/9}}, \text{ para: } \begin{aligned} Ra_L &< 10^9 \\ 1 &< Pr < 10 \end{aligned}$$

c) Para el *flujo de transición laminar-turbulento* se utilizan los siguientes valores:

$$n = 0,33 \quad ; \quad Nu_L = 0,13 Ra_L^{0,33} \quad , \quad \text{para:} \quad \begin{matrix} 10^8 < Ra_L < 10^{10} \\ 1 < Pr < 10 \end{matrix}$$

Estos coeficientes son válidos para, $1 < Pr < 10$, calculando las propiedades físicas de los fluidos a la temperatura media entre la pared T_{pF} y el fluido T_F .

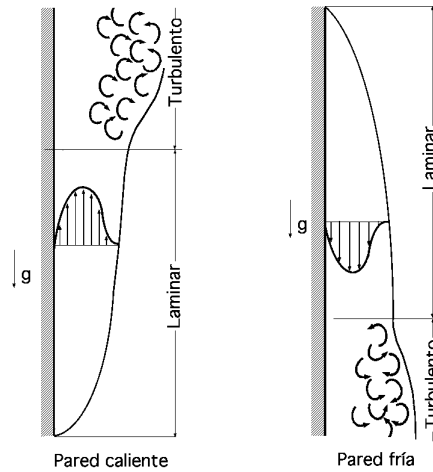


Fig XIV.2.- Capas límite laminar y turbulenta en la convección natural sobre paredes verticales

d) Para flujos con turbulencia muy desarrollada, $10^9 < Ra_L < 10^{12}$, se puede utilizar:

$$Nu_L = 0,68 + \frac{0,67 Ra_L^{0,25}}{\left\{1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right\}^{4/9}} \left\{1 + 1,6 \cdot 10^{-8} Ra_L\right\}^{1/12} \quad , \quad \text{para:} \quad \begin{matrix} 10^9 < Ra_L < 10^{12} \\ 1 < Pr < 10 \end{matrix}$$

en la que, $\quad = \left\{1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right\}^{-16/9}$

$$Nu_y = 0,059 \frac{Pr^{1/3} Ra_y^{2/5}}{\left\{1 + 0,494 Pr^{2/3}\right\}^{2/5}}$$

En la gráfica de la Fig XIV.3 se exponen las correlaciones anteriores en régimen laminar y turbulento, hacia o desde una placa plana vertical de altura L , considerando en el eje de ordenadas Nu_L y en el eje de abscisas $(Gr_L.Pr)$, que se pueden aplicar también al caso de cilindros verticales.

e) Una expresión que las engloba, válida tanto para régimen laminar como turbulento es:

$$\sqrt{Nu} = 0,825 + \frac{0,387 Ra_L^{1/6}}{\left\{1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{9/16}\right\}^{8/27}} \quad , \quad \text{para,} \quad 10^{-1} < Ra_L < 10^{12}$$

En la formulación propuesta, si una de las caras de la pared está aislada térmicamente, los valores del número de Nusselt serían la mitad de lo indicado en las fórmulas.

Para el caso particular del aire, a temperaturas normales, el coeficiente de transferencia de calor local para una placa vertical isotérmica se puede aproximar por las siguientes ecuaciones, teniendo en cuenta que para el aire la transición de régimen laminar a turbulento es $Gr_x = 10^9$:

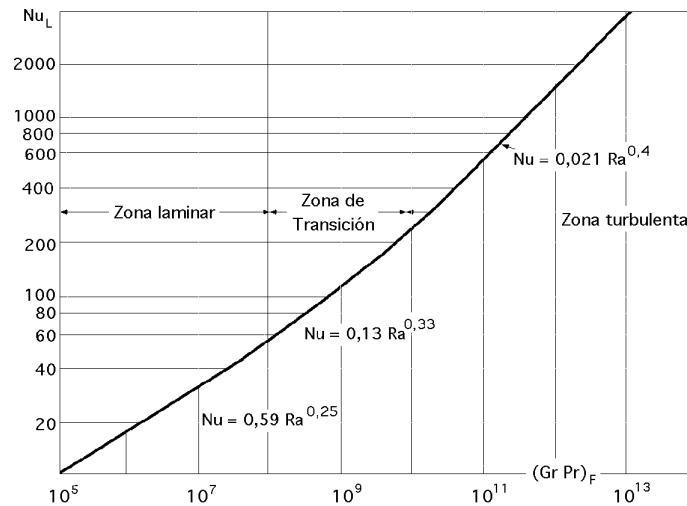


Fig XIV.3.- Correlación para la convección natural en placas y tubos verticales

Flujo laminar, $h_{c(x)} = 1,07 \sqrt[4]{\frac{T}{x}} \quad \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$

Flujo turbulento, $h_{c(x)} = 1,3 \sqrt[3]{T} \quad \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$

observándose que el coeficiente de convección local es independiente de x en régimen turbulento.

El coeficiente de convección medio para toda la placa vertical es:

$$h_c = \frac{1}{L} \int_0^L h_{c(x)} dx = \frac{1}{L} \left\{ \int_0^{x_{crít}} 1,07 \sqrt[4]{\frac{T}{x}} dx + \int_{x_{crít}}^L 1,3 \sqrt[3]{T} dx \right\} \quad \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

CONVECCIÓN NATURAL SOBRE PLACA VERTICAL CON FLUJO DE CALOR UNIFORME.-

En esta situación se utiliza un número de Grashoff modificado Gr_x^* , de la forma:

$$Gr_r^* = Gr_x Nu_x = \frac{g q_p x^4}{k^2}$$

siendo q_p el flujo de calor de la pared, y $Nu_x = \frac{x h_{cF(x)}}{k}$

Régimen laminar

$$Nu = 1,25 (Nu_x)_{x=L} \quad ; \quad Nu_x = 0,60 (Gr_x^* Pr)^{1/5} \quad ; \quad 10^5 < Gr_x^* Pr < 10^{11}$$

Otra expresión para convección natural laminar, con flujo de calor uniforme es:

$$Nu (Nu - 0,68) = \frac{0,67 (Gr_L^* Pr)^{1/4}}{\left\{ 1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right\}^{4/9}} \quad ; \quad 10^5 < Gr_L^* Pr < 10^{11}$$

Régimen turbulento

$$Nu = 1,136 (Nu_x)_{x=L} \quad ; \quad Nu_x = 0,568 (Gr_x^* Pr)^{0,22} \quad ; \quad 10^{13} < Gr_x^* Pr < 10^{16}$$

CONVECCIÓN NATURAL SOBRE UNA PLACA INCLINADA UN ANGULO θ . - Si la placa caliente se inclina un pequeño ángulo θ respecto a la vertical, se puede tomar un número de Grashoff igual al número de Grashoff calculado para placa vertical multiplicado por $\cos \theta$, es decir:

$$Gr = Gr_{\text{placa vertical}} \cos \theta$$

Si la superficie caliente mira hacia arriba

$$Nu = 0,56 (Gr_L Pr \cos \theta)^{0,25}, \text{ para, } \theta < 88^\circ, 10^5 < Ra_L < 10^{11}$$

Si la superficie caliente mira hacia abajo

$$Nu = 0,145 (Gr_L Pr)^{0,33} - (Gr_c Pr)^{0,33} + 0,56 (Gr_c Pr \cos \theta)^{0,25}$$

$$Gr_L Pr < 10^{11} ; Gr_L > Gr_c$$

$$\theta = 15^\circ, Gr_c = 5 \cdot 10^9$$

$$\theta = 30^\circ, Gr_c = 10^9$$

$$\theta = 60^\circ, Gr_c = 10^8$$

$$\theta = 75^\circ, Gr_c = 10^6$$

En esta ecuación, las propiedades físicas del fluido se evalúan a la temperatura:

$$T = T_{pF} - 0,25 (T_{pF} - T_F)$$

$$\text{y las de } a: T_F + 0,25 (T_{pF} - T_F)$$

CONVECCIÓN NATURAL SOBRE PLACA HORIZONTAL.- El número de Nusselt viene dado por la expresión:

$$Nu = C (Ra_L)^n$$

Placa horizontal a temperatura uniforme

$$\text{Superficie caliente hacia arriba o fría hacia abajo, } \begin{matrix} C = 0,54 \\ n = 0,25 \end{matrix} ; 10^5 < Ra_L < 10^7$$

$$\text{Superficie caliente hacia abajo o fría hacia arriba, } \begin{matrix} C = 0,27 \\ n = 0,25 \end{matrix} ; 10^5 < Ra_L < 10^7$$

$$\text{Superficie caliente hacia arriba, } \begin{matrix} C = 0,13 \\ n = 0,33 \end{matrix} ; 10^7 < Ra_L < 10^{10}$$

Placa horizontal, flujo de calor uniforme

a) Superficie caliente mirando hacia arriba

$$Nu = 0,13 Ra_L^{1/3} ; Ra_L < 2 \cdot 10^8$$

$$Nu = 0,16 Ra_L^{1/3} ; 5 \cdot 10^8 < Ra_L < 10^{11}$$

en las que L es la longitud de los lados en el caso de placa cuadrada, o la longitud del lado más corto en el caso de placa rectangular.

Cuando $Ra_L = 10^7$, se originan unas corrientes térmicas turbulentas irregulares sobre la placa dando como resultado un n° de Nu medio que no depende del tamaño ni de la forma de la placa

b) Superficie caliente mirando hacia abajo

$$Nu = 0,58 Ra_L^{1/5} ; 10^6 < Ra_L < 10^{11}$$

en la que las propiedades físicas del fluido se toman a la temperatura: $T = T_{pF} - 0,25 (T_{pF} - T_F)$

y las propiedades térmicas del coeficiente a la temperatura, $T = \frac{T_{pF} + T_F}{2}$

$$\text{El número de Nusselt medio es, } Nu = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{q_p L}{(T_{pF} - T_F) k}$$

Existe una correlación general para placa horizontal que se calienta hacia abajo, con extensiones adiabáticas desarrollada por Hatfield y Edwards, como se muestra en la Fig XIV 5, de la forma:

$$Nu_A = 6,5 \left(1 + 0,38 \frac{A}{L}\right) \left\{ (1 + X)^{0,39} - X^{0,39} \right\} Ra_A^{0,13}, \text{ para: } \begin{matrix} 10^6 < Ra < 10^{10} \\ 0,7 < Pr < 4800 \\ 0 < a/A < 0,2 \end{matrix}$$

$$\text{con, } = 13,5 Ra_A^{-0,16} + 2,2 \left(\frac{a}{A}\right)^{0,7}$$

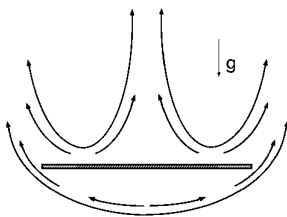


Fig XIV.4.- Convección natural laminar alrededor de una placa horizontal caliente

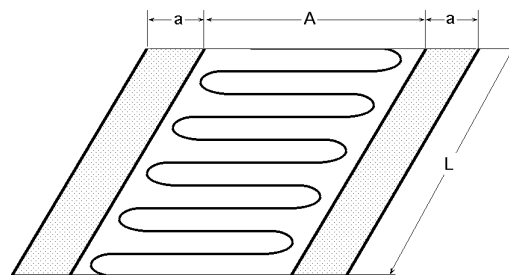


Fig XIV.5.- Esquema de una placa horizontal que se calienta hacia abajo en la que las extensiones adiabáticas están sombreadas

CONVECCIÓN NATURAL ENTRE PLACAS HORIZONTALES.- Este caso se presenta cuando un fluido circula entre dos placas, como paredes con cámara de aire, o ventanas de doble vidrio, o paneles solares, etc. La longitud característica que se utiliza normalmente para determinar el n° de Nu es la distancia d entre las dos placas.

Si el flujo se efectúa entre planos de superficie A , separados una distancia d , con temperaturas de placa T_h y T_c se tiene:

$$\frac{Q}{A} = \frac{k_F (T_h - T_c)}{d}$$

siendo k_F la conductividad térmica efectiva del fluido confinado.

Si la diferencia de temperaturas, $T_h - T_c$, es menor que el valor requerido para que el fluido se vuelva inestable, el calor se transmite a través de la capa sólo por conducción, por lo que:

$$h_c = \frac{k}{d} \quad ; \quad Nu_d = 1$$

por lo que las correlaciones del número de Nusselt tienen siempre un límite inferior $Nu_d = 1$, que corresponde a la conducción pura.

Una capa horizontal calentada por la parte inferior se vuelve inestable para un determinado valor de, $T_h - T_c$, apareciendo celdas de convección para un valor de Ra_d de la forma:

$$Ra_d = \frac{g (T_h - T_c) d^3}{\alpha \nu^2} = 1708$$

y si la temperatura sigue aumentando, se van creando situaciones de flujo cada vez más complejas hasta que, finalmente, el flujo en el centro se vuelve turbulento.

Si se toma el aire como fluido, y considerando la placa inferior como la más caliente, Fig XIV.6, se tiene:

$$Nu = 0,195 Gr^{0,25} \quad , \quad \text{para } 10^4 < Gr < 4 \cdot 10^5$$

$$Nu = 0,068 Gr^{0,33} \quad , \quad \text{para } 4 \cdot 10^5 < Gr < 10^7$$

Tomando como fluido un líquido de número de Pr moderado, (agua), y considerando la placa inferior como la más caliente, se tiene:

$$Nu_d = 0,069 Gr_d^{0,33} Pr^{0,407} \quad , \quad \text{para } 3 \cdot 10^5 < Ra_d < 7 \cdot 10^9$$

CONVECCIÓN NATURAL ENTRE PLACAS VERTICALES.- Para espacios confinados, en los que el fluido sometido a convección circula entre placas verticales de altura L , el efecto térmico se puede expresar como un simple cambio en la conductividad térmica del fluido. La circulación se da para cualquier valor de $Ra_d > 0$, y la transferencia de calor por conducción pura se efectúa para, $Ra_d < 10^3$. Al aumentar Ra_d el flujo se desarrolla y se forman celdas de convección.

Cuando $Ra_d = 10^4$ el flujo pasa a ser tipo capa límite, con capas que fluyen hacia arriba sobre la pared caliente y hacia abajo sobre la pared fría, mientras que en la región central el flujo permanece prácticamente estacionario.

Cuando $Ra_d = 10^5$ se desarrollan hileras verticales de vórtices horizontales en el centro del flujo

Cuando $Ra_d = 10^6$ el flujo en el centro se vuelve turbulento

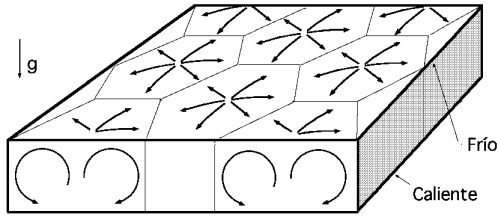


Fig XIV.6.- Convección natural celular en una capa horizontal de fluido confinado entre dos placas paralelas

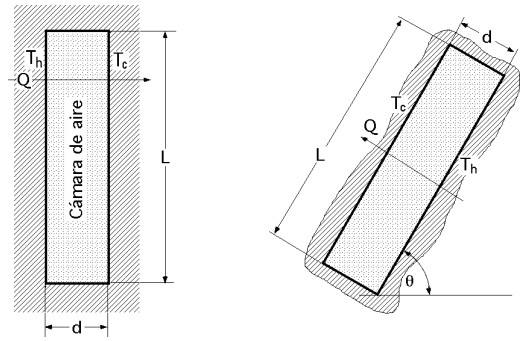


Fig XIV.7.- Recinto vertical e inclinado

Valores típicos de Nu para el aire son los siguientes:

$$Nu = 1, \text{ para, } Gr < 2.000$$

$$Nu_L = 0,18 Gr^{0,25} \left(\frac{d}{L}\right)^{0,11}, \text{ para, } 2.10^3 < Gr < 2.10^4$$

$$Nu_L = 0,065 Gr^{0,33} \left(\frac{d}{L}\right)^{0,11}, \text{ para, } 2.10^4 < Gr < 10^7$$

en las que se debe cumplir, $\frac{L}{d} > 3$.

CONVECCIÓN NATURAL ENTRE PLACAS INCLINADAS.- Para la transferencia de calor a través de capas delgadas de aire, se pueden presentar los siguientes casos, según sea la inclinación de la capa respecto a la horizontal:

$$a) \theta < 60^\circ ; 0 < Ra_d < 10^5$$

$$Nu_L = 1 + 1,44 \left(1 - \frac{1708}{Ra_d \cos \theta}\right) \left\{1 - \frac{1708 (\sin 1,8^\circ)^{1,6}}{Ra_d \cos \theta}\right\} + \left\{\left(\frac{Ra_d \cos \theta}{5830}\right)^{1/3} - 1\right\}$$

en la que los términos entre corchetes deben hacerse cero si salen negativos.

$$b) \theta = 60^\circ ; 0 < Ra_d < 10^7 . - \text{ El valor de } Nu_d \text{ se tomará el máximo entre las expresiones:}$$

$$Nu_d^7 = 1 + \left\{ \frac{0,0936 Ra_d^{0,314}}{1 + \frac{0,5}{[1 + (\frac{Ra_d}{3160})^{20,6}]^{0,1}}}} \right\}^7$$

$$Nu_d = (0,104 + \frac{0,175 d}{L}) Ra_d^{0,283}$$

en la que L es la longitud de la capa delgada de fluido.

$$c) 60^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$Nu_d = \frac{90 - \theta}{30} Nu_{d(60^\circ)} + \frac{\theta - 60}{30} Nu_{d(90^\circ)}$$

d) $= 90^\circ$; $10^3 < Ra_d < 10^7$.- El valor de Nu_d se tomará el máximo entre las expresiones:

$$Nu_d = 0,0605 \sqrt[3]{Ra_d}$$

$$Nu_d = \sqrt[3]{1 + \left(\frac{0,104 Ra_d^{0,293}}{1 + \left(\frac{6310}{Ra_d} \right)^{1,36}} \right)^3}$$

$$Nu_d = 0,242 \left(\frac{Ra_d d}{L} \right)^{0,272}, \text{ para, } Ra_d < 10^3, Nu_d(90^\circ) = 1$$

XIV.3.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN TUBOS

CONVECCIÓN NATURAL SOBRE UN TUBO O UN CILINDRO HORIZONTAL

a) El número de Nusselt medio para la convección natural hacia y desde cilindros horizontales, se puede calcular a partir de la ecuación:

$$Nu = C (Ra)^n$$

en la que los valores de las constantes se pueden tomar de la Tabla correspondiente, o a partir de la gráfica de la Fig XIV.8.

b) Unas expresiones más exactas son:

$$\text{Para flujo laminar: } Nu_d = 0,36 + \frac{0,518 Ra_d^{1/4}}{\left\{ 1 + \left(\frac{0,56}{Pr} \right)^{9/16} \right\}^{4/9}}, \text{ con: } \begin{matrix} 10^{-6} < Ra_d < 10^9 \\ Pr > 0,5 \end{matrix}$$

$$\text{Para flujo turbulento: } \sqrt{Nu_d} = 0,60 + 0,387 \sqrt[6]{\frac{Ra_d}{\left\{ 1 + \left(\frac{0,56}{Pr} \right)^{9/16} \right\}^{16/9}}}, \text{ con: } \begin{matrix} Ra_d > 10^9 \\ Pr > 0,5 \end{matrix}$$

expresiones que no coinciden para $Ra_d = 10^9$.

c) Para la transferencia de calor desde cilindros en posición horizontal hacia **metales líquidos**, se puede utilizar

$$Nu = 0,53 \sqrt[4]{Gr Pr^2}$$

o también la ecuación de Baher:

$$Nu = 0,445 \sqrt[4]{Ra} + 0,1183 \sqrt[8]{Ra} + 0,41 ; 10^{-5} < Ra < 10^4$$

d) En *convección natural para el caso particular del aire y gases, para tubos horizontales y verticales calientes*, se puede aplicar la formulación :

$$\begin{aligned} \text{Flujo laminar: } h_c &= 1,18 \sqrt[4]{\frac{T}{d}} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K} \\ \text{Flujo turbulento: } h_c &= 1,65 \sqrt[3]{T} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K} \end{aligned} \quad \text{con } T \text{ en } ^\circ C, \text{ y } d \text{ en metros}$$



Fig XIV.8.- Correlación existente entre datos de convección natural hacia y desde cilindros horizontales

CONVECCIÓN NATURAL ENTRE CILINDROS CONCÉNTRICOS.- El cilindro interior es el caliente y el cilindro exterior el frío; las correlaciones recomendadas para la convección natural se expresan en función de una conductividad térmica efectiva, k_{efec} , que se sustituye en la ecuación de conducción correspondiente:

$$Q = \frac{2 k_{\text{efec}} d (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \text{ con, } \frac{k_{\text{efec}}}{k} = 0,386 \sqrt[4]{\frac{\text{Pr} Ra_{\text{cil}}}{0,861 + \text{Pr}}}$$

$$10^2 < Ra_{\text{cil}} < 10^7 ; \frac{k_{\text{efec}}}{k} > 1 ; Ra_{\text{cil}} = \frac{(\ln \frac{D_2}{D_1})^4}{d^3 (D_1^{-3/5} + D_2^{-3/5})^5} Ra_d ; d = \frac{D_2 - D_1}{2}$$

XIV.4.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN NATURAL EN ESFERAS

ESFERA ISOTERMA

a) La transferencia de calor hacia y desde una *esfera isoterma de diámetro d, en gases*, viene dada por:

$$Nu_d = 2 + 0,43 \sqrt[4]{Ra_d} \quad \begin{matrix} 1 < Ra_d < 10^{11} \\ \text{Pr} > 1 \end{matrix}$$

b) Para el caso particular de convección de una *esfera isoterma en agua*:

$$Nu_d = 2 + 0,5 \sqrt[4]{Ra_d} \quad \begin{matrix} 3 \cdot 10^5 < Ra_d < 8 \cdot 10^8 \\ 10 < Nu_d < 90 \end{matrix}$$

c) Cuando, $Ra_d = 0$, $Nu = 2$, que se corresponde con el valor límite de la conducción de calor de

una esfera isotérmica en un medio infinito

d) Churchill propone una expresión general, de la forma:

$$Nu_d = 2 + \frac{0,589 \sqrt[4]{Ra_d}}{\left\{ 1 + \left(\frac{0,469}{Pr} \right)^{9/16} \right\}^{4/9}} \quad \begin{array}{l} Ra_d < 10^{11} \\ Pr > 0,5 \end{array}$$

CONVECCIÓN NATURAL ENTRE ESFERAS CONCÉNTRICAS.- La esfera interior es la caliente T_1 y la esfera exterior la fría T_2 ; las correlaciones recomendadas para la convección natural se expresan en función de una conductividad térmica efectiva k_{efc} , que se sustituye en la ecuación de conducción correspondiente:

$$Q = \frac{4 \ k_{efec} (T_1 - T_2)}{\frac{d}{r_1 r_2}} \quad ; \quad d = r_2 - r_1$$

Las propiedades se evalúan a la temperatura, $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$

$$\frac{k_{efec}}{k} = 0,74 \sqrt[4]{\frac{Pr Ra_{esf}}{0,861 + Pr}} \quad ; \quad 10^2 < Ra_{esf} < 10^4 \quad ; \quad \frac{k_{efec}}{k} > 1$$

$$Ra_{esf} = \frac{d}{\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 (D_1^{-7/5} + D_2^{-7/5})^5} Ra_d$$

XV.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONVECCIÓN

CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA

XV.1.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA EN PLACAS

FLUJO LAMINAR SOBRE PLACA PLANA HORIZONTAL

a) El número de Nusselt local en un flujo laminar sobre placa plana se verifica para valores del número de $Re < 5 \cdot 10^5$ y viene dado por la ecuación de Pohlhausen:

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3} = \frac{h_{cx} x}{k} ; \quad 0,1 < Pr < 10^3$$

El número de Nusselt medio para la longitud L y flujo laminar es:

$$Nu = \frac{h_c L}{k} = 0,664 \sqrt{Re_L} Pr^{1/3} , \text{ para: } \begin{array}{l} 10^3 < Re_L < 5 \cdot 10^5 \\ Pr > 0,5 \end{array}$$

expresión que se ha comprobado es exacta.

b) Una correlación apropiada para *metales líquidos* es:

$$Nu = 1,128 \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}$$

expresión que se ha comprobado es exacta.

FLUJO LAMINAR TOTALMENTE DESARROLLADO ENTRE PLACAS PLANAS PARALELAS

Coefficiente de rozamiento:

$$= \frac{96}{Re_{d_{equiv}}} ; \quad Re_{d_{equiv}} < 2800 ; \quad d_{equiv} = 4 d_H = 2 \times \text{separación entre placas}$$

El número de Nu medio para el flujo entre dos placas isotérmicas paralelas de longitud L es:

$$Nu_{d \text{ equiv}} = 7,54 + \frac{0,03 \frac{d_{\text{equiv}}}{L} Re_{d \text{ equiv}} Pr}{1 + 0,016 \left(\frac{d_{\text{equiv}}}{L} Re_{d \text{ equiv}} Pr \right)^{2/3}} ; \quad Re_{d \text{ equiv}} < 2800$$

FLUJO TURBULENTO SOBRE PLACA PLANA HORIZONTAL LISA

a) En el flujo turbulento sobre placa plana horizontal con valores del número de $Re > 5 \cdot 10^5$ existe una porción de la placa cercana al borde de ataque en la que el flujo es laminar, pasando a flujo turbulento a continuación.

Las correlaciones para el cálculo del número de Stanton local se pueden obtener a partir de:

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_x}{2}, \text{ para: } \begin{array}{ll} 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7 & ; \quad St_x Pr^{2/3} = 0,0296 Re_x^{-0,2} \\ 10^7 < Re < 10^9 & ; \quad St_x Pr^{2/3} = 0,185 (\lg Re_x)^{-2,584} \end{array}$$

evaluándose las propiedades del fluido a la temperatura media de película.

b) El número de Nusselt local para $Re_x > Re_c$ viene dado por la expresión de Whitaker:

$$Nu_x = 0,029 Re_x^{0,8} Pr^{0,43}, \text{ para: } \begin{array}{l} 5 \cdot 10^5 < Re_x < 3 \cdot 10^7 \\ 0,7 < Pr < 400 \end{array}$$

El n° de Nu medio viene dado por:

$$Nu_L = 0,036 \{Re_L^{0,8} - 9200\} Pr^{0,43} \left(\frac{F}{pF} \right)^{0,25}, \text{ para: } \begin{array}{l} 2 \cdot 10^5 < Re_L < 5 \cdot 10^6 \\ 0,7 < Pr < 380 \\ 0,26 < (F/pF) < 3,5 \end{array}$$

siempre que la turbulencia sea pequeña. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media T_F excepto h_{pF} que lo es a la temperatura de la pared. Para los gases las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura de película.

Si la turbulencia es elevada se puede eliminar el sumando 9200 obteniéndose resultados bastante razonables.

c) Otra expresión del número de Nusselt medio para la longitud L viene dada por:

$$Nu_L = 0,664 \sqrt{Re_c} Pr^{1/3} + 0,036 Re_L^{0,8} Pr^{0,43} \left\{ 1 - \left(\frac{Re_c}{Re_L} \right)^{0,8} \right\}, \text{ para: } \begin{array}{l} 5 \cdot 10^5 < Re_x < 3 \cdot 10^7 \\ 0,7 < Pr < 400 \end{array}$$

El coeficiente de arrastre viene dado por la expresión:

$$C = \frac{1,328}{\sqrt{Re_{\text{crít}}}} \frac{Re_{\text{crít}}}{Re_L} + \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_L)} - \frac{Re_{\text{crít}}}{Re_L} \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_{\text{crít}})} ; \quad Re_{\text{crít}} < Re_L < 10^9$$

CAPA LIMITE TURBULENTA SOBRE UNA PLACA PLANA TOTALMENTE RUGOSA.- Se define un tamaño adimensional x^* del grano de arena en función de la rugosidad absoluta e en la forma:

$$x^* = \frac{G}{C_x} \sqrt{\frac{C_x}{2}}, \text{ para, } C_x = (3,476 + 0,707 \ln \frac{x}{L})^{-2,46} ; 150 < \frac{x}{L} < 1,5 \cdot 10^7 ; x^* > 60$$

$$C_{Lx} = (2,635 + 0,618 \ln \frac{x}{L})^{-2,57} ; 150 < \frac{x}{L} < 1,5 \cdot 10^7 ; x^* > 60$$

en la que G es el gasto másico y C_x el coeficiente de arrastre.

El criterio para determinar el tipo de régimen del flujo es,

$0 < e^* < 5$, liso
$5 < e^* < 60$, transición
$e^* > 60$, rugoso

El número de Stanton local es:

$$St_x = \frac{1}{2} \frac{C_x}{0,9 + \sqrt{\frac{C_x}{2}} \{f(x^*, Pr) - 7,65\}}$$

en la que la función $f(x^*, Pr)$ depende de la rugosidad, presentando diversas formas, como se indica a continuación:

Granos de arena, $f(x^*, Pr) = 4,8 x^{0,2} Pr^{0,44} ; 1 < Pr < 6$

$f(x^*, Pr) = 4,8 x^{0,28} Pr^{0,57} ; 0,7 < Pr < 40$

General, $f(x^*, Pr) = 0,55 \sqrt{x^*} (Pr^{2/3} - 1) + 9,5 ; Pr > 0,5$

El número de Stanton medio es:

$$St = \frac{1}{L} \int_0^L St_x dx = \frac{h_c}{c_p u}$$

XV.2.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS

FLUJO LAMINAR POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS.- Para el flujo de fluidos en tuberías en régimen laminar se cumple $Re < 2.100$.

Flujos desarrollados.- Para flujos completamente desarrollados en un tubo circular, L , con *flujo de calor q/A constante* desde la pared es $Nu = 4,3636$

Para flujos completamente desarrollados en un tubo circular, L , con *temperatura de pared constante* $Nu = 3,656$

Flujos no desarrollados.- El efecto de entrada del fluido en tuberías se manifiesta cuando las longitudes turbulentas iniciales sean mucho más cortas que en condiciones de régimen laminar o cuando el intercambio térmico comienza a efectuarse desde la entrada de la tubería y, por lo tanto,

la capa límite térmica no está todavía desarrollada.

a) Una ecuación que tiene en cuenta las longitudes térmica e hidrodinámica: Sieder y Tate: *con temperatura de pared constante* es:

$$Nu = 1,86 \sqrt[3]{Gz} \left(\frac{\mu_F}{\mu_P} \right)^{0,14}, \text{ con, } Gz = \left(\frac{d}{L} Re_d Pr \right) \text{ y } \begin{matrix} Gz > 10 & ; & \sqrt[3]{Gz} > 2 \\ Pr > 0,5 \end{matrix}$$

siendo L la longitud del tubo y d el diámetro. Las propiedades del fluido que conducen al cálculo de Re y Pr se calculan a la temperatura T_F

b) Otra expresión para el flujo a la entrada en un tubo circular en régimen laminar, con *temperatura de pared constante* (Hausen):

$$Nu = 3,66 + \frac{0,0668 Gz}{1 + 0,04 Gz^{2/3}} \quad c$$

y para flujo a la entrada en un tubo circular en régimen laminar, con *flujo de calor constante* (Hausen):

$$Nu = 4,36 + \frac{0,023 Gz}{1 + 0,0012 Gz} \quad c$$

en la que las propiedades del fluido para calcular Re y Pr se toman a la temperatura T_F .

c) Si el flujo turbulento está hidrodinámicamente desarrollado.

El coeficiente de rozamiento viene dado por:

$$= \frac{64}{Re_d} \quad ; \quad Re_d < 2300$$

y el número de Nusselt por:

$$Nu_d = 3,66 + \frac{0,065 \frac{d}{L} Re_d Pr}{1 + 0,04 \left(\frac{d}{L} Re_d Pr \right)^{2/3}} \quad ; \quad Re_d < 2300$$

FLUJO TURBULENTO DESARROLLADO POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS.










a) Los datos experimentales correspondientes a los estudios realizados sobre el movimiento en tubos de un gran número de líquidos, gases y vapores, se pueden expresar por las siguientes ecuaciones:

En tubos lisos se aplica la ecuación de Dittus-Boelter:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^a, \text{ para, } \frac{L}{d} > 60, \text{ y } \begin{matrix} 0,7 < Pr < 160 \\ Re > 10.000 \end{matrix}$$


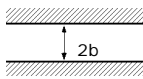
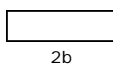
en la que se considera $a = 0,4$ para calentamientos y $a = 0,3$ para enfriamientos.

Tabla XV.1.- Números de Nu y factor de fricción para flujos completamente desarrollados, térmica e hidrodinámicamente, en conductos de sección transversal circular y no circular

$[(L/d_h) > 100]$	Nu_T	Nu_{H1}	Nu_{H2}	Re	$[(L/d_h) > 100]$		Nu_T	Nu_{H1}	Nu_{H2}	Re
	3,657	4,364	4,364	64		b/a=0,5	3,391	4,125	3,017	62,2
	3,34	4,002	3,862	60,22		b/a=0,25	3,66	5,099	4,35	74,8
	2,47	3,111	1,892	53,33		b/a=0,125	5,597	6,49	2,904	82,34
	2,976	3,608	3,091	56,91		b/a=0	7,541	8,235	8,235	96
						Aislamiento b/a=0,5	4,861	5,385	-----	96

Nu_T es el número de Nu para paredes con temperatura uniforme; Nu_{H1} es el número de Nu con flujo de calor uniforme en la superficie en la dirección del flujo, mientras que la temperatura permanece uniforme en la periferia; Nu_{H2} es el número de Nu con flujo de calor uniforme en la superficie, en la dirección del flujo y en la periferia

Tabla XV.2.- Longitud de entrada térmica L_t , e hidrodinámica L_h , para flujo laminar por el interior de conductos de sección transversal circular y no circular

	$\frac{L_h/d_h}{Re}$	$\frac{L_t/d_h}{Pe}$	
		Temp. de pared constante	Flujo térmico constante
	0,056	0,033	0,043
	0,011	0,008	0,012
2a  2b			
a/b = 0,25	0,075	0,054	0,042
a/b = 0,50	0,085	0,049	0,057
a/b = 1,00	0,09	0,041	0,066

b) Una correlación que permite una precisión aún mayor que la de Dittus-Boelter, es la de Polley, de la forma:

$$St = \exp [-3,796 - 0,205 \ln (Re) - 0,505 \ln (Pr) - 0,0255 \{\ln (Pr)\}^2]$$

estando los valores del número de Prandtl comprendidos en el intervalo, $0,5 < Pr < 3.000$

c) *Ecuación de Sieder y Tate.*- Esta ecuación es de la forma:

$$Nu = 0,027 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{F}{pF} \right)^{0,14}, \text{ con } Re < 10.000 ; \frac{L}{d} > 60$$

$$0,7 < Pr < 16.500$$

recomendándose para aquellos casos de transmisión de calor en los que la viscosidad de los fluidos cambie marcadamente con la temperatura.

Para determinar Nu , Re , Pr y f_F hay que conocer las propiedades del fluido a su temperatura media T_F , mientras que p_F se calcula a la temperatura de la pared T_{pF} .

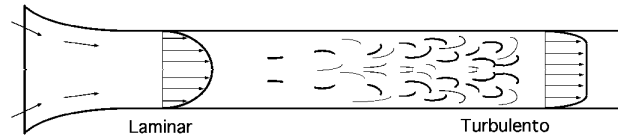


Fig XV.1.- Flujo forzado por una tubería con $Re_d = 50.000$; en la sección inicial el flujo es laminar debido a la entrada en forma de bocina, pero se vuelve turbulento aguas abajo

d) *Ecuación de Notter y Sleicher.*- Esta ecuación es de la forma:

$$Nu = 5 + 0,016 Re^a Pr^b, \text{ con, } a = 0,88 - \frac{0,24}{4 + Pr} ; b = 0,33 + 0,5 e^{-0,6 Pr}$$

$$\frac{L}{d} > 25 ; 10^4 < Re < 10^6 ; 0,1 < Pr < 10^4$$

que concuerda muy bien con los mejores datos experimentales para el aire y en un 10% con los mejores datos para números de Prandtl del orden de 10^3 .

e) En *tubos rugosos* se puede utilizar la analogía de Kàrmàn del capítulo anterior de la forma:

$$St = \frac{1}{8} \frac{1}{1 + 5 \sqrt{\frac{1}{8}} \left\{ (Pr - 1) + \ln \frac{5 Pr + 1}{6} \right\}} ; Pr < 30$$

f) En *tubos rugosos* también se puede utilizar la ecuación de Petukhov de la forma:

$$Nu_d = \frac{Re_d Pr}{X} \frac{1}{8} \left(\frac{f_F}{p_F} \right)^n ; X = 1,07 + 12,7 (Pr^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$10^4 < Re < 5 \cdot 10^6 ; 0,5 < Pr < 200 ; \text{error} < 5 \div 6\%$$

cuyo campo de validez es, $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6 ; 0,5 < Pr < 2000 ; \text{error} 10\%$

$$0 < \frac{f_F}{p_F} < 40$$

$n = 0,11$ para calentamiento con T_{pF} uniforme

$n = 0,20$ para enfriamiento con T_{pF} uniforme

$n = 0$ para flujo de calor uniforme o gases

El valor del coeficiente de rozamiento viene dado para $Pr > 0,5$ por:

$$= (0,79 \ln Re_d - 1,64)^{-2} ; 10^4 < Re_d < 5 \cdot 10^6$$

$$= 0,184 Re_d^{-0,2} ; 2 \cdot 10^4 < Re_d < 3 \cdot 10^5, \text{ menos precisa que la anterior}$$

tomándose las propiedades del fluido a la temperatura media T_F excepto p_F que lo es a la tempe-

ratura de la pared T_{pF} .

El parámetro ϵ se utiliza para expresar el efecto de la diferencia de temperaturas del fluido T_F y de la pared T_{pF} sobre las propiedades del fluido.

Se aplica en aquellos casos en que la viscosidad del fluido cambie marcadamente con la temperatura, $\epsilon = (T)$; en muchos casos ϵ se considera la unidad, siendo de interés en los fluidos muy viscosos.

g) Otra ecuación para *tubos rugosos* es la de Gnielinski para flujo turbulento, térmica e hidrodinámicamente desarrollado, siendo el número de Nusselt:

$$Nu = \frac{\frac{\bar{R}}{8} (Re_d - 1000) Pr}{1 + 12,7 \sqrt{\frac{\bar{R}}{8}} (Pr^{2/3} - 1)}, \text{ con, } \begin{matrix} 3000 < Re_d < 10^6 \\ Pr > 0,5 \end{matrix}$$

y el coeficiente de rozamiento:

$$\epsilon = (0,79 \ln Re_d - 1,64)^{-2} ; 10^4 < Re_d < 5 \cdot 10^6$$

h) Para una tubería muy rugosa se puede definir un tamaño adimensional ϵ^* del grano de arena, al igual que para placa plana, en función de la rugosidad absoluta ϵ en la forma:

$$\epsilon^* = \frac{G}{\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$$

en la que G es el gasto másico y ϵ el coeficiente de rozamiento que se obtiene del diagrama de Moody o de la ecuación:

$$\epsilon = \frac{1}{-2 \lg \left\{ \frac{\bar{R}}{7,4} - \frac{5,02}{Re_d} \lg \left(\frac{\bar{R}}{7,4} + \frac{13}{Re_d} \right) \right\}}$$

$0 < \epsilon^* < 5$, liso

El criterio para determinar el tipo de régimen del flujo es,

$5 < \epsilon^* < 60$, transición

$\epsilon^* > 60$, rugoso

El número de Stanton local es:

$$St = \frac{1}{8} \frac{1}{0,9 + \sqrt{\frac{\bar{R}}{8}} \{f(\epsilon^*, Pr) - 7,65\}}$$

en la que la función $f(\epsilon^*, Pr)$ depende de la rugosidad, presentando diversas formas, como se indica a continuación:

Granos de arena, $f(Pr) = 4,8 Pr^{0,2} Pr^{0,44}$; $1 < Pr < 6$

Granos de arena, $f(Pr) = 4,8 Pr^{0,28} Pr^{0,57}$; $0,7 < Pr < 40$

General, $f(Pr) = 0,55 \sqrt{Pr} (Pr^{2/3} - 1) + 9,5$; $Pr > 0,5$

El número de Stanton medio es, $St = \frac{1}{L} \int_0^L St_x dx = \frac{h_c}{c_p u}$

FLUJO TURBULENTO NO DESARROLLADO POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS

Longitud de entrada hidrodinámica, $L_H = 0,056 Re_d d$

Longitud térmica de entrada, $L_T = 0,017 Re_d Pr d$

Nusselt estudió datos experimentales en el campo: $10 < \frac{L}{d} < 100$ y predijo que h_c tenía que ser proporcional a $(\frac{d}{L})^{1/8}$ y, por lo tanto, para tener en cuenta el efecto de entrada en el tubo propuso la siguiente ecuación:

$$Nu = 0,036 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{d}{L}\right)^{0,055}$$

en la que L es la longitud del tubo medida desde la entrada, viniendo determinadas las propiedades del fluido respecto a T_F .

Otras ecuaciones válidas en este campo son:

$$Nu = 0,024 Re^{0,786} Pr^{0,42} \left\{ 1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{0,66} \right\}^{1/4} \quad , \text{ para: } \begin{matrix} 2300 < Re < 10^6 \\ 0,7 < Pr < 10 \\ L/d < 40 \end{matrix}$$

$$Nu = 0,036 Re^{0,8} Pr^{0,333} \left(\frac{d}{L}\right)^{1/18} \quad , \text{ para: } \begin{matrix} 2300 < Re < 10^6 \\ 0,7 < Pr < 10 \\ 10 < L/d < 400 \end{matrix}$$

en las que L es la longitud del tubo medida desde la entrada, correspondiente a la zona que se está estudiando, calculándose las propiedades físicas del fluido a la temperatura media de éste T_F .

Si el flujo a la entrada está desarrollado hidrodinámicamente, pero no térmicamente, con temperatura de pared uniforme, se puede utilizar:

$$Nu_d = 3,66 + \frac{0,065 \frac{d}{L} Re_d Pr}{1 + 0,04 \left(\frac{d}{L} Re_d Pr\right)^{2/3}} \quad ; \quad Re_d < 2300$$

FLUJO TURBULENTO DE METALES LÍQUIDOS POR EL INTERIOR DE TUBERÍAS

Flujo completamente desarrollado con flujo de calor uniforme desde la pared

$$\text{Nu} = 0,625 \text{ Pe}^{0,4}, \text{ con, } \begin{matrix} 10^2 < \text{Pe} < 10^4 \\ \frac{L}{d} > 60 \end{matrix}$$

$$\text{Nu} = 4,82 + 0,0185 \text{ Pe}^{0,827}, \text{ con, } \begin{matrix} 10^2 < \text{Pe} < 10^4 ; 3,6 \cdot 10^3 < \text{Re} < 9 \cdot 10^5 \\ \frac{L}{d} > 60 \end{matrix}$$

$$\text{Nu}_d = 6,3 + 0,0167 \text{ Re}_d^{0,85} \text{ Pr}^{0,93}, \text{ con, } 10^4 < \text{Re}_d < 10^6$$

Flujo completamente desarrollado con temperatura de pared uniforme

$$\text{Nu} = 5 + 0,025 \text{ Pe}^{0,8}, \text{ con, } \begin{matrix} \text{Pe} > 100 \\ \frac{L}{d} > 60 \end{matrix}$$

$$\text{Nu} = 4,8 + 0,015 \text{ Pe}^{0,91} \text{ Pr}^{0,3}, \text{ con, } \begin{matrix} \text{Pr} < 0,05 \\ \frac{L}{d} > 60 \end{matrix}$$

$$\text{Nu} = 5 + 0,05 \text{ Pe}^{0,77} \text{ Pr}^{0,25}, \text{ con, } \begin{matrix} \text{Pr} < 0,1 ; \text{Pe} > 15.000 \\ \frac{L}{d} > 60 \end{matrix}$$

$$\text{Nu} = 4,8 + 0,0156 \text{ Pe}^{0,85} \text{ Pr}^{0,08}, \text{ con, } \begin{matrix} 0,004 < \text{Pr} < 0,1 ; \text{Re} < 500.000 \\ \frac{L}{d} > 60 \end{matrix}$$

Flujo no desarrollado

$$\text{Para flujo de calor uniforme: } \text{Nu} = 6,3 + 0,0167 \text{ Pe}^{0,85} \text{ Pr}^{0,08}$$

$$\text{Para temperatura de pared uniforme: } \text{Nu} = 4,8 + 0,0156 \text{ Pe}^{0,85} \text{ Pr}^{0,08}$$

FLUJO TURBULENTO POR UN SERPENTÍN TUBULAR.- La presión que se ejerce sobre la sección transversal de paso de un serpentín tubular no es constante debido a la acción de las fuerzas de inercia, que en las zonas periféricas son, relativamente, poco importantes pues el medio que desliza se adhiere más o menos a la pared del tubo.

Las partículas en movimiento en esta zona están sometidas a las fuerzas del campo de presión en la sección perpendicular a la dirección del flujo principal, que origina la formación de un desplazamiento secundario, en el serpentín.

Como consecuencia de este movimiento secundario, la transmisión de calor en un serpentín tubular mejora, siendo el coeficiente de transmisión de calor por convección de la forma:

$$h_{c(\text{serpentin})} = h_c \left(1 + 3,54 \frac{d}{D} \right)$$

en la que h_c es el coeficiente de transmisión de calor por convección para tubería recta de las mismas características.

El régimen empieza a hacerse turbulento para valores de Re más elevados que en los tubos rectos

XV.3.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA POR EL EXTERIOR DE TUBERÍAS

FLUJO TURBULENTO PARALELO POR EL EXTERIOR DE UN TUBO.- Un gran número de estudios y experiencias en gases, vapores y líquidos moviéndose por el exterior de un tubo simple, paralelamente, vienen correlacionados por la expresión:

$$Nu = 0,26 Re^{0,6} Pr^{0,3} \quad ; \quad 10^3 < Re < 10^5$$

$$Nu = 0,86 Re^{0,43} Pr^{0,3} \quad ; \quad 0,2 < Re < 200 \quad \text{y sólo para líquidos normales}$$

FLUJO TURBULENTO PARALELO POR EL EXTERIOR DE TUBOS EN BATERÍA.- La transferencia de calor en la circulación de un fluido sobre una batería de tubos, es muy importante por su aplicación al diseño y proyecto de algunos tipos de intercambiadores de calor en contracorriente y en equicorriente. Se pueden considerar dos situaciones:

a) Si se obliga al fluido a circular paralelo y *pegado* a la pared de las tuberías mediante pantallas, se considera como flujo por el exterior de tubos, y se utilizan para determinar el número de Nu las ecuaciones para un tubo único.

b) Si no existen pantallas y los tubos están contenidos en una carcasa, se considera como flujo por el interior de un tubo, (la carcasa), introduciendo el concepto de diámetro equivalente en el número de Re de la formulación correspondiente que interviene en el cálculo del número de Nu .

En esta segunda situación, los números de Reynolds y Nusselt se calculan en función del diámetro hidráulico, en la forma:

$$Re = \frac{u_F d_h}{\nu} \quad ; \quad Nu = \frac{h_{CF} d_h}{k_F}$$

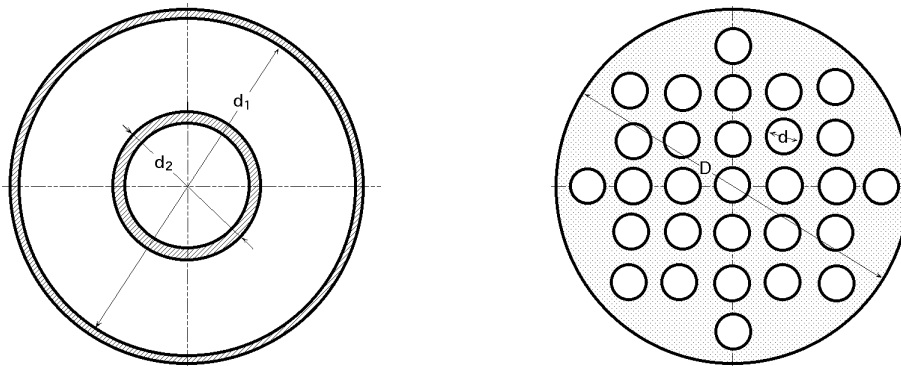


Fig XV.2.- Disposiciones de dos tubos concéntricos (a) y tipo intercambiador (b)

Diámetro hidráulico, $d_h = 4 \frac{\text{Sección transversal mojada}}{\text{Perímetro mojado}}$

Para una conducción formada por dos tubos concéntricos, Fig XV.2.a:

$$d_h = 4 \frac{\frac{d_2^2 - d_1^2}{4}}{(d_2 + d_1)} = \frac{(d_2 + d_1)(d_2 - d_1)}{d_2 + d_1} = d_2 - d_1$$

Para un conducto tipo intercambiador, formada por varios tubos rodeados por una carcasa exterior, Fig XV.2.b:

$$d_h = 4 \frac{\frac{D^2 - n d^2}{4}}{(D + n d)} = \frac{D^2 - n d^2}{D + n d}$$

Para conductos anulares (dos tubos concéntricos) se puede obtener una mayor precisión si se multiplica el n° de Nu obtenido por cualquiera de las ecuaciones correspondientes a flujo por el interior de tuberías, por un factor de corrección.

Si la pared exterior está aislada térmicamente y la transferencia de calor se realiza únicamente a través de la pared del tubo interior, el factor de corrección del n° de Nu es:

$$0,86 \left(\frac{d_{\text{interior}}}{d_{\text{exterior}}} \right)^{-0,16}$$

Si la pared interior está aislada térmicamente y la transferencia de calor se realiza únicamente a través de la pared del tubo exterior, el factor de corrección del n° de Nu es:

$$1 - 0,14 \left(\frac{d_{\text{interior}}}{d_{\text{exterior}}} \right)^{0,6}$$

en las que el área de transferencia térmica a considerar es únicamente el de la pared calentada.

XV.4.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN FORZADA EN ESFERAS

a) Para el flujo de fluidos sobre esferas con superficie isotérmica, se pueden utilizar los siguientes coeficientes de arrastre:

$$C_d = \frac{24}{Re_d} \quad ; \quad Re_d < 0,5$$

$$C_d = \frac{24}{Re_d} \left(1 + \frac{Re_d^{2/3}}{6} \right) \quad ; \quad 2 < Re_d < 500$$

$$C_d = 0,44 \quad ; \quad 500 < Re_d < 2 \times 10^5$$

Whitaker propone una correlación general para el n° de Nusselt de la forma:

$$Nu_d = 2 + (0,4 \sqrt{Re_d} + 0,06 \sqrt[3]{Re_d^2}) Pr^{0,4} \sqrt[4]{\frac{F}{p_F}} ; \quad \begin{matrix} 3,5 < Re_d < 8.10^4 \\ 1 < \frac{F}{p_F} < 3,2 \\ 0,7 < Pr < 380 \end{matrix}$$

calculándose las propiedades a la temperatura del fluido T_F excepto p_F que se evalúa a la temperatura de la pared; para gases, el factor de corrección de la viscosidad es despreciable.

En la ecuación anterior se puede observar la existencia de un límite inferior de $Nu_d = 2$ que corresponde a la conducción de calor de una esfera a un medio exterior infinito estacionario.

El flujo de calor a través de una superficie esférica es:

$$Q = \frac{4 \pi k (T_1 - T_2)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \left| \text{Si, } d = 2 r_1 \text{ y } r_2 \right| = \frac{2 \pi k}{d} d^2 (T_1 - T_2) = h_{cF} A (T_1 - T_2)$$

por lo que el coeficiente de transferencia de calor es, $h_{cF} = \frac{2 \pi k}{d}$, y $Nu_d = 2$

b) Para el caso particular del *flujo de gases sobre una esfera*, Mc Adams recomienda la correlación:

$$Nu = 0,37 Re^{0,6} ; \quad 17 < Re < 70.000$$

en donde las propiedades del fluido se calculan a la temperatura media de la película.

c) Para el caso particular del *flujo de líquidos sobre una esfera*, se recomienda la correlación:

$$Nu_d = (1,2 + 0,53 Re_d^{0,54}) Pr^{0,3} \sqrt[4]{\frac{F}{p_F}} ; \quad 1 < Re_d < 200.000$$

en donde las propiedades del fluido se calculan a la temperatura media de la película.

d) Para el *flujo de un metal líquido sobre una esfera*, el coeficiente de transmisión de calor viene dado por:

$$Nu_d = 2 + 0,386 \sqrt{Re Pr} ; \quad 3.10^4 < Re_d < 1,5.10^5$$

en donde las propiedades del fluido se calculan a la temperatura media de la película.

XV.5.- CONVECCIÓN NATURAL Y FORZADA COMBINADAS

En algunos casos reales pueden coexistir la convección natural y la forzada; para sistemas en los que el flujo forzado tiene velocidades bajas, menores de 0,3 m/seg, ambas formas de convección pueden tener una importancia semejante.

Sin embargo, y ante la duda de qué tipo de fenómeno prevalece, un criterio normalmente aplicado es que predomina la convección natural cuando se cumpla que:

$$\frac{Gr}{Re^2} > 1,0$$

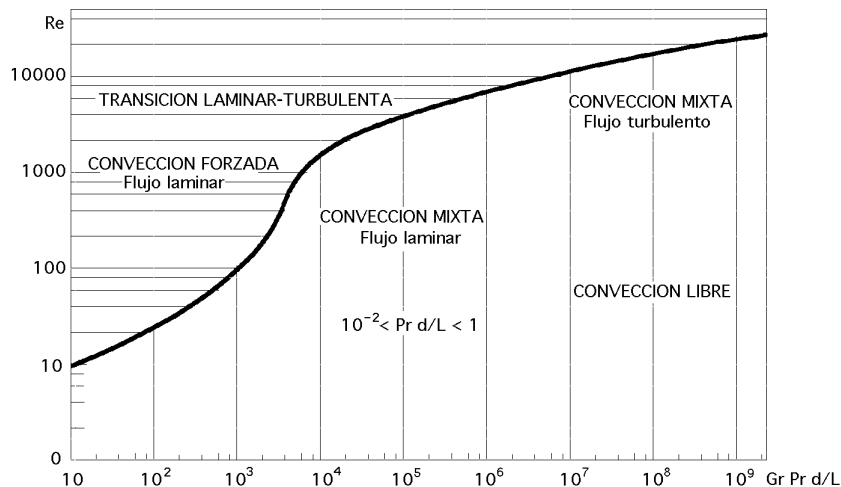


Fig XV.3.- Convección libre, forzada y mixta, por tubos horizontales

Para convección combinada en tubos horizontales se pueden utilizar las siguientes expresiones:

$$Nu = 1,75 \sqrt[3]{Gz + 0,0083 \sqrt[4]{(Gr Pr)^3}} \text{ , para, } \begin{matrix} Re < 500 & ; & 10^{-2} < Pr \frac{d}{L} < 1 \\ Gz = Re Pr \frac{d}{L} \end{matrix}$$

$$Nu = 4,69 Re^{0,27} Pr^{0,21} Gr^{0,07} \left(\frac{d}{L}\right)^{0,36} \text{ , para, } \begin{matrix} Re > 500 \\ 10^{-2} < Pr \frac{d}{L} < 1 \end{matrix}$$

Para la convección laminar combinada, libre y forzada, del agua que circula por un tubo horizontal, con temperatura de pared constante, sus resultados están correlacionados a través de la expresión:

$$Nu_d = 1,75 \sqrt[3]{Gz + 0,012 \sqrt[3]{(Gz Gr_d^{0,33})^4}} \left(\frac{F}{pF}\right)^{0,14}$$

Todas las propiedades del fluido se calculan a la temperatura media T_F del fluido; esta ecuación da buenos resultados, siempre con un error menor del 8%.

En la Fig XV.3 se han representado los regímenes de convección libre, forzada y mixta en el caso de flujo por tubos horizontales.

Hausen propone, para convección forzada y flujo no desarrollado:

$$Nu = 0,116 (Re^{2/3} - 125) Pr^{1/3} \left\{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right\} \left(\frac{F}{pF}\right)^{0,14} \text{ , para, } \begin{matrix} 0,6 < Pr < 500 & ; & \frac{L}{d} < 60 \\ 2100 < Re < 10^6 \end{matrix}$$

XV.6.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN EN FLUJOS CRUZADOS

FLUJO CRUZADO EN TUBO ÚNICO LISO.- Cuando se trata de un tubo único para circulación de gases y líquidos ordinarios, el coeficiente de transferencia térmica medio correspondiente al flujo cruzado, se puede calcular mediante las relaciones siguientes:

$$Nu = C Re^n Pr^{1/3}$$

en la que los valores de n y C se obtienen de la Tabla XV.3.

Las propiedades del fluido se calculan a una temperatura media, entre la del fluido T_F y la de la pared exterior T_{pF} . Para geometrías no circulares se hará uso de la Tabla XV.4.

Tabla XV.3.- Valores de n y C para tuberías cilíndricas en función del número de Reynolds

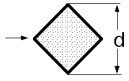
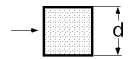
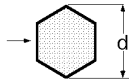
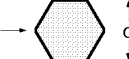
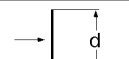
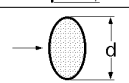
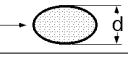
Reynolds (Para el diámetro d)	C	n
0,4 a 4	0,989	0,330
4 a 40	0,911	0,385
40 a 4.000	0,683	0,466
4.000 a 40.000	0,193	0,618
40.000 a 400.000	0,0266	0,805

a) Whitaker propone una correlación parecida a la del flujo sobre esferas, en la forma:

$$Nu = (0,4 \sqrt{Re} + 0,06 Re^{2/3}) Pr^{0,4} \sqrt{\frac{F}{pF}}, \text{ para, } \begin{matrix} 0,67 < Pr < 300 \\ 0,25 < \frac{F}{pF} < 5,2 \\ 40 < Re < 10^5 \end{matrix}$$

en la que las propiedades del fluido se toman a T_F ; para los gases, el factor de corrección de la viscosidad es despreciable.

Tabla XV.4.- Valores de n y C , función de la geometría del conducto

Configuración	Re (d)	C	n
	2.500 a 7.500	0,261	0,624
	5.000 a 100.000	0,222	0,588
	2.500 a 8.000	0,16	0,699
	5.000 a 100.000	0,092	0,675
	5.000 a 19.500	0,144	0,638
	19.500 a 100.000	0,035	0,782
	5.000 a 100.000	0,138	0,638
	4.000 a 15.000	0,205	0,731
	3.000 a 15.000	0,085	0,804
	2.500 a 15.000	0,224	0,612

b) Unas correlaciones muy elaboradas, debidas a Churchill y Bernstein para $Pr > 0,5$ son:

$$\text{Coeficiente de arrastre, } C_d = 1 + \frac{10}{Re_d^{2/3}} ; 1 < Re_d < 10^4$$

$$Nu_d = 0,3 + \frac{0,62 \sqrt{Re_d} Pr^{1/3}}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{2/3}}} ; Re_d < 10^4$$

$$Nu_d = 0,3 + \frac{0,62 \sqrt{Re_d} Pr^{1/3}}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{2/3}}} \left\{1 + \sqrt{\frac{Re_d}{282.000}}\right\} ; 2.10^4 < Re_d < 4.10^5$$

$$Nu_d = 0,3 + \frac{0,62 \sqrt{Re_d} Pr^{1/3}}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{2/3}}} \left\{1 + \left(\frac{Re_d}{282.000}\right)^{5/8}\right\}^{4/5} ; 4.10^5 < Re_d < 5.10^6$$

en la que las propiedades se evalúan a la temperatura del fluido T_F .

c) Para valores muy bajos del n° de Reynolds se recomienda:

$$Nu_d = \frac{1}{0,8237 - \ln \sqrt{Re_d Pr}} ; Re_d Pr < 0,2$$

en la que las propiedades se evalúan a la temperatura del fluido T_F .

FLUJO CRUZADO EN TUBOS EN BATERÍA.- La transferencia de calor en la circulación de un fluido sobre una batería de tubos, en flujo cruzado, es muy importante por su aplicación al diseño y proyecto de la inmensa mayoría de los intercambiadores de calor. En la Fig XV.4 se representan las líneas de corriente de un flujo laminar forzado alrededor de un cilindro, y en la Fig XV.5, el flujo forzado a través de un haz de tubos en batería.

PRIMER MÉTODO.- Se utiliza una ecuación parecida a la de un solo tubo, en la que los valores de C y n dependen de la distancia entre tubos adyacentes y de la distancia de filas de tubos en la dirección del flujo. Estos parámetros varían si los tubos están alineados (disposición regular), o están al tresbolillo o en quincunce, ambas disposiciones triangulares, Fig XV.6.

Para el caso de un flujo turbulento sobre baterías de tubos de 10 ó más filas en la dirección del flujo, se utiliza la ecuación:

$$Nu_d = C R_{máx}^n Pr^{1/3} ; \begin{matrix} 2.000 < Re_{máx} < 40.000 \\ Pr > 0,7 \end{matrix}$$

viniendo dados en la Tabla XV.5 los valores de las constantes C y n .

En el caso en que el número de filas sea menor de 10, en la Tabla XV.6 se indica un factor de corrección, que es el cociente entre el valor de h_C para N filas en la dirección del flujo, respecto al valor de h_C para 10 filas obtenido a partir de los datos tomados de la Tabla XV.5, es decir:

$$h_{C(N)} = h_{C(1 \text{ tubo})}$$

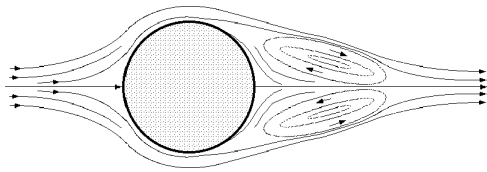


Fig XV.4.- Flujo laminar forzado alrededor de un cilindro, $Re_d = 25$

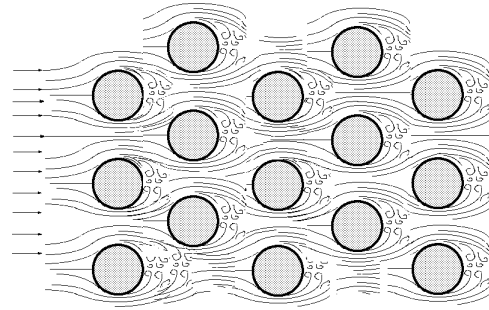


Fig XV.5.- Flujo forzado a través de un haz de tubos

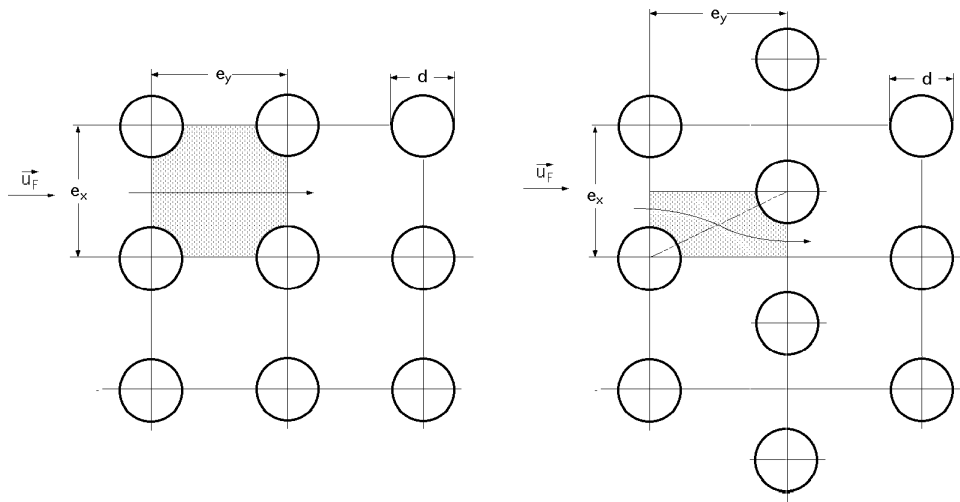


Fig XV.6.- Flujos cruzados en baterías de tubos en línea y al tresbolillo

El valor de $Re_{m\acute{a}x}$ se corresponde con la velocidad máxima, y ésta con la sección mínima de paso; de acuerdo con la Fig XV.7, para disposición regular se tiene:

Disposición regular, Paso mínimo = $(e_x - d)$; $u_{m\acute{a}x} = \frac{u_F e_x}{e_x - d}$

Disposición triangular: Se toma el menor de los pasos, $\frac{e_x - d}{2}$; $u_{m\acute{a}x} = \frac{u_F e_x}{\text{Paso m\acute{in}imo}}$

SEGUNDO MÉTODO.- Cuando el número N de hileras de tubos sea superior a 20, se recomienda utilizar la ecuación de Zukauskas, más moderna que la anterior, de la forma:

$$\text{Para gases, } Nu_d = C^* Re_{m\acute{a}x}^m Pr^{0,36} \frac{Pr_{T_F}}{Pr_{T_{PF}}}$$

$$\text{Para líquidos, } Nu_d = C^* Re_{m\acute{a}x}^m Pr^{0,36} \sqrt[4]{\frac{Pr_{T_F}}{Pr_{T_{PF}}}} ; \quad 0,7 < Pr < 500$$

$$10 < Re_{med} < 10^6$$

C^* y m están tabulados, Tabla XIV.7

Para líquidos, las propiedades se toman a T_F , excepto los números de Pr de la raíz, que lo son a las temperaturas respectivas.

Tabla XV.5.- Valores de C y n para baterías de 10 ó más tubos

EN LINEA								
	$e_x/d = 1,25$		$e_x/d = 1,50$		$e_x/d = 2,00$		$e_x/d = 3,00$	
e_y/d	C	n	C	n	C	n	C	n
1,25	0,386	0,592	0,303	0,608	0,111	0,704	0,0703	0,752
1,5	0,407	0,586	0,278	0,620	0,112	0,702	0,0753	0,744
2	0,464	0,570	0,332	0,602	0,254	0,632	0,220	0,648
3	0,322	0,601	0,396	0,584	0,415	0,581	0,317	0,608
AL TRESBOLILLO								
	$e_x/d = 1,25$		$e_x/d = 1,50$		$e_x/d = 2,00$		$e_x/d = 3,00$	
e_y/d	C	n	C	n	C	n	C	n
0,6	---	---	---	---	---	---	0,236	0,636
0,9	---	---	---	---	0,495	0,571	0,445	0,581
1	---	---	0,552	0,558	---	---	---	---
1,125	---	---	---	---	0,531	0,565	0,575	0,560
1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562
1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568
2	0,448	0,572	0,462	0,568	0,535	0,556	0,498	0,570
3	0,344	0,592	0,395	0,580	0,488	0,562	0,467	0,574

Tabla XV.6.- Factor de corrección del valor de h_c para N filas dividido por el valor correspondiente a 10 filas

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tubos al tresbolillo	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1
Tubos alineados	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1

Para gases, las propiedades se toman a la temperatura de película; el término de la raíz que relaciona los números de Pr es aproximadamente la unidad.

Para haces con menos de 20 filas de tubos, $N < 20$, el número de Nu_d obtenido con la ecuación de Zukauskas se corrige mediante un factor de corrección x que se determina a partir de la Fig XV.7 en la forma:

$$Nu_{(N)} = x Nu_{N > 20}$$

La velocidad que interviene en el cálculo del número de Re es la velocidad correspondiente a la sección entre los tubos, que depende de la geometría de la batería, y de la disposición espacial de los mismos.

TERCER MÉTODO.- Como en un haz de tubos el coeficiente de transferencia de calor aumenta desde la primera fila hasta casi la quinta; el n° de $Nu_{d(N)}$ promedio en un haz de tubos de 10 o más filas se puede calcular también a partir de la expresión:

$$Nu_{d(N)} = Nu_{d(1^a \text{ Fila})}$$

en la que $Nu_{d(1^a \text{ Fila})}$ es el número de Nusselt de la primera fila y x un factor de corrección, que se puede hallar mediante las ecuaciones siguientes o mediante las Fig XV.8 y 9:

Tabla XV.7.- Valores de C^* y m para baterías de 20 ó más tubos, ecuación de Zukauskas

Geometría	Re	C^*	m	Observaciones
EN LINEA	10 a 100	0,8		
	100 a 1.000	Se considera como tubo simple		
	1.000 a 200.000	0,27	0,63	
	200.000 a 1.000.000	0,21	0,84	
AL TRESBOLILLO	10 a 100	0,9	0,4	
	100 a 1.000	20% más que para tubo simple		
	1.000 a 200.000	$0,35 (e_x/e_y)^{0,2}$	0,6	$(e_x/e_y) < 2$
	1.000 a 200.000	0,4	0,6	$(e_x/e_y) > 2$
	200.000 a 1.000.000	0,022	0,84	

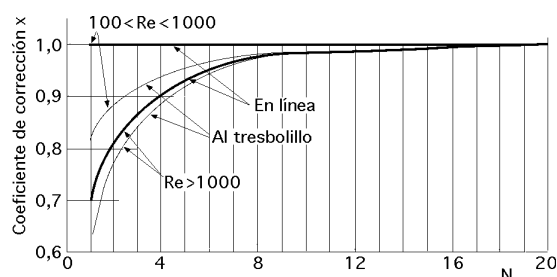


Fig XV.7.- Factor de corrección x de la ecuación de Zukauskas

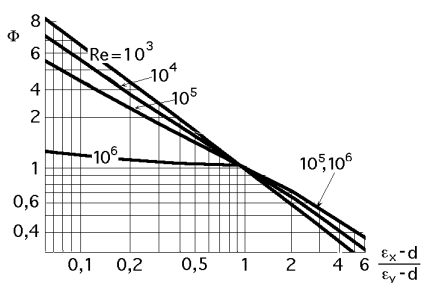


Fig XV.8.- Factor de corrección para un haz de tubos en batería en disposición regular

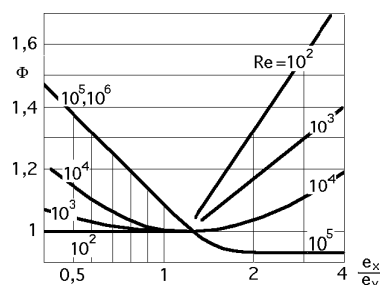


Fig XV.9.- Factor de corrección para un haz de tubos en batería en disposición al tresbolillo

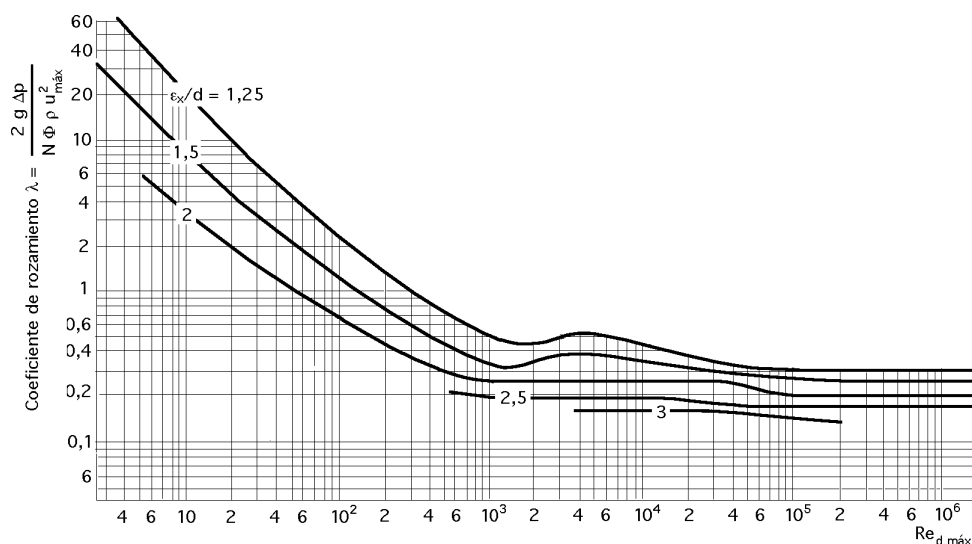


Fig XV.10.- Factor de fricción para hallar la pérdida de carga en tubos en batería en disposición regular

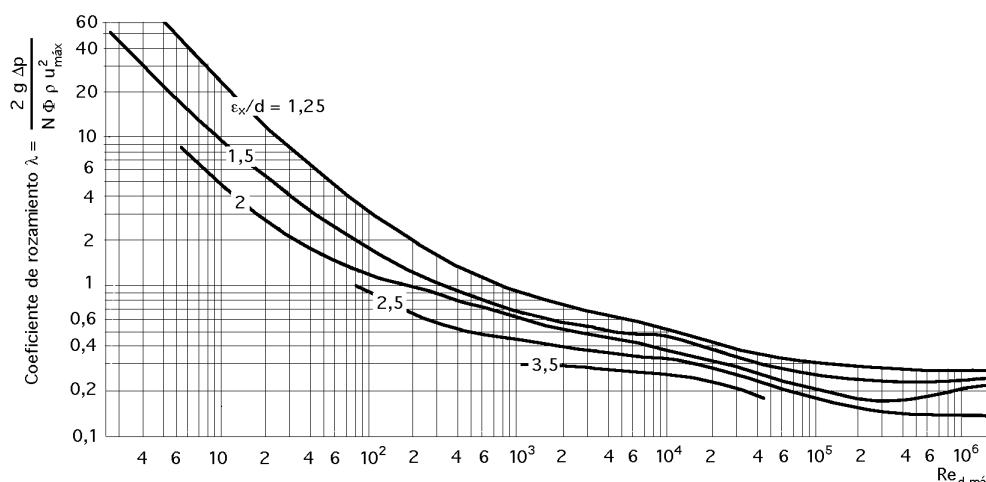


Fig XV.11.- Factor de fricción para hallar la pérdida de carga en tubos en batería en disposición al tresbolillo

$$\text{dispos. regular} = 1 + \frac{0,7}{1,5} \frac{\frac{e_x}{e_y} - 0,3}{\left(\frac{e_x}{e_y} + 0,7\right)^2}, \text{ con igual a,} \quad \begin{aligned} \text{si, } \frac{y}{d} > 1 &= 1 + \frac{d}{4y} \\ \text{si, } \frac{y}{d} < 1 &= 1 - \frac{d^2}{4xy} \end{aligned}$$

$$\text{dispos. al tresbolillo} = 1 + \frac{2d}{3x}$$

Si el haz tiene menos de 10 filas se aplica la ecuación, $Nu_{d(N<10)} = \frac{1 + (N - 1)}{N} Nu_{d(1^a \text{ fila})}$

En los gases, las propiedades se evalúan a la temperatura media de película.

En los líquidos, las propiedades se evalúan a la temperatura media del fluido T_F y después se aplica un factor de corrección al exponente del número de Prandtl, - 0,25 para calentamiento y - 0,11 para enfriamiento.

HUMOS.- En las Fig XV.12, 13, 14, y 15 se muestran unas gráficas que permiten determinar el coeficiente de convección h_c para diversas situaciones prácticas y en primera aproximación, ya que en ninguna de ellas se matizan las distancias entre tubos.

En la Fig XV.16 se presenta un ábaco que permite determinar el coeficiente de convección entre la pared de un tubo y un vapor de agua recalentado que circula por su interior, en función de la presión del vapor, su temperatura media, la longitud del tubo, su diámetro interior y la velocidad u_F del vapor.

METALES LÍQUIDOS.- Para el caso de metales líquidos, el cálculo del coeficiente de transferencia de calor correspondiente al flujo sobre baterías de tubos, está basado en la relación siguiente:

$$Nu = 4,03 + 0,228 (Re_{máx} Pr)^{0,67} ; \quad 2 \cdot 10^4 < Re < 8 \cdot 10^4$$

que para el caso particular del mercurio $Pr = 0,022$ es de gran precisión para una batería de 10 filas de tubos de media pulgada, al tresbolillo. Las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media de película.

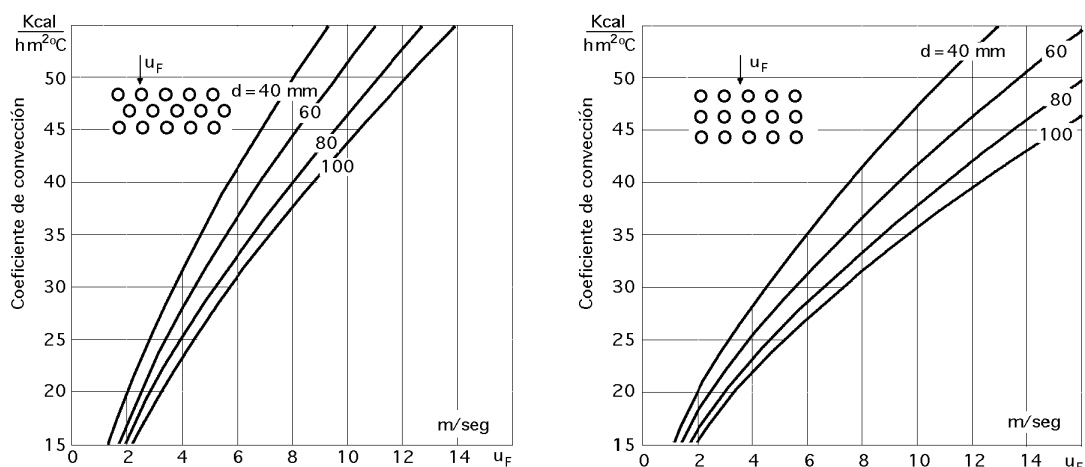


Fig XV.12.- Flujo cruzado de humos

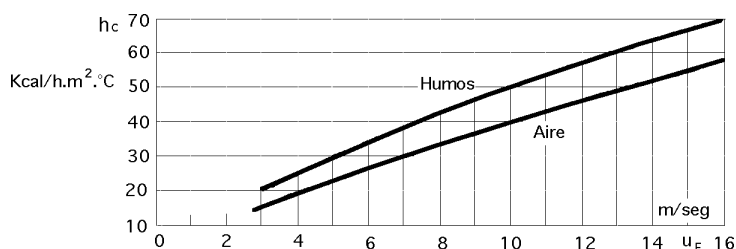


Fig XV.13.- Calentadores de chapa para gases de combustión

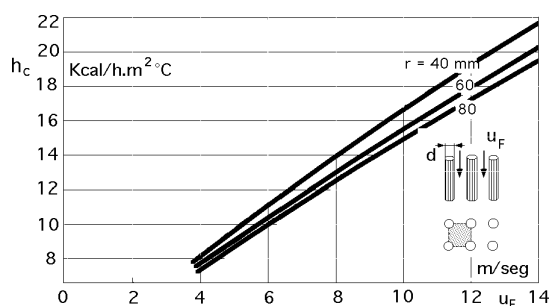


Fig XV.14.- Tubos con corriente de humos paralela a los mismos

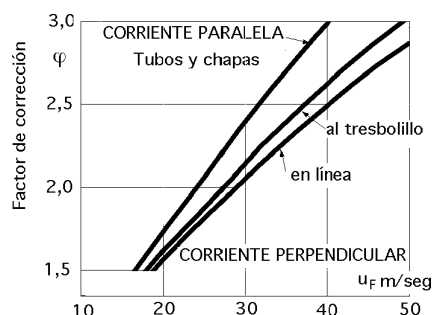


Fig XV.15.- Factores de corrección de las gráficas anteriores para grandes valores de la velocidad

XV.7.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN DE UN FLUJO A TRAVÉS DE UN LECHO COMPACTO

Los lechos compactos de partículas sólidas se utilizan como intercambiadores de calor o como sistemas de almacenamiento de energía. Consisten en un contenedor de bolas que se calientan haciendo pasar un fluido caliente a través del lecho, y la energía almacenada se transmite posteriormente a un fluido frío; el lecho es, por lo tanto, un transmisor de calor de una corriente fluida a otra, denominándose en estas circunstancias *lecho regenerativo*. También pueden servir para almacenar energía térmica durante un cierto tiempo o utilizarse como intercambiadores de masa con partículas de muchas formas.

El volumen del lecho disponible para el flujo v se conoce como *fracción de vacío* del lecho compacto, y se define en la forma:

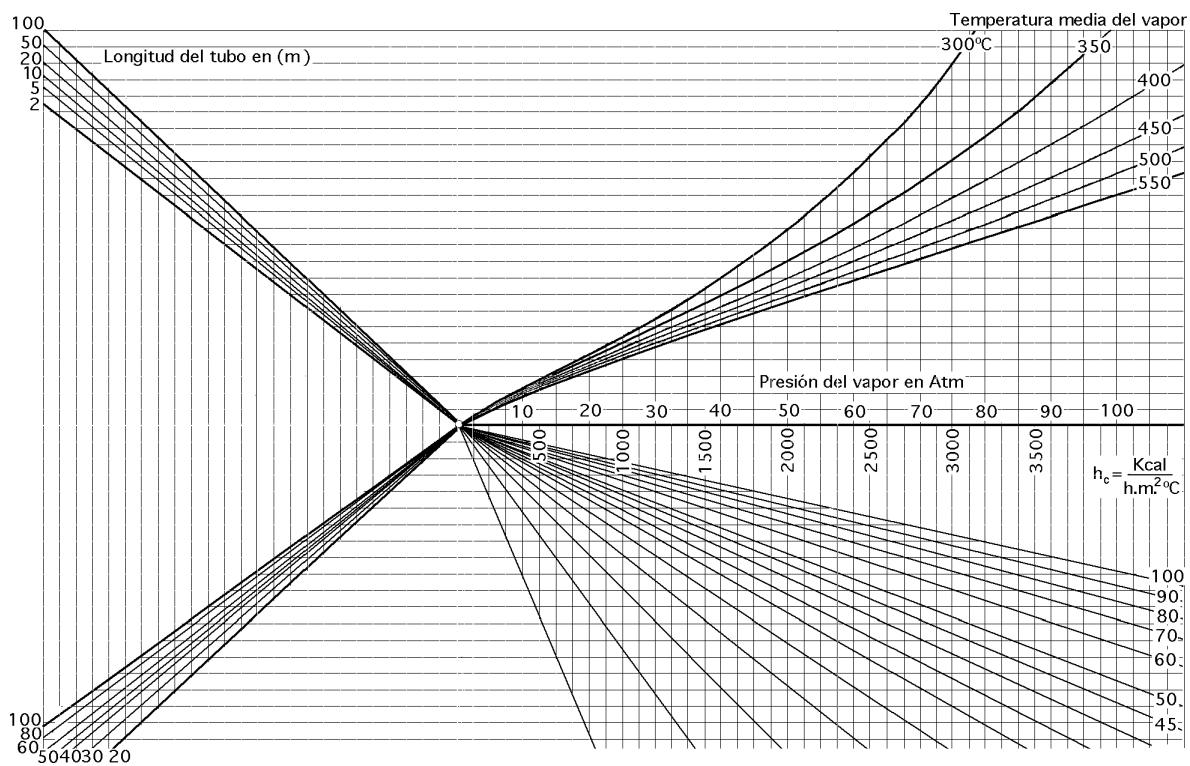


Fig XV.16.- Abaco para el cálculo del coeficiente de transmisión de calor por convección, de un vapor de agua recalentado que circula por el interior de una tubería

$$v = \frac{\text{Volumen del lecho} - \text{Volumen total de las partículas}}{\text{Volumen del lecho}} = \frac{V_{\text{lecho}} - V_{\text{part}}}{V_{\text{lecho}}}, \text{ con, } 0,3 < v < 0,5$$

La *superficie específica* de un lecho compacto **a** es el área mojada o superficie de transferencia térmica por unidad de volumen del lecho:

$$a = \frac{\text{Superficie total de las partículas}}{\text{Volumen del lecho}} = \frac{A_{\text{part}}}{V_{\text{lecho}}} = \left| \begin{array}{l} v = 1 - \frac{V_{\text{part}}}{V_{\text{lecho}}} \\ V_{\text{lecho}} = \frac{V_{\text{part}}}{1 - v} \end{array} \right| = \frac{A_{\text{part}}}{V_{\text{part}}} (1 - v)$$

El diámetro hidráulico de un lecho se define en la forma:

$$d_h = \frac{e_v}{a} = \frac{e_v}{1 - v} \frac{V_{\text{part}}}{A_{\text{part}}}$$

La longitud característica se define como:

$$L = \frac{e_v}{1 - v} d_{\text{part}}$$

La velocidad característica se define como:

$$v = \frac{G}{v A_{\text{trans. lecho}}}$$

La caída de presión en el lecho compacto se puede obtener a partir de:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{150}{L^2} v + \frac{1,75}{L} v^2 \quad ; \quad 1 < Re < 10^4$$

El nº de Reynolds es, $Re = \frac{v L}{\nu}$

Una correlación para la transferencia de calor de un gas que fluye a través de un lecho compacto, o de líquidos con número de Prandtl moderado, es:

$$Nu = (0,5 \sqrt{Re} + 0,2 Re^{2/3}) Pr^{1/3} \left(\frac{F}{pF}\right)^{0,14} \quad ; \quad \begin{matrix} 20 < Re < 10^4 \\ 0,5 < Pr < 20 \end{matrix}$$

XV.8.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCIÓN EN SUPERFICIE GIRATORIAS

El diseño de sistemas de refrigeración para máquinas giratorias, turbinas, motores, rodamientos de gas de alta velocidad, etc, precisa de correlaciones convectivas para su cálculo.

DISCOS.- Si se supone un disco que gira en un fluido infinito en reposo, el flujo pasa de laminar a turbulento para un valor del número de Reynolds:

$$Re_x = \frac{w r_{crit}^2}{\nu} = 2,4 \cdot 10^5$$

en la que w es la velocidad angular y r_{crit} es el radio en el que ocurre la transición; el régimen será laminar desde este radio hasta el eje de giro y turbulento (si le hay) desde el mismo al exterior.

En la *región laminar*, el número de Nusselt local es:

$$Nu_r = \frac{0,585 \sqrt{Re_r}}{\frac{0,6}{Pr} + \frac{0,95}{\sqrt[3]{Pr}}}, \text{ para, } \begin{matrix} Re_r > 2,4 \cdot 10^5 \\ \text{Cualquier valor de Pr} \end{matrix}$$

En la *región turbulenta*, el número de Nusselt local es:

$$Nu_r = 0,021 Re_r^{0,8} Pr^{1/3} \quad ; \quad Re_r > 2,4 \cdot 10^5$$

CILINDROS.- Para un cilindro horizontal que gira en un fluido en reposo el nº de Nusselt local es complicado. El número de Nusselt medio viene dado por:

$$Nu_d = 0,133 Re_d^{2/3} Pr^{1/3} \quad ; \quad \begin{matrix} Re_d < 4,3 \cdot 10^5 \\ 0,7 < Pr < 670 \end{matrix} \quad ; \quad Re_d = \frac{w d^2}{\nu}$$

El límite inferior para Re_d debido a efectos de convección natural, es decir, para cuando los efectos para la convección natural y forzada combinadas comiencen a ser significativos es:

$$Re_d < 4,7 \left(\frac{Gr_d^3}{Pr}\right)^{0,137}$$

ESFERAS.- Para una esfera que gira en un fluido en reposo el nº de Nusselt local es complicado.

El número de Nusselt medio, viene dado por:

$$\text{Nu}_d = 0,43 \sqrt{\text{Re}_d} \text{Pr}^{0,4} \quad ; \quad \begin{array}{l} 10^2 < \text{Re}_d < 5 \cdot 10^5 \\ \text{Pr} > 0,7 \end{array}$$

$$\text{Nu}_d = 0,066 \text{Re}_d^{2/3} \text{Pr}^{0,4} \quad ; \quad \begin{array}{l} 5 \cdot 10^5 < \text{Re}_d < 7 \cdot 10^6 \\ \text{Pr} > 0,7 \end{array}$$

XVI.- CONDENSACIÓN Y VAPORIZACIÓN

XVI.1.- TRANSFERENCIA DEL CALOR POR CONDENSACIÓN

La condensación se produce cuando un vapor saturado que se pone en contacto con una superficie a menor temperatura, se enfría hasta que la temperatura se hace inferior a su temperatura de saturación. Si el vapor es puro, la temperatura de saturación corresponde a la presión total; si se trata de una mezcla de vapor y gas no condensable, la temperatura de saturación corresponderá a la presión parcial del vapor.

CONDENSACIÓN EN FORMA DE PELÍCULA .- Si el condensado se forma sobre una pared vertical y la humedece, en condiciones normales se forma sobre la superficie un flujo continuo de fluido fluyendo el condensado hacia abajo por la acción de la gravedad, aumentando el espesor de la película de modo continuo de arriba hacia abajo. Salvo que la velocidad del vapor sea muy alta o que la película de líquido sea muy gruesa, el movimiento del condensado es laminar, y se transfiere la entalpía de condensación desde la intercara (vapor/líquido) hacia la superficie simplemente por conducción.

La velocidad del flujo de calor depende principalmente del espesor de la película del condensado, la cual a su vez depende de la velocidad a la que condensa el vapor y de la velocidad con que se elimina el condensado. Cuando la placa es inclinada respecto a la posición vertical, disminuye la velocidad del condensado y la película de líquido se hace más gruesa, lo que origina una disminución de la velocidad de transferencia de calor.

Los coeficientes de transmisión de calor por convección para la condensación de vapores puros en forma de película, sobre tubos y placas, fueron obtenidos por primera vez por Nusselt en 1916.

Proceso dinámico.- Para placa vertical, a una distancia x de la parte superior de la placa de anchura unidad, el espesor de la película es ; si el flujo de líquido es laminar y está producido sólo por la acción de la gravedad, se puede estimar la velocidad del líquido mediante un balance de fuer-

zas sobre el elemento de volumen dx , Fig XVI.1.

La fuerza F_l que actúa sobre el líquido contenido en el volumen de espesor dx , a una distancia de la superficie entre y y $y + dy$ es:

$$F_l = (\rho_l - \rho_v) dx \int_0^y g$$

Suponiendo que el vapor que está fuera de la capa del condensado se encuentra en equilibrio hidrostático, se tiene que:

$$dx = \frac{dp}{\rho_v} = \frac{dp}{\rho_v g} ; \quad \frac{dp}{dx} = \rho_v g$$

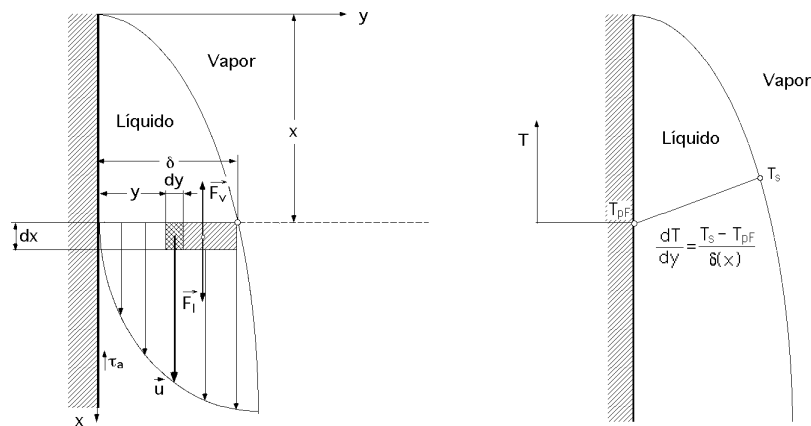


Fig XVI.1.- Condensación en forma de película sobre una superficie vertical

Como consecuencia de este gradiente de presiones, se puede interpretar que el elemento de condensado $(\rho_l - \rho_v)$ se encuentra en una atmósfera de vapor saturado, por lo que aparecerá sobre el mismo una fuerza sustentadora F_v (prácticamente despreciable), igual al peso del volumen de vapor desalojado de la forma:

$$F_v = (\rho_l - \rho_v) dx \int_0^y g$$

Las fuerzas viscosas frenan el movimiento hacia abajo (rozamiento); por lo que respecta al vapor, a menos que fluya a una velocidad muy elevada, las tensiones de cortadura en la superficie libre son muy pequeñas, por lo que el rozamiento debido al vapor se puede despreciar; la fuerza de rozamiento generada F_r será debida únicamente a la viscosidad del líquido, y se opone al deslizamiento del condensado de la forma:

$$F_r = \mu_l \frac{du}{dy} dx$$

En condiciones estacionarias las fuerzas hacia arriba y hacia abajo son iguales, por lo que:

$$(\rho_l - \rho_v) (\rho_l - \rho_v) g = \mu_l \frac{du}{dy}$$

siendo:

δ el espesor de la capa de condensado

ρ_l la densidad del líquido; ρ_v la densidad del vapor; μ_l la viscosidad del líquido

$u = u(y)$ la velocidad a la distancia x

La distribución de velocidades u en la película de condensado se obtiene integrando la anterior:

$$u(y) = \frac{(\rho_l - \rho_v)g}{\mu_l} \left(y - \frac{y^2}{2} \right)$$

La velocidad alcanza un valor máximo sobre la superficie de la película, y se obtiene haciendo $y = \delta$, en la forma:

$$u_{\text{máx}} = \frac{(\rho_l - \rho_v)g}{2\mu_l} \delta^2$$

El flujo másico de condensado por unidad de anchura de la placa es:

$$G = \int_0^\delta \rho_l u \, dy = \int_0^\delta \frac{(\rho_l - \rho_v)g}{\mu_l} \left(y - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{(\rho_l - \rho_v)g}{3\mu_l} \delta^3 = \frac{(\rho_l - \rho_v)g}{3\mu_l} \delta^3$$

Proceso térmico.- Como la velocidad del flujo másico del condensado G (Kg/seg) sobre la placa depende de la velocidad a la que condensa el vapor, si se supone que el flujo de película es de tipo laminar y paralelo a la superficie, y que el *gradiente de temperatura es lineal* de la forma:

$$\frac{dT}{dy} = \frac{T_s - T_{pF}}{\delta(x)}$$

y dado que el calor se transfiere a través de la capa de condensado, únicamente por conducción, se tiene:

$$dq = k_l \, dx \, \frac{dT}{dy} = k_l \, dx \, \frac{T_s - T_{pF}}{\delta(x)} = dG \, r_{l-v}$$

en la que dG es la cantidad de vapor condensado en el elemento, $(\delta - y) \, dx$:

$$dG = k_l \, dx \, \frac{T_s - T_{pF}}{\delta(x)} \, \frac{1}{r_{l-v}}$$

Espesor de la capa de condensado.- Para hallar el espesor de la capa de condensado se parte de:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{k_l}{r_{l-v}} \frac{T_s - T_{pF}}{\delta(x)} = \frac{g}{3\mu_l} (\rho_l - \rho_v) \frac{d(\delta^3)}{dx} = \frac{g}{\mu_l} (\rho_l - \rho_v) \frac{\delta^2}{dx}$$

$$\int_0^\delta \frac{k_l}{r_{l-v}} \frac{T_s - T_{pF}}{g(\rho_l - \rho_v)} \, dx = \delta^3 \, d; \quad \int_0^\delta \frac{k_l}{r_{l-v}} \frac{T_s - T_{pF}}{g(\rho_l - \rho_v)} \, dx = \frac{\delta^3}{3}$$

$$\frac{k_1}{x_{1-v}} \frac{T_s - T_{pF}}{g_{1(1-v)}} x = \frac{4}{4} \quad ; \quad = \sqrt[4]{\frac{4 k_1 g_{1(1-v)} x}{x_{1-v} g_{1(1-v)}}}$$

que dice que el espesor de la película de condensado aumenta en función de la raíz cuarta de la distancia recorrida x a lo largo de la superficie.

Coefficiente de transferencia de calor.- El calor evacuado en la condensación por conducción, en el elemento de volumen de espesor dx a la distancia x , es el mismo que el evacuado por convección de la forma:

$$dq = h_{Cx} dx (T_s - T_{pF}) = k_1 dx \frac{dT}{dy} = k_1 dx \frac{T_s - T_{pF}}{dy}$$

por lo que el *coeficiente de transferencia de calor local por unidad de anchura* h_{Cx} , es:

$$h_{Cx} = k_1 \frac{T_s - T_{pF}}{\frac{1}{T_s - T_{pF}}} = \frac{k_1}{\frac{1}{T_s - T_{pF}}} = \sqrt[4]{\frac{x_{1-v} g_{1(1-v)} k_1^3}{4 (T_s - T_{pF}) x}}$$

El número de Nusselt local adimensional en x vale:

$$Nu_x = \frac{h_{Cx} x}{k_1} = \sqrt[4]{\frac{x_{1-v} g_{1(1-v)} x^3}{4 k_1 (T_s - T_{pF})}}$$

El coeficiente de convección local es:

$$h_{Cx} = \sqrt[4]{\frac{x_{1-v} g_{1(1-v)} k_1^3}{4 (T_s - T_{pF}) x}}$$

El aumento del espesor de la película de condensado es semejante al crecimiento de la capa límite sobre una placa plana en la convección; un aumento de la diferencia de temperaturas, $T_s - T_{pF}$, produce una disminución de la conductancia superficial; ésto está originado por el aumento del espesor de la película, como resultado del incremento de la velocidad de condensación.

El valor medio del coeficiente de convección h_C correspondiente a una placa vertical de anchura unidad y altura L es:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_0^L h_{Cx} dx = 0,943 \sqrt[4]{\frac{x_{1-v} g_{1(1-v)} k_1^3}{(T_s - T_{pF}) L}} = \frac{4}{3} h_{CL}$$

y el número de Nu:

$$Nu = 0,943 \sqrt[4]{\frac{x_{1-v} g_{1(1-v)} L^3}{(T_s - T_{pF}) k_1}}$$

Aunque el análisis anterior está hecho específicamente para una placa vertical, el desarrollo es válido para las superficies interior y exterior de tubos verticales, si éstos tienen diámetros grandes

en comparación con el espesor de la película; estos resultados se pueden extender también a placas inclinadas un ángulo θ , respecto al plano horizontal, sustituyendo g por $g \sin \theta$.

Tabla XVI.1.- Valores aproximados del coeficiente de transmisión de calor por convección en el caso de la condensación de vapores puros, en $W/m^2\text{°C}$

Fluido	Materiales	$T_s - T_{pF}$	$W/m^2\text{°C}$
Agua	Tubos horizontales de diámetro exterior (25-75) mm	3-20	11.000-23.000
Agua	Superficie vertical de altura 3 m	3-20	5.700-11.000
Etanol	Superficie vertical de altura 0,15 m	10-55	1.100-1.900
Benceno	Tubo horizontal de diámetro exterior 25 mm	15-45	1400-2.000
Etanol	Tubo horizontal de diámetro exterior 50 mm	5-20	1.700-2.600
Amoniaco	Anillo horizontal de 50 a 75 mm	1-4	1.400-2.600

XVI.2.- CONDENSACIÓN EN PELÍCULA LAMINAR SOBRE PLACAS Y TUBOS VERTICALES

Determinación del tipo de régimen del flujo en la película.- Se pueden considerar 3 regímenes de flujo en película, laminar, ondulatorio y turbulento.

Para números de Reynolds bajos el flujo es laminar y la superficie de la película presenta un aspecto liso; a medida que aumenta el n° de Reynolds se forman ondas en la superficie de la película; al seguir aumentando aún más el n° de Reynolds estas ondas toman una forma compleja ondulatoria en tres dimensiones.

Las ondas hacen que el líquido se mezcle ligeramente, pero el flujo en la base sigue siendo laminar, hasta que a velocidades relativamente altas, el flujo se vuelve turbulento por toda la película debido a la inestabilidad originada por los esfuerzos cortantes.

El número de Reynolds de una película descendente se puede definir en función de la velocidad u_F y del diámetro hidráulico d_h de la película:

$$Re = \frac{u_F \cdot d_h}{\nu} = \frac{u_F \cdot \frac{4}{p} \cdot \frac{A}{4}}{\nu} = \frac{4 G}{p \cdot \nu} = \frac{4 G}{d \cdot \nu}$$

siendo el gasto másico:

$$G = \frac{Q}{r_{1-v}} = \frac{h_c A (T_s - T_{pF})}{r_{1-v}} = u_F A$$

Para tubos verticales, $A = d L$; $p = d$; $G^* = \frac{G}{p} = \frac{G}{d}$; $Re = \frac{4 G}{p \cdot \nu} = \frac{4 G}{d \cdot \nu}$

Para tubos horizontales, $A = d L$; $p = L$; $G^* = \frac{G}{p} = \frac{G}{L}$; $Re = \frac{4 G}{p \cdot \nu} = \frac{4 G}{L \cdot \nu}$

Para placas inclinadas de anchura W , $A = W L$; $p = W$; $G^* = \frac{G}{p} = \frac{G}{W}$; $Re = \frac{4 G}{p \cdot \nu} = \frac{4 G}{W \cdot \nu}$

con L la longitud del tubo.

En la condensación, las propiedades del líquido condensado se evalúan a la temperatura media

entre la temperatura de saturación T_s y la de la pared T_{pF} , las propiedades del vapor se evalúan a la temperatura de saturación T_s y el calor latente de condensación η_{l-v} a la temperatura del vapor saturado T_s .

a.1) Condensación sobre placa vertical y tubos verticales, en régimen laminar.- La expresión para placa vertical se puede extender tanto a las superficies interiores como a las exteriores de tubos verticales, siempre que su diámetro sea muy grande en comparación con el espesor de la película.

El tubo se puede considerar como una placa vertical de área, $d L$, y perímetro, d .

La solución analítica es:

$$h_{C(\text{vertical})} = 0,943 \sqrt[4]{\frac{r_{l-v} g_{l-v} (T_s - T_{pF}) k_l^3}{L}} \quad 0,943 \sqrt[4]{\frac{r_{l-v} g_{l-v} k_l^3}{L (T_s - T_{pF})}}$$

Resultados experimentales han demostrado que esta ecuación es conservadora, de forma que los resultados obtenidos con ella están un 20% por debajo de los valores medidos, por lo que se propone la siguiente ecuación experimental:

$$h_{C(\text{vertical})} = 1,13 \sqrt[4]{\frac{r_{l-v} g_{l-v} (T_s - T_{pF}) k_l^3}{L}} \quad 1,13 \sqrt[4]{\frac{r_{l-v} g_{l-v} k_l^3}{L (T_s - T_{pF})}}$$

El número de Reynolds del condensado en la parte inferior del tubo vertical es:

$$Re = \frac{4 h_C L (T_s - T_{pF})}{r_{l-v}} = 4,52 \sqrt[4]{\frac{g_{l-v} (T_s - T_{pF})^3 L^3}{r_{l-v}^3}} < 1800$$

a.2) Otra formulación para la condensación sobre placa vertical y tubos verticales, en régimen laminar

Para el caso particular del agua sobre tubos verticales, el flujo se vuelve:

- Laminar ondulatorio para $Re_L \leq 30$
- La transición a flujo turbulento en la región exterior de la película se da para $Re_L \approx 1000$
- La turbulencia se completa para $Re_L \approx 1800$.

Para $Re_L < 30$, la película es laminar, siendo:

$$Re_L = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\left(\frac{4 L Ja_1}{Pr_1}\right)^3 \frac{g}{v_1^2}} \quad ; \quad Ja_1 = \text{Nº de Jakob} = \frac{c_{pl} (T_{sat} - T_{pF})}{r_{l-v}}$$

El número de Nu local para el agua es, $Nu_{\text{laminar}} = \sqrt[3]{\frac{3 Re}{4}} \quad ; \quad 0 < Re < 30$

El número de Nu medio es, $Nu = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{Pr_1}{4 Ja_1} \frac{1}{L} \sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}}$

a.3) Condensación sobre placa vertical o tubos verticales, en película laminar ondulatoria

Si el n° de Reynolds es, $30 < Re_L < Re_{trans}$, la película es laminar ondulatoria.

El número de Nu local para el caso particular del agua es:

$$Nu_{laminar\ ondulatorio} = 0,822 Re^{-0,22} ; 30 < Re < Re_{trans}$$

donde la transición a la turbulencia sucede, para el agua, cuando: $Re_{tr} = 5800 Pr_1^{-1,06}$

$$\text{Para el caso general, } Re_L = \left(\frac{4 Ja_1}{Pr_1} \frac{L}{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}}} \right)^{0,82}$$

$$\text{El número de Nu medio es, } Nu = \left\{ \frac{Pr_1}{4 Ja_1} \frac{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}}{L} \right\}^{0,18}$$

Efecto del subenfriamiento del líquido.- En el caso de líquidos con calores latentes de cambio de estado relativamente bajos, como muchos refrigerantes, es necesario hacer una corrección para tener en cuenta el efecto del subenfriamiento; la correlación propuesta por Rohsenow tiene en cuenta esta variación de la entalpía media del vapor al condensar y enfriarse posteriormente a la temperatura media de la capa de condensado, para lo cual sustituye el calor latente r_{l-v} a T_s por otro de la forma:

$$r_{l-v}^* = r_{l-v} + 0,68 c_{pl} (T_s - T_{pF}) , \text{ para, } \begin{matrix} Pr > 0,5 \\ Ja_1 = c_{pl} \frac{T_s - T_{pF}}{r_{l-v}^*} < 1 \text{ (Rohsenov)} \end{matrix}$$

$$r_{l-v}^* = r_{l-v} + \left(0,683 - \frac{0,228}{Pr_1} \right) c_{pl} (T_s - T_{pF}) = r_{l-v} \left\{ 1 + \left(0,683 - \frac{0,228}{Pr_1} \right) Ja_1 \right\}$$

El coeficiente de convección es:

$$h_C = 0,943 \sqrt[4]{\frac{r_{l-v}^* g_{l-v} (1 - v) k_l^3}{1 (T_s - T_{pF}) L}}$$

Efecto del sobrecalentamiento del vapor en la condensación.- Para hallar la influencia del sobrecalentamiento del vapor en la condensación sobre el coeficiente de transferencia de calor h_C , se puede utilizar la misma expresión obtenida para un tubo horizontal que es de la forma:

$$h_C = 0,725 \sqrt[4]{\frac{r_{l-v}^* g_{l-v} (1 - v) k_l^3}{1 (T_s - T_{pF}) d}} ; r_{l-v}^* = r_{l-v} + c_{pl} (T_{sobrec} - T_s) + 0,35 c_{pl} (T_s - T_{pF})$$

El efecto del sobrecalentamiento del vapor aumenta el coeficiente de convección y, por lo tanto, la transferencia de calor, pero disminuye la cantidad del condensado.

XVI.3.- CONDENSACIÓN EN PELÍCULA LAMINAR SOBRE PLACAS Y TUBOS INCLINADOS

En la condensación sobre placas inclinadas un ángulo θ respecto a la horizontal se utilizan expresiones para h_C y Re similares a la anterior de la forma

$$h_{C_{\text{sup.inclinada}}} = 1,13 \sqrt[4]{\frac{r_{1-v} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \sin \theta}{\rho_l (T_s - T_{pF}) L}}$$

$$Re = 4,52 \sqrt[4]{\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 (T_s - T_{pF})^3 L^3 \sin \theta}{\rho_l r_{1-v}^3}} < 1800$$

XVI.4.- CONDENSACIÓN EN PELÍCULA LAMINAR SOBRE UN TUBO HORIZONTAL

a) El coeficiente de convección medio de un vapor puro saturado que está condensando sobre el exterior de un tubo horizontal, de forma que el espesor de película sea nulo en la parte superior del tubo, es:

$$Re = \frac{4 h_C d x (T_s - T_{pF})}{\rho_l r_{1-v}} = 9,11 \sqrt[4]{\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 (T_s - T_{pF})^3 d^3}{\rho_l r_{1-v}^3}} < 3600$$

$$h_{C_{\text{horiz}}} = 0,725 \sqrt[4]{\frac{r_{1-v} g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3}{\rho_l (T_s - T_{pF}) d}} = 0,725 \sqrt[4]{\frac{r_{1-v} g \rho_l^2 k_l^3}{\rho_l (T_s - T_{pF}) d}}$$

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{2 r_1 L h_{CF1}} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 k L} + \frac{1}{2 r_2 L h_{C_{\text{horiz}}}}$$

b) Condensación sobre una batería de N tubos horizontales, en régimen laminar.- Si la condensación se produce sobre N tubos horizontales dispuestos de tal modo que el condensado de un tubo cae directamente sobre el tubo que tiene debajo, que es lo que sucede en la mayoría de los condensadores, se puede estimar la conductancia superficial para el conjunto mediante la expresión anterior, sustituyendo el diámetro d por, $N d$; este método proporciona resultados conservativos, porque es inevitable una cierta turbulencia; para régimen laminar, $Re < 3600$:

$$h_{C(N \text{ tubos})} = 0,725 \sqrt[4]{\frac{r_{1-v} g \rho_l^2 k_l^3}{\rho_l (T_s - T_{pF}) d N}} = \frac{h_{C(1 \text{ tubo})}}{N^{1/4}}$$

Una expresión que tiene en cuenta que todo el calor del subenfriamiento se utiliza para una condensación adicional de la capa límite entre N tubos horizontales, colocados unos encima de otros, es de la forma:

$$h_{C(N \text{ tubos})} = 0,728 \{1 + 0,2 Ja_1 (N - 1)\} \sqrt[4]{\frac{r_{1-v} g \rho_l^2 k_l^3}{\rho_l (T_s - T_{pF}) d N}}$$

que concuerda bastante bien con los resultados experimentales siempre que, $(N - 1) Ja_1 < 2$

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE CONVECCIÓN h_C horizontal y h_C vertical. Para una diferencia de temperaturas determinada, el coeficiente de convección es mayor cuando se coloca el tubo en posición horizontal, que cuando se coloca vertical, ya que el camino recorrido por el condensado es menor, resultando la película más delgada, por lo que:

$$\frac{h_{C_{\text{horiz}}}}{h_{C_{\text{vertical}}}} = \frac{0,725}{0,943} \sqrt[4]{\frac{L}{d}} = 0,77 \sqrt[4]{\frac{L}{d}}$$

que implica el que para una diferencia de temperaturas dada, $T_s - T_{pF}$, resulte:

$$\frac{h_{C_{\text{horiz}}}}{h_{C_{\text{vertical}}}} = 1, \text{ para, } L = 2,86 d$$

$$h_{C_{\text{horiz}}} = 2,43 h_{C_{\text{vertical}}}, \text{ para, } L = 100 d$$

por lo que ante estas consideraciones, la disposición de tubos condensadores horizontales se prefiere a la vertical.

$$Re = \frac{4 G}{1 L N} = 9,11 \sqrt[4]{\frac{g_{1(l-v)} k_1^3 (T_s - T_{pF})^3 N^3 d^3}{1 r_{1-v}^3}} < 3600$$

XVI.5.- CONDENSACIÓN EN RÉGIMEN TURBULENTO

a) El régimen se considera turbulento cuando, $Re > 1800$.

Es difícil que se llegue a alcanzar el flujo turbulento en un tubo horizontal durante la condensación, pero sí es posible se pueda conseguir en la parte más baja de un tubo vertical.

Cuando ésto sucede, el coeficiente de transferencia térmica h_C crece al aumentar la longitud L de la superficie condensada, debido a que también aumenta el grado de turbulencia.

El número de Reynolds para superficies verticales isotérmicas en régimen turbulento es:

$$Re = 0,00296 \left\{ \frac{g_{1(l-v)} k_1^3 (T_s - T_{pF})^3 L^3}{1 r_{1-v}^3} \right\}^{5/9} > 1800$$

Cuando por el exterior de la pared el vapor está en reposo, o cuando por el interior del tubo la velocidad del vapor es muy pequeña, el coeficiente de convección local correspondiente al flujo turbulento del condensado en placa vertical se determina mediante la relación:

$$h_{Cx} = 0,056 \left(\frac{4 u}{1} \right)^{0,2} \sqrt[3]{\frac{g_{1(l-v)} k_1^3}{2}} \sqrt{Pr_1}$$

siendo u la velocidad en la base del orden de, $Re_{\text{base}} = \frac{4 u}{1}$

Si el vapor no está en reposo, y el movimiento del mismo no perturba la formación de la película, se mantiene la formulación anterior.

Las propiedades del condensado se evalúan a la temperatura, $T = \frac{T_s + T_{pF}}{2}$

b) El número de Nu local para el caso particular del agua es:

$$Nu_{turb} = 3,8 \cdot 10^{-3} Re^{0,4} Pr_1^{0,65} ; \quad Re_{transv} < Re$$

$$\text{Caso general, } \frac{L}{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}} = \frac{x_{trans}}{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}} + \frac{Pr_1^{0,35}}{2,4 (3,8 \cdot 10^{-3}) Ja_1} (Re_L^{0,6} - Re_{trans}^{0,6})$$

$$\text{Nº de Nusselt medio, } Nu = \frac{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}}{L} \frac{Pr_1}{4 Ja_1} \left\{ \frac{9,12 \cdot 10^{-3} Ja_1 (L - x_{trans})}{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}} Pr_1^{0,35}} + Re_{trans}^{0,6} \right\}^{10/6}$$

$$\text{siendo, } x_{trans} = \sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}} \frac{Pr_1}{4 Ja_1} Re_{trans}^{1,22} ; \quad Ja_1 = \frac{c_{pl} (T_{sat} - T_{pared})}{r_{1-v}}$$

EFECTO DE LA VELOCIDAD DEL VAPOR EN PLACAS Y TUBOS VERTICALES

a) Si la velocidad del vapor no condensado es considerable frente a la del líquido condensado, se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$\frac{h_c}{c_{pl} G_m} \sqrt{Pr_1} = 0,046 \sqrt{\frac{1}{v}}$$

siendo el coeficiente de rozamiento correspondiente a la velocidad media del vapor, viniendo dado el gasto másico del vapor en la forma:

$$G_m = \sqrt{\frac{G_{inf}^2 + G_{inf} G_{sup} + G_{sup}^2}{3}}$$

en la que G_{inf} es el gasto másico del vapor en la parte inferior del tubo y G_{sup} es el gasto másico del vapor en la parte superior del tubo.

Las propiedades del líquido se calculan a la temperatura de referencia:

$$T = 0,25 T_s + 0,75 T_{pF}$$

b) Una expresión que se aplica a un vapor saturado seco a la presión de 1 atm, que desciende por un tubo vertical a una velocidad comprendida entre 40 y 80 m/seg, es:

$$h_c = 3400 + 100 u_{Fv} \sqrt[3]{\frac{1,21}{L}}$$

siendo L la longitud del tubo en metros y u_{Fv} la velocidad del vapor en m/seg.

c) Otra expresión en función de los números de Reynolds Re_l y Re_v es:

$$\frac{h_c d}{k_l} = 0,026 \sqrt[3]{Pr_l} (Re_l + Re_v \sqrt{\frac{1}{v}})^{0,8} ; \quad Re_l = \frac{4 G_l}{d_l} ; Re_l > 5.000$$

$$Re_v = \frac{4 G_v}{d_v} ; Re_v > 20.000$$

d) Otra expresión en función del número de Jakob, que tiene en cuenta el efecto del arrastre del vapor a una distancia x del borde superior del tubo vertical, a la velocidad u_v es:

$$h_c = \sqrt{\frac{k_l^2 u_v}{8 l x} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16 Pr_l}{Ja_l} \frac{g x}{u_v^2}}\right)}$$

$$\frac{Pr_l}{Ja_l} = \frac{l l r_{l-v}^*}{k_l (T_{sat} - T_{pF})}$$

En ausencia de arrastre de vapor, el valor de h_c es:

$$h_c = \sqrt[4]{\frac{r_{l-v}^* g l k_l^3}{4 x (T_{sat} - T_{pF}) l}}$$

$$r_{l-v}^* = r_{l-v} + \left(0,683 - \frac{0,228}{Pr_l}\right) c_{pl} (T_s - T_{pF}) = r_{l-v} + \left\{1 + \left(0,683 - \frac{0,228}{Pr_l}\right) Ja_l\right\}$$

observándose que el efecto de arrastre del vapor consiste en aumentar el coeficiente de transferencia de calor.

XVI.6.- CONDENSACIÓN EN RÉGIMEN TURBULENTO EN EL INTERIOR DE TUBOS HORIZONTALES

En aplicaciones prácticas de condensadores en refrigeración y en sistemas de aire acondicionado, se observa que el vapor condensa en el interior de los tubos con una cierta velocidad; el fenómeno de la condensación y su posible tratamiento analítico, en forma simple, es complicado.

El valor del coeficiente de transmisión de calor para la *condensación de refrigerantes en el interior de tubos horizontales*, si se considera que el vapor tiene una velocidad despreciable, es:

$$h_c = 0,555 \sqrt[4]{\frac{r_{l-v}^* g l^2 k_l^3}{l (T_s - T_{pF}) d}}$$

$$\text{con, } r_{l-v}^* = r_{l-v} + \frac{3}{8} c_{pl} (T_s - T_{pF}) ; \quad Re_{vapor} = \frac{v u_v d}{\nu} < 35.000$$

XVI.7.- CONDENSACIÓN EN FORMA DE GOTAS

Cuando una superficie sobre la que va a condensar un vapor está contaminada con una sus-

tancia que impide que el condensado moje la superficie, el vapor condensará en forma de gotas, en lugar de hacerlo como una película continua, fenómeno que se conoce como condensación en forma de gotas.

En estas condiciones una gran parte de la superficie no se ve cubierta con una película aislante y los coeficientes de transferencia de calor pueden ser de cuatro a ocho veces más elevados que en la condensación en forma de película.

Hasta ahora, la condensación en forma de gotas sólo se ha obtenido de modo fiable, con vapor de agua. Para calcular el coeficiente de transmisión de calor por convección, se recomienda suponer una condensación en forma de película porque, incluso en el caso del vapor de agua, sólo se puede esperar que se obtenga la condensación en forma de gotas bajo condiciones cuidadosamente controladas, que no pueden mantenerse siempre en la práctica.

XVI.8.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR EVAPORACIÓN DE LÍQUIDOS EN REPOSO

EVAPORACIÓN EN PELÍCULA DESCENDENTE SOBRE UNA PARED VERTICAL.- La transferencia de calor a través de una evaporación en película descendente es casi idéntica a la condensación en película descendente, salvo que se lleva en dirección contraria, es decir, la película siempre tiene un espesor finito al comienzo disminuyendo el número de Re al descender por la pared a medida que va progresando la evaporación; en determinadas situaciones la velocidad de evaporación es pequeña comparada con la velocidad del flujo de la película y la variación del número de Re podría ser pequeña.

Como la temperatura $T_{pF} > T_s$ el líquido que se encuentra más cerca de la pared estará sobrecalentado, y comienzan a formarse burbujas por nucleación sobre la pared iniciándose la ebullición, o también, las burbujas contenidas en el líquido pueden crecer de forma explosiva (cavitación). Sea cual fuere el mecanismo, lo cierto es que el proceso de transmisión de calor se complica.

Una película evaporativa puede ser, en principio, laminar ondulatoria o turbulenta. Si el arrastre de vapor es mínimo, se pueden utilizar los siguientes números de Nu locales:

$$Nu_{\text{laminar}} = \sqrt[3]{\frac{4}{3 Re}} \quad ; \quad 0 < Re < 30$$

$$Nu_{\text{laminar ondulatorio}} = 0,822 Re^{-0,22} \quad ; \quad 30 < Re < Re_{\text{trans}}$$

$$Nu_{\text{turbulento}} = 3,8 \cdot 10^{-3} Re^{0,4} Pr_1^{0,65} \quad ; \quad Re_{\text{transv}} < Re$$

siendo, $Re_{\text{transv}} = 5800 Pr_1^{-1,06}$

El número de Reynolds se obtiene a partir de:

$$\frac{L}{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}} = - \frac{Pr_1}{4 Ja_1} \frac{Re_L}{Re_0} \frac{dRe}{Nu} = - \frac{Pr_1}{4 Ja_1} \frac{Re_L}{Re_0} \frac{dRe}{0,822 Re^{-0,22}} = - \frac{Pr_1}{4 Ja_1} (Re_L^{1,22} - Re_0^{1,22})$$

$$Re_L^{1,22} = Re_0^{1,22} - \frac{4 Ja_1 L}{Pr_1} \sqrt[3]{\frac{g}{v_1^2}}$$

en la que el número de Reynolds inicial de la película es, $Re_0 = \frac{4 G_0}{d_1}$

siendo G_0 la cantidad de líquido inicial disponible para la evaporación en película descendente.

El número de Nu medio es, $Nu = \frac{Pr_1}{4 Ja_1} \frac{\sqrt[3]{\frac{v_1^2}{g}}}{L} (Re_0 - Re_L)$

EVAPORACIÓN NUCLEADA EN RECIPIENTES CON UN LIQUIDO EN REPOSO.- Estudiar el proceso de la evaporación nucleada en un líquido en reposo es extremadamente difícil, ya que en la actualidad no se pueden explicar muy bien ni el mecanismo exacto de la formación de burbujas, ni el movimiento de las mismas, totalmente aleatorio; por lo tanto no existe un análisis satisfactorio de la transferencia de calor en este tipo de evaporación; el mecanismo principal de la transferencia de calor es la convección natural en régimen turbulento, causada por la agitación producida por las burbujas.

Para su estudio se puede dividir el fenómeno en las siguientes partes:

Convección libre (Régimen I, Fig XVI.2)

La ecuación general es, $\frac{Q}{A} = C \frac{k}{L} (Gr Pr)^n (T_s - T_{pF})$

en la que n y C son constantes que se toman de las Tablas XIV.3.

Evaporación nucleada (Régimen II y III, Fig XVI.2).- A medida que la temperatura T_{pF} de la pared bañada por el fluido va aumentando, aparecen pequeñas burbujas de vapor que ascienden, de forma que unas condensan en el propio líquido y otras llegan a la superficie libre, en donde revientan y sueltan el vapor; la tensión superficial del líquido ofrece una gran resistencia a la formación de burbujas dentro del propio líquido, por lo que inicialmente éstas se forman a partir de puntos de nucleación sobre la superficie de la pared, en la que existen pequeñas imperfecciones en su acabado, o en bolsas de gas, en las que los efectos de tensión superficial se hallan minimizados.

A medida que el metal de la pared se calienta aún más, las burbujas se forman libremente y la evaporación es intensa, con gran turbulencia y altos valores del coeficiente h_C de transferencia de calor. La formulación que se propone se puede aplicar a la evaporación de líquidos de un solo componente, sobre superficies limpias.

Estudiando el significado de algunos parámetros relacionados con la convección forzada, Rohsenow propuso la siguiente relación empírica, mediante la cual se puede estudiar el flujo de calor en el régimen de evaporación nucleada,

$$\frac{Q}{A} = r_{1-v} \sqrt{\frac{g (r_{1-v})}{*}} \left\{ \frac{c_{p1} (T_{pF} - T_s)}{r_{1-v} Pr_1^{1,7} C} \right\}^3$$

en la que:

c_{p1} es el calor específico del líquido a la temperatura de saturación, y viene dado en $kW.seg/kg^\circ C$

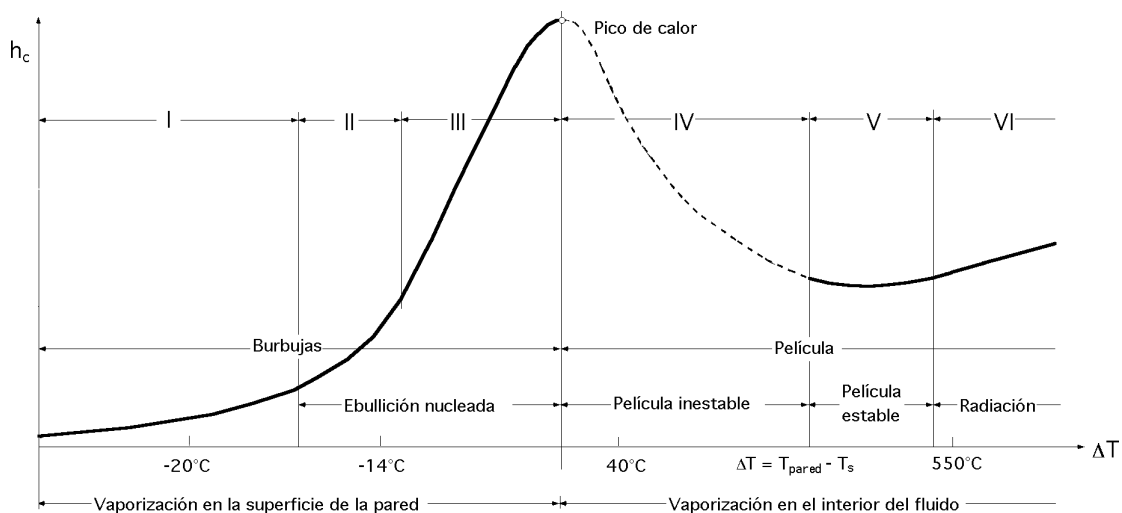


Fig XVI.2.- Vaporización de agua a la presión atmosférica y temperatura T_s calentada por un hilo de platino

Tabla XVI.2

Valores del coeficiente C para distintas superficies-líquidos

Alcohol n-butílico-cobre	0,0030
Alcohol isopropílico-cobre	0,0025
Alcohol etílico-cromo	0,0027
Agua-acero inoxidable	0,0133
Agua-acero inoxidable, pulido mecánicamente	0,0132
Agua-acero inoxidable, esmerilado y pulido	0,0080
Agua-acero inoxidable, picado y recubierto con tefl	0,0058
Agua-acero inoxidable esmerilado y pulido	0,0080
Agua-cobre	0,0130
Agua-cobre pulido con esmeril y tratado con parafin	0,0147
Agua-cobre pulido esmeril	0,0128
Agua-cobre grabado	0,0068
Agua-platino	0,0130
Benceno-cromo	0,0100
n-Pentano-níquel pulido con esmeril	0,0127
n-Pentano-cobre amolado	0,0049
n-Pentano-cobre esmerilado	0,0074
n-Pentano-cobre pulido esmeril	0,0154
Tetracloruro de carbono-cobre pulido esmeril	0,0070
Tetracloruro de carbono-cobre	0,0130

Tabla XVI.3.- Valores de la tensión superficial líquido-vapor para varios líquidos

Líquido	Temp.saturación °C	Tensión superficial (1000 [*]) $\frac{N}{m}$
Agua	0	75,6
Agua	15,56	73,2
Agua	20,00	72,6
Agua	37,78	69,7
Agua	40,00	69,4
Agua	60,00	66,0
Agua	80,00	62,5
Agua	93,34	60,1
Agua	100,00	58,8
Agua	150,00	48,2
Agua	160,00	46,1
Agua	200,00	37,6
Agua	226,70	31,9
Agua	250,00	26,4
Agua	293,30	16,2
Agua	300,00	14,7
Agua	350,00	3,7
Agua	360,00	1,5
Agua	374,11	0,0
Sodio	881,10	11,2
Potasio	760,00	62,7
Mercurio	357,20	39,4
Benceno	80,00	27,7
Freón 11	44,40	8,5

C es una constante que se determina de acuerdo con datos experimentales, que depende del conjunto superficie calefactora-fluido a vaporizar, como se indica en la Tabla XVI.2.

q/A es el flujo de calor en W/m^2

r_{l-v} es el calor latente de vaporización en $kW.seg/kg$

Pr_l es el número de Prandtl correspondiente a la fase líquida, a la temperatura de saturación

$T = T_{pF} - T_s$ es la diferencia de temperaturas entre las correspondientes a la pared y al fluido, en condi-

ciones de saturación

μ_l es la viscosidad dinámica del líquido, a la temperatura de saturación, en kg/m.seg

ρ_l y ρ_v son las densidades correspondientes a la fase líquida y de vapor saturado seco

σ^* es la tensión superficial correspondiente a la superficie de separación líquido-vapor en N/m, Tabla XVI.3.

Se ha encontrado, para superficies sucias o contaminadas, que el exponente del número de Prandtl varía entre 0,8 y 2 en vez de ser 1,7 como aparece en la citada ecuación.

El coeficiente C es el único parámetro de la ecuación que permite ajustarla teniendo en cuenta la influencia que ejercen sobre el fenómeno, tanto el líquido a vaporizar, como la superficie calefactora; sus valores para algunas combinaciones (pared-fluido) vienen resumidos en la Tabla XVI.2.

PICO DE CALOR.- Al final de la etapa de evaporación nucleada, en el fondo del recipiente se ha alcanzado el momento de la máxima transferencia de calor por cuanto hasta aquí el líquido mojaba la superficie del recipiente, y lo refrigeraba, pero a partir de este instante, la refrigeración comienza a hacerse a través de la película de vapor y esta nueva situación implica un cambio brusco en el coeficiente de convección, por cuanto el del vapor es mucho menor que el del líquido y, por lo tanto, esta variación se traduce en un aumento brusco de la temperatura de la pared calentada, por cuanto se sigue aplicando calor; este aumento de temperatura de la pared se conoce como *pico de calor*, cuya importancia y riesgo radican en que existe la posibilidad de que el flujo de calor aplicado sobrepase un cierto valor, (al pasar del régimen nucleado al de evaporación en película inestable, comienza a formarse la película de vapor, (inestable), que separa el líquido de la pared, aparece el *pico de calor*, y como la superficie calefactora está mal refrigerada por el vapor, puede llegar a *quemarse*).

Para estudiar este fenómeno se han desarrollado ecuaciones, como la de Zuber, que determina el pico de calor $q_{\text{máx}}$ en la evaporación nucleada, mediante la expresión:

$$\frac{Q_{\text{máx}}}{A} = \frac{1}{24} \rho_v r_{l-v} \sqrt[4]{\frac{\sigma^* g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2}} \sqrt{\frac{\rho_l + \rho_v}{\rho_l}}$$

según la cual, si el pico de flujo de calor fuese alto, sería de desear que los valores de r_{l-v} , ρ_v , g y σ^* fuesen también altos; el valor de r_{l-v} para el caso particular del agua es elevado y, en consecuencia, el pico de calor que se obtiene en la evaporación del agua también es elevado.

Esta ecuación indica también la influencia que ejerce la gravedad en la vaporización y en el pico de flujo térmico, por lo que un campo gravitacional reducido tiende a disminuir el pico de flujo térmico.

Evaporación en película (Régimen IV, Fig XVI.2).- Cuando se alcanza el pico de flujo de calor, termina la región de evaporación nucleada, y empieza la región de evaporación en película inestable. No existe ningún análisis que permita calcular el flujo de calor en función de la diferencia de temperaturas, $T_{pF} - T_s$, en la región inestable, ya que la pared está refrigerada alternativamente por vapor y por líquido, sin ningún orden, hasta que se alcanza el punto mínimo de la curva de evapora-

ción, en donde comienza la región de evaporación en película estable, y la refrigeración de la pared, se sabe, se realiza únicamente por el vapor.

En las regiones IV y V que se muestran en la Fig XVI.2, de evaporación en película inestable y en película estable, la superficie de calefacción está separada del líquido por una capa de vapor a través de la cual se tiene que transmitir el calor, necesitándose para ello grandes gradientes de temperatura, puesto que la conductividad térmica del vapor es baja; por lo tanto, al no estar la pared suficientemente refrigerada por el vapor, y continuar el aporte de energía calorífica a la misma, hace que el gradiente de temperatura para el vapor aumente mucho, por lo que, cuando intervienen temperaturas elevadas, se procura evitar la transferencia de calor en esta región, ya que por encima de un determinado gradiente de temperaturas entre el líquido y la superficie calefactora, éste es incapaz de humedecerla, y es entonces cuando se presenta una considerable reducción en el valor del coeficiente h_C de transmisión de calor, por cuanto sólo existe vapor en contacto con la pared.

Si en ese momento no se interrumpe el aporte de energía a la superficie metálica, la temperatura de la pared aumentará para así acomodarse a la menor capacidad de la superficie para transferir calor, hasta que la radiación emitida por la misma, más la transferencia de calor por evaporación pelicular, sea igual a la energía incidente.

A partir de aquí, y por obtenerse temperaturas muy elevadas en la pared calefactora, se puede producir la inutilización de la misma.

Para placa horizontal, y vaporización del pentano, tetracloruro de carbono, benceno, alcohol etílico, etc., se puede considerar la siguiente ecuación (Berenson):

$$h_C = 0,425 \sqrt[4]{\frac{k_v^3}{v} \frac{(1-v)g r_{l-v}}{T \sqrt{\frac{*}{g(1-v)}}}} \left(1 + \frac{0,4 c_{p(sat)} T}{r_{l-v}}\right)$$

Flujo de calor mínimo (Régimen V, Fig XVI.2).- Zuber y Tribus proponen la siguiente ecuación para el flujo de calor en la zona inestable, correspondiente al mínimo de la curva de vaporización:

$$\frac{Q}{A} \text{ mín} = 0,09 \sqrt[4]{\frac{(1-v)g}{1+v}} \sqrt[4]{\frac{*}{g(1-v)}} \sqrt[4]{\frac{r_{l-v}}{T}}$$

EVAPORACIÓN EN LA SUPERFICIE EXTERIOR DE UN HILO HORIZONTAL CALIENTE O EN UN TUBO HORIZONTAL, POR CUYO INTERIOR CIRCULA UN FLUIDO CALEFACTOR SUMERGIDO EN UN LIQUIDO.

Cuando un líquido en reposo se calienta mediante un hilo por el que pasa una corriente eléctrica, o mediante un tubo por cuyo interior circula un fluido calefactor, se puede llegar a un proceso de vaporización similar al descrito anteriormente, con la diferencia de que el hilo o el tubo (pared calefactora), se encuentra rodeado completamente por el líquido, estando así refrigerado por éste.

Si se llega a la temperatura de saturación del líquido, éste comienza a vaporizar en etapas idénticas a las ya vistas en recipientes con líquidos en reposo, con la diferencia de que la evaporación

en película inestable y en película estable se realiza a través de una corona de vapor; cuando se empieza a formar esta corona cambia bruscamente el coeficiente de convección y como ya se ha alcanzado el máximo h_C cuando refrigeraba el líquido, resulta que la temperatura del hilo aumenta bruscamente por una deficiente refrigeración, a través de la película de vapor, hecho que puede detectarse porque la energía comunicada al hilo experimenta una alteración.

El coeficiente de transmisión de calor h_C para este tipo de evaporación *en película estable* sobre la superficie exterior de un cilindro horizontal en ausencia de radiación, viene dado por la ecuación de Bromley de la forma:

$$h_C = 0,62 \sqrt[4]{\frac{k_v^3 \rho_v (1 - \rho_v) g r_{1-v}}{\mu_v d_e T}} \left(1 + \frac{0,4 c_{p(sat)} T}{r_{1-v}}\right)$$

ecuación que es válida para cuando la transferencia de calor a través de la película de vapor se realiza por conducción pura, no interviniendo para nada la radiación; cuando la temperatura de la pared sea suficientemente alta, los efectos de la radiación son importantes, y el coeficiente promedio de transferencia de calor se calcula teniendo en cuenta los fenómenos de radiación y de convección.

Para ello se define un nuevo coeficiente de transmisión de calor por convección de la forma:

$$h_C^* = h_C \sqrt[3]{\frac{h_C}{h_C^*}} + h_r \quad ; \quad h_r = \frac{(T_{pF}^4 - T_s^4)}{(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\rho} - 1) (T_{pF} - T_s)}$$

siendo ϵ la emisividad del tubo, ρ la absorptividad del líquido y σ la constante de Stefan-Boltzman.

Cuando se cumpla que, $h_r \ll h_C$, resulta:

$$h_C^* = h_C + \frac{3}{4} h_r$$

Estas consideraciones son válidas para vaporizaciones a la presión atmosférica y una diferencia de temperaturas, $T_{pF} - T_s > 1400^\circ\text{C}$

La expresión:

$$h_C^* = h_C \sqrt[3]{\frac{h_C}{h_C^*}} + h_r$$

es difícil de utilizar, ya que h_C^* está en forma implícita, por lo que se puede hacer uso de las siguientes ecuaciones:

$$h_C^* = h_C + h_r \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{h_r}{h_C} \left(\frac{1}{2,62 + \frac{h_r}{h_C}} \right) \right\}, \quad \text{con,} \quad 0 < \frac{h_r}{h_C} < 10 \quad ; \quad \pm 0,3\% \text{ de error}$$

$$h_C^* = h_C + \frac{3}{4} \frac{h_r}{h_C}, \quad \text{con,} \quad \frac{h_r}{h_C} < 1 \quad ; \quad \pm 5\% \text{ de error}$$

Para la convección forzada de un líquido que fluye normalmente sobre un tubo horizontal, se pueden utilizar las siguientes expresiones:

$$h_c = 0,62 \sqrt[4]{\frac{k_v^3 \nu (1 - \nu) g r_{l-v}}{\nu d_e T}} \left(1 + \frac{0,4 c_{p(sat)} T}{r_{l-v}}\right)$$

$$h_c^* = h_c \sqrt[3]{\frac{h_c}{h_c^*}} + h_r ; \quad h_r = \frac{(T_{pF}^4 - T_s^4)}{\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} - 1\right)(T_{pF} - T_F)}$$

válidas para, $u_F < \sqrt{g d}$

Si, $u_F > 2 \sqrt{g d}$, se utiliza,
$$h_c = 2,7 \sqrt{\frac{k_v \nu u_F r_{l-v}}{d_e T}} \left(1 + \frac{0,4 c_{p(sat)} T}{r_{l-v}}\right)$$

ecuación que ha sido comprobada, en régimen laminar, para el benceno, tetracloruro de carbono, etanol, etc., con diámetros comprendidos entre 10 y 16 cm y velocidades entre 0 y 4,5 m/seg.

En la Fig XVI.2 relativa a la evaporación pelicular en líquido en reposo, se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones:

- Región I, de convección natural, en la que el calor se transmite al líquido a calentar, el cual se va elevando hasta la superficie de separación líquido-vapor
- Región II, de evaporación nucleada, en la que las burbujas condensan en el líquido caliente
- Región III, también de evaporación nucleada, en la que las burbujas ascienden hasta la superficie de separación líquido-vapor
- Región IV, en la que se tiene una evaporación nucleada parcial y evaporación en película nucleada inestable, comienza en el máximo de la curva y acaba en el mínimo)
- Región V, de evaporación en película estable, que se corresponde con el comienzo de la zona de vapor recalentado
- Región VI, en la que empieza a intervenir la radiación, junto con la convección, siendo ambas significativas.

XVI.9- EVAPORACIÓN DE LÍQUIDOS EN FLUJO FORZADO EN EL INTERIOR DE TUBOS

FENOMENOLOGÍA DE LA EVAPORACIÓN EN TUBOS HORIZONTALES.- En la Fig XVI.3 se muestran los modelos de flujos posibles en un flujo horizontal o inclinado con paredes isotermas.

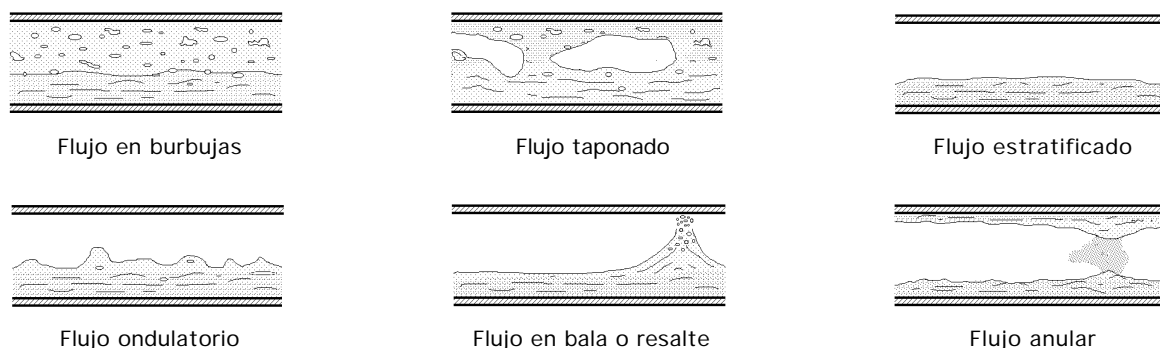


Fig XVI.3.- Modelos de flujo horizontal de dos fases

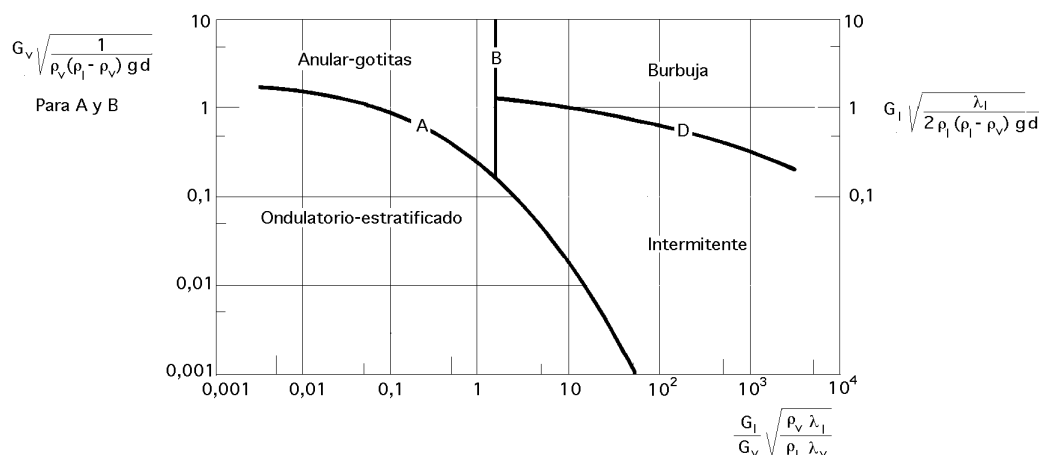


Fig XVI.4.- Diagrama de flujo adiabático de dos fases para flujo horizontal

- El flujo en burbujas consiste en que la fase de vapor está en forma de burbujas aisladas inmersas en la fase líquida, pudiendo ser pequeñas y esféricas, o grandes en forma de casquete esférico.

- En el flujo taponado las burbujas tienen un diámetro apreciable y tienden a fluir por la parte superior de la tubería.

- El flujo estratificado se presenta cuando la velocidad del líquido es pequeña, de forma que éste circula por la parte inferior del tubo siendo su superficie relativamente uniforme.

- Si la velocidad del vapor aumenta se forman ondas de superficie líquida, que pueden llegar a ser lo suficientemente grandes como para formar grandes masas de líquido que humedecen la parte superior de la tubería, dando lugar al flujo en bala o en resalte.

- Si la velocidad del vapor es aún mayor, se provoca un flujo anular o un flujo en el que el líquido se dispersa en forma de gotitas arrastradas por el flujo de vapor.

En la Fig XVI.4 se presenta un diagrama de flujo adiabático de dos fases para flujo horizontal, (Taitel y Dukler), en el que se muestran las condiciones para una serie de regímenes de flujo. Si se añade calor, los regímenes pueden desplazarse apreciablemente, por lo que dejarían de ser fiables.

FENOMENOLOGÍA DE LA EVAPORACIÓN EN TUBOS VERTICALES.- Cuando la evaporación acontece en el interior de un tubo vertical caliente, a través del cual el fluido fluye, el proceso se realiza por convección forzada. El mecanismo, y la hidrodinámica de la evaporación, en este caso, son mucho más complejos que los de evaporación en recipientes con líquidos en reposo, como los vistos anteriormente, por cuanto la velocidad del fluido dentro del tubo afecta al crecimiento de las burbujas y a su separación de la superficie.

Todavía no existe una teoría fundamentada que permita calcular el coeficiente de transferencia de calor para este caso; mediante técnicas fotográficas se han podido seguir las complejas trayectorias del flujo en los diferentes regímenes de la evaporación y, mediante ellas, se ha demostrado que el comportamiento del flujo en la evaporación por convección forzada es apreciablemente diferente del comportamiento de la evaporación en recipientes, a medida que aumenta la velocidad del fluido y el título del vapor. En la Fig XVI.5 se muestran las diferentes características del flujo y en la Fig XVI.6 su efecto sobre el coeficiente de transmisión de calor, cuando el tubo se calienta unifor-

memente; a medida que el líquido avanza se va calentando, luego ebulle y, finalmente, el vapor producido se recalienta.

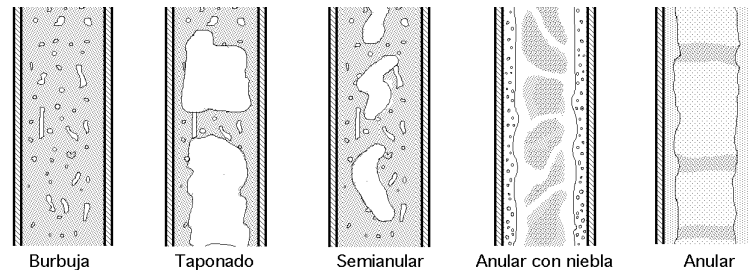


Fig XVI.5.- Modelos de flujo vertical de dos fases

En la región de entrada se transfiere al líquido subenfriado calor por convección forzada, y este régimen permanece así hasta que empieza la evaporación, que viene acompañada por un aumento repentino del coeficiente de transferencia de calor; en la región de evaporación aparecen burbujas sobre la superficie caliente, que crecen y son arrastradas hacia la corriente principal, prevaleciendo entonces en un cierto tramo del tubo un régimen de flujo con burbujas en el que la fase de vapor está en forma de burbujas aisladas inmersas en la fase líquida, pudiendo ser pequeñas y esféricas, o grandes en forma de casquete esférico.

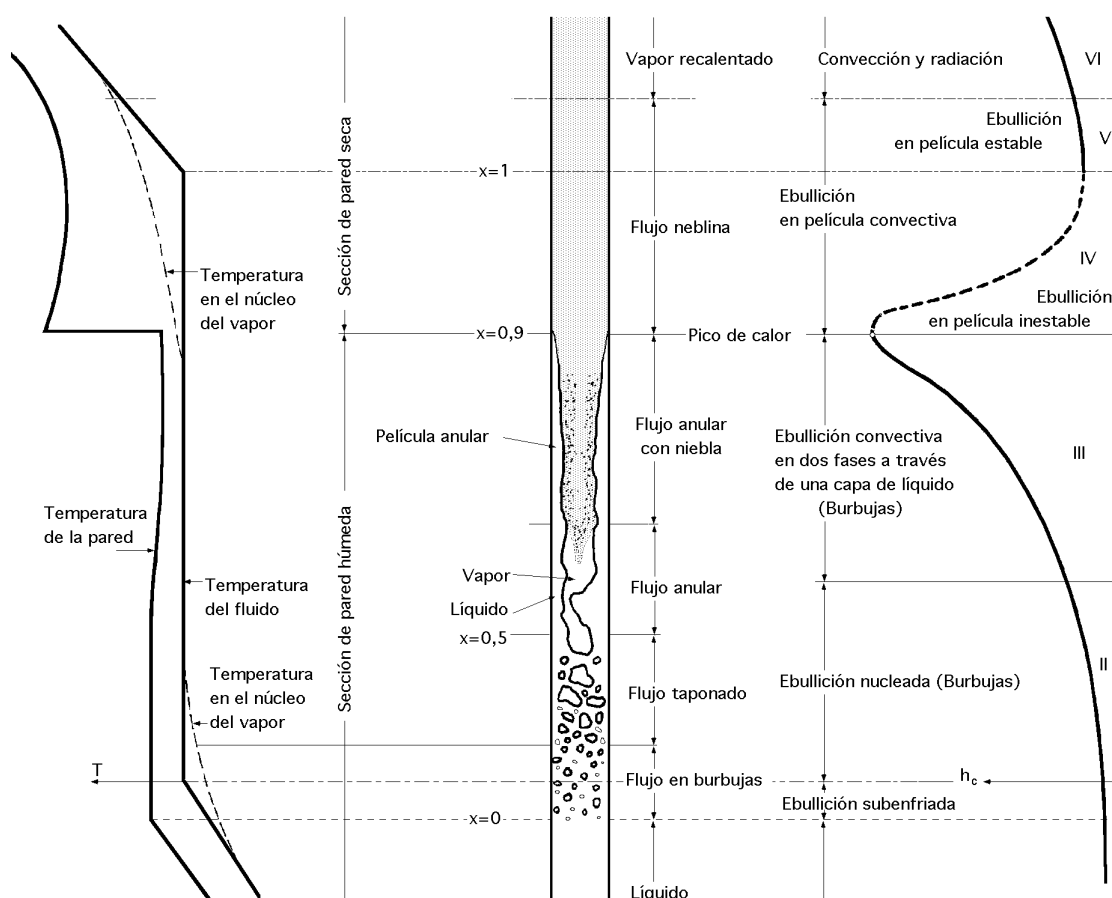


Fig XVI.6.- Características del flujo durante la vaporización en tubo vertical cuando el tubo se calienta uniformemente

A medida que las burbujas individuales van ascendiendo se agrupan para formar otras más grandes, y aparecen en el flujo unas bolsas de vapor o tapones de diámetro algo menor que el del tubo, que frenan el ascenso del líquido, dando lugar al llamado *flujo taponado*; esta situación prevalece hasta valores del título de vapor igual a, $x = 0,5$.

A medida que la fracción del volumen de vapor aumenta por encima del valor anterior, la naturaleza del fluido cambia notoriamente; el vapor empieza a fluir a través del centro del tubo como una corriente continua, en tanto que el líquido se adhiere a la pared y se desplaza formando una película anular; este tipo de flujo recibe el nombre de régimen de *película anular*, en el que la película de fluido es cada vez más delgada a lo largo del tubo, pasando el título del vapor desde un valor $x = 0,5$ hasta $x = 0,9$ pudiéndose descomponer en otros dos:

a) Flujo semianular, en el que el flujo es altamente irregular, a veces inestable, y consiste en un núcleo de burbujas de gran tamaño que se unen y separan continuamente; el flujo de líquido tiende a estar cerca de la pared.

b) Flujo anular con niebla, en el que una película de líquido relativamente gruesa, que puede contener pequeñas burbujas, fluye a lo largo de la pared; el núcleo de vapor contiene pequeñas gotitas de líquido que forman nubes irregulares; al final, $x = 0,8$, las fases están casi completamente separadas en un núcleo de vapor y una película líquida sobre la pared, existiendo en el núcleo de vapor algunas gotas que provienen de las crestas de las ondas que se forman en la superficie de la película. El coeficiente de transferencia de calor sigue siendo alto siempre que la película de fluido líquido humedezca la pared calefactora del tubo; después, dependiendo de las condiciones de la superficie del tubo, de la presión, y de la velocidad másica, aparecen en la pared del mismo unas zonas secas, en las que se produce una brusca disminución del coeficiente de transmisión de calor; esta es la región de transición del flujo anular en neblina, al flujo en neblina.

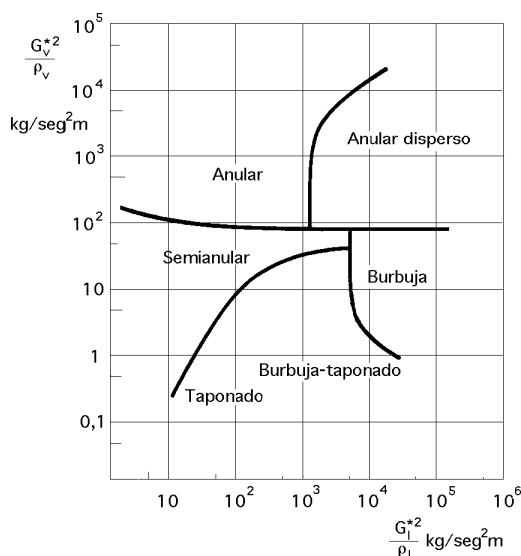


Fig XVI.7

Diagrama de flujo vertical adiabático de dos fases

Las zonas secas continúan creciendo hasta que el líquido restante quede en forma de finísimas gotas de agua; el *flujo en neblina* persistirá hasta que el título del vapor alcance la unidad, siendo el flujo a partir de este momento totalmente de vapor, comenzando el recalentamiento.

Es a partir de la transición flujo anular en neblina-flujo en neblina, cuando se modifica el tipo de refrigeración de la pared, (ya que mientras estaba mojada por el líquido el coeficiente de convección aumentaba hasta un máximo), pasando a otra refrigeración por vapor con un coeficiente de convección mucho menor, que es el que provoca una mala transferencia térmica fluido-pared del tubo, lo que implica un aumento de la temperatura de la pared, que es lo que ya hemos definido como *pico de calor*.

En la Fig XVI.7 se presenta un diagrama de flujo adiabático de dos fases para flujo vertical, (Taitel y Dukler), en el que se muestran las condiciones para una serie de regímenes de flujo. Si se añade calor, los regímenes pueden desplazarse apreciablemente, por lo que dejarían de ser fiables.

GRADIENTE DE PRESIÓN EN EL INTERIOR DE TUBOS VERTICALES.- La caída de presión del flujo en dos fases dentro de los tubos es un proceso complicado dada la gran variedad de formas de flujos existentes.

a) El gradiente de presión en el flujo de dos fases se puede calcular como sigue:

Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\frac{G}{A} d}{\mu_{ref}}, \text{ en la que, } G \text{ viene dada en } \frac{Kg}{seg}; \quad A = \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{1}{\mu_{ref}} = \frac{x}{\mu_v} + \frac{1-x}{\mu_l}$$

siendo $\frac{1}{\mu_{ref}}$ la inversa de la viscosidad dinámica de referencia que compensa las fluctuaciones del factor de fricción en el tubo, que es demasiado bajo si $x < 0,7$ y demasiado alto si $x > 0,7$

La densidad se define en la forma, $\rho = x \rho_v + (1-x) \rho_l$

El coeficiente de rozamiento en flujo turbulento es, $f = (0,79 \ln Re_d - 1,64)^{-2}$

El gradiente de presión debido a la fricción en la pared es, $\left(\frac{dp}{dz}\right)_{pared} = - \frac{\left(\frac{4 G}{d^2}\right)^2}{2 d}$

El gradiente de presión debido a la gravedad es, $\left(\frac{dp}{dz}\right)_{grav} = - \rho g \sin \theta$

El gradiente de presión debido a la variación de la cantidad de movimiento es:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{mov} = \left(\frac{4 G}{d^2}\right)^2 \frac{dx}{dz} = - \left(\frac{4 G}{d^2}\right)^2 \frac{1}{\rho} \frac{dx}{dz}$$

en la que $\frac{dx}{dz}$ es el gradiente del título de vapor, que se calcula en la forma:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{Q}{L}}{\frac{4 G}{d^2} r_{l-v}}; \quad \text{con } \frac{Q}{L} \text{ dado en } \frac{W}{m}$$

El gradiente de presión es:

$$\frac{dp}{dz} = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{pared} + \left(\frac{dp}{dz}\right)_{gravedad} + \left(\frac{dp}{dz}\right)_{mov}$$

b) Otra formulación debida a Wallis, válida para el flujo con burbujas $x < 0,5$, relaciona bastante bien los datos experimentales de la caída de presión en dos fases, mediante la expresión:

$$\frac{p_{Tubo}}{p_{líq}} = 1 + 3 \frac{1}{v} \frac{G_v}{G_l} \sqrt[3]{10^{-6} G}$$

en la que p_{Tubo} es la caída de presión en el tubo, cuando coexisten las dos fases y $p_{líq}$ es la caída de presión en el tubo correspondiente a la fase líquida.

FORMULACIÓN PARA LA EVAPORACIÓN EN EL INTERIOR DE TUBOS VERTICALES.- Los coeficientes de transmisión de calor para líquidos que se calientan, hasta que comienza la evaporación, y para el vapor recalentado se pueden determinar mediante las correlaciones que definen la convección forzada dentro de tubos.

Sin embargo, no existe en la actualidad una formulación general con la exactitud necesaria, que permita determinar el coeficiente de transmisión de calor de todos los regímenes de evaporación que pueden darse en el interior del tubo.

a) David y David han propuesto una relación empírica que permite determinar el coeficiente de transmisión de calor promedio h_C para un flujo de dos fases en el interior de un tubo, siempre que el líquido humedezca la superficie interior del mismo, es decir, cuando se esté en el régimen de película anular, $x \geq 0,9$, en la forma:

$$\frac{h_C d_i}{k_1} = 0,06 \left(\frac{1}{v} \right)^{0,28} \left(\frac{d_i G^*}{x} \right)^{0,87} Pr_1^{0,4}$$

en la que x es el título del vapor y, $G^* = 3600 \ x u_x$, en $\frac{\text{kg}}{\text{h m}^2}$

Los datos relativos a las propiedades del fluido hay que tomarlos de las tablas y diagramas correspondientes a la temperatura media de la capa de condensado, $T = \frac{T_{pF} + T_s}{2}$

b) V. Klimenko propone una formulación válida sólo cuando las paredes del tubo estén mojadas, por lo que lo primero que hay que realizar es comprobar esta situación, es decir, si domina la evaporación nucleada (pared húmeda) o la evaporación en película, (pared seca) ; para ello se evalúa un parámetro que define el tipo de evaporación de la forma:

$$= \frac{4 G}{d^2} r_{1-v} \left\{ 1 + x \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \right\} \left(\frac{1}{v} \right)^3$$

y en la que q es el flujo de calor por unidad de superficie de la pared interior del tubo de la forma:

$$q = \frac{Q}{L_d}$$

Si, $< 1,6 \cdot 10^4$, ebullición nucleada

$$Nu = 7,4 \cdot 10^{-3} q^{*0,6} p^{*0,5} Pr_1^{-1/3} \left(\frac{k_{\text{pared}}}{k_1} \right)^{0,15} = \frac{h_{C(2 \text{ fases})}}{k_1} L_C$$

siendo L_C la longitud característica para Nu y q^* , en la forma:

$$L_C = \sqrt{\frac{q}{g(1-v)}} \quad ; \quad q^* = \frac{q L_C}{r_{1-v} v} \quad ; \quad p^* = \frac{p}{g(1-v)} = \frac{p L_C}{r_{1-v} v}$$

Si, $> 1,6 \cdot 10^4$, ebullición en película:

$$Nu = 0,087 Re^{0,6} Pr_1^{1/6} \left(\frac{v}{v_1}\right)^{0,2} \left(\frac{k_{pared}}{k_1}\right)^{0,09} = \frac{h_{C(2 \text{ fases})}}{k_1} L_C$$

$$Re = \frac{v^* L_C}{\nu_1} \quad ; \quad v^* = \frac{G}{\rho_1} \left\{ 1 + x \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \right\}$$

evaluándose las propiedades a T_{sat}

Finalmente hay que calcular un coeficiente de transmisión de calor por convección de una sola fase $h_{C(1 \text{ fase})}$ basado en un número de Reynolds de líquido puro:

$$Re = \frac{\frac{G}{A} d}{\nu_1}$$

Puede suceder que: $h_{C(1 \text{ fase})} < h_{C(2 \text{ fases})}$, por lo que no se consideraría, es decir:

$$h_C = h_{C(2 \text{ fases})}$$

Si $h_{C(1 \text{ fase})}$ no es pequeño, el coeficiente de convección es:

$$h_C = \sqrt[3]{h_{C(1 \text{ fase})_{liq}}^3 + h_{C(2 \text{ fases})}^3}$$

correlaciones que son válidas con un error menor del 10%, para el agua y refrigerantes en el siguiente campo:

Presión, 0,61 atm ÷ 30,4 atm ; Flujo másico por unidad de superficie, 50 ÷ 2700 kg/m²seg

Título de vapor, 0,017 ÷ 1 ; Diámetro del tubo, 1,63 ÷ 41,3 mm

XVII.- INTERCAMBIADORES DE CALOR

MÉTODO DE LA (LMTD)

XVII.1.- INTRODUCCIÓN

En un proyecto de ingeniería de equipamiento térmico son importantes no sólo las características de eficiencia térmica, sino también las referentes a la economía del sistema, más importantes, y que habrá que conjugar adecuadamente.

El papel de los intercambiadores de calor ha adquirido una gran importancia ante la necesidad de ahorrar energía y disponer de equipos óptimos no sólo en función de su análisis térmico y del rendimiento económico de la instalación, sino también en función de otros factores como el aprovechamiento energético del sistema y la disponibilidad y cantidad de energía y de materias primas necesarias para cumplir una determinada función.

Desde el momento en que un intercambiador de calor se instala y pone en funcionamiento dentro de un proceso de transferencia térmica, se precisa un determinado gradiente de temperatura para que se pueda efectuar la transmisión del calor; la magnitud de este gradiente se puede reducir utilizando un intercambiador mayor, pero ésto a su vez implica un mayor coste, tanto de tipo económico, como energético.

Consideraremos como parte del conjunto de los intercambiadores de calor, no sólo los clásicos formados por la carcasa y tubos, sino también otros, como los de lecho fluido, o los que aprovechan la energía solar, o las tuberías de calor o calefacción, etc.

XVII.2.- TIPOS BÁSICOS DE INTERCAMBIADORES DE CALOR

Los intercambiadores de calor son tan importantes y tan ampliamente utilizados en la industria, que su diseño ha experimentado un gran desarrollo, existiendo en la actualidad normas ideadas y aceptadas por TEMA que especifican con detalle los materiales, métodos de construcción, técnicas de diseño y sus dimensiones.

El intercambiador de calor más sencillo se compone de un tubo dentro de otro tubo, Fig XVII.1; este montaje de corrientes paralelas funciona, tanto en contracorriente como en equico-

riente, circulando el fluido caliente o el frío a través del espacio anular, mientras que el otro fluido circula por la tubería interior.

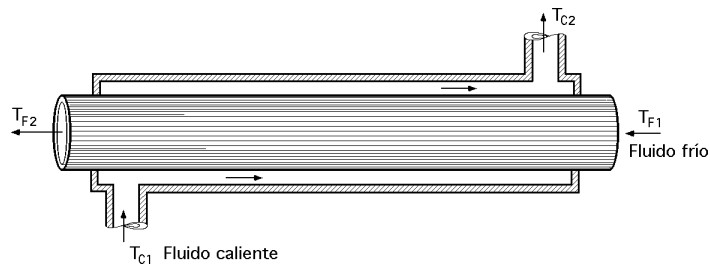


Fig XVII.1.- Intercambiador simple de tubos concéntricos

INTERCAMBIADOR DE PASO SIMPLE (1-1).- El intercambiador más sencillo que consta de dos tubos concéntricos, no es adecuado cuando el gasto másico es elevado. Si se utilizan varios tubos concéntricos en paralelo, el peso del material de los tubos que se necesita se haría tan grande, que es mucho más económico el construirlos formando un conjunto de carcasa y tubos, de forma que se utiliza una carcasa común para muchos tubos; éste intercambiador, debido a que funciona con un solo paso de fluido en el lado de la carcasa y un solo paso de fluido en el lado de los tubos se denomina intercambiador 1-1, Fig XVII.2.

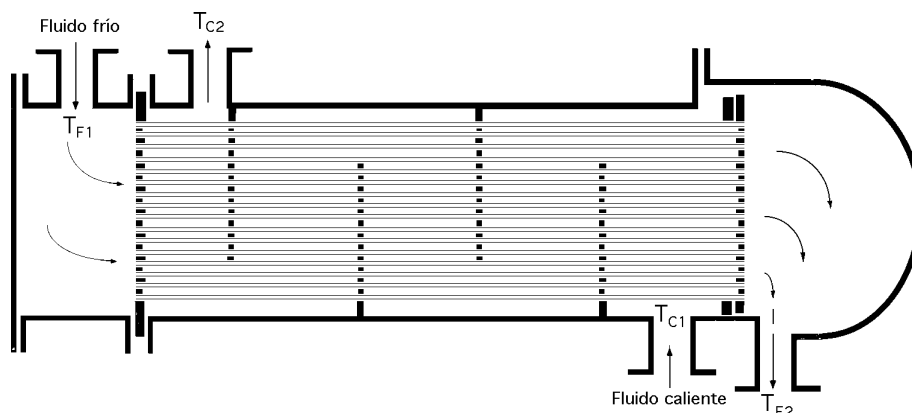


Fig XVII.2a.- Intercambiador de carcasa y tubos (1-1) (con mezcla de los fluidos)

En este tipo de intercambiador, uno de los fluidos circula por el interior de los tubos, mientras que el otro fluido se ve forzado a circular entre la carcasa y la parte exterior de los tubos, normalmente a ellos.

Cuando las temperaturas T_C del fluido del lado caliente y T_F del fluido del lado frío son variables de un punto a otro, a medida que el calor va pasando del fluido más caliente al más frío, la velocidad de intercambio térmico entre los fluidos también variará a lo largo del intercambiador, porque su valor depende, en cada sección, de la diferencia de temperaturas entre los fluidos caliente y frío.

En un flujo paralelo en equicorriente, la temperatura final del fluido más frío nunca puede llegar a ser igual a la temperatura de salida del fluido más caliente. Sin embargo, en un flujo en contracorriente, la temperatura final del fluido más frío (que es el que se calienta) puede superar la temperatura de salida del fluido más caliente (que se enfría), puesto que existe un gradiente de temperaturas

favorable a todo lo largo del intercambiador de calor.

En un intercambiador en contracorriente, los coeficientes de transmisión de calor del lado de la carcasa y del lado de los tubos deben ser del mismo orden de magnitud y ser grandes para obtener un coeficiente global satisfactorio. La velocidad y turbulencia del líquido del lado de la carcasa son tan importantes como las del líquido del lado de los tubos. Para evitar el debilitamiento de las placas tubulares es preciso mantener una distancia mínima entre los tubos, por lo que no resulta práctico colocar los tubos tan juntos que la sección libre para el flujo del fluido por el exterior de los tubos sea tan pequeña, como la del interior de los mismos.

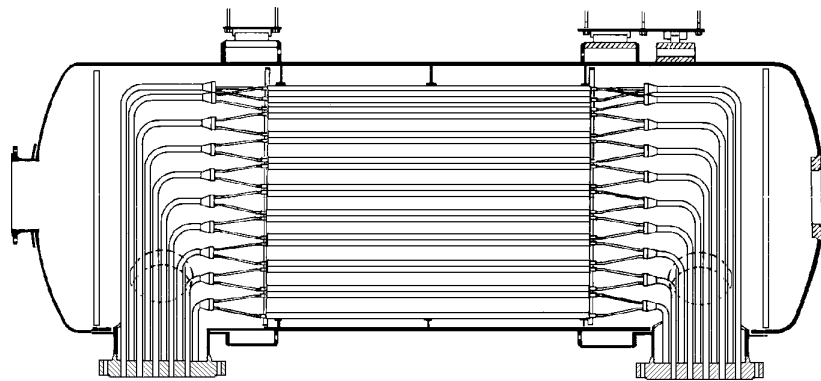


Fig XVII.2b.- Intercambiador de carcasa y tubos (1-1) sin mezcla de uno de los fluidos

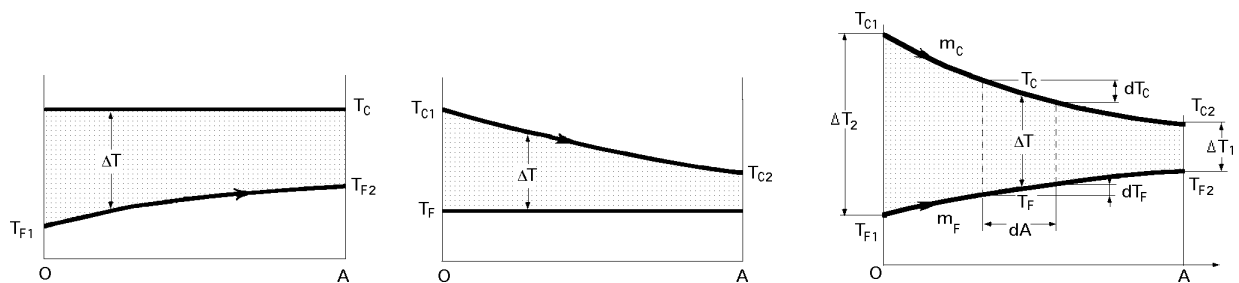


Fig XVII.3.- Distribución de temperaturas en:

- a) Condensadores de un paso de tubos ; b) Vaporizadores de un paso de tubos
- c) Intercambiadores de calor de flujos en equicorriente y de un paso de tubos

Si las dos corrientes son del mismo orden de magnitud, la velocidad del lado de la carcasa es menor que la del lado de los tubos; por esta razón se instalan placas deflectoras con el fin de disminuir la sección de flujo del líquido del lado de la carcasa y obligarlo a circular en dirección cruzada a la bancada de tubos en vez de hacerlo paralelamente a ellos; de esta forma se consigue un coeficiente de transferencia de calor más elevado en flujo cruzado Fig XVII.4b.c, que en circulación paralela a los tubos, Fig XVII.4a.

El flujo pasa perpendicularmente a los tubos, circulando hacia abajo en la primera sección, hacia arriba en la segunda, y así sucesivamente; la turbulencia adicional que se crea mediante este tipo de flujo aumenta el coeficiente de transmisión de calor del lado de la carcasa.

Las *pantallas*, (placas deflectoras), son discos circulares de una plancha metálica a los que se ha cortado, para estos intercambiadores, un cierto segmento circular, Fig XVII.4c, de forma que la altura de este segmento sea igual a la cuarta parte del diámetro interior de la carcasa, por lo

que las placas deflectoras así obtenidas se denominan placas del 25%, viniendo perforadas para recibir los tubos; para evitar fugas, o hacer que estas sean mínimas, las holguras entre las placas y la carcasa, y entre las placas y los tubos deben ser pequeñas. Este tipo de construcción resulta práctico solamente para carcasas pequeñas.

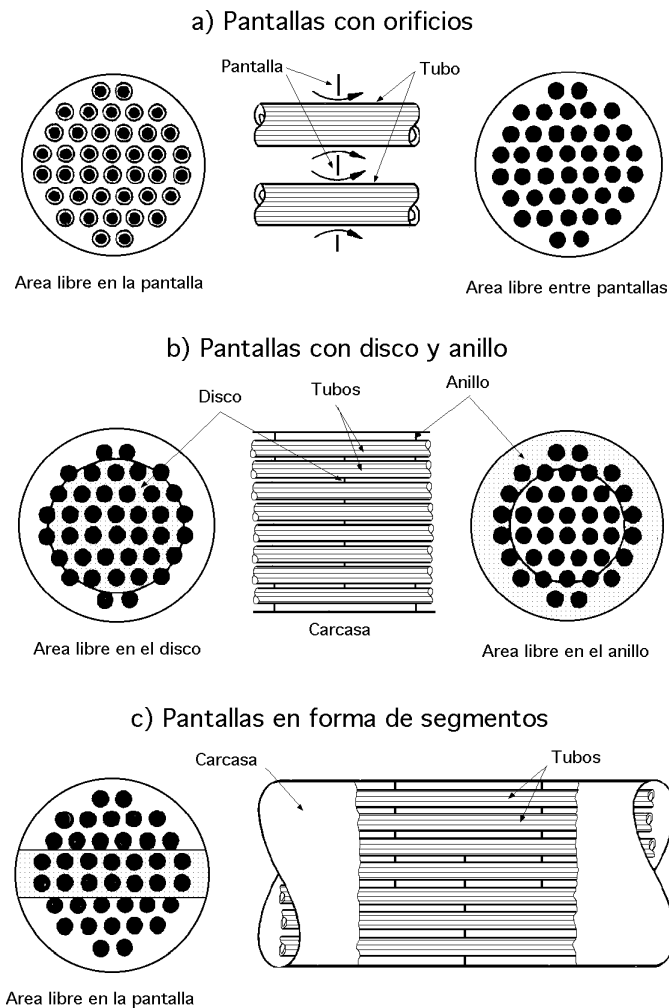


Fig XVII.4.- Pantallas utilizadas en los intercambiadores de carcasa y tubos

Los *tubos* se fabrican en todos los metales corrientes con un determinado diámetro exterior y un definido espesor de pared, según el número BWG.

Los tubos se disponen según una ordenación triangular (tresbolillo) o rectangular (regular); cuando el lado de la carcasa tiene gran tendencia a ensuciarse no se utiliza la disposición triangular por cuanto los espacios entre tubos son de difícil acceso, cosa que no sucede en la disposición cuadrada, que a su vez provoca una menor caída de presión en el lado de la carcasa que la disposición triangular.

Las normas TEMA especifican una distancia mínima de centro a centro de los tubos de 1,25 veces el diámetro exterior de los mismos para la disposición triangular y una anchura mínima de las calles de limpieza de 1/4 de pulgada para la disposición cuadrada, Fig XIV.8.

La *carcasa* tiene un diámetro normalizado; la distancia o espaciado entre placas no debe ser

menor de 1/5 del diámetro de la carcasa ni mayor que el diámetro interior de la misma. Los tubos se unen a la placa tubular acanalando los orificios y acampanando en su interior los extremos de los tubos mediante un mandril cónico rotatorio que fuerza al metal del tubo más allá de su límite elástico, de forma que el metal se introduce en las acanaladuras; en los intercambiadores que van a trabajar a presiones elevadas, los tubos se sueldan a la placa tubular.

En general, el intercambiador de calor de carcasa y tubos tiene unas placas (*cabezales*) en donde se fijan los tubos por ambos extremos, mediante soldadura u otro tipo de fijación; este tipo de construcción tiene un bajo costo inicial, pero sólo se puede utilizar para diferencias pequeñas de temperatura entre el fluido caliente y el frío, puesto que no se ha hecho ninguna previsión para evitar las tensiones mecánicas de origen térmico debidas a la dilatación entre los tubos y la carcasa.

Otra desventaja consiste en que el montaje del haz de tubos no se puede desmontar para su limpieza; estos inconvenientes se solucionan fácilmente haciendo que una de las placas de tubos esté fija, mientras que la otra se sujeta mediante pernos a un cabezal flotante que permite el movimiento relativo entre el haz de tubos y la carcasa; la placa de tubos flotante está sujeta con mordazas entre la cabeza flotante y unas bridas, de modo que es posible retirar el haz de tubos para su limpieza.

La caída de presión en el lado de la carcasa p_{carcasa} para una distribución de tubos con deflectores, se puede estimar por la ecuación de Delaware, como suma de las siguientes aportaciones:

Caída de presión en las secciones de entrada y salida

Caída de presión asociada a las secciones interiores delimitadas por los deflectores

Caída de presión asociada con el cortocircuito y las fugas

$$P_{\text{carcasa}} = k^* (N_{\text{def}} + 1) P_{\text{ideal}}$$

en la que p_{ideal} es la caída de presión uniforme en la batería de tubos, N_{def} es el número de deflectores y k^* una constante del orden de 0,2 a 0,3 que indica que la caída de presión real es sólo un 20% a un 30% de la que se obtendría en la misma batería de tubos si el flujo fuese uniforme.

INTERCAMBIADOR DE CORRIENTES PARALELAS EN CONTRACORRIENTE (1-2).- El flujo en un intercambiador (1-2) es parcialmente en contracorriente y parcialmente en corrientes paralelas; en la Fig XVII.5a el conjunto de las curvas de temperatura se corresponde con un intercambiador de corrientes paralelas en equicorriente, mientras que en la Fig XVII.5b las curvas de temperatura son para un intercambiador en contracorriente.

En los intercambiadores de paso múltiple se pueden utilizar velocidades más elevadas, tubos más cortos y resolver fácilmente el problema de las expansiones y dilataciones. En este tipo de intercambiadores disminuye la sección libre para el flujo, con lo cual aumenta la velocidad, dando lugar a un incremento del coeficiente de transmisión de calor por convección.

Sus principales desventajas son:

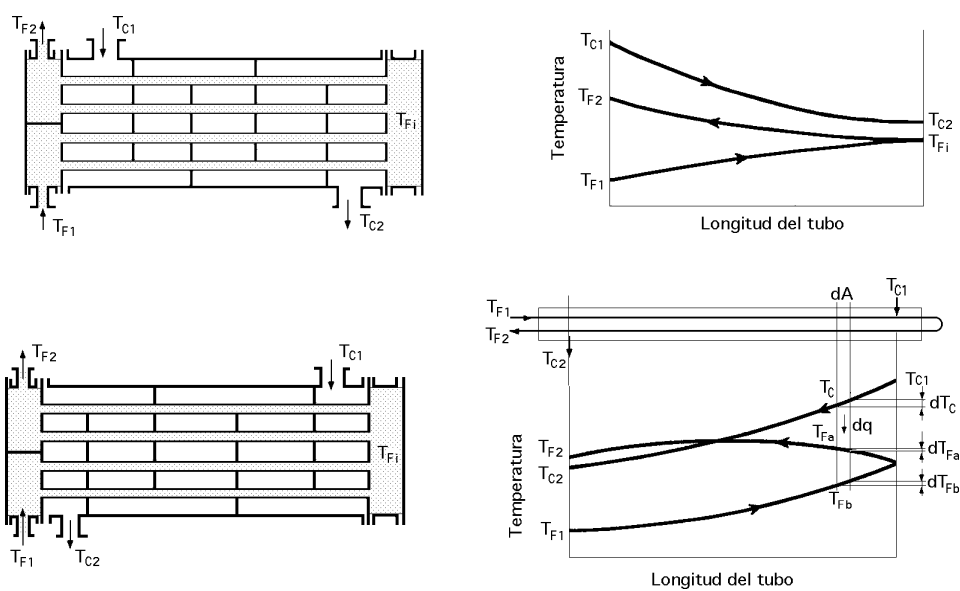


Fig XVII.5.- Distribución de temperaturas en intercambiadores (1-2), función de la disposición de las tuberías

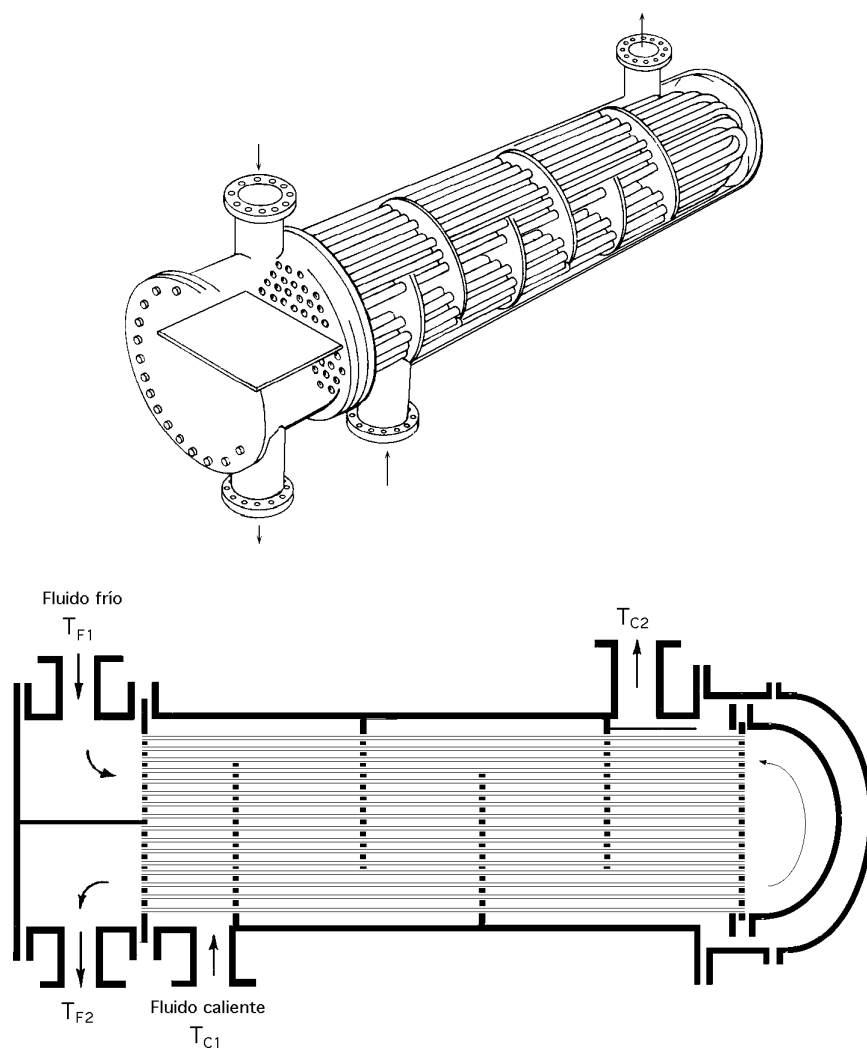


Fig XVII.6.- Intercambiador de carcasa y tubos (1-2)

a) El intercambiador es más complicado

b) Aumentan las pérdidas por fricción debido a la mayor velocidad y a la multiplicación de las pérdidas de carga en la entrada y en la salida.

Para un intercambiador de cuatro pasos de tubos, la velocidad media en los tubos es cuatro veces mayor que en un intercambiador de paso simple que tenga el mismo número y tamaño de los tubos y opere con el mismo caudal de líquido.

El coeficiente de transmisión de calor del interior de los tubos del intercambiador de cuatro pasos es aproximadamente igual a $4^{0.8} = 3,03$ veces mayor que el del intercambiador de un solo paso, pudiendo ser todavía mayor si la velocidad en cada paso simple es suficientemente pequeña para dar lugar a un flujo laminar.

Las pérdidas por rozamiento son del orden de $4^{2.8} = 48,5$ veces mayores sin tener en cuenta las pérdidas adicionales debidas a las expansiones y contracciones.

En el diseño más económico contribuye, entre otros factores, una velocidad del fluido en los tubos tal, que el incremento del coste de la potencia necesaria para el bombeo se compense con una disminución del coste del aparato; una velocidad demasiado baja ahorra potencia de bombeo pero en cambio requiere un cambiador excesivamente grande y costoso; una velocidad excesivamente grande, lo contrario. En los intercambiadores de paso múltiple se utilizan con frecuencia cabezales flotantes; el líquido del lado de los tubos entra y sale por la misma cámara que está tabicada mediante una placa con el fin de separar las corrientes de entrada y salida.

El intercambiador (1-2) posee una importante limitación ya que debido al paso del flujo en corrientes paralelas, el intercambiador no permite que la temperatura de uno de los fluidos a la salida sea muy próxima a la temperatura del otro fluido a la entrada, lo que se traduce en que la recuperación de calor en un intercambiador (1-2) es necesariamente mala.

INTERCAMBIADOR (2-4).- En la Fig XVII.7, las líneas de trazo discontinuo de la distribución de temperaturas en un intercambiador (2-4) se refieren al fluido del lado de la carcasa y las de trazo continuo al fluido del lado de los tubos; se supone que el fluido que circula por la carcasa es el más caliente.

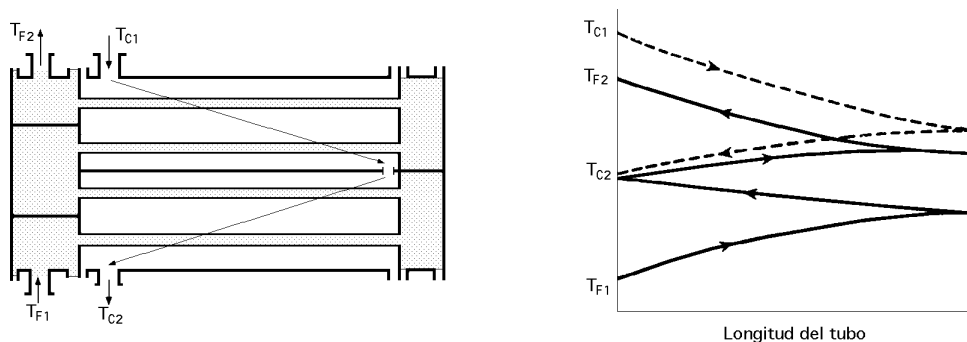


Fig XVII.7.- Distribución de temperaturas en intercambiadores (2-4)

El paso más caliente del fluido de la carcasa está en contacto térmico con los dos pasos más calientes del lado de los tubos y el paso más frío del lado de la carcasa lo está con los dos pasos más fríos del lado de los tubos.

En conjunto, este intercambiador se aproxima más a una verdadera unidad en contracorriente de lo que es posible con un intercambiador (1-2) ya que una ventaja del montaje en contracorriente consiste en que, para un flujo térmico determinado, se requiere menos área superficial de intercambio que en un flujo en equicorriente.

Con un intercambiador (2-4) se puede obtener una mejor recuperación de calor, por cuanto opera con dos pasos en el lado de la carcasa y cuatro pasos en el lado de los tubos, consiguiéndose mayores velocidades, así como un coeficiente global de transmisión de calor más elevado que en el caso (1-2) que opere con las mismas velocidades de flujo.

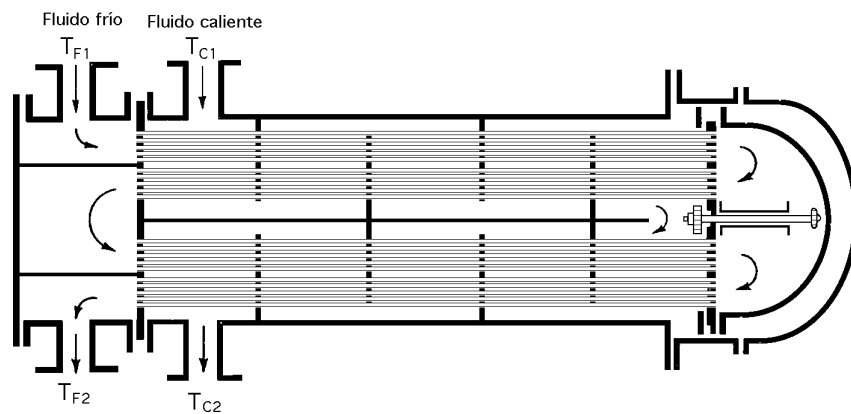


Fig XVII.8.- Intercambiador de carcasa y tubos (2-4)

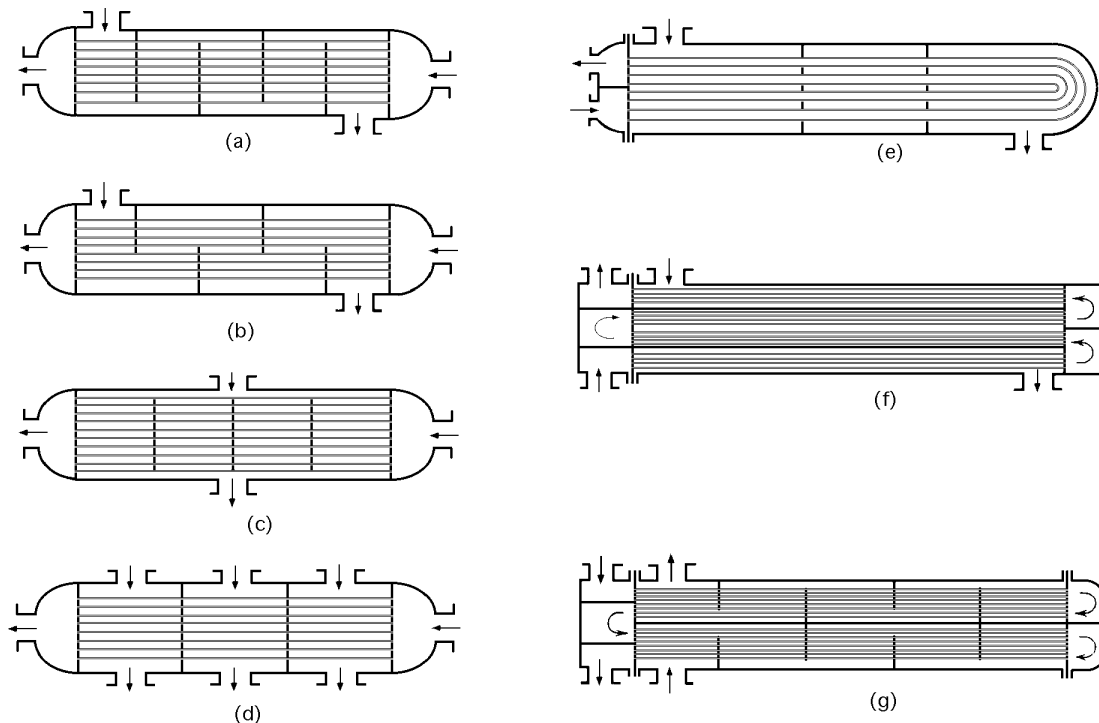


Fig XVII.9.- Modelos de intercambiadores

INTERCAMBIADOR DE FLUJOS CRUZADOS.- En el enfriamiento o calentamiento de gases es interesante utilizar un intercambiador de calor en flujo cruzado, Fig XVII.10, en el que uno de los fluidos (líquido o gas) circula por el interior de los tubos, mientras que al otro fluido (gaseoso) se le obliga a circular perpendicularmente al haz de tubos; el flujo del fluido exterior puede reali-

zarse mediante convección forzada o libre; el gas que circula por el exterior de los tubos se considera de tipo de mezcla, mientras que el fluido del interior de los tubos se considera sin mezclar; el flujo del gas exterior es con mezcla porque puede moverse libremente entre los tubos cuando intercambia calor, mientras que el fluido del interior de los tubos está confinado y no puede mezclarse con ningún otro flujo o corriente durante el proceso de intercambio de calor.

En un proyecto de intercambiadores de calor es importante especificar si los fluidos están mezclados o sin mezclar y cuál de los fluidos está mezclado. Es importante también equilibrar los gradientes de temperatura mediante la obtención de coeficientes de transmisión de calor aproximadamente iguales en el interior y en el exterior de los tubos; si ésto no se hace así, una de las resistencias térmicas puede ser grande, lo que provocará una caída de temperatura global también grande para una transferencia de calor por unidad de tiempo determinada, lo que exige un equipo mayor, con el consiguiente perjuicio económico.

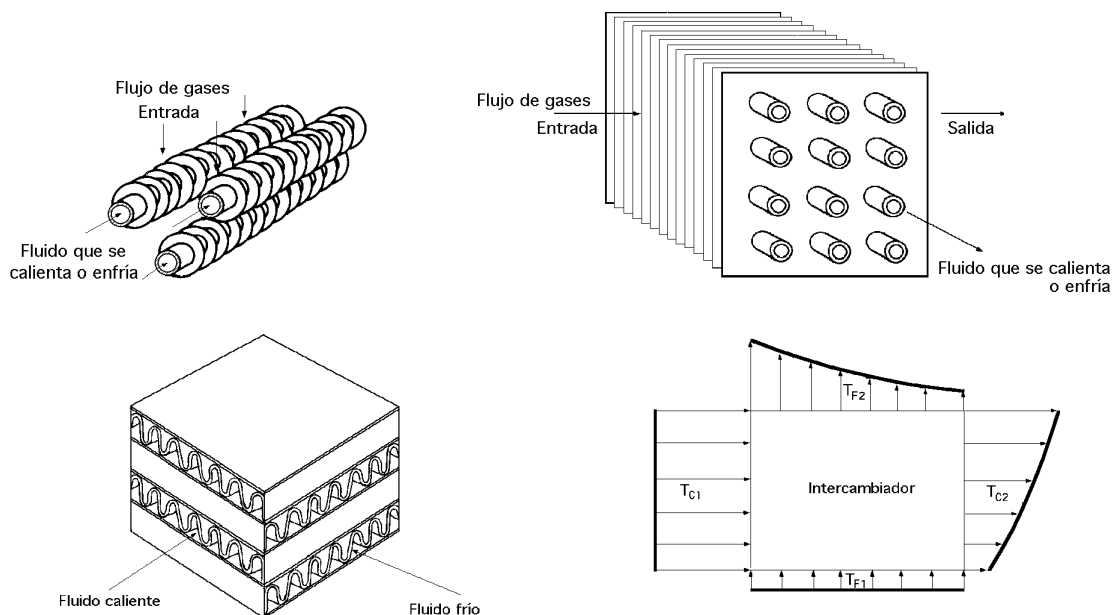


Fig XVII.10.- Intercambiadores de flujos cruzados

XVII.3.- COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA TÉRMICA GLOBAL

Una de las primeras cuestiones a realizar en el análisis térmico de un intercambiador de calor de carcasa y tubos consiste en evaluar el coeficiente de transferencia térmica global entre las dos corrientes fluidas. Sabemos que el coeficiente de transferencia térmica global entre un fluido caliente a temperatura T_C y otro frío a temperatura T_F separados por una pared plana se define mediante la ecuación:

$$q = U A (T_C - T_F)$$

$$U A = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 R_i} = \frac{1}{\frac{1}{h_C A} + \frac{L}{k A} + \frac{1}{h_F A}}$$

En el caso de un intercambiador de calor formado por dos tubos concéntricos, Fig XVII.1, el área de la superficie de intercambio térmico es:

$$\text{Interior: } A_i = 2 \quad r_i L$$

$$\text{Exterior: } A_e = 2 \quad r_e L$$

de forma que, en general:

$$U A = \frac{1}{\frac{1}{h_{C_i} A_i} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2 \quad k L} + \frac{1}{h_{F_e} A_e}}$$

Si el coeficiente de transferencia térmica global viene referido a la superficie exterior A_e el valor de U_e será:

$$U_e = \frac{1}{\frac{A_e}{h_{C_i} A_i} + \frac{A_e \ln \frac{r_e}{r_i}}{2 \quad k L} + \frac{1}{h_{F_e}}}$$

mientras que si viene referido a la superficie interior A_i será:

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_{C_i}} + \frac{A_i \ln \frac{r_e}{r_i}}{2 \quad k L} + \frac{A_i}{A_e h_{F_e}}}$$

En un proyecto es necesario calcular los coeficientes de transferencia de calor individuales, pero suele ser útil en las estimaciones preliminares el tener un valor aproximado de U , típico de las condiciones que han de encontrarse en la práctica; hay que tener en cuenta que, en muchos casos, el valor de U viene determinado casi completamente por la resistencia térmica en una de las películas fluido/sólido, como sucede, por ejemplo, cuando uno de los fluidos es un gas y el otro un líquido o si uno de los fluidos es un líquido en ebullición con un coeficiente de transferencia térmica muy grande.

FACTOR DE SUCIEDAD.- Con frecuencia resulta imposible predecir el coeficiente de transferencia de calor global de un intercambiador de calor al cabo de un cierto tiempo de funcionamiento, teniendo sólo en cuenta el análisis térmico; durante el funcionamiento con la mayoría de los líquidos y con algunos gases, se van produciendo gradualmente unas películas de suciedad sobre la superficie en la que se realiza la transferencia térmica, que pueden ser de óxidos, incrustaciones calizas procedentes de la caldera, lodos, carbonilla u otros precipitados, Fig XVII.11; el efecto que ésta suciedad origina se conoce con el nombre de *incrustaciones*, y provoca un aumento de la resistencia térmica del sistema; normalmente el fabricante no puede predecir la naturaleza del depósito de suciedad o la velocidad de crecimiento de las incrustaciones, limitándose únicamente a garantizar la eficiencia de los intercambiadores limpios.

La resistencia térmica del depósito se puede determinar, generalmente, a partir de ensayos reales o de la experiencia. Si se realizan ensayos de rendimiento en un intercambiador limpio y se repiten después de que el aparato haya estado en servicio durante algún tiempo, se puede determinar la resistencia térmica del depósito (o factor de incrustación) R_{Suc} mediante la relación:

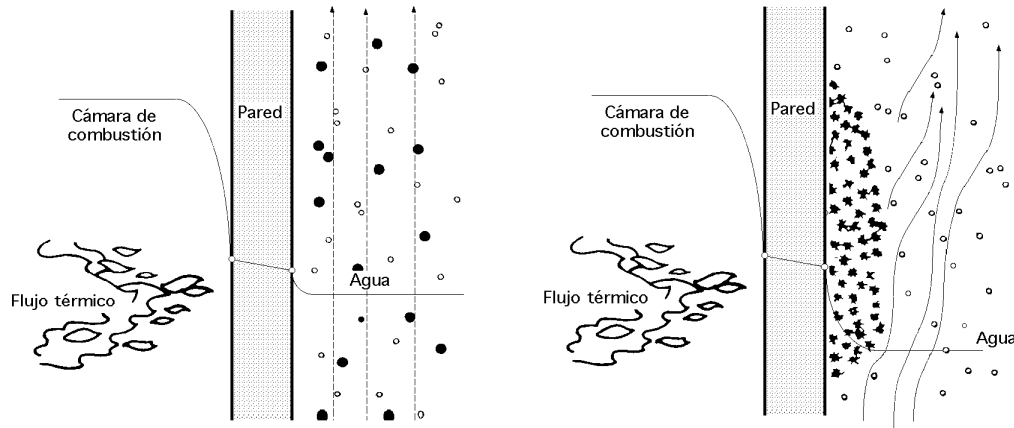


Fig XVII.11.-Transmisión de calor entre la cámara de combustión y el agua de una caldera con incrustaciones calcáreas

$$R_{Sucio} = R_{Func} - R_{Limpio} = \frac{1}{U_{Func}} - \frac{1}{U_{Limpio}} \quad U_{Func} = \frac{1}{R_{Sucio} + \frac{1}{U_{Limpio}}}$$

siendo:

$$R_{Sucio} = R_e + R_i \frac{A_e}{A_i} \quad ; \quad U_{Limpio} = \frac{1}{\frac{1}{h_{ce}} + R_{equiv} + \frac{1}{h_{ci}} \frac{A_e}{A_i}}$$

La expresión del coeficiente global de transmisión de calor U_{Func} en funcionamiento al cabo de un tiempo, referida a la sección exterior A_e es:

$$U_{func} = \frac{1}{\frac{1}{h_{ce}} + R_e + R_{equiv} + \frac{R_i A_e}{A_i} + \frac{A_e}{h_{ci} A_i}}$$

en la que:

U_{limpio} es el coeficiente global de transmisión de calor del intercambiador limpio, respecto a la sección exterior

$U_{suc.}$ es el coeficiente global de transmisión de calor del intercambiador después de producirse el depósito

h_{ce} es el coeficiente de convección medio del fluido en el exterior del tubo

h_{ci} es el coeficiente de convección medio del fluido en el interior del tubo

R_e es la resistencia unitaria del depósito de suciedad en el exterior del tubo

R_i es la resistencia unitaria del depósito de suciedad en el interior del tubo

R_{equiv} es la resistencia unitaria del tubo, en la que no se han considerado los depósitos de suciedad interior

y exterior, y el material del tubo, en m^2K/W , basada en el área de la superficie exterior del tubo.

A_e/A_i es la relación entre la superficie exterior y la interior del tubo.

En la Tabla XVII.1 se dan algunos ejemplos de factores de resistencia por ensuciamiento normales que se aplican en la ecuación anterior.

Tabla XVII.1.- Factores de resistencia por ensuciamiento normales

Tipo de fluido	$R_{equiv} (m^2K/W)$
Agua de mar por debajo de 325°K	0,0009
Agua de mar por encima de 325°K	0,0003
Agua de alimentación de calderas por encima de 325°K	0,0005
Agua de río	0,001-0,004
Agua condensada en un ciclo cerrado	0,0005
Agua de torre de refrigeración tratada	0,001-0,002
Gasóleo ligero	0,0020
Gasóleo pesado	0,0030
Asfalto	0,0050
Gasolina	0,0010
Queroseno	0,0010
Soluciones cáusticas	0,0020
Fluido hidráulico	0,0010
Sales fundidas	0,0005
Aceite para temple	0,0007
Gases de escape de un motor	0,0100
Aceite combustible	0,0050
Aceite para transformadores	0,0010
Aceites vegetales	0,0030
Vapores de alcohol	0,0001
Vapor, cojinetes sin aceite	0,0005
Vapor, con aceite	0,0010
Vapores refrigerantes, con aceite	0,0020
Aire comprimido	0,0010
Líquido refrigerante	0,0010

XVII.4.- TRANSMISIÓN DE CALOR ENTRE FLUIDOS EN MOVIMIENTO, A TEMPERATURAS VARIABLES, A TRAVÉS DE UNA PARED

Para determinar la transferencia de calor por unidad de tiempo, y admitiendo que el calor cedido por un fluido es totalmente absorbido por el otro, (no hay pérdidas térmicas), se puede hacer el siguiente balance de energía:

$$Q = m_C c_{pC} (T_{C1} - T_{C2}) = m_F c_{pF} (T_{F2} - T_{F1})$$

Si se toma a ambos lados de la pared un elemento de superficie dA , Fig XVII.12, en una misma sección transversal se puede suponer que ambos fluidos toman las temperaturas T_C y T_F en estos elementos diferenciales.

Haciendo $T = T_C - T_F$ es evidente que la cantidad de calor que pasará del fluido caliente al fluido frío, por unidad de tiempo es:

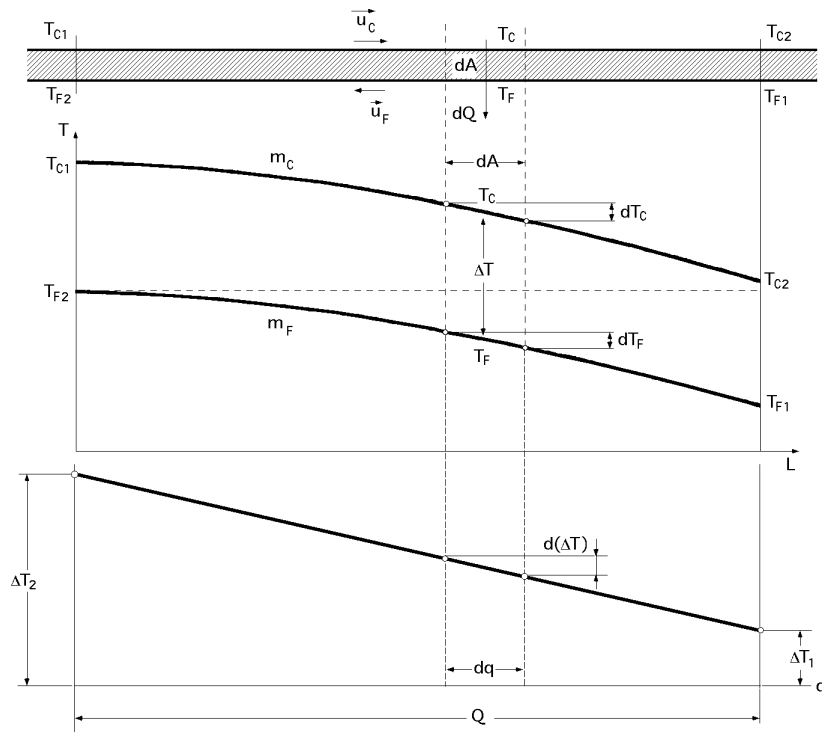


Fig XVII.12.- Distribución de temperaturas en intercambiadores de calor con flujos en contracorriente y de un solo paso de tubos

$$dQ = U dA \quad T = m_C c_{pC} dT_C = m_F c_{pF} dT_F$$

Si se define un parámetro adimensional de la forma:

$$= \frac{m_C c_{pC}}{m_F c_{pF}} = \frac{dT_F}{dT_C}$$

que va a intervenir directamente a lo largo del proceso, y teniendo en cuenta que:

$$d(\Delta T) = dT_C - dT_F \quad ; \quad \frac{d(\Delta T)}{dT_C} = 1 - \frac{dT_F}{dT_C} = 1 - \quad ; \quad dT_C = \frac{d(\Delta T)}{1 -}$$

se obtiene:

$$U dA \Delta T = m_C c_{pC} dT_C = m_C c_{pC} \frac{d(\Delta T)}{1 -} \quad ; \quad m_C c_{pC} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = U dA (1 -)$$

$$m_C c_{pC} \int_{T_1}^{T_2} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = U (1 -) A$$

Integrándola:

$$m_C c_{pC} \ln \frac{T_2}{T_1} = U (1 -) A = \left| \begin{array}{l} T_2 = T_{C1} - T_{F2} \quad ; \quad T_1 = T_{C2} - T_{F1} \\ 1 - = \frac{d(\Delta T)}{dT_C} = \frac{T_2 - T_1}{T_{C1} - T_{C2}} \end{array} \right| = U A \frac{T_2 - T_1}{T_{C1} - T_{C2}}$$

$$Q = m_c c_{pc} (T_{c1} - T_{c2}) = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = U A (\text{LMTD})$$

en la que la expresión, $\frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}}$ se denomina temperatura media logarítmica ó (LMTD), Logarithmic mean temperature difference.

La ecuación anterior se podía haber demostrado también, considerando que la diferencia de temperaturas del fluido T es función de q y varía entre T_2 y T_1 por lo que:

$$\frac{d(T)}{dq} = \frac{T_2 - T_1}{Q} = \left| dq = U dA \cdot T \right| = \frac{d(T)}{U dA \cdot T}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{d(T)}{dq} = U A \frac{T_2 - T_1}{Q} \quad Q = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}}$$

Cuando el coeficiente global de transmisión de calor U varíe mucho de uno a otro extremo del intercambiador, no es posible representarle por este valor; si se admite que U varía linealmente con la diferencia de temperaturas T se puede poner:

$$U = a + b \cdot T$$

$$\frac{d(T)}{dq} = \frac{T_2 - T_1}{Q} = \left| U = a + b \cdot T \right| = \frac{d(T)}{U dA \cdot T} = \frac{d(T)}{(a + b \cdot T) dA \cdot T} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{T}{a + b \cdot T} \right) \int_{T_1}^{T_2}$$

$$Q = A (T_2 - T_1) \left(\frac{a}{\ln \frac{T}{a + b \cdot T}} \right) \int_{T_1}^{T_2} = A (T_2 - T_1) a \ln \frac{\frac{T_1}{a + b \cdot T_1}}{\frac{T_2}{a + b \cdot T_2}} = \left| \begin{array}{l} U_1 = a + b \cdot T_1 \\ U_2 = a + b \cdot T_2 \\ \frac{1}{a} = \frac{T_1 - T_2}{U_2 \cdot T_1 - U_1 \cdot T_2} \end{array} \right| =$$

$$= A (T_2 - T_1) a \ln \frac{U_2 \cdot T_1}{U_1 \cdot T_2} = \dots = A \frac{U_1 \cdot T_2 - U_2 \cdot T_1}{\ln \frac{U_1 \cdot T_2}{U_2 \cdot T_1}}$$

FACTOR DE CORRECCIÓN DE LA (LMTD).- Cuando se tienen intercambiadores muy complejos, como los montajes en carcasa y tubos, con varios pasos de tubos por cada carcasa, o varias carcasas, y en el caso de intercambiadores de flujo cruzado, la deducción analítica de una expresión para la diferencia media de temperaturas resulta muy compleja.

Si las capacidades caloríficas de los fluidos son iguales, las diferencias de temperaturas en contracorriente

resultan iguales y $T = T_1 = T_2$ por lo que para salvar la indeterminación 0/0 en el valor de la (LMTD), hay que aplicar la regla de L'Hôpital.

$$Q = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \frac{0}{0} = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} U A T_1 \frac{x - 1}{\ln x} = \text{L'Hôpital} = U A T_2$$

Si la diferencia de temperaturas T_1 no es mayor que un 50% de T_2 , es decir:

$$T_1 < \frac{T_2}{2} \quad T_{C2} - T_{F1} < \frac{T_{C1} - T_{F2}}{2}$$

la diferencia de temperaturas media aritmética $T_C - T_F$ no difiere de la (LMTD) en más de un 1% y se puede utilizar en lugar de ella para simplificar los cálculos.

Para intercambiadores de calor más complicados, la determinación de T no es tan sencilla, aunque el procedimiento es el mismo que para el intercambiador (1-1) en contracorriente.

Para determinar el valor de T del intercambiador (1-2) de la Fig XVII.5.b, se considera una longitud diferencial del mismo, a la que corresponde un área superficial de intercambio térmico de tubería dA , pudiéndose escribir las siguientes expresiones:

$$dQ = C_C dT_C = C_F (dT_{Fa} - dT_{Fb}) = U dA \{(T_C - T_{Fa}) + (T_C - T_{Fb})\}$$

Eliminando dos cualesquiera de las tres temperaturas, que son desconocidas, por ejemplo T_{Fa} y T_{Fb} , se obtiene una ecuación diferencial en T_C que se resuelve teniendo en cuenta el balance calorífico total del intercambiador:

$$C_C (T_{C1} - T_{C2}) = C_F (T_{F2} - T_{F1})$$

La expresión que proporciona el calor transmitido en el intercambiador (1-2) es:

$$Q = U A \frac{\sqrt{(T_{C1} - T_{C2})^2 + (T_{F2} - T_{F1})^2}}{\ln \frac{(T_{C1} + T_{C2}) - (T_{F1} + T_{F2}) + \sqrt{(T_{C1} - T_{C2})^2 + (T_{F2} - T_{F1})^2}}{(T_{C1} + T_{C2}) - (T_{F1} + T_{F2}) - \sqrt{(T_{C1} - T_{C2})^2 + (T_{F2} - T_{F1})^2}}} = U A F \frac{(T_{C1} - T_{C2}) + (T_{F2} - T_{F1})}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F2}}{T_{C2} - T_{F1}}} = U A F (LMTD)$$

en la que la temperatura media logarítmica verdadera es $T = F (LMTD)$ observándose que, aparte de su complejidad, la diferencia media de temperaturas es función de las cuatro temperaturas de los dos fluidos, dos de entrada y dos de salida; para intercambiadores más complejos, la expresión del T se complica.

La expresión anterior se simplifica utilizando las siguientes relaciones adimensionales:

$$\text{Coeficiente de efectividad, } P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}}$$

$$\text{Relación de capacidades térmicas, } Z = \frac{m_F C_{pF}}{m_C C_{pC}} = \frac{C_F}{C_C} = \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{F2} - T_{F1}} = \frac{1}{P}$$

que permiten obtener la diferencia media de la temperatura como una función de $F(P,Z)$ y de la temperatura logarítmica media calculada para el caso de flujos en contracorriente para un solo paso de tubos y carcasa (LMTD), en la forma:

$$F = \frac{\frac{\sqrt{(T_{C1} - T_{C2})^2 + (T_{F2} - T_{F1})^2}}{\ln \frac{(T_{C1} + T_{C2}) - (T_{F1} + T_{F2}) + \sqrt{(T_{C1} - T_{C2})^2 + (T_{F2} - T_{F1})^2}}{(T_{C1} + T_{C2}) - (T_{F1} + T_{F2}) - \sqrt{(T_{C1} - T_{C2})^2 + (T_{F2} - T_{F1})^2}}}}{\frac{(T_{C1} - T_{C2}) - (T_{F2} - T_{F1})}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F2}}{T_{C2} - T_{C1}}}} = \frac{\sqrt{Z^2 + 1}}{Z - 1} \frac{\ln \frac{1 - P}{1 - PR}}{\ln \frac{2 - P(Z + 1 - \sqrt{Z^2 + 1})}{2 - P(Z + 1 + \sqrt{Z^2 + 1})}}$$

Esta ecuación se ha representado en la Fig XVII.12a. En general, para modificar el (LMTD) en cualquier otro tipo de disposición, se utilizan los factores de corrección $F(P,Z)$ obtenidos mediante las gráficas representadas en las Figs XVII.12, en las que el eje de abscisas es el valor de P y la ordenada en cada una de ellas es el factor de corrección F correspondiente a cada caso estudiado, para distintos valores de Z .

El coeficiente de efectividad P es un indicativo de la eficiencia del intercambio térmico y puede variar desde 0, en el caso en que la temperatura se mantenga constante en uno de los fluidos, a la unidad, en el caso en que la temperatura de entrada del fluido más caliente, sea igual a la de salida del fluido más frío, $T_{C1} = T_{F2}$.

Para la aplicación de los factores de corrección en flujos paralelos carece de importancia el que sea el fluido más caliente, o el más frío, el que fluya por el interior de los tubos. Si la temperatura de cualquiera de los fluidos permanece constante, carece también de importancia el sentido del flujo, puesto que F será la unidad, y por lo tanto, se aplicará directamente el (LMTD).

Si en un intercambiador de flujos cruzados la temperatura de uno de los fluidos es constante, se aplica directamente el (LMTD) sin factor de corrección, como si los flujos fuesen en contracorriente; pero si la temperatura de los dos fluidos es variable, las condiciones no se pueden asimilar a las del flujo en contracorriente, sino que se considera como flujo cruzado y, por lo tanto, habrá que proceder a su rectificación mediante el factor F de corrección correspondiente.

Para un intercambiador (1-2) la caída de la temperatura media y la capacidad del intercambiador, son menores que las correspondientes a un intercambiador en contracorriente con la misma (LMTD). *En el intercambiador (1-2) una parte del calor se intercambia en contracorriente y otra en equicorriente, por lo que existen ciertos valores de la efectividad P que no se pueden alcanzar, ni aún considerando intercambiadores de superficie A infinita.*

Desde un punto de vista económico, y para cualquier intercambiador, cuando la relación de capacidades caloríficas sea $Z < 0,75$ no se debe utilizar ese tipo de intercambiador, ya que no seguiría exactamente las

suposiciones hechas en la construcción de las gráficas; esta consideración restringe aún más la efectividad máxima del intercambiador de calor, pudiéndose obtener situaciones en las que los valores de las temperaturas en los extremos del intercambiador sean tales que los valores correspondientes de P y Z no proporcionen ninguna solución para F , o bien, sean inferiores a 0,75, por lo que habría que ir a otra disposición de carcasa y tubos. Hay que tener en cuenta que la lectura del valor de F en las gráficas puede resultar errónea, sólo conque se incurra en un error pequeño al calcular la efectividad P , hecho que se resuelve en parte utilizando el concepto de (NTU).

FACTOR DE CORRECCIÓN DE LA (LMTD) PARA ALGUNOS TIPOS DE INTERCAMBIADORES

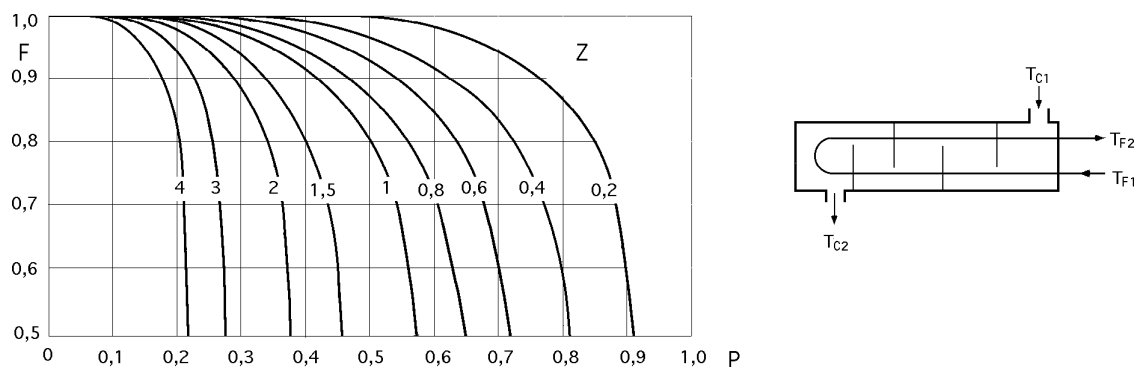


Fig XVII.13a.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador en contracorriente (1-2), o un múltiplo par de pasos de tubos

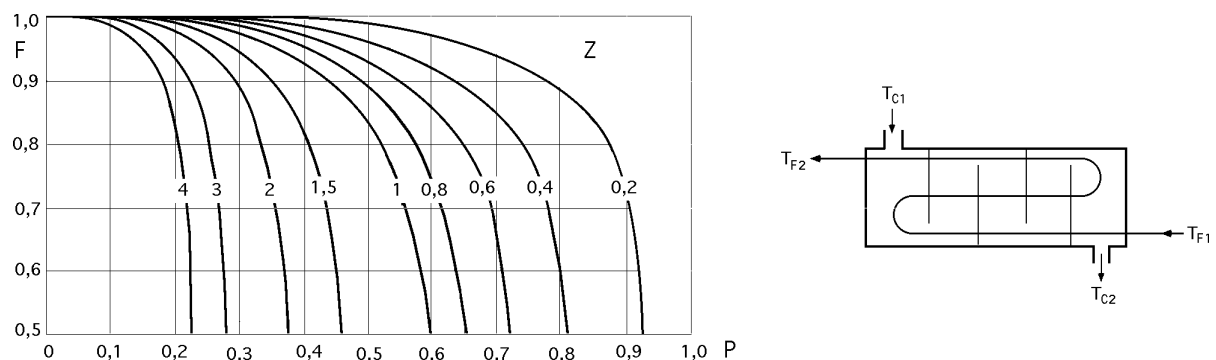


Fig XVII.13b.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador (1-3), con dos de los pasos en contracorriente

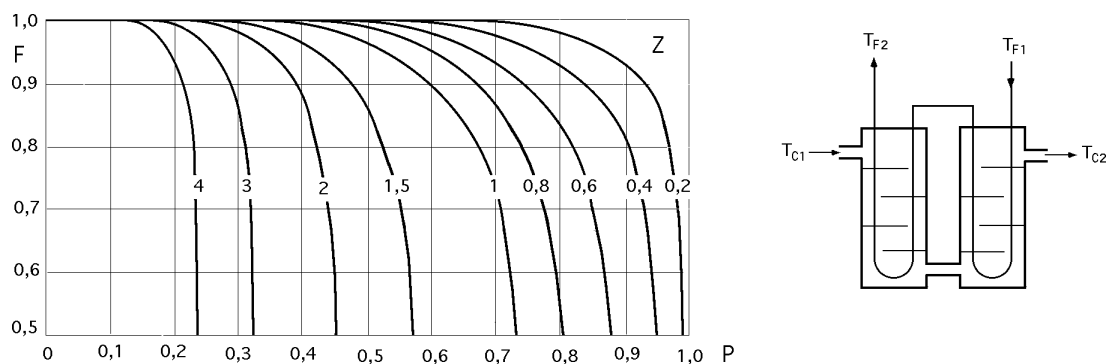


Fig XVII.13c.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador en contracorriente (2-4) y un múltiplo par de pasos de tubos

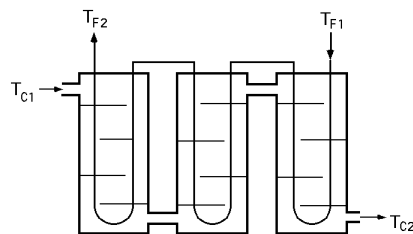
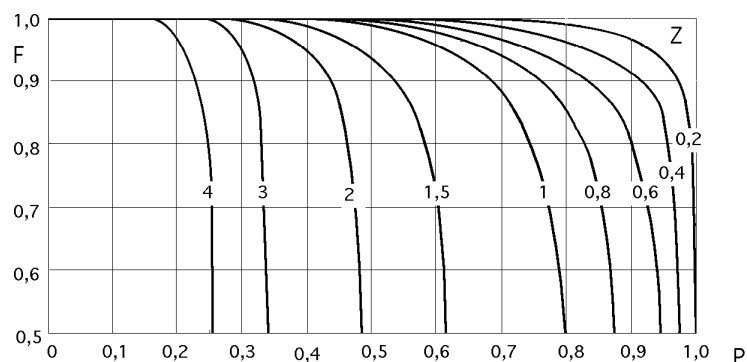


Fig XVII.13d.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador (3-2), o un múltiplo par de pasos de tubos

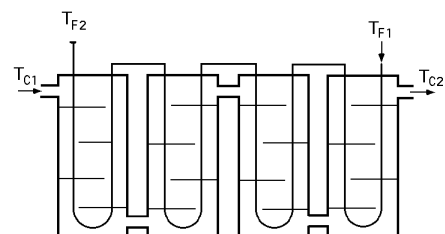
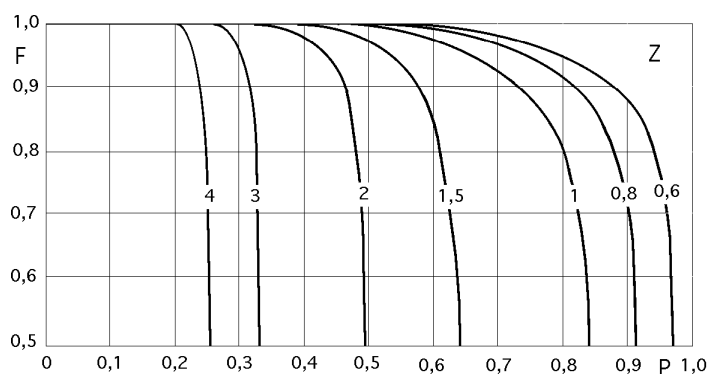


Fig XVII.13e.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador (4-2), o un múltiplo par de pasos de tubos

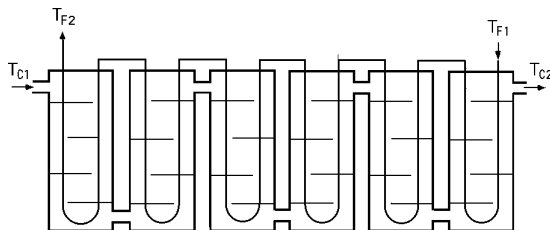
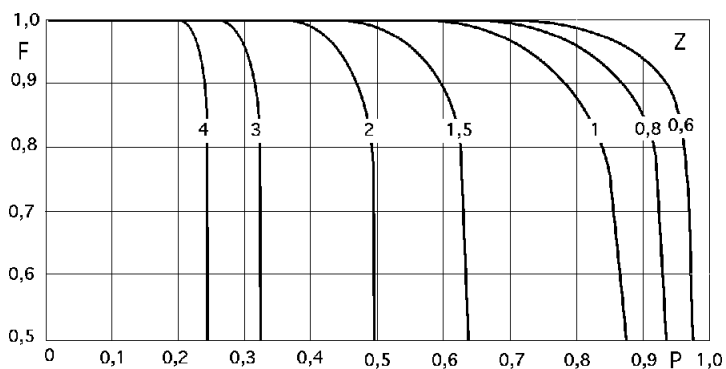


Fig XVII.13f.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador (6-2), o un múltiplo par de pasos de tubos

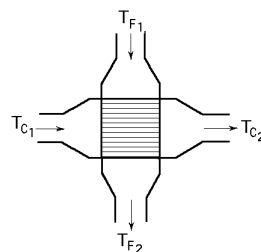
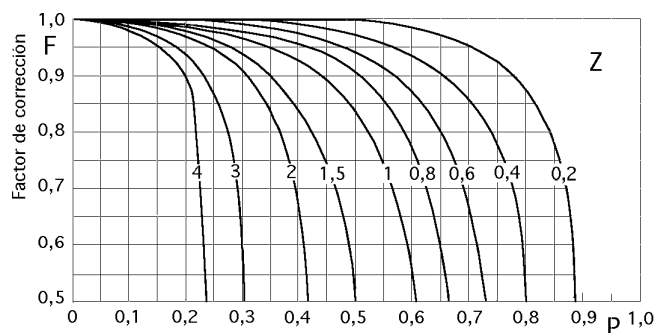


Fig XVII.13g.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador de flujos cruzados, con mezcla de un fluido en la parte de la carcasa y sin mezcla del otro fluido, y un paso de tubos

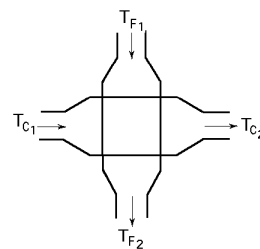
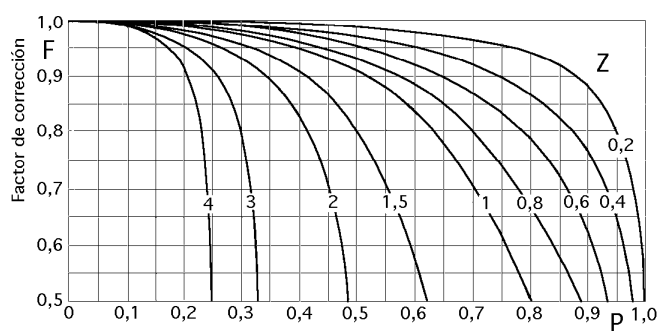


Fig XVII.13h.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador de flujos cruzados, con mezcla de ambos fluidos y un paso de tubos

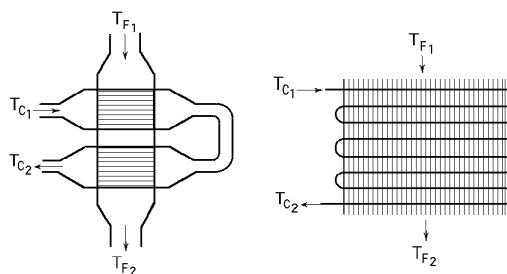
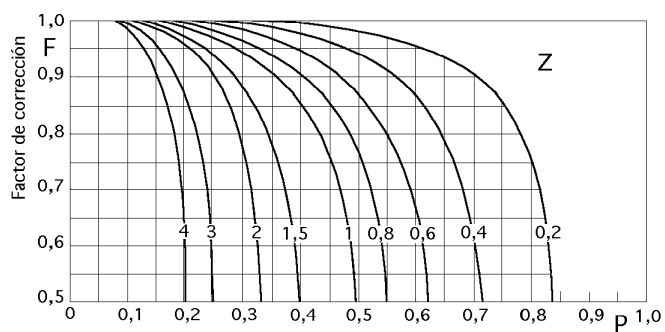
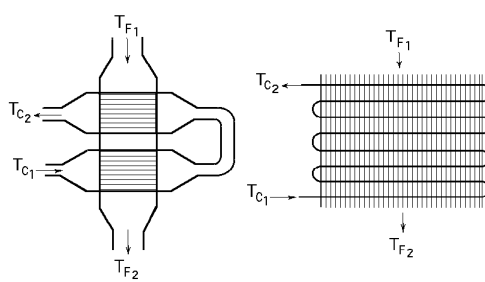
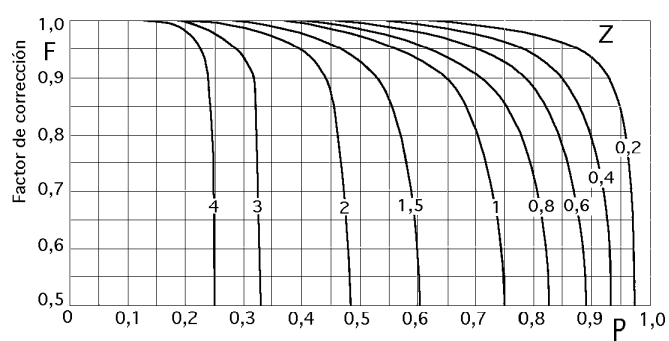


Fig XVII.13i.j.- Factor de corrección de la (LMTD) para un intercambiador de flujos cruzados, con mezcla de un fluido en la parte de la carcasa y sin mezcla del otro fluido, y un múltiplo de 2 pasos de tubos

XVIII.- INTERCAMBIADORES DE CALOR

MÉTODO DE LA EFICIENCIA

XVIII.1.- EFICACIA DE LOS INTERCAMBIADORES DE CALOR

En muchas situaciones lo único que se conoce es la descripción física del intercambiador, como el número y tamaño de los tubos, número de pasos de tubos, número de pasos por la carcasa, etc, y las temperaturas de entrada de los fluidos T_{C1} y T_{F1} . Se puede obtener una ecuación de la transferencia de calor en la que no intervenga ninguna de las temperaturas de salida de los fluidos, haciendo uso del concepto de eficacia del intercambiador que se define en la forma:

$$= \frac{\text{Velocidad real de transferencia de calor en un intercambiador determinado}}{\text{Velocidad máxima posible de transferencia de calor}}$$

La eficiencia compara la velocidad de transferencia térmica real, que es la absorbida por el fluido que se calienta, con la velocidad de transferencia térmica máxima que podría transmitirse en un intercambiador en contracorriente de superficie de intercambio infinita, cuyos límites viene impuestos por el Segundo Principio de la Termodinámica, que tiene en cuenta los focos térmicos a las temperaturas extremas T_{F1} (foco frío) y T_{C1} (foco caliente).

En un intercambiador en contracorriente de superficie de intercambio infinita con $C_F < C_C$ resulta que $T_{F2} = T_{C1}$, y el valor de: $Q_{\text{máx}} = C_F (T_{F2} - T_{F1}) = C_F (T_{C1} - T_{F1})$

En un intercambiador en contracorriente de superficie de intercambio infinita con $C_C < C_F$ resulta que $T_{C2} = T_{F1}$, y el valor de: $Q_{\text{máx}} = C_C (T_{C1} - T_{C2}) = C_C (T_{C1} - T_{F1})$

por lo que si se pone que $C_{\text{mín}} = \text{mín} (C_C, C_F)$, resulta que la máxima transferencia de calor en cualquier tipo de intercambiador es:

$$Q_{\text{máx}} = C_{\text{mín}} (T_{C1} - T_{F1})$$

observándose que es la corriente cuya capacidad térmica de flujo es menor la que establece el límite de la cantidad de calor que se puede transferir.

En consecuencia se puede poner:

$$= \frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \frac{C_F (T_{F2} - T_{F1})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \frac{C_C (T_{C1} - T_{C2})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})}$$

siendo C_{\min} la menor de las capacidades caloríficas C_C o C_F .

La velocidad máxima posible de transferencia térmica descrita en el denominador es la que se obtendría en un intercambiador de calor en contracorriente, con superficie de transferencia térmica infinita.

En estas circunstancias, si no existen pérdidas térmicas, se pueden presentar dos situaciones:

a) Cuando se cumpla que:

$$m_C c_{pC} < m_F c_{pF} \quad \text{ó} \quad C_C < C_F \quad ; \quad C_{\min} = C_C$$

para superficie de intercambio infinita:

$$= \frac{C_F (T_{F2} - T_{F1})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \left| \frac{A}{T_{C2} = T_{F1}} \right| = \frac{C_F (T_{F2} - T_{F1})}{C_C (T_{C1} - T_{C2})} = \frac{Q}{Q} = 1$$

$$= \frac{C_C (T_{C1} - T_{C2})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \left| \frac{A}{T_{C2} = T_{F1}} \right| = \frac{C_C (T_{C1} - T_{C2})}{C_C (T_{C1} - T_{C2})} = 1$$

la temperatura de salida del fluido que se enfría T_{C2} sería igual a la temperatura de entrada del fluido más frío T_{F1} .

b) A su vez, cuando se cumpla:

$$m_C c_{pC} > m_F c_{pF} \quad \text{ó} \quad C_C > C_F \quad ; \quad C_{\min} = C_F$$

para superficie de intercambio infinita:

$$= \frac{C_F (T_{F2} - T_{F1})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \left| \frac{A}{T_{F2} = T_{C1}} \right| = \frac{C_F (T_{F2} - T_{F1})}{C_F (T_{F2} - T_{F1})} = 1$$

$$= \frac{C_C (T_{C1} - T_{C2})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \left| \frac{A}{T_{F2} = T_{C1}} \right| = \frac{C_C (T_{C1} - T_{C2})}{C_F (T_{F2} - T_{F1})} = \frac{Q}{Q} = 1$$

y la temperatura de salida del fluido más frío T_{F2} sería igual a la temperatura de entrada del fluido más caliente T_{C1} .

En ambas situaciones se observa que para superficie de intercambio infinita la eficiencia es del 100%.

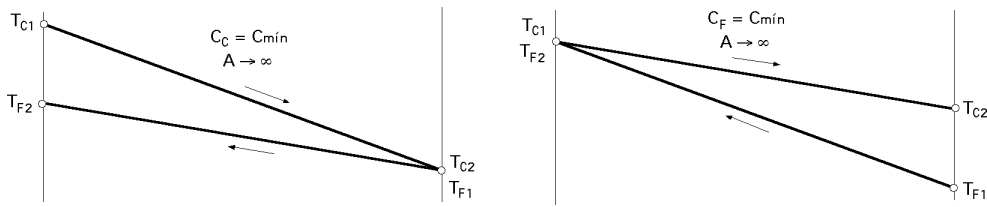


Fig XVIII.1.- Flujos paralelos en contracorriente con superficie de intercambio infinita

Una vez conocida la eficiencia de un intercambiador de calor, se puede determinar directamente la velocidad de transferencia térmica Q y las temperaturas de salida de los fluidos, mediante la ecuación:

$$Q = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1}) = C_F (T_{F2} - T_{F1}) = C_C (T_{C1} - T_{C2})$$

que es la relación básica de este análisis y expresa la velocidad de transferencia térmica en función de la eficacia, (cuyo valor hay que determinar), de la capacidad térmica mínima C_{\min} y de la diferencia de temperaturas de entrada de los dos fluidos, que son datos del problema.

A su vez, conocidos la geometría del intercambiador A , su coeficiente global de transmisión de calor U , las velocidades del flujo u_F y u_C y las capacidades caloríficas de los fluidos C_C y C_F se pueden calcular directamente las temperaturas de salida a partir de, conocidas las temperaturas de entrada, sin necesidad de recurrir a soluciones de tipo iterativo.

FLUJOS PARALELOS EN EQUICORRIENTE.- Para un intercambiador de flujos paralelos del mismo sentido se cumple, Fig XVIII.2, que:

$$T_2 = T_{C1} - T_{F1} \quad ; \quad T_1 = T_{C2} - T_{F2}$$

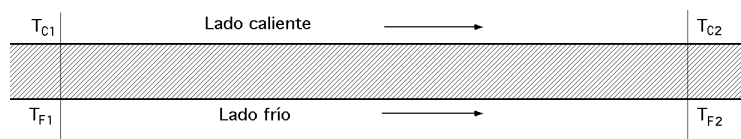


Fig XVIII.2.- Flujos paralelos en equicorriente

por lo que:

$$Q = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = U A \frac{(T_{C1} - T_{F1}) - (T_{C2} - T_{F2})}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}}} = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})$$

$$\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}} = U A \frac{(T_{C1} - T_{C2}) - (T_{F1} - T_{F2})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})}$$

Resolviendo por separado cada parte, se obtiene:

$$U A \frac{(T_{C1} - T_{C2}) - (T_{F1} - T_{F2})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \left| \begin{array}{l} \frac{T_{C2} - T_{F1}}{T_{C1} - T_{F1}} = \frac{C_{\min}}{C_F} \\ \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{C1} - T_{F1}} = \frac{C_{\min}}{C_C} \end{array} \right| = \frac{U A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_C} + \frac{C_{\min}}{C_F} \right) =$$

$$= U A \left(\frac{1}{C_C} + \frac{1}{C_F} \right)$$

Asimismo:

$$\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}} = \left| \begin{array}{l} T_{C2} = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_C} \\ T_{F2} = T_{F1} + (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_F} \end{array} \right| =$$

$$= \ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_C} - T_{F1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_F}} = \ln \frac{1}{1 - C_{\min} \left(\frac{1}{C_C} + \frac{1}{C_F} \right)} =$$

$$= - \ln \left\{ 1 - C_{\min} \left(\frac{1}{C_C} + \frac{1}{C_F} \right) \right\}$$

Igualándolas se encuentra:

$$1 - \left(\frac{C_{\min}}{C_C} + \frac{C_{\min}}{C_F} \right) = e^{-U A \left(\frac{1}{C_C} + \frac{1}{C_F} \right)} = \frac{1 - e^{-U A \left(\frac{1}{C_C} + \frac{1}{C_F} \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_C} + \frac{C_{\min}}{C_F}}$$

Cuando C_F sea el mínimo, C_C será el máximo, y la eficacia del intercambiador será:

$$= \frac{1 - e^{-\frac{U A}{C_F} \left(\frac{C_F}{C_C} + 1 \right)}}{\frac{C_F}{C_C} + 1}$$

y si fuese al contrario, C_C el mínimo, y C_F el máximo, se obtiene:

$$= \frac{1 - e^{-\frac{U A}{C_C} \left(1 + \frac{C_C}{C_F} \right)}}{1 + \frac{C_C}{C_F}}$$

Por consiguiente, la eficacia del intercambiador de calor para flujos paralelos del mismo sentido se puede poner, en general, en la forma:

$$= \frac{1 - e^{-\frac{U A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1 \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1} = \frac{1 - e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1 \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1}$$

en la que el valor, $\frac{U A}{C_{\min}} = NTU$, se denomina Número de unidades de transferencia térmica, (num-

ber of heat transfer units), y es una medida del valor de la capacidad de transferencia de calor del intercambiador; el valor del rendimiento del intercambiador a partir del NTU se determina mediante gráficas, como la indicada en la Fig XVIII.3, para flujos paralelos en equicorriente.

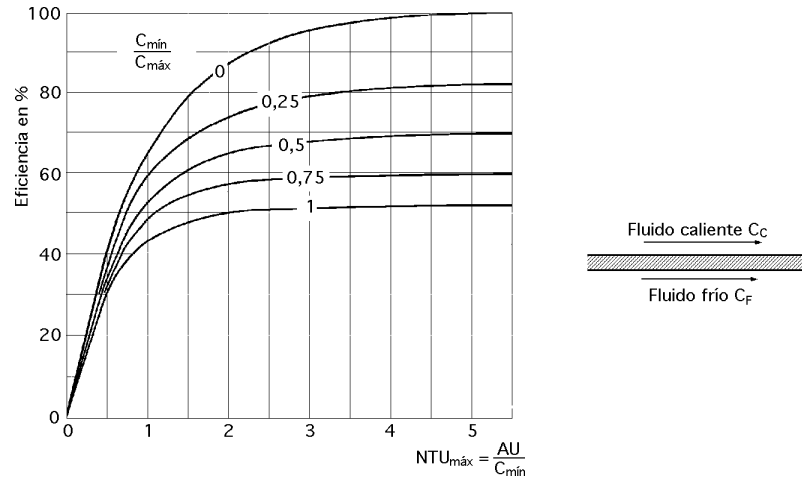


Fig XVIII.3.- Eficacia de un intercambiador de calor con flujos en equicorriente

Cuanto mayor sea el NTU más estrechamente tiende el intercambiador a su valor límite termodinámico, por cuanto toma el valor máximo para cada C_{\min}/C_{\max} siendo las curvas paralelas al eje de NTU. Despejando de la anterior resulta:

$$NTU = \frac{1}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1} \ln \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}}\right)}$$

FLUJOS PARALELOS EN CONTRACORRIENTE.- Partimos de la misma definición de la eficacia, en la que hay que introducir los valores correspondientes a T_2 y T_1 ; haciendo un análisis semejante:

$$T_2 = T_{C1} - T_{F2} \quad ; \quad T_1 = T_{C2} - T_{F1}$$

$$Q = UA \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = UA \frac{(T_{C1} - T_{F2}) - (T_{C2} - T_{F1})}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F2}}{T_{C2} - T_{F1}}} = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})$$

$$\ln \frac{T_{C1} - T_{F2}}{T_{C2} - T_{F1}} = UA \frac{(T_{C1} - T_{C2}) - (T_{F2} - T_{F1})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} \quad UA \frac{(T_{C1} - T_{C2}) - (T_{F2} - T_{F1})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = UA \left(\frac{1}{C_C} - \frac{1}{C_F} \right)$$

$$\ln \frac{T_{C1} - T_{F2}}{T_{C2} - T_{F1}} = \ln \frac{T_{C1} - T_{F1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_F}}{T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_C} - T_{F1}} = \ln \frac{1 - \frac{C_{\min}}{C_F}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_C}}$$

$$\frac{1 - \frac{C_{\min}}{C_F}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_C}} = e^{U_A \left(\frac{1}{C_C} - \frac{1}{C_F} \right)} ; \quad = \frac{1 - e^{U_A \left(\frac{1}{C_C} - \frac{1}{C_F} \right)}}{C_{\min} \left\{ \frac{1}{C_F} - \frac{1}{C_C} e^{U_A \left(\frac{1}{C_C} - \frac{1}{C_F} \right)} \right\}}$$

Cuando C_F sea igual a C_{\min} y C_C sea igual a C_{\max} se puede poner:

$$= \frac{1 - e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_C} - 1 \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_F} - \frac{C_{\min}}{C_C} e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_C} - 1 \right)}} = \frac{1 - e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}} = \frac{1 - e^{NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}$$

y si C_F fuese el máximo, C_C sería el mínimo, obteniéndose:

$$= \frac{1 - e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_C}{C_F} \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(1 - \frac{C_C}{C_F} \right)}} = \frac{1 - e^{-\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - e^{-\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}} = \frac{e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)} - 1}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{\frac{U_A}{C_{\min}} \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)} - 1} =$$

$$= \frac{1 - e^{NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}$$

que es la misma expresión, independientemente de la capacidad térmica de los fluidos.

$$= \frac{1 - e^{NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}} \quad NTU = \frac{1}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \ln \frac{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}$$

Como se puede observar, en los parámetros NTU, C_{\min}/C_{\max} y , no intervienen conceptos nuevos y su significado estriba en que sustituyen a los utilizados en el método de la LMTD, T , Z , y P .

Como cada caso tiene una ecuación diferente, los resultados globales obtenidos se representan en una serie de gráficas, Figs XVIII.3.4.5.6.7, que resumen algunos de los montajes de intercambiadores de interés práctico, determinándose a partir de ellas la eficacia para valores dados del NTU y de C_{\min}/C_{\max} ; las abscisas de estas gráficas son los valores del NTU de los intercambiadores de calor, el parámetro constante de cada curva es el cociente entre las capacidades térmicas C_{\min}/C_{\max} mientras que la eficacia se lee sobre el eje de ordenadas.

Para el caso de un evaporador o un condensador, (intercambiadores de dos flujos) o el intercambio térmico de un fluido con un medio exterior a temperatura constante, (intercambiadores de un solo flujo), la relación $C_{\min}/C_{\max} = 0$ por cuanto si uno de los fluidos permanece a temperatura constante en todo el proceso, se puede entender que su capacidad térmica será muy elevada, mucho

mayor que la del otro fluido, obteniéndose:

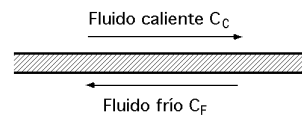
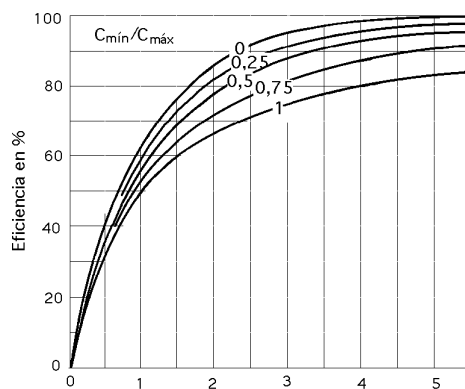
Para flujos en equicorriente, $\epsilon = 1 - e^{-NTU}$

Para flujos en contracorriente, $\epsilon = 1 - e^{-NTU}$

En los *intercambiadores de flujo equilibrado*, las capacidades térmicas de las corrientes caliente y fría son aproximadamente iguales, por lo que $C_{\min} = C_{\max}$

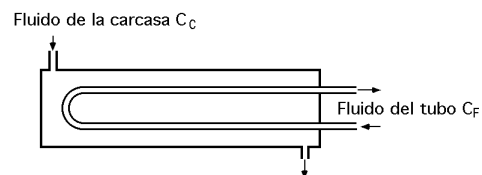
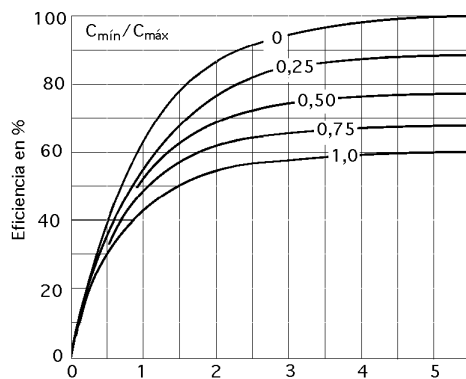
Para un intercambiador en equicorriente, $\epsilon = \frac{1 - e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1 \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1} = \frac{1 - e^{-2 NTU}}{2}$

Para un intercambiador en contracorriente, $\epsilon = \frac{1 - e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}} = \frac{0}{0} = \frac{NTU}{1 + NTU}$



Número de unidades de transferencia de calor $NTU_{\max} = \frac{AU}{C_{\min}}$

Fig XVIII.4.- Eficacia de un intercambiador de calor (flujos paralelos en contracorriente)



Número de unidades de transferencia de calor $NTU_{\max} = \frac{AU}{C_{\min}}$

Fig XVIII.5.- Un paso por carcasa y dos o múltiplo de dos pasos de tubos

XVIII.2.- VALORES DE LA EFICIENCIA TERMICA Y DEL NTU PARA ALGUNAS CONFIGURACIONES DE FLUJOS DE CARCASA Y TUBOS, Y FLUJOS CRUZADOS

Una sola corriente y todo tipo de intercambiadores cuando, $\frac{C_{\min}}{C_{\max}} = 0$

$$= 1 - e^{-NTU} \quad ; \quad NTU = \ln \frac{1}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}$$

Flujos paralelos en equicorriente

$$= \frac{1 - e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1 \right)}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1} \quad ; \quad NTU = \frac{1}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1} \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} + 1 \right)}$$

Flujos paralelos en contracorriente

$$= \frac{1 - e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}} \quad ; \quad NTU = \frac{1}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \ln \frac{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{-NTU \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}}$$

Intercambiadores de carcasa y tubos, 1 paso por la carcasa y un número par de pasos por tubos

$$= \frac{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{-NTU \sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}}} + \frac{1 + e^{-NTU \sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}}}{1 - e^{-NTU \sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}}} \sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}$$

$$NTU = - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}} \ln \frac{E - 1}{E + 1}, \quad \text{siendo,} \quad E = \frac{2 - \left(1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}}$$

Intercambiadores de carcasa y tubos, n pasos por la carcasa y un número par de pasos por tubos, 2n, 4n, 6n,...

$$= \frac{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{\left(\frac{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{-NTU \sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}}} \right)^n - 1} \quad ; \quad NTU = - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} \right)^2}} \ln \frac{E - 1}{E + 1}$$

en el cálculo de $\frac{C_{\min}}{C_{\max}}$ se utiliza el NTU por paso por carcasa, es decir, $\frac{NTU}{n}$

$$E = \frac{F - \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{2 \frac{C_{\min}}{C_{\max}} - (1 + \frac{C_{\min}}{C_{\max}})} \sqrt{1 + (\frac{C_{\min}}{C_{\max}})^2} \quad ; \quad F = \sqrt{\frac{\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1}{-1}}$$

Flujos cruzados con mezcla en ambos fluidos,
$$= \frac{NTU}{\frac{NTU}{1 - e^{-NTU}} + \frac{NTU \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}{1 - e^{-NTU \frac{C_{\min}}{C_{\max}}}} - 1}$$

Flujos cruzados sin mezcla,
$$= 1 - e^{-\frac{NTU}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}}}} (1 - e^{-\frac{C_{\min}}{C_{\max}} NTU})^{0,78}$$

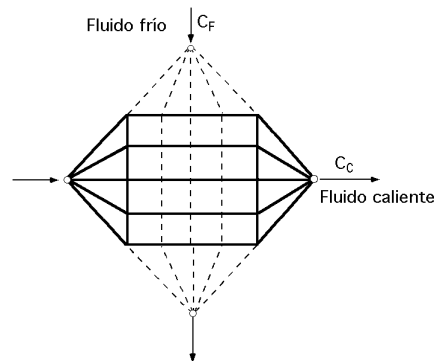
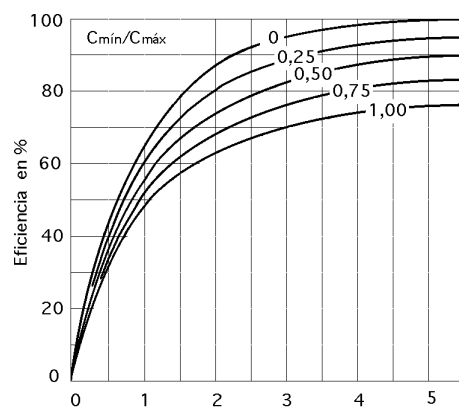
Flujos cruzados con mezcla en un fluido, y el otro sin mezclar

a) C_{\min} (mezclado) ; C_{\max} (sin mezclar)

$$= 1 - e^{-\frac{1 - e^{-\frac{C_{\min}}{C_{\max}} NTU}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}}}} \quad ; \quad NTU = -\frac{\ln \left\{ \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \ln(1 -) + 1 \right\}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}}}$$

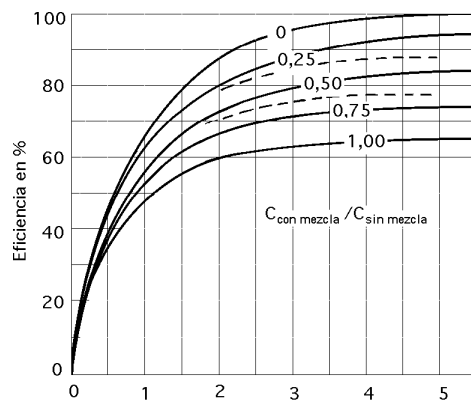
b) C_{\min} (sin mezclar) ; C_{\max} (mezclado)

$$= \frac{1 - e^{-\frac{C_{\min}}{C_{\max}} (1 - e^{-NTU})}}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \quad ; \quad NTU = -\ln \left\{ 1 + \frac{\ln(1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}})}{\frac{C_{\min}}{C_{\max}}} \right\}$$



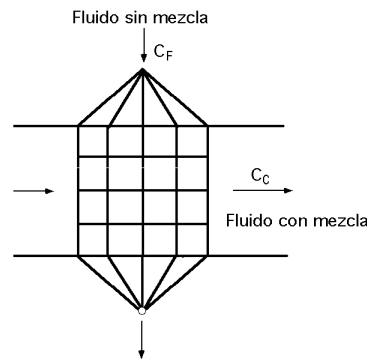
Número de unidades de transferencia de calor $NTU_{\max} = \frac{A U}{C_{\min}}$

Fig XVIII.6.- Flujo cruzado con ambos fluidos sin mezcla



$$\text{Número de unidades de transferencia de calor } NTU_{\text{máx}} = \frac{A U}{C_{\text{min}}}$$

Fig XVIII.7.- Flujo cruzado con mezcla en un fluido y sin mezcla en el otro



XVIII.3.- INTERCAMBIADORES DE CALOR COMPACTOS

Los intercambiadores de calor que se utilizan en aplicaciones en que el flujo de gas se realiza con mezcla a la entrada y a la salida, siendo la relación {área de transferencia de calor/volumen total} del orden de 700 m²/m³, se consideran como intercambiadores compactos. El coeficiente de transmisión de calor es relativamente bajo, y tanto el peso como el tamaño son pequeños, existiendo una amplia gama de configuraciones y formas para las que se han determinado experimentalmente tanto los coeficientes de transferencia de calor, como las pérdidas de carga, como se muestra en los gráficos de las Figuras XVIII.12 a 17; el número de Re es de la forma:

$$Re = \frac{G^* d_{\text{equiv}}}{\mu}$$

siendo: G^* la velocidad másica por unidad de superficie de en el núcleo, de la forma: $G^* = G/A_{\text{min}}$ kg/m²seg, con G el gasto másico, kg/seg y A_{min} la sección transversal mínima o sección transversal del flujo en el núcleo, en m².

El diámetro equivalente $d_{\text{eq}} = 4 d_H$ viene definido para cada configuración por la expresión:

$$d_{\text{equiv}} = 4 \frac{L A_{\text{min}}}{A}$$

en la que A es la superficie total de intercambio térmico y el producto $L A_{\text{min}}$ se puede considerar como el volumen mínimo del flujo másico, siendo L la longitud del flujo del intercambiador.

El cálculo de las dimensiones y características del intercambiador se puede realizar utilizando los métodos de la (LMTD) o de la eficiencia.

Por lo que respecta a las pérdidas de carga P se puede considerar que en ellas influyen:

a) El rozamiento del fluido cuando atraviesa el intercambiador, que supone más del 90% del total de las pérdidas de carga.

b) La aceleración o deceleración del fluido, asociada a que en el intercambiador se produzca un calentamiento o un enfriamiento del fluido.

c) Las pérdidas a la entrada y a la salida, originadas por la contracción y expansión del fluido, respectivamente; estas pérdidas tienen importancia en núcleos cortos (L pequeña), altos valores del número de Re , pequeños valores de $\beta = A_{\min}/A_{\text{frontal}}$ y en los gases; en los líquidos son despreciables.

Para intercambiadores compactos de placa delgada plana, la pérdida de carga viene dada por la expresión:

$$P = P_{\text{entrada}} + P_{\text{núcleo}} - P_{\text{salida}}$$

La *caída* de presión a la entrada se puede expresar como la suma de la caída de presión debida al cambio de área de flujo de un fluido no viscoso, más la pérdida irreversible de presión debida a los efectos de viscosidad. Suponiendo que la densidad se mantiene constante, y teniendo en cuenta que la variación de presión suele ser pequeña comparada con la presión total, se tiene:

$$P_{\text{ent}} = \frac{1}{2} \frac{G^* u_{\text{ent}}}{A_{\text{frontal}}} \left\{ 1 - \left(\frac{A_{\min}}{A_{\text{frontal}}} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \frac{u_{\text{ent}}^2}{A_{\text{frontal}}} K_{\text{contracción}}$$

en la que A_{\min} es el área de la sección transversal del flujo del núcleo, K_{contr} es el coeficiente de contracción y u_{ent} es la velocidad a la entrada..

El *aumento* de presión a la salida se puede expresar como la suma del aumento de presión debida al cambio de área de flujo de un fluido no viscoso, menos la pérdida irreversible de presión debida a los efectos de viscosidad. Si se mantiene la misma A_{frontal} que a la entrada, se tiene:

$$P_{\text{sal}} = \frac{1}{2} \frac{G^* u_{\text{sal}}}{A_{\text{frontal}}} \left\{ 1 - \left(\frac{A_{\min}}{A_{\text{frontal}}} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \frac{G^* u_{\text{sal}}}{A_{\text{frontal}}} K_{\text{expansión}}$$

En el núcleo son dos los factores que contribuyen a la caída de presión

- El arrastre viscoso y el arrastre debido a la forma de la superficie de transferencia térmica
- La caída de presión requerida para acelerar el fluido

$$P_{\text{núcleo}} = \frac{1}{2} G^* u_m \frac{L}{d_{\text{equiv}}} + \left(u_{\text{sal}}^2 - u_{\text{ent}}^2 \right)$$

en las que:

$$\frac{L}{d_{\text{equiv}}} = \frac{A}{4 A_{\min}} = \frac{\text{Área de transferencia térmica}}{4 A_{\min}} \quad \frac{A}{A_{\min}} = \frac{4 L}{d_{\text{equiv}}}$$

Velocidad másica por unidad de superficie

$$G^* = \frac{u_F A_{\text{frontal}}}{A_{\min}} = \frac{u_F}{\left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \text{seg}} \right)} = u_{\text{sal}} = u_{\text{ent}} = u_m \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \text{seg}} \right)$$

$$= \frac{A_{\min}}{A_{\text{frontal}}} = \frac{\text{Sección mínima de paso de fluido}}{\text{Área frontal}}$$

Efecto de entrada: $1 + K_{\text{contr}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}} - 1 \right)$

Aceleración del flujo: $\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}} - 1 \right)$

Fricción en el núcleo: $\frac{A}{A_{\text{mín}}} \frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{m}}}$

Efecto de salida: $(1 - K_{\text{exp}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}} - 1 \right)) \frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}}$

K_{contr} y K_{exp} son los coeficientes de contracción y de expansión del fluido que viene dados en las gráficas XVIII.8,9,10 y 11, y ρ_{ent} y ρ_{sal} sus densidades a la entrada y salida del intercambiador:

$$\frac{1}{\rho_{\text{m}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\text{ent}}} + \frac{1}{\rho_{\text{sal}}} \right)$$

Teniendo en cuenta los parámetros anteriores la ecuación de la pérdida de carga en un intercambiador de flujos cruzados viene dada por la expresión:

$$P = \frac{G^*{}^2}{2 \rho_{\text{ent}}} \left\{ (K_{\text{contr}} + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}} - 1 \right)) + \frac{A}{A_{\text{mín}}} \frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{m}}} - (1 - K_{\text{exp}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}} - 1 \right)) \frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}} \right\}$$

Los coeficientes de contracción y expansión son función de la geometría y en menor grado del número de Reynolds en el núcleo

Para intercambiadores compactos de tubo circular con aletas, la pérdida de carga viene asociada a los apartados (a) y (b) anteriores, ya que los valores de K_{contr} y K_{exp} son cero, por lo que:

$$P = \frac{G^*{}^2}{2 \rho_{\text{ent}}} \left\{ (1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{sal}}} - 1 \right)) + \frac{A}{A_{\text{mín}}} \frac{\rho_{\text{ent}}}{\rho_{\text{m}}} \right\}$$

SELECCION DE LA SUPERFICIE FRONTAL PARA INTERCAMBIADORES DE CALOR COMPACTOS.- Si se propone una ecuación aproximada para la velocidad en el núcleo, y no se tienen en cuenta la caída de presión por aceleración, ni las pérdidas de carga a la entrada y a la salida, y considerando la eficiencia de las aletas del 100%, la ecuación de la pérdida de carga en el intercambiador anteriormente definida queda en la forma:

$$u_{\text{ent}}^2 = \frac{8 \rho_{\text{ent}}^2 P St}{(NTU)_{\text{ent}}} \quad ; \quad P = \frac{(NTU)_{\text{ent}} u_{\text{ent}}^2}{8 \rho_{\text{ent}}^2 St} \quad ; \quad G^*{}^2 = \frac{8 St \rho_{\text{m}}}{(NTU)_{\text{ent}}} P$$

$$\text{siendo: } (NTU)_{\text{ent}} = St \frac{A}{A_{\text{mínimo}}}$$

Si se supone que la eficiencia de la aleta es la unidad (resistencia de aleta nula), y resistencia de pared despreciable:

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{(h_c A)_{ent}} + \frac{1}{(h_c A)_{sal}}$$

$$\frac{1}{NTU} = \frac{\frac{C_{\min}}{C_c}}{(NTU)_{ent,C}} + \frac{\frac{C_{\min}}{C_c}}{(NTU)_{sal,F}}$$

Conocido el valor de la velocidad de entrada u_{ent} la superficie frontal es:

$$A_{frontal} = \frac{G}{u_{ent}}$$

Para un flujo equilibrado, $C_{\min} = C_c = C_F$, resulta:

$$\frac{1}{NTU} = \frac{1}{(NTU)_{ent,C}} + \frac{1}{(NTU)_{sal,F}} = \frac{2}{(NTU)_{ent}} ; \quad (NTU)_{ent} = 2 (NTU)$$

Si la eficiencia de la aleta no es la unidad, la determinación de la superficie de transferencia de calor se tendría que hacer más cuidadosamente.

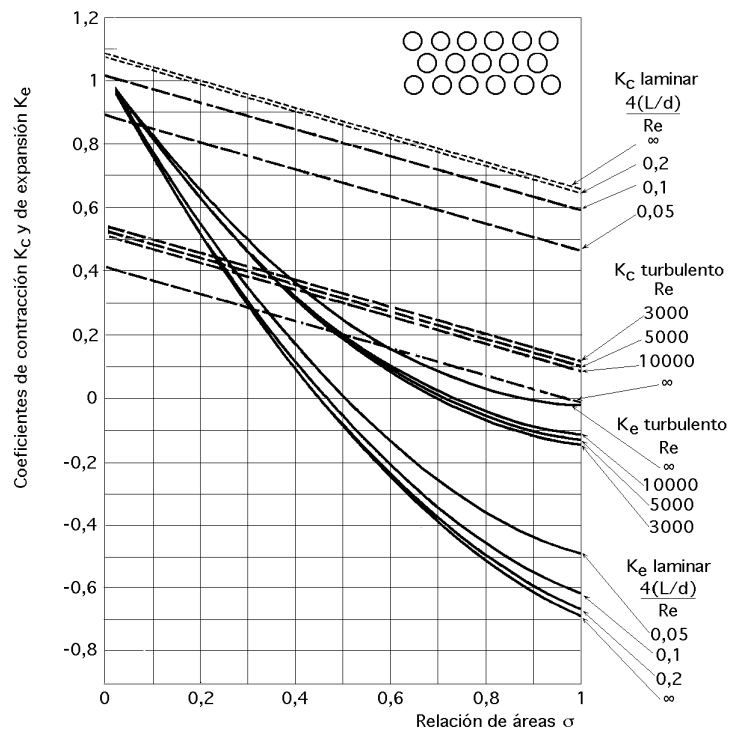


Fig XII.8.- Coeficientes de pérdida de presión por contracción y por expansión para una batería de tubos circulares

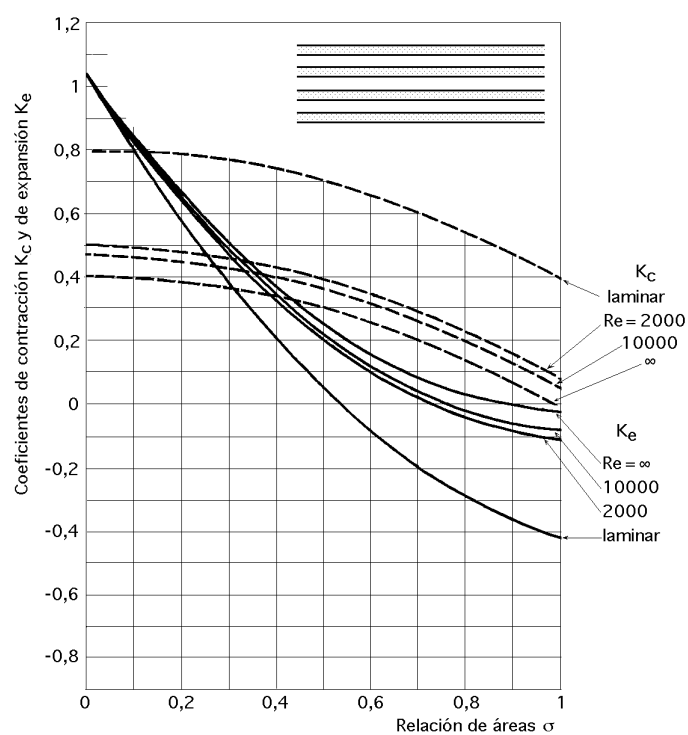


Fig XII.9.- Coeficientes de pérdida de presión por contracción y por expansión para una batería de placas paralelas

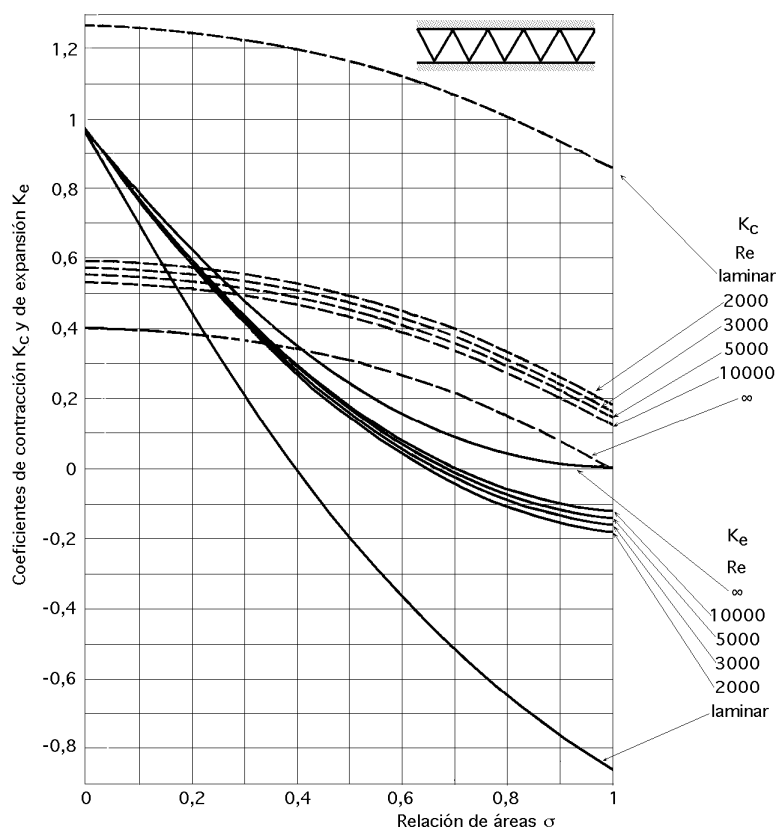


Fig XII.10.- Coeficientes de pérdida de presión por contracción y por expansión para una batería de pasos triangulares

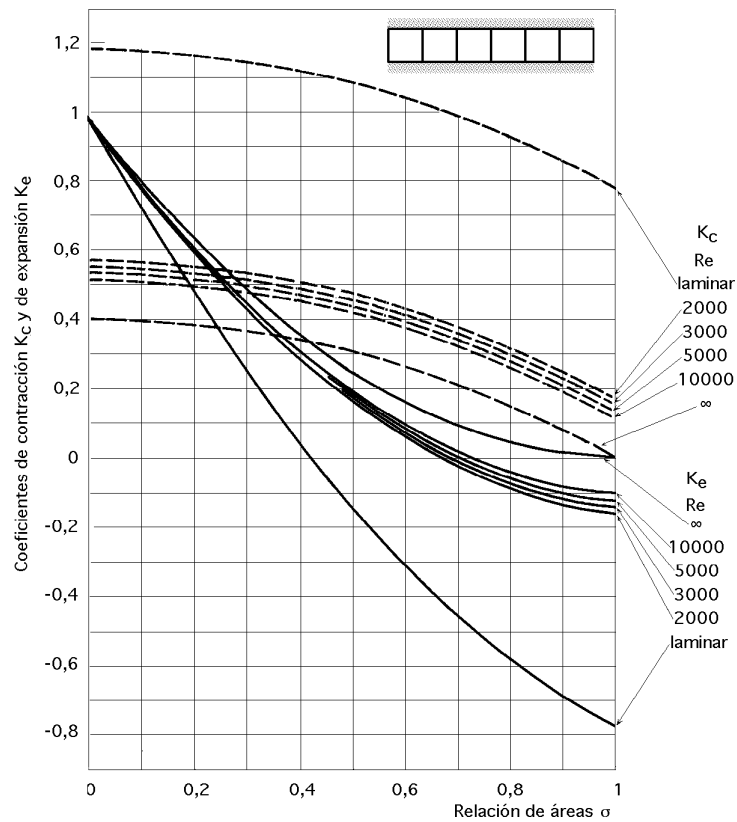
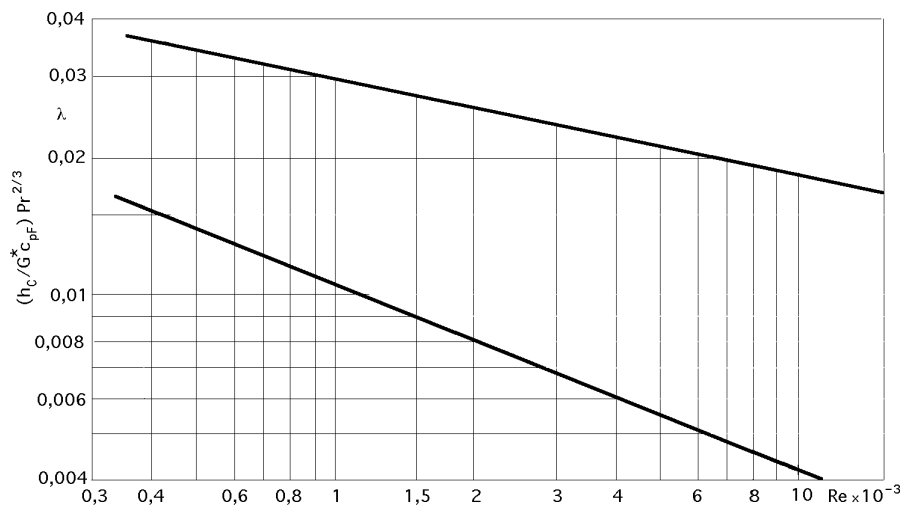


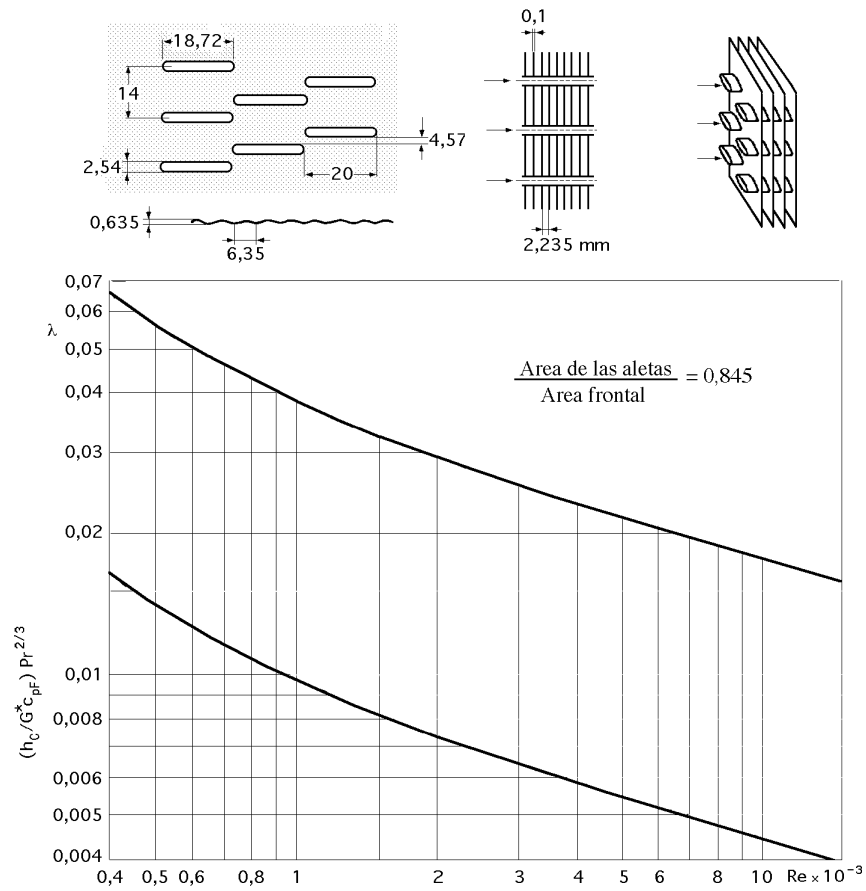
Fig XII.11.- Coeficientes de pérdida de presión por contracción y por expansión para una batería de pasos cuadrados



Diámetro equivalente: $4d_h = 0,363 \text{ cm}$; $\frac{\text{Area de paso mínima de flujo}}{\text{Area frontal}} = 0,534$

$\frac{\text{Area total de transferencia térmica}}{\text{Volumen total}} = 587 \text{ m}^2/\text{m}^3$

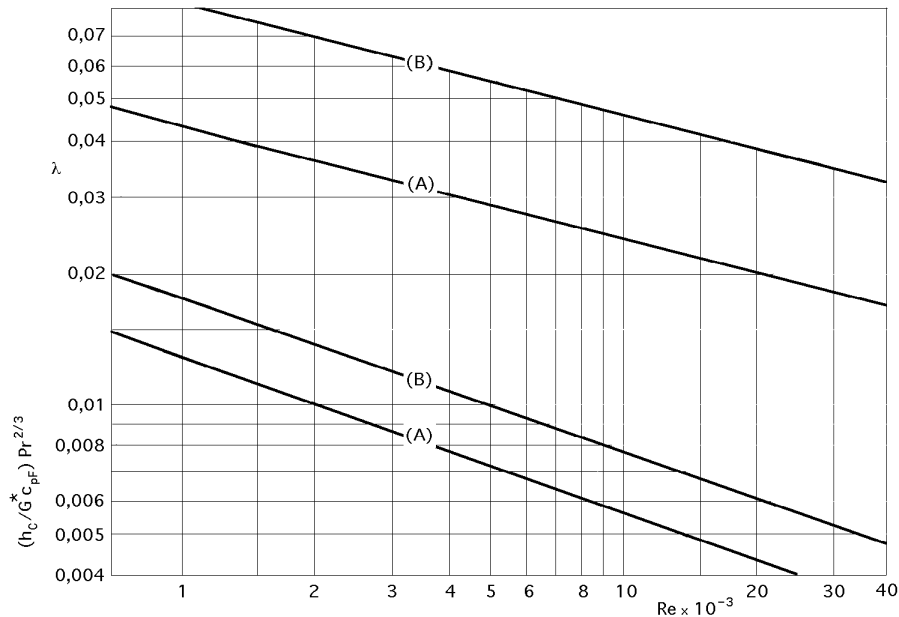
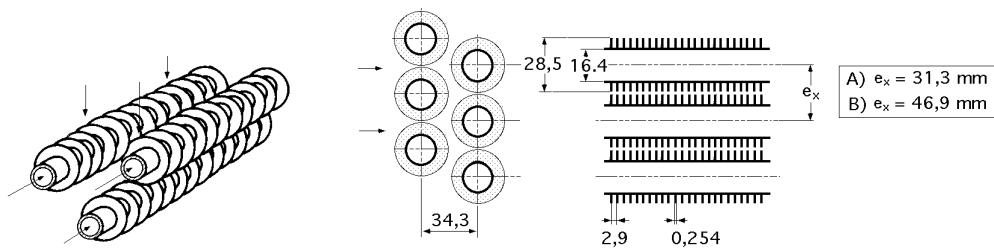
Fig XVIII.12.- Factor de fricción λ y de convección h_c para flujos cruzados, en tubos circulares con aletas de placa



Diámetro equivalente = $4d_h = 0,351 \text{ cm}$; $= \frac{\text{Área de paso mínima de flujo}}{\text{Área frontal}} = 0,78$

$\frac{\text{Área total de transferencia térmica}}{\text{Volumen total}} = 886 \text{ m}^2/\text{m}^3$

Fig XVIII.13.- Factor de fricción λ y de convección h_c para flujos cruzados, en tubos aplanados con aletas de placa



(A) Diámetro equivalente = $4d_h$: 0,548 cm ; $= \frac{\text{Area de paso mínima de flujo}}{\text{Area frontal}} = 0,443$

$$\frac{\text{Area total de transferencia térmica}}{\text{Volumen total}} = 323,8 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

(B) Diámetro equivalente = $4d_h$: 1,1674 cm ; $= \frac{\text{Area de paso mínima de flujo}}{\text{Area frontal}} = 0,628$

$$\frac{\text{Area total de transferencia térmica}}{\text{Volumen total}} = 215,6 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

Fig XVIII.14.- Factor de fricción y de convección h_c para flujos cruzados, en tubos circulares con aletas anulares

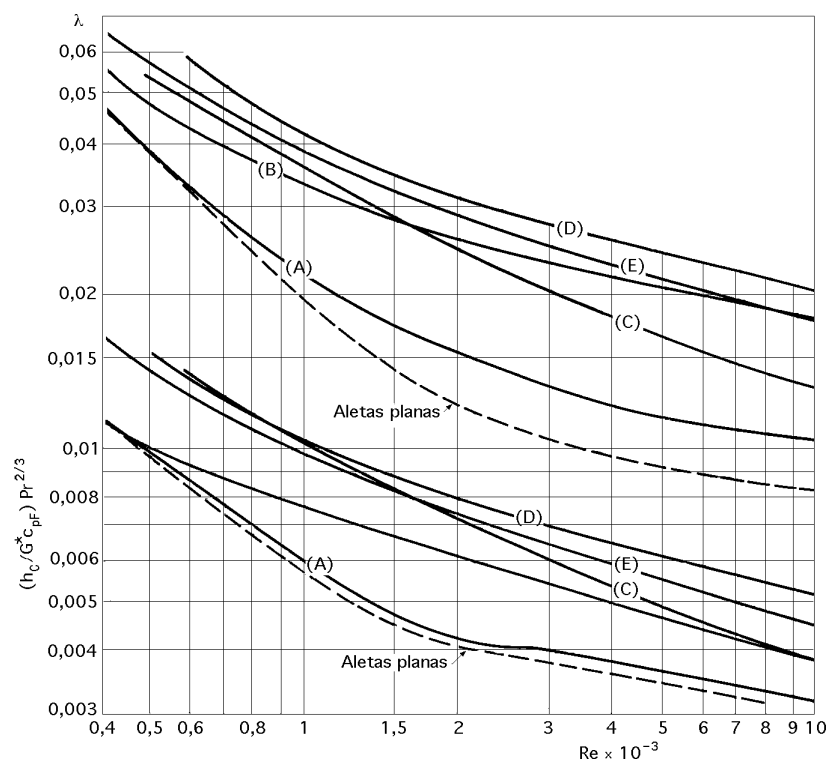
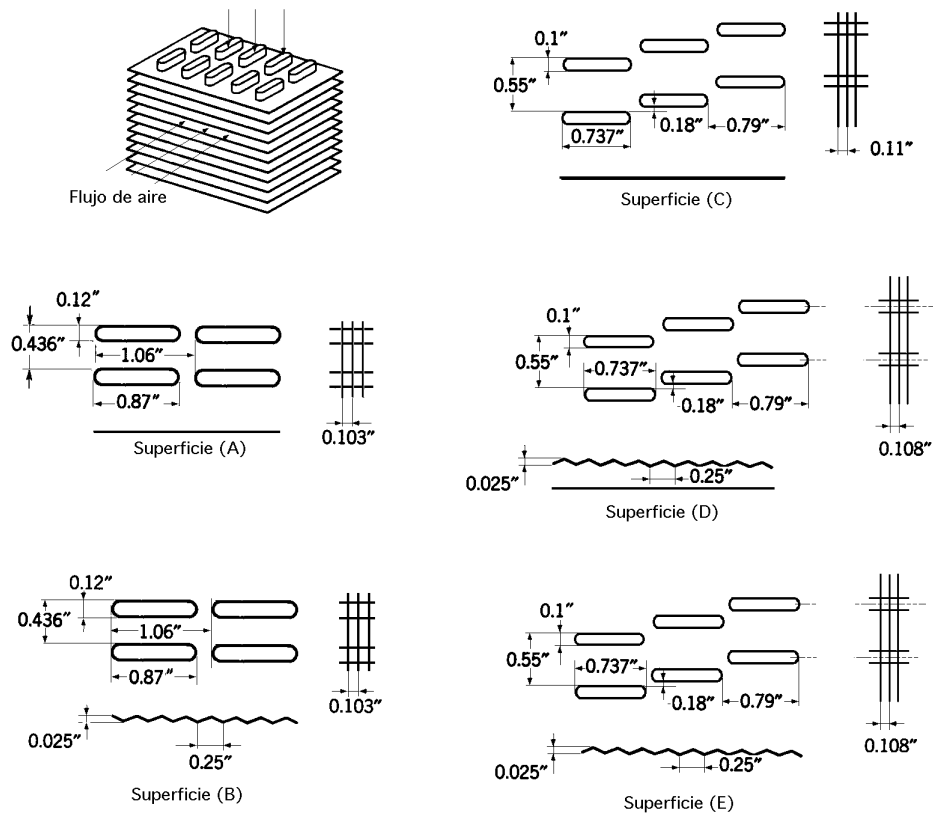


Fig XVIII.15.- Factores de fricción y de convección h_c para flujos cruzados, para diversos casos de tubos aplanados con aletas de placa plana y corrugada

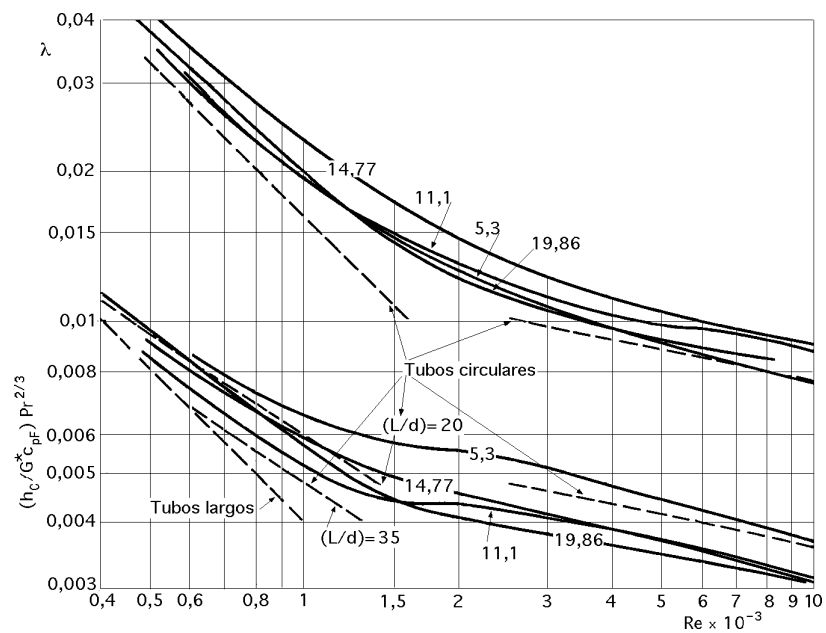
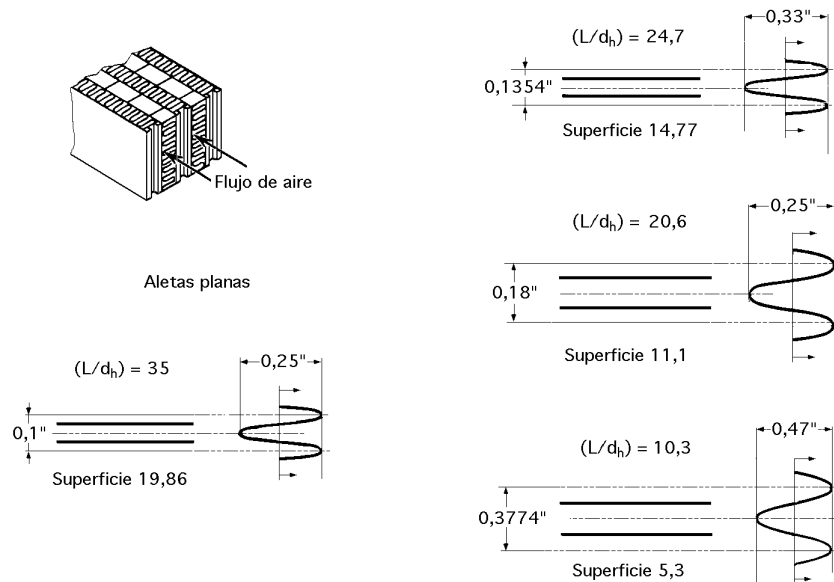


Fig XVIII.16.- Factores de fricción y de convección h_c para flujos cruzados, para diversos casos de aletas de placa plana

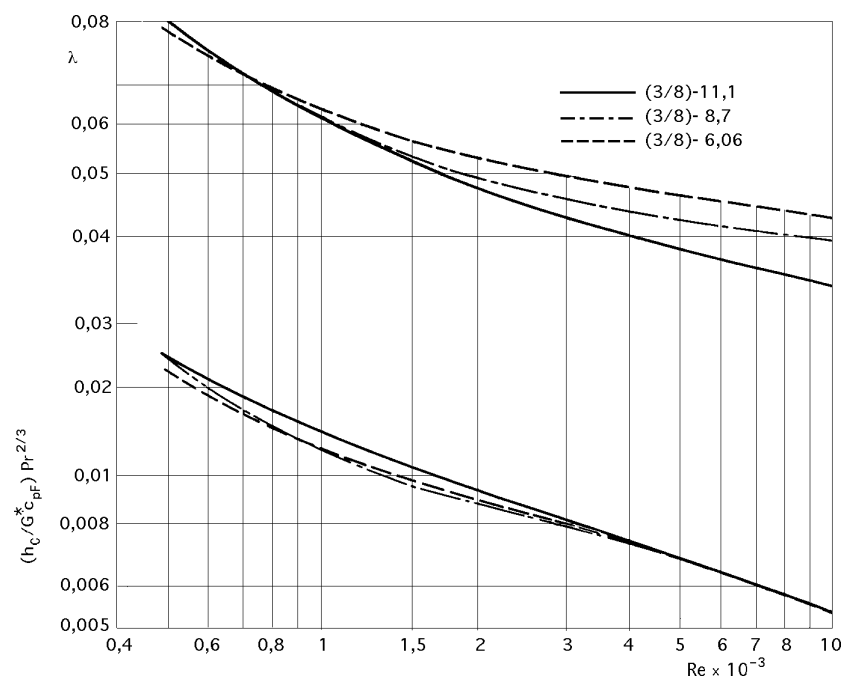
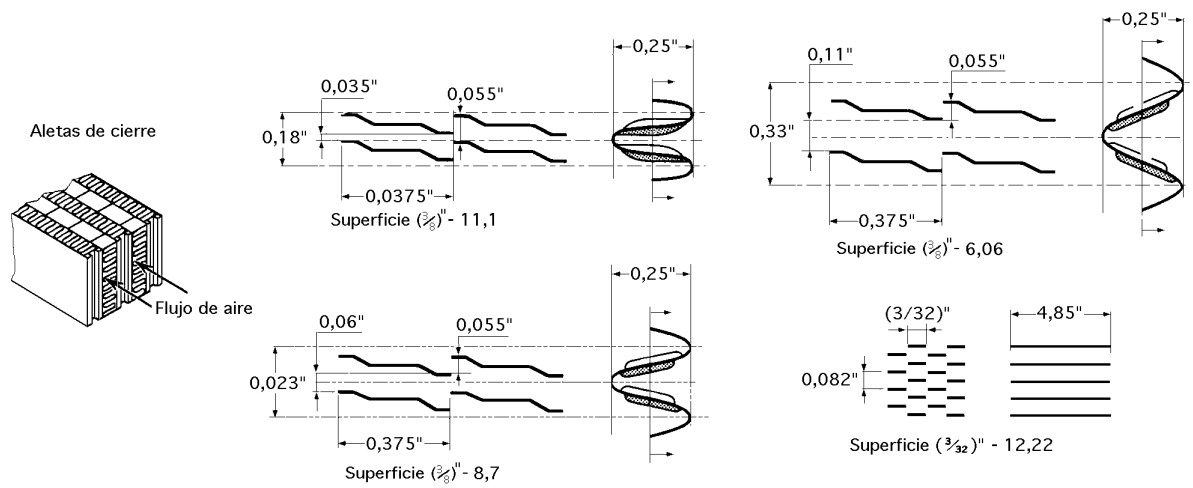


Fig XVIII.17.- Factores de fricción λ y de convección h_c para flujos cruzados, para diversos casos de aletas de placa en forma de persiana cerrada

XIX.- RADIACIÓN TÉRMICA

FUNDAMENTOS Y FACTORES DE FORMA

XIX.1.- INTRODUCCIÓN

La forma radiativa de la transmisión del calor se caracteriza porque la energía se transporta en forma de ondas electromagnéticas, que se propagan a la velocidad de la luz. El transporte de energía por radiación se puede realizar entre superficies separadas por el vacío; así por ejemplo, el Sol transmite energía a la Tierra por radiación a través del espacio que, una vez interceptada por la Tierra, se transforma en otras fuentes de energía.

La *teoría ondulatoria* establece que la radiación se comporta como una onda que oscila con una frecuencia ν y una longitud de onda λ .

El producto de la frecuencia por la longitud de onda es la velocidad de la luz \vec{c} :

$$c = \lambda \nu$$

La *teoría corpuscular* admite que la energía radiante se transporta en forma de fotones. Cada fotón se propaga con la velocidad de la luz a un nivel energético de la forma:

$$e = h \nu$$

en la que h es la constante de Planck.

Los fotones de mayor frecuencia poseen más energía que los de menor frecuencia. Cuando un cuerpo se calienta, los electrones libres pueden saltar a niveles de mayor energía o niveles excitados; cuando un electrón vuelve a su nivel energético inferior emite un fotón cuya energía es igual a la diferencia energética entre el estado excitado y el estado fundamental. En toda superficie y en cualquier instante existen numerosos electrones que experimentan cambios en su nivel energético y, por lo tanto, la energía que abandona esta superficie se distribuye dentro de un espectro de frecuencias.

La energía se emite solamente en función de la temperatura del cuerpo; la energía que abandona la superficie se llama *radiación térmica*. En el extremo del espectro correspondiente a longitudes de onda pequeñas están los rayos X, mientras que en el otro extremo del espectro están las ondas de radio; entre estos límites está la radiación térmica que se emite por un cuerpo que depende exclusivamente de su temperatura; el intervalo completo de todas las longitudes de onda constituye el espectro electromagnético, que se subdivide en un cierto número de intervalos de longitudes de onda, correspondientes a unas fenomenologías características, como ultravioleta, visible, infrarrojo, etc.

La radiación térmica emitida por una superficie en función de su temperatura se corresponde con las longitudes de onda comprendidas entre, 10^{-7} m y 10^{-4} m.

El ojo humano es capaz de detectar las ondas electromagnéticas comprendidas en el intervalo, $3,8 \cdot 10^{-7}$ m ÷ $7,6 \cdot 10^{-7}$ m, que constituye la *radiación visible* del espectro electromagnético; es una porción muy pequeña del espectro completo que, a su vez, se encuentra en el intervalo correspondiente a la radiación térmica. Las longitudes de onda se miden en distintas unidades de longitud, como:

$$1 \text{ \AA} = 1 \text{ Angstrom} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-4} \text{ mm}$$

$$1 \text{ }\mu\text{m} = 1 \text{ micrón} = 10^{-6} \text{ m} = 10^4 \text{ \AA}$$

XIX.2.- FÍSICA DE LA RADIACIÓN

CUERPO NEGRO.- No todas las superficies emiten o absorben la misma cantidad de energía radiante cuando se calientan a la misma temperatura. Un cuerpo que emite (radiación difusa) o absorbe la máxima cantidad de energía a una temperatura determinada es un *cuerpo negro*, que no es más que un modelo ideal al que se pueden aproximar en la práctica los cuerpos reales recubriendo su superficie con determinadas pinturas o modificando su forma; es, por lo tanto, un cuerpo estándar con el que pueden compararse otros cuerpos radiadores.

LEY DE PLANCK.- Cuando un cuerpo negro se calienta a una temperatura T, emite fotones desde su superficie, los cuales poseen una distribución determinada de energía que depende de la temperatura superficial; Max Planck en 1900 demostró que la energía emitida por un cuerpo negro a una longitud de onda λ y temperatura T es de la forma:

$$E_b(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)}, \text{ siendo, } \begin{aligned} C_1 &= 3,7418 \times 10^{-16} \text{ W.m}^2 \\ C_2 &= 1,4388 \times 10^{-2} \text{ m}^\circ\text{K} \end{aligned}$$

en la que E_b es la potencia emisiva espectral o monocromática del cuerpo negro a la temperatura T, en W/m³.

La variación de la potencia emisiva monocromática del cuerpo negro con la temperatura y con la longitud de onda, se denomina *Ley de Planck*, Fig XIX.1.

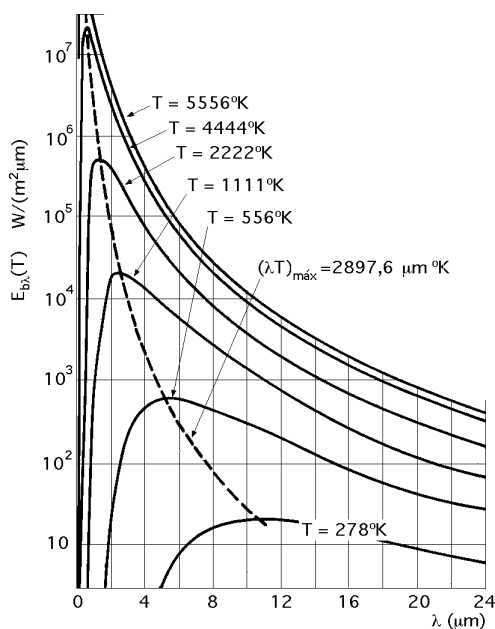


Fig XIX.1.- Poder emisor espectral del cuerpo negro y ley del desplazamiento de Wien

El resultado de esta operación es:

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K}$$

en la que $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda correspondiente al máximo de potencia emisiva monocromática, de una superficie negra, a la temperatura T .

Esta ecuación expresa la ley del desplazamiento de Wien; el valor máximo de la potencia emisiva monocromática del cuerpo negro se puede obtener sustituyendo la ecuación del desplazamiento de Wien en la ecuación de la ley de Planck, resultando:

$$(E_b)_{\text{máx}} = 1,287 \cdot 10^{-5} T^5 \text{ W/m}^2$$

Para comprender los resultados de la ley del desplazamiento de Wien vamos a recurrir al siguiente ejemplo:

Supongamos que una corriente eléctrica pasa a través de un filamento haciendo aumentar su temperatura; a temperaturas relativamente bajas, por debajo de 600°C, la longitud de onda correspondiente al máximo de potencia emisiva del filamento es de unos $3,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $3,2 \text{ μm}$ ó 32000 Å en la región del infrarrojo; se puede apreciar que el filamento emite energía radiante con solo acercar la mano, pero nuestros ojos son incapaces de detectar radiación visible, pues sólo una cantidad insignificante de energía corresponde al intervalo de longitudes de onda del espectro visible; si la temperatura del filamento sigue creciendo, la cantidad de energía radiante aumenta y una mayor parte de ella se emite a longitudes de onda más cortas. Por encima de 700°C, una pequeña cantidad de la energía se encuentra comprendida en el intervalo de longitudes de onda largas (extremo rojo del espectro visible); nuestros ojos pueden detectar ya esta radiación, apareciendo el filamento de un color rojo oscuro. Si la temperatura se incrementa todavía más, una mayor parte de la energía cae en la región visi-

La energía radiativa emitida por una superficie negra aumenta con la temperatura; la potencia emisiva pasa por un valor máximo para una longitud de onda determinada que depende de la temperatura a que se encuentre; la longitud de onda disminuye cuando la temperatura de la superficie aumenta.

LEY DEL DESPLAZAMIENTO DE WIEN.- La longitud de onda a la cual la potencia emisiva del cuerpo negro alcanza un valor máximo para una temperatura dada, se deduce de la ley de Planck imponiendo la condición de máximo:

$$\frac{dE_b(T)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \right\}_{T=C_{te}} = 0$$

ble del espectro y por encima de los 1.300°C se incluyen todas las longitudes de onda visibles de modo que el filamento aparece al rojo blanco.

Un ejemplo de fuente energética a alta temperatura es el Sol; su superficie exterior posee una temperatura del orden de 5.800°K ; de acuerdo con la ley de Wien el valor de $\lambda_{\text{máx}}$ a esta temperatura es de $5,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, ó $0,52 \text{ }\mu\text{m}$, próximo al centro de la región visible.

El ojo humano no responde a la energía radiante fuera del intervalo visible, y sólo puede predecir el comportamiento superficial en un intervalo de longitudes de onda muy restringido; existen algunas superficies que se comportan como buenos absorbentes en el intervalo visible y, por tanto, aparecen de color oscuro a nuestros ojos; en cambio, su comportamiento puede modificarse en la zona del infrarrojo y ser aquí malos absorbentes. Por el contrario, existen superficies que son pobres absorbentes de radiación en el intervalo correspondiente al espectro visible y aparecen blancas a nuestra vista, mientras que son unos absorbentes excelentes a longitudes de onda fuera del intervalo del espectro visible. Un objeto se considera *cuerpo cuasiblanco* cuando refleja casi todas las radiaciones del espectro visible sin absorber prácticamente ninguna; un cuerpo negro absorbería todas las radiaciones del espectro visible y no reflejaría ninguna.

LEY DE STEFAN-BOLTZMAN.- La cantidad total de energía radiativa que por unidad de área emite una superficie a la temperatura absoluta T y a todas las longitudes de onda, se denomina poder emisivo total. Si la superficie corresponde a un cuerpo negro, el poder emisivo total viene dado por la integral de la distribución de Planck para todas las longitudes de onda:

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_b(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)} d\lambda = T^4$$

este resultado se conoce con el nombre de ley de Stefan-Boltzman, siendo σ la constante de Stefan-Boltzman de valor:

$$\sigma = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^4 \frac{1}{15} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^{\circ}\text{K}^4}$$

y las constantes C_1 y C_2 las de la ley de Planck, viniendo medida E_b en unidades de flujo térmico W/m^2 .

Como el valor de σ es muy pequeño, los efectos de la radiación a bajas temperaturas suelen ser despreciables; a la temperatura ambiente, del orden de 300°K , la potencia emisiva total de un cuerpo negro es aproximadamente de $460 \text{ W}/\text{m}^2$, que es del orden de la décima parte del flujo de calor transferido desde una superficie a un fluido por convección, cuando el coeficiente de transmisión convectiva del calor y la diferencia de temperatura toman unos valores bajos, del orden de $100 \text{ W}/\text{m}^2 \text{ }^{\circ}\text{K}$ y 50°K , respectivamente.

Por ello, a temperaturas bajas es justificable, en la mayoría de los casos, el despreciar los efectos radiativos. Sin embargo, su importancia es grande a altas temperaturas, ya que la potencia emisiva crece con la cuarta potencia de la temperatura absoluta.

FUNCIONES DE RADIACIÓN.- Si el poder emisor monocromático del cuerpo negro dado por la ley de Planck, se integra para todo el intervalo de longitudes de onda desde $\lambda = 0$ hasta $\lambda = \lambda_1$, el resultado es la energía radiativa total emitida por el cuerpo negro a la temperatura T entre las longitudes de onda 0 y λ_1 .

Tabla XIX.1.- Funciones de radiación del cuerpo negro

T	$\frac{E_b(0 \rightarrow T)}{T^4}$	T	$\frac{E_b(0 \rightarrow T)}{T^4}$	T	$\frac{E_b(0 \rightarrow T)}{T^4}$
0,2	3,41796e-26	4,2	0,516046	8,5	0,874666
0,4	1,86468e-12	4,4	0,548830	9,0	0,890090
0,6	9,29299e-8	4,6	0,579316	9,5	0,903147
0,8	0,0000164351	4,8	0,607597	10,0	0,914263
1,0	0,00032078	5,0	0,633786	10,5	0,923775
1,2	0,00213431	5,2	0,658011	11,0	0,931956
1,4	0,00779084	5,4	0,680402	11,5	0,939027
1,6	0,0197204	5,6	0,701090	12,0	0,945167
1,8	0,0393449	5,8	0,720203	13,0	0,955210
2,0	0,0667347	6,0	0,737864	14,0	0,962970
2,2	0,100897	6,2	0,754187	15,0	0,969056
2,4	0,140268	6,4	0,769232	16,0	0,973890
2,6	0,183135	6,6	0,783248	18,0	0,980939
2,8	0,227908	6,8	0,796180	20,0	0,985683
3,0	0,273252	7,0	0,808160	25,0	0,992299
3,2	0,318124	7,2	0,819270	30,0	0,995427
3,4	0,361760	7,4	0,829580	40,0	0,998057
3,6	0,403633	7,6	0,839157	50,0	0,999045
3,8	0,443411	7,8	0,848060	75,0	0,999807
4,0	0,480907	8,0	0,856344	100,0	1

Al realizar la integración se demuestra que el resultado es sólo función del producto $\lambda_1 T$, es decir:

$$\int_0^{\lambda_1} E_b(\lambda, T) d\lambda = E_b(0 \rightarrow \lambda_1 T)$$

Para determinar la cantidad total de energía radiativa emitida entre las longitudes de onda λ_1 y λ_2 para una superficie negra a la temperatura T basta con hallar la diferencia entre las integrales:

$$\int_0^{\lambda_2} E_b(\lambda, T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_b(\lambda, T) d\lambda = E_b(0 \rightarrow \lambda_2 T) - E_b(0 \rightarrow \lambda_1 T)$$

Si se quiere conocer el tanto por ciento de la energía total del cuerpo negro emitida en todo el espectro, que se corresponda, por ejemplo, con un intervalo de longitudes de onda, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, se divide la ecuación anterior por:

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_b(\lambda, T) d\lambda = T^4$$

por lo que: *El porcentaje de la energía radiativa del cuerpo negro correspondiente al intervalo de longitudes de onda $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, es igual a:*

$$\frac{E_b(\lambda_1, \lambda_2, T) - E_b(\lambda_1, \lambda_1, T)}{T^4}$$

Los valores de la expresión $\frac{E_b(\lambda_1, \lambda_2, T)}{T^4}$ están recogidos en la Tabla XVIII.1, en función del producto λT en unidades SI; se conocen como Funciones de Radiación.

XIX.3.- TRANSMISIÓN DE CALOR POR RADIACIÓN

La energía transmitida en forma de calor se hace mediante ondas electromagnéticas a la velocidad de la luz; la energía que abandona una superficie en forma de calor, por radiación, depende de su temperatura absoluta y de la naturaleza de la superficie. Un radiador perfecto o cuerpo negro, emite un flujo de energía por radiación a través de su superficie, dada por la ecuación:

$$Q_r = A T^4 = A E_b$$

siendo: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, la constante de Stefan -Boltzman

A el área superficial en m^2

T es la temperatura superficial en $^\circ\text{K}$

Esta ecuación dice que *cualquier superficie irradia calor proporcionalmente a la cuarta potencia de su temperatura absoluta*; aunque la emisión es independiente del medio exterior, la medida de la energía radiante requiere de una temperatura de referencia, como puede ser la de otro sistema que reciba la energía transferida, y así poder obtener a partir de esta referencia la transferencia neta de energía radiante.

Si un *cuerpo negro* A_1 irradia a un recinto A_2 que le rodea completamente, y que se puede considerar como una superficie negra, la transferencia neta de energía radiante, viene dada por:

$$Q_r = A_1 (T_1^4 - T_2^4) = A_1 (E_{b1} - E_{b2})$$

siendo A_1 el área superficial del cuerpo negro emisor, T_1 la temperatura del cuerpo negro emisor y T_2 la temperatura del recinto, ambas en $^\circ\text{K}$.

Si un cuerpo negro A_1 irradia a otro cuerpo negro A_2 , la transferencia neta de energía radiante viene dada por:

$$Q_r = A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que F_{1-2} se conoce como *factor de forma* o factor de visión, que modifica la ecuación de los radiadores perfectos teniendo en cuenta las geometrías relativas de los cuerpos.

Los cuerpos reales no cumplen las especificaciones de un radiador ideal, sino que emiten radiación a un ritmo inferior al de los cuerpos negros. Si a una temperatura igual a la de un cuerpo negro emiten una fracción constante de la emisión correspondiente a un cuerpo negro, para cada longitud de onda, se denominan cuerpos grises.

Un *cuerpo gris* emite radiación según la expresión:

$$q_r = A_1 \epsilon_1 T_1^4$$

La energía radiante neta transferida a la temperatura T_1 a un cuerpo negro que lo rodea, (medio exterior), a la temperatura T_2 es:

$$q_r = A_1 \epsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que el subíndice 1 se corresponde con el cuerpo gris, siendo ϵ_1 la emitancia del mismo, igual a la relación entre la emisión de la superficie gris y la emisión de un radiador perfecto a la misma temperatura.

Si ninguno de los dos cuerpos es un radiador perfecto, pero existe entre los mismos una determinada relación geométrica, la energía radiante neta transferida entre ellos viene dado por:

$$q_r = A_1 F_{12}^* (E_{b1} - E_{b2}) = A_1 F_{12}^* (T_1^4 - T_2^4)$$

en la que F_{12}^* es un factor de forma complejo que depende de las emitancias y de las geometrías relativas de los cuerpos.

XIX.4.- FACTOR DE FORMA DE LA RADIACIÓN

La transferencia de calor por radiación entre dos superficies cualquiera, se puede calcular determinando el porcentaje de energía radiante total que abandona una superficie q_1 semiesfera y llega directamente a una segunda superficie.

El factor de forma F_{12} se puede definir como la fracción de energía radiante total que abandonando la superficie A_1 , q_1 semiesfera, llega directamente a la superficie A_2 , q_1 2.

FACTOR DE FORMA $dF_{dA1-dA2}$ ENTRE DOS SUPERFICIES INFINITESIMALES dA_1 y dA_2 .

Para deducir una expresión del factor de forma $dF_{dA1-dA2}$:

$$dF_{dA1-dA2} = \frac{dq_{dA1-dA2}}{dq_{dA1 \text{ semiesfera}}}$$

se puede partir de la Fig XIX.2, en la que dA_1 es la superficie emisora, dA_2 es la superficie receptora y dw_{12} el ángulo sólido subtendido por el área dA_2 desde dA_1 .

La energía radiante $dq_{dA1-dA2}$ que se emite desde dA_1 y alcanza dA_2 , viene dada por:

$$dq_{dA_1 \rightarrow dA_2} = dA_1 I_1 \cos \theta_1 dw_{12} = \left| \frac{dw_{12}}{r^2} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} \right| = \frac{I_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2} dA_1$$

en la que, $I_1 \cos \theta_1$, es la intensidad de la radiación contenida en el ángulo sólido dw
 r , es la distancia entre las dos superficies dA_1 y dA_2

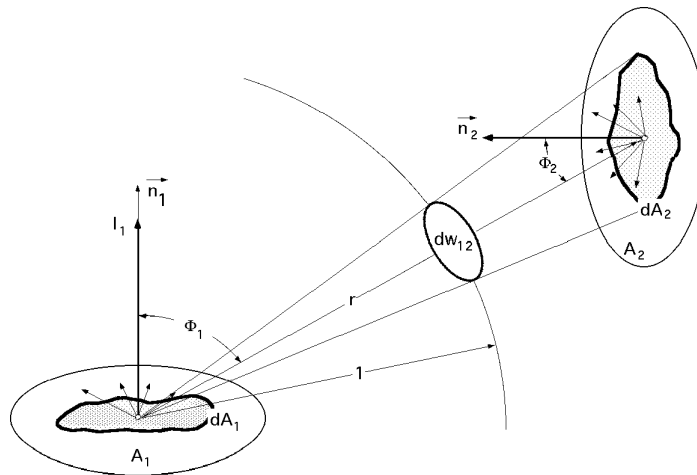


Fig XIX.2.- Nomenclatura para el cálculo de la intensidad de la radiación

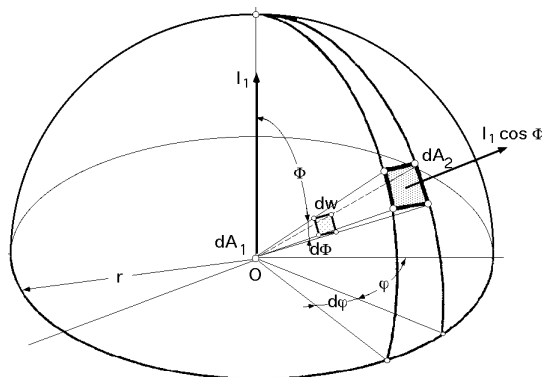


Fig XIX.3.- Nomenclatura para la definición del ángulo sólido dw en términos de ϕ y ψ

Si se supone que la superficie emisora es difusa, la intensidad de la radiación emitida por dA_1 es independiente de la dirección. La hipótesis de superficie difusa simplifica el problema por cuanto los factores de forma son función, únicamente, de la geometría y no de la intensidad directa de la radiación.

El flujo total que abandona dA_1 y que incide sobre una semiesfera que contenga a dA_2 y cuyo centro sea O en dA_1 , se calcula a partir del ángulo sólido definido según la Fig XIX.3, en la forma:

$$dq_{dA_1 \rightarrow \text{semiesfera}} = Eb_1 dA_1$$

El poder emisivo E_{b1} del cuerpo negro emitido por unidad de superficie, es de la forma:

$$E_{b1} = \int I_1 \cos \theta dw = \int I_1 \cos \theta \left(\frac{dA_2}{r^2} \right) = \int \frac{(r d\phi) (r d\psi \sin \phi)}{r^2} = \int \sin \phi d\phi d\psi =$$

$$= I_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 = I_1 \int_{\theta_1=0}^{\pi/2} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 = I_1$$

por lo que una superficie i se puede considerar como superficie elemental si se cumple que:

$$\frac{dA_i}{r^2} \ll 1$$

El flujo total emitido por dA_1 es:

$$dq_{dA_1 \text{ semiesfera}} = E_{b1} dA_1 = I_1 dA_1$$

El factor de forma de la radiación, $dF_{dA_1 \rightarrow dA_2}$ o factor de visión elemental, entre dos superficies elementales dA_1 y dA_2 es, por definición, el cociente entre lo que se recibe en dA_2 y lo que se emite en dA_1 , es decir:

$$dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} = \frac{dq_{dA_1 \rightarrow dA_2}}{dq_{dA_1 \text{ semiesfera}}} = \frac{I_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{dA_1 dA_2}{r^2}}{I_1 dA_1} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2}$$

En la misma forma se puede poner:

$$dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} = \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1 dA_1}{r^2}$$

y, por lo tanto, dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$dF_{dA_1 \rightarrow dA_2} dA_1 = dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2$$

que se conoce como *regla de la reciprocidad*.

FACTOR DE FORMA PARA UNA SUPERFICIE FINITA Y OTRA INFINITESIMAL- Muy pocas veces se determina el intercambio radiativo entre dos superficies infinitesimales; sin embargo, sí es bastante usual el intercambio entre una superficie muy pequeña dA_1 frente a una muy grande A_2 ; el factor de forma es:

$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = F_{A_2 \leftarrow dA_1} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2}$$

Por otro lado, si q_2 es el flujo térmico que sale de la superficie A_2 , la fracción de esta energía radiante que llega a dA_1 es:

$$q_2 A_2 F_{A_2 \rightarrow dA_1} = q_2 \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2$$

y el factor de forma $F_{A_2 \rightarrow A_1}$ es:

$$F_{A_2 \rightarrow A_1} = \frac{q_2 \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2}{q_2 A_2} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow dA_1} dA_2 = \frac{dA_1}{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_2}{r^2}$$

Dividiendo los factores de forma miembro a miembro se encuentra:

$$\frac{F_{dA_1 \rightarrow A_2}}{F_{A_2 \rightarrow dA_1}} = \frac{A_2}{dA_1} \quad dA_1 F_{dA_1 \rightarrow A_2} = A_2 F_{A_2 \rightarrow dA_1}$$

FACTOR DE FORMA PARA DOS SUPERFICIES FINITAS.- Si a continuación se considera que las dos superficies A_1 y A_2 son finitas y que el flujo térmico q_1 que sale de la superficie A_1 es uniforme en toda la superficie, la energía radiante que sale de A_1 y llega directamente a A_2 es:

$$q_1 A_1 F_{A_1 \rightarrow A_2} = q_1 \int_{A_1} dF_{dA_1 \rightarrow A_2} dA_1$$

ya que si la energía total radiante que sale de A_1 hacia el espacio hemisférico viene dada por $q_1 A_1$ resulta que $q_1 A_1 F_{A_1 \rightarrow A_2}$ es la energía que llega a la superficie A_2 por lo que el factor de forma $F_{A_1 \rightarrow A_2}$ es:

$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{q_1 \int_{A_1} dF_{dA_1 \rightarrow A_2} dA_1}{q_1 A_1} = \frac{\int_{A_1} dF_{dA_1 \rightarrow A_2} dA_1}{A_1} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 dA_1 dA_2}{r^2}$$

expresiones todas ellas del factor de forma restringidas a superficies emisoras difusas.

Si los subíndices A_1 y A_2 se intercambian, de forma que la superficie emisora sea la A_2 y la receptora la A_1 , se tiene:

$$F_{A_2 \rightarrow A_1} = \frac{q_2 \int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow A_1} dA_2}{q_2 A_2} = \frac{\int_{A_2} dF_{dA_2 \rightarrow A_1} dA_2}{A_2} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_1 dA_2 dA_1}{r^2}$$

Dividiéndolas miembro a miembro resulta:

$$A_1 F_{A_1 \rightarrow A_2} = A_2 F_{A_2 \rightarrow A_1} \quad ; \quad A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$$

Para dos superficies genéricas A_i y A_j se tiene: $A_i F_{i \rightarrow j} = A_j F_{j \rightarrow i}$

PROPIEDADES DE LOS FACTORES DE FORMA.- Si las superficies forman un recinto, (por ejemplo 3 superficies), la energía emitida por la superficie A_1 tiene que incidir directamente sobre cada una de las tres superficies que conforman el recinto, es decir:

$$E_{\text{emitida superf (1)}} = E_{\text{que llega a la superf (1)}} + E_{\text{que llega a la superf (2)}} + E_{\text{que llega a la superf (3)}}$$

y dividiéndolas por el primer miembro de la ecuación, y teniendo en cuenta que la definición del factor de forma F es:

$$F = \frac{\text{Energía interceptada}}{\text{Energía emitida}}$$

se encuentra que: $1 = F_{11} + F_{12} + F_{13}$

expresión que se conoce como *relación del recinto o de la sumatoria*.

Para n superficies que conforman el recinto se tiene: $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$, con, $i = 1, 2, \dots, n$

El factor F_{ii} se tiene que incluir en el recinto siempre que la superficie A_i sea cóncava, ya que una superficie cóncava se puede ver a sí misma y, por lo tanto, una fracción de la energía que emite incidirá sobre alguna parte de ella.

Para superficies planas o convexas: $F_{ii} = 0$

Se han evaluado los factores de forma de radiación para muchas superficies que aparecen en ingeniería, cuya casuística se presenta en forma gráfica al final del capítulo. Las reglas anteriores de reciprocidad y de la sumatoria son útiles porque proporcionan relaciones simples que permiten evaluar los factores de forma de un recinto, si se conocen los demás; para determinar todos los factores de forma posibles de un recinto, no se necesita calcular cada uno de ellos directamente, sino que se deben utilizar siempre las relaciones de reciprocidad y sumatoria.

Si representamos todos los factores de forma posibles de un recinto de n superficies mediante la matriz:

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \dots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \dots & F_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix}$$

se observa que si el recinto tiene n superficies, hay que determinar n^2 factores de forma.

La regla de la reciprocidad proporciona las siguientes relaciones adicionales: $\sum_{i=1}^n F_{ij} = \sum_{j=1}^n F_{ji} = \frac{n(n-1)}{2!}$

La regla de la sumatoria proporciona otras n relaciones adicionales.

El número total de factores de forma que se deben calcular para un recinto de n superficies es:

$$n^2 - \left\{ \frac{n(n-1)}{2!} + n \right\} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Si las superficies son convexas o planas, desaparecerán n factores de forma de una superficie con respecto a sí misma, por lo que el número total de factores de visión que se deben calcular es:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

XIX.5.- ÁLGEBRA DE FACTORES DE FORMA

Los diagramas de factores de forma se pueden utilizar para la determinación de valores en geometrías de orden superior utilizando un método denominado álgebra de factores de forma. La distribución geométrica se descompone por medio del principio de la adición y sustracción aritmética de los factores de visión en distribuciones más sencillas para las que ya existen diagramas y ábacos del factor de forma.

a) Se desea evaluar el factor de forma F_{12} de la composición representada en la Fig XIX.5; como el álgebra de factores de forma es un simple enunciado del Primer Principio de la Termodinámica, implica que la energía que abandona la superficie A_1 y llega a A_3 tiene que ser igual a la suma de las que llegan a A_a y A_2 .

Al ser $A_3 = A_a + A_2$ la conservación de la energía requiere:

$$A_1 F_{13} = A_1 F_{1a} + A_1 F_{12} \quad ; \quad F_{13} = F_{1a} + F_{12} \quad ; \quad F_{12} = F_{13} - F_{1a}$$

en la que F_{13} y F_{1a} vienen tabulados y por lo tanto F_{12} se puede determinar fácilmente.

Aplicando la recíproca se tiene:

$$A_3 F_{31} = A_a F_{a1} + A_2 F_{21} = A_1 F_{13} \quad ; \quad F_{21} = F_{31} \frac{A_3}{A_2} - F_{a1} \frac{A_a}{A_2}$$

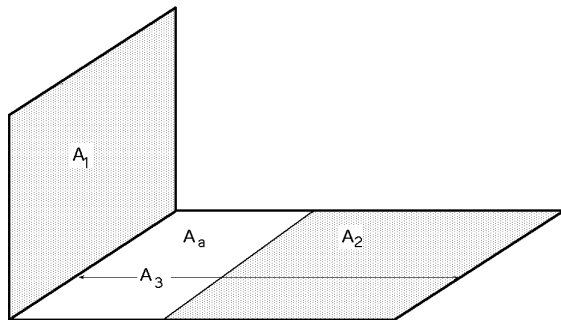


Fig XIX.5

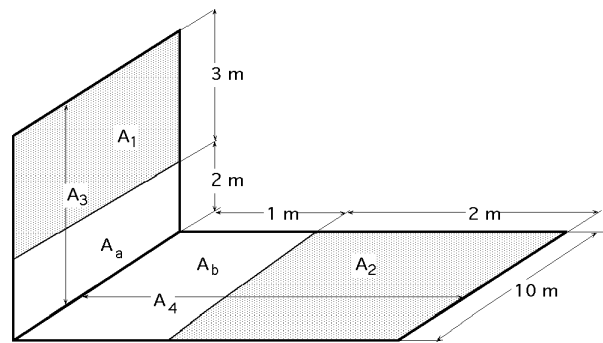


Fig XIX.6

b) Para evaluar el factor de forma F_{12} para la geometría de la Fig XIX.6, en la que las superficies difusas son:

$$A_3 = A_1 + A_a \quad ; \quad A_4 = A_b + A_2$$

aplicando lo anteriormente expuesto resulta:

$$A_3 F_{34} = A_a F_{ab} + A_a F_{a2} + A_1 F_{1b} + A_1 F_{12}$$

F_{34} y F_{ab} se calculan mediante las gráficas indicadas anteriormente:

$$A_3 F_{3b} = A_a F_{ab} + A_1 F_{1b} \quad ; \quad F_{1b} = \frac{A_3}{A_1} F_{3b} - \frac{A_a}{A_1} F_{ab}$$

$$A_a F_{a4} = A_a F_{ab} + A_a F_{a2} \quad ; \quad F_{a2} = F_{a4} - F_{ab}$$

Combinando estas tres ecuaciones y despejando F_{12} se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{A_1} (A_3 F_{34} - A_a F_{ab} - A_a F_{a2} - A_1 F_{1b}) = \\ &= \frac{1}{A_1} (A_3 F_{34} - A_3 F_{3b} - A_a F_{a2}) = \frac{1}{A_1} (A_3 F_{34} - A_3 F_{3b} - A_a F_{a4} + A_a F_{ab}) \end{aligned}$$

Con los datos numéricos de la Fig XIX.6 los valores de estos factores de forma, son:

$$F_{34} = 0,19 \quad ; \quad F_{a4} = 0,32 \quad ; \quad F_{3b} = 0,08 \quad ; \quad F_{ab} = 0,18$$

$$F_{12} = \frac{(50 \times 0,19) - (50 \times 0,08) - (20 \times 0,32) + (20 \times 0,18)}{30} = 0,097$$

y el 9,7% de la energía difusa que deja la superficie A_1 incide directamente sobre la superficie A_2 .

c) Como la reciprocidad relaciona áreas y factores de visión entre dos superficies que intercambian radiación, vamos a considerar el ejemplo de la Fig XIX.7, en la que se han dibujado cuatro rectángulos de superficie A_1 , A_2 , A_3 y A_4 .

En base a la reciprocidad se tiene:

$$\begin{aligned} A_1 F_{14} &= A_4 F_{41} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_4 dA_1 dA_4}{r^2} = \\ &= \int_0^b \int_0^a \int_0^d \int_0^{a+c} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_4}{r^2} dx dy dx dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 F_{32} &= A_2 F_{23} = \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3 dA_2 dA_3}{r'^2} = \\ &= \int_0^d \int_0^a \int_0^b \int_0^{a+c} \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3}{r'^2} dx dy dx dz \end{aligned}$$

Se observa que los límites de integración en ambos casos son iguales, por lo que existirán pares de elementos en ambas configuraciones con los mismos valores de r , r' y de ángulos θ , de lo que se deduce:

$$A_1 F_{14} = A_2 F_{23} = A_3 F_{32} = A_4 F_{41}$$

y como:

$$(A_3 + A_4) F_{(3,4)-(1,2)} = A_3 F_{3-1} + A_3 F_{3-2} + A_4 F_{4-1} + A_4 F_{4-2} = A_3 F_{3-1} + 2 A_4 F_{4-1} + A_4 F_{4-2}$$

$$F_{4-1} = \frac{(A_3 + A_4) F_{(3,4)-(1,2)} - A_3 F_{3-1} - A_4 F_{4-2}}{2 A_4}$$

y el factor de visión entre los rectángulos A_1 y A_4 se puede calcular en función de los factores de visión propios de rectángulos perpendiculares con un lado común.

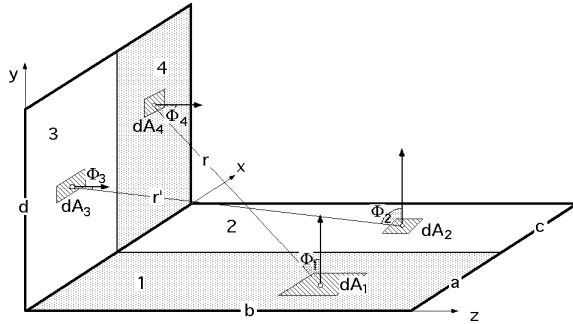


Fig XIX.7

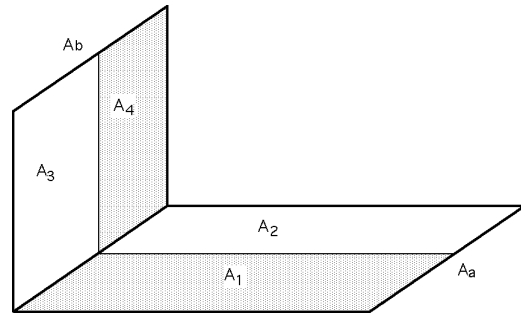


Fig XIX.8

Para evaluar el factor de forma F_{14} en la configuración (A_1, A_4) que se muestra en la Fig XIX.8, se definen las áreas imaginarias A_2 y A_3 , pudiéndose poner:

$$A_1 F_{14} = A_a F_{ab} - A_1 F_{13} - A_2 F_{24} - A_2 F_{23}$$

El factor de forma F_{23} es desconocido, observándose es de una configuración similar a la del F_{14} ; como sabemos que $A_1 F_{14} = A_2 F_{23}$ se obtiene F_{14} en la forma:

$$F_{14} = \frac{A_a F_{ab} - A_1 F_{13} - A_2 F_{24}}{2 A_1}$$

en la que sólo intervienen factores de forma del tipo de los calculados en la Fig XIX.5.

ELIMINACIÓN DE SUPERFICIES CÓNCAVAS..- La cara superior radiante A_1 de la Fig XIX.9 es cóncava, luego presenta con respecto a sí misma un factor de visión distinto de cero. Si sobre esta configuración inicial imaginamos una nueva superficie A_{1*} resultante de la eliminación de concavidades de la original, o lo que es lo mismo, formada por la superficie plana creada al tensar A_1 , superficie que no se ve a sí misma, se puede poner teniendo en cuenta la reciprocidad y la sumatoria:

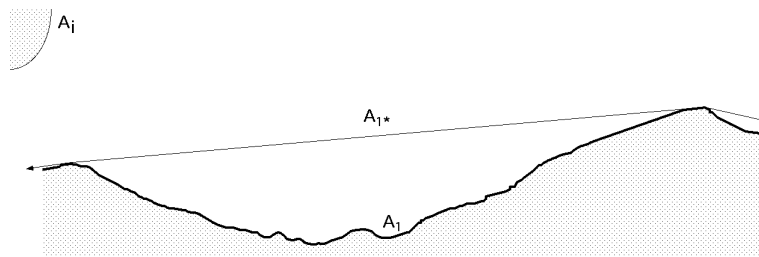


Fig XIX.9

$$A_1 F_{11*} = A_{1*} F_{1*1} = \left| \begin{array}{l} F_{11} + F_{11*} = 1 \\ F_{1*1} + F_{1*1*} = 1 \quad ; \quad F_{1*1*} = 0 \quad ; \quad F_{1*1} = 1 \end{array} \right| = A_{1*}$$

$$F_{11*} = \frac{A_{1*}}{A_1} \quad ; \quad F_{11} = 1 - \frac{A_{1*}}{A_1}$$

La ecuación:

$$A_1 F_{11*} = A_{1*} \quad ; \quad A_1 F_{11*} E_{b1} = A_{1*} E_{b1} = Q_r$$

indica que la radiación emitida por una superficie cóncava equivale a la que emitiría la superficie mínima obtenida, al reemplazar las concavidades por superficies planas, supuestas a la misma temperatura. El hecho de sustituir el área cóncava A_1 por el área plana A_{1*} no modifica los factores de visión del recinto respecto a otra superficie cualquiera i ; por lo tanto, los F_{ij} para todo $i = 1$ y $j = 1$, ó 1^* se mantienen igual antes y después de la sustitución de A_1 por A_{1*} .

A su vez, para las superficies A_1 y A_i se tiene:

$$\sum_{i=1}^n F_{ij} = 1 \quad ; \quad \begin{array}{l} F_{ii} + F_{i1} = 1 \\ F_{ii} + F_{i1*} = 1 \end{array} \quad F_{i1} = F_{i1*} \quad ; \quad A_i F_{i1} = A_i F_{i1*} \quad \text{Recíproca} \quad A_1 F_{1i} = A_{1*} F_{1*i}$$

que indica que en el recinto, a efectos de cálculo, es válida la sustitución del área A_1 por su área plana A_{1*} .

FACTORES DE FORMA PARA TRES SUPERFICIES CONVEXAS GENERADAS A LO LARGO DE UNA RECTA.- Vamos a considerar un recinto formado por tres superficies planas o convexas A_1 , A_2 y A_3 , Fig XIX.10. Ninguna de las superficies tiene una curvatura positiva en la dirección de su radiación por lo que sólo pueden verse desde cada una de las otras dos; por lo tanto se puede poner:

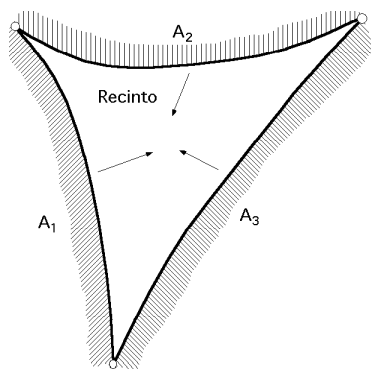


Fig XIX.10.- Recinto de tres superficies convexas

$$F_{12} + F_{13} = 1 \quad ; \quad F_{11} = 0$$

$$F_{21} + F_{23} = 1 \quad ; \quad F_{22} = 0$$

$$F_{31} + F_{32} = 1 \quad ; \quad F_{33} = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por A_1 , la segunda por A_2 y la tercera por A_3 , y teniendo en cuenta las relaciones recíprocas correspondientes, se reduce el número de incógnitas de 6 a 3, resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_1 F_{12} + A_1 F_{13} = A_1 \quad ; \quad A_1 F_{12} + A_1 F_{13} = A_1$$

$$A_2 F_{21} + A_2 F_{23} = A_2 \quad ; \quad A_1 F_{12} + A_2 F_{23} = A_2$$

$$A_3 F_{31} + A_3 F_{32} = A_3 \quad ; \quad A_1 F_{13} + A_2 F_{23} = A_3$$

de las que se obtienen los factores de forma:

$$F_{12} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2 A_1} ; \quad F_{13} = \frac{A_1 + A_3 - A_2}{2 A_1} ; \quad F_{23} = \frac{A_2 + A_3 - A_1}{2 A_2}$$

MÉTODO DE LAS CUERDAS CRUZADAS.- Si se considera un recinto más complejo, cuya sección recta viene representada en la Fig XIX.11, y se desea determinar el intercambio de energía radiante entre las superficies A_1 y A_2 o lo que es lo mismo el producto $A_1 F_{12}$ se recurre a la siguiente construcción:

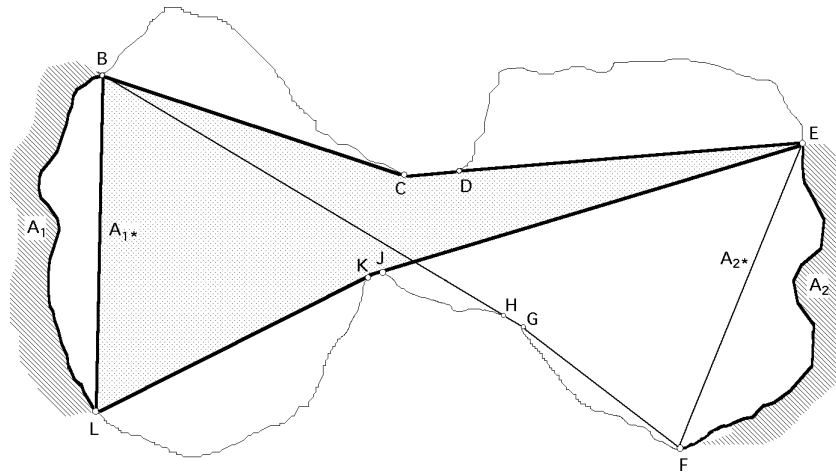


Fig XIX.11

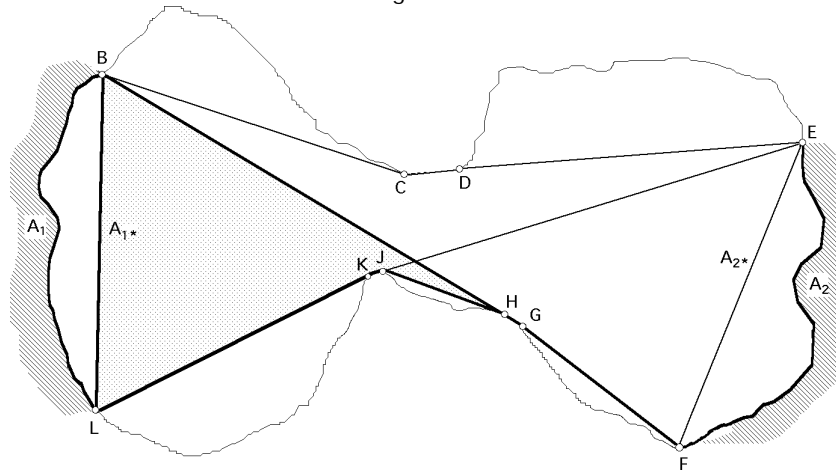


Fig XIX.12

Entre los bordes B y L de A_1 se tensa una cuerda que representa la sección del área efectiva A_{1*} ; a continuación se traza la línea de longitud mínima por el interior del recinto entre los bordes B de A_1 y E de A_2 , dando lugar a la línea {BCDE}; haciendo lo mismo entre los bordes L de A_1 y F de A_2 se obtiene la línea {LKJHGF}. El intercambio directo de energía radiante entre las superficies A_1 y A_2 es el mismo, prescindiendo de si ambas superficies están unidas por las líneas (BE) y (LF), o por las superficies primitivas, ya que ninguna de las partes que A_1 ve de A_2 , o a la inversa, están afectadas por esta situación. A continuación se trazan las líneas de longitud mínima entre B y F, línea {BHGF} y entre L y E, línea {LKJE}; si se considera un recinto formado por las tres superfi-

cies A_{1*} , {BCDE} y {EJKL}, Fig XIX.12, y por analogía con el caso anterior se tiene:

$$A_{1*} F_{1*-(BCDE)} = \frac{A_{1*} + (BCDE) - (LKJE)}{2}$$

en donde (BCDE) representa un área, que es el producto de la línea (BCDE) por la longitud de la generatriz (normal al plano del dibujo).

De igual forma, para el recinto formado por la superficie A_{1*} , (BHGF) y (FGHJKL) se tiene:

$$A_{1*} F_{1*-(FGHJKL)} = \frac{A_{1*} + (FGHJKL) - (BHGF)}{2}$$

De la Fig XIX.11 se deduce que desde A_{1*} se pueden ver no sólo A_1 sino también (BCDE), (FGHJKL) y A_2 ; aplicando la propiedad de la sumatoria de los factores de forma:

$$F_{1*-(BCDE)} + F_{1*-(FGHJKL)} + F_{1*-2} + F_{1*-1*} = F_{1*-1} = 1, \text{ con, } F_{1*-1*} = 0$$

Multiplicándola por A_{1*} y teniendo en cuenta que: $A_{1*} F_{1*-2} = A_1 F_{1-2}$, resulta:

$$A_{1*} F_{1*-(BCDE)} + A_{1*} F_{1*-(FGHJKL)} + A_{1*} F_{1*-2} = A_{1*}$$

Sustituyendo los valores anteriores se obtiene:

$$A_{1*} F_{1*-(BCDE)} + A_{1*} F_{1*-(FGHJKL)} + A_1 F_{1-2} = A_{1*}$$

$$\begin{aligned} A_1 F_{1-2} &= A_{1*} - A_{1*} F_{1*-(BCDE)} - A_{1*} F_{1*-(FGHJKL)} = A_{1*} - \frac{A_{1*} + (BCDE) - (LKJE)}{2} - \frac{A_{1*} + (FGHJKL) - (BHGF)}{2} = \\ &= \frac{(LKJE) - (BCDE)}{2} - \frac{(FGHJKL) - (BHGF)}{2} = \frac{\{(LKJE) + (BHGF)\} - \{(BCDE) + (FGHJKL)\}}{2} \end{aligned}$$

por lo que el producto AF para el intercambio radiativo entre superficies de este tipo, por unidad de longitud normal al plano del dibujo, es la suma de las longitudes de las dos cuerdas que se cruzan, tensadas entre los extremos que representan las superficies, menos la suma de las longitudes de

las dos cuerdas que no se cruzan, tensadas asimismo entre las superficies, y todo ello dividido por dos, (*método de Hottel*).

Para el caso que se presenta en la Fig XIX.13 en el que se tienen dos superficies bidimensionales de extensión en una dirección, siendo todas las secciones transversales normales a la dirección infinita idénticas, se obtiene para valor de F_{12} :

$$F_{12} = \frac{(ad + cb) - (ab + cd)}{2 A_1}$$

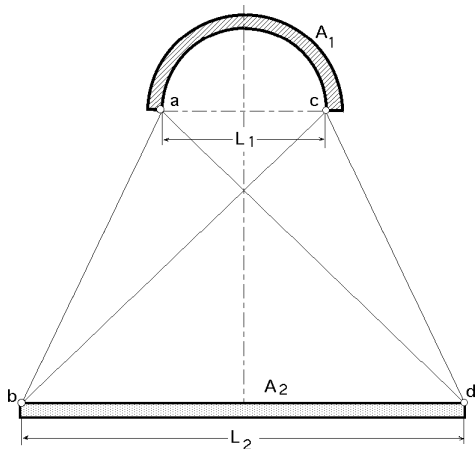
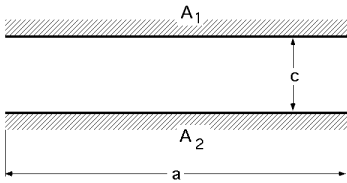


Fig XIX.13.- Método de las cuerdas cruzadas

es decir, el factor de forma F_{12} es igual a la suma de las longitudes de las cuerdas que se cruzan, extendidas entre los extremos de las dos superficies, menos la suma de las longitudes de las cuerdas no cruzadas, dividido por el doble de la longitud A_1 .

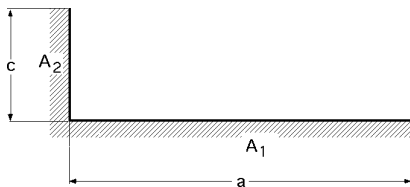
FACTORES DE FORMA DE RADIACIÓN (CONFIGURACIONES EN 2 DIMENSIONES)

1.- PLACAS PARALELAS DEL MISMO ANCHO



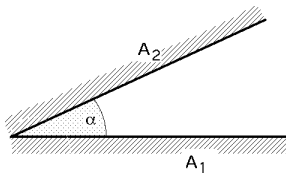
$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} - \frac{c}{a}$$

2.- PLACAS CONTIGUAS LARGAS



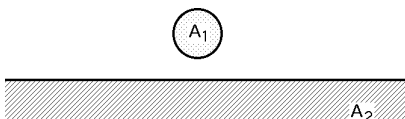
$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{c}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} \right\}$$

3.- CUÑA SIMÉTRICA LARGA



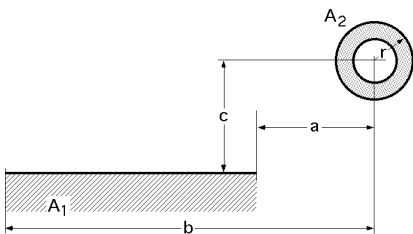
$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = 1 - \frac{\sin \alpha}{2}$$

4.- CILINDRO LARGO PARALELO, O ESFERA, RESPECTO A UNA GRAN SUPERFICIE PLANA



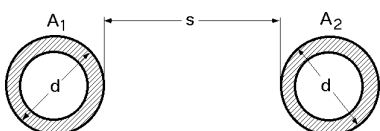
$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2}$$

5.- CILINDRO LARGO PARALELO A UNA PLACA



$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{r}{b-a} \left(\arctan \frac{b}{c} - \arctan \frac{a}{c} \right)$$

6.- CILINDROS ADYACENTES LARGOS Y PARALELOS DE DIÁMETROS IGUALES



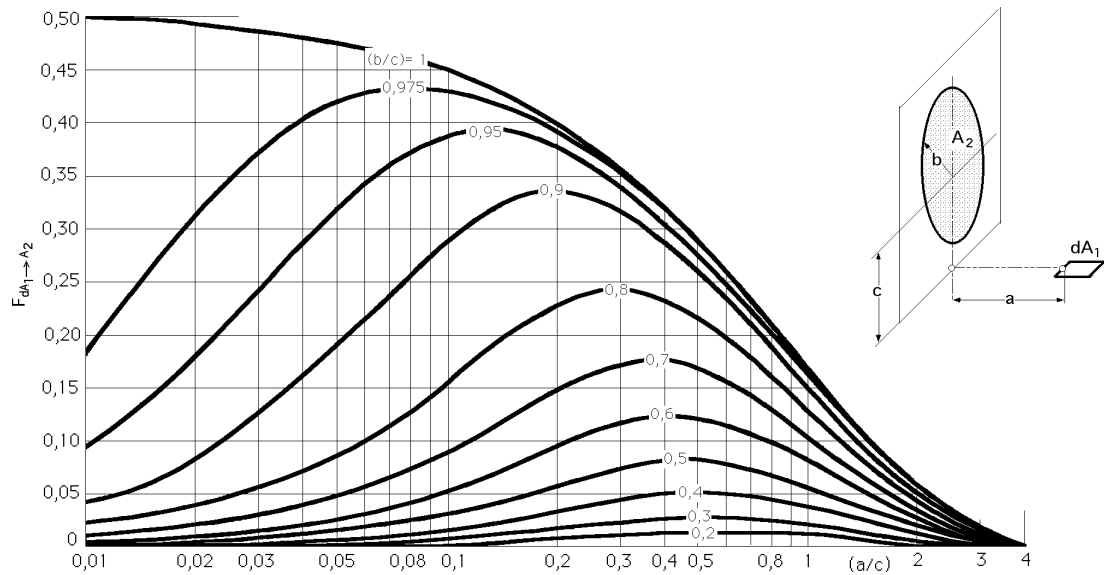
$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{X^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{X} - X \right), \text{ con: } X = 1 + \frac{s}{d}$$

FACTORES DE FORMA DE RADIACIÓN (CONFIGURACIONES EN 3 DIMENSIONES)

1.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 Y DISCO PLANO A_2

El disco plano A_2 es perpendicular al plano que contiene a dA_1

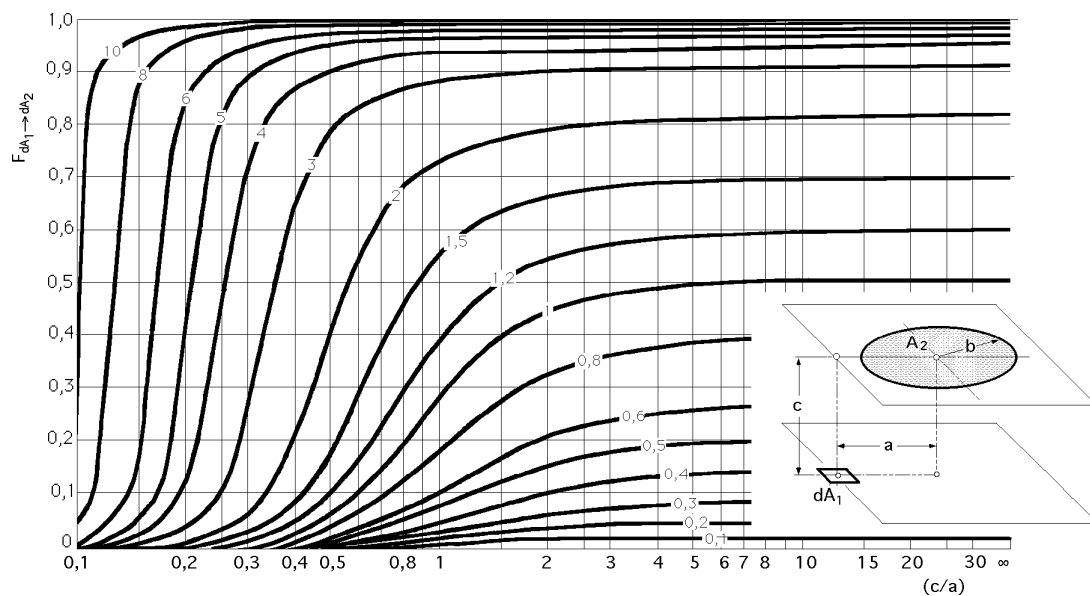
$$X = \frac{a}{c} ; Y = \frac{b}{c} ; F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{X}{2} \left\{ \frac{1 + X^2 + Y^2}{\sqrt{(1 + X^2 + Y^2)^2 - 4 Y^2}} - 1 \right\}$$



2.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 Y DISCO PLANO A_2

El disco plano A_2 es paralelo al plano que contiene a dA_1

$$X = \frac{c}{a} ; Y = \frac{b}{c} ; Z = 1 + (1 + Y^2) X^2 ; F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{Z - 2 X^2 Y^2}{\sqrt{Z^2 - 4 Y^2 X^2}} \right\}$$

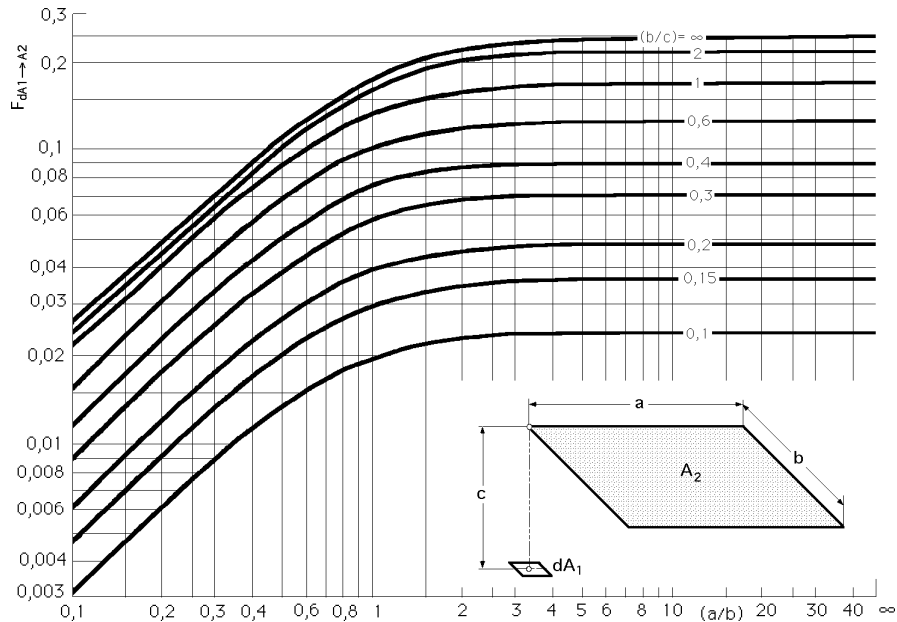


3.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 PARALELA A UN RECTÁNGULO A_2

Uno de los ángulos del rectángulo A_2 se encuentra en la normal a dA_1

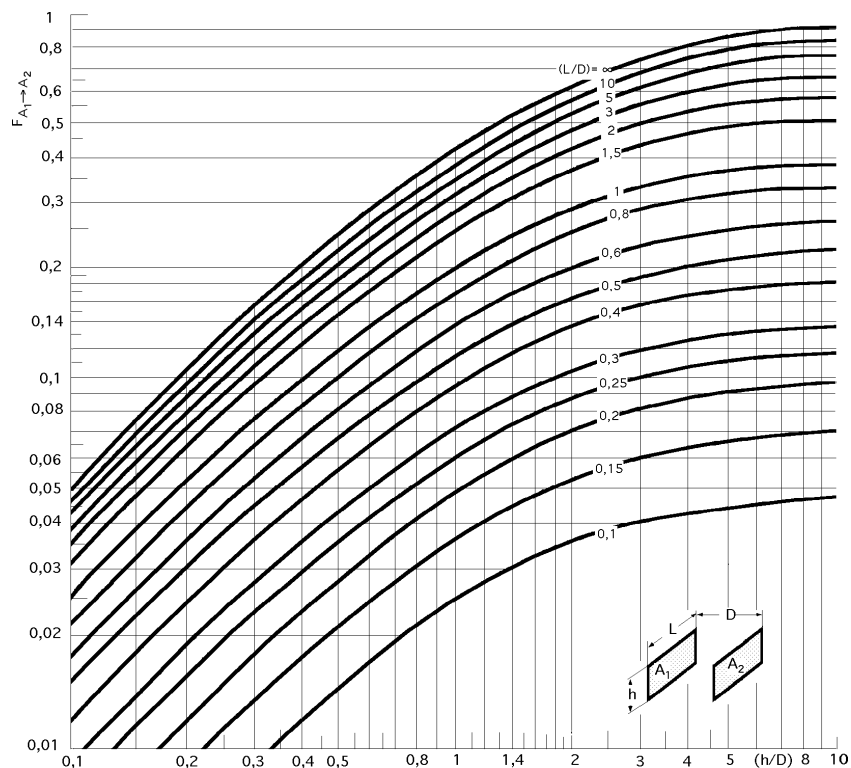
$$X = \frac{a}{c} \quad ; \quad Y = \frac{b}{c} \quad ; \quad F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{X}{\sqrt{1+X^2}} \arctg \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} + \frac{Y}{\sqrt{1+Y^2}} \arctg \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right\}$$

$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} \arcsen \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \arcsen \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right\}$$



4.- DOS RECTÁNGULOS IGUALES Y PARALELOS, $X = \frac{L}{D}$, $Y = \frac{h}{D}$

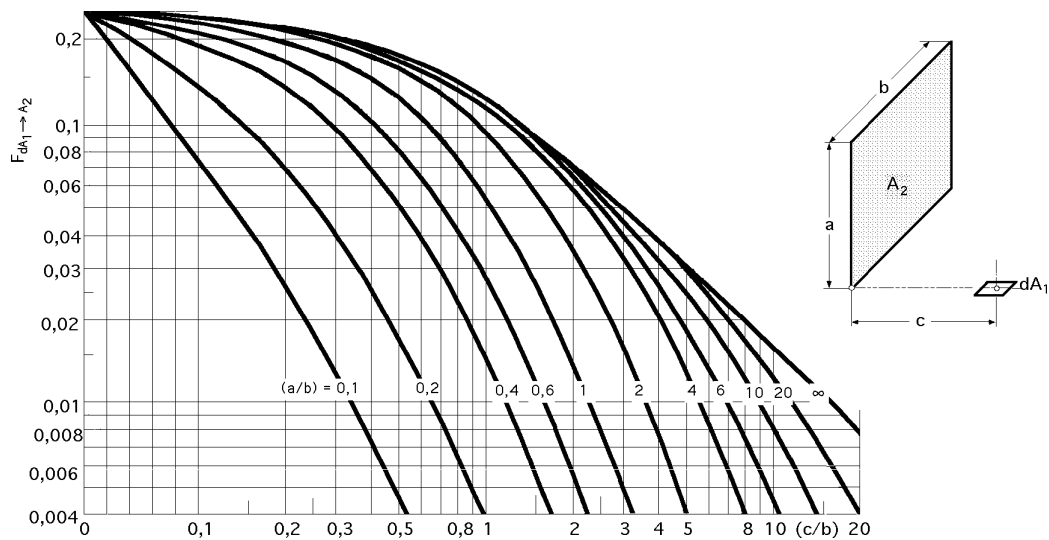
$$F_{A_1 \rightarrow A_2} \left(-\frac{XY}{2} \right) = \ln \sqrt{\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}} + Y \sqrt{1+X^2} \arctg \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} + X \sqrt{1+Y^2} \arctg \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} - Y \arctg Y - X \arctg X$$



5.- SUPERFICIE ELEMENTAL dA_1 PERPENDICULAR A UN RECTÁNGULO A_2

Uno de los ángulos del rectángulo A_2 se encuentra en línea con dA_1

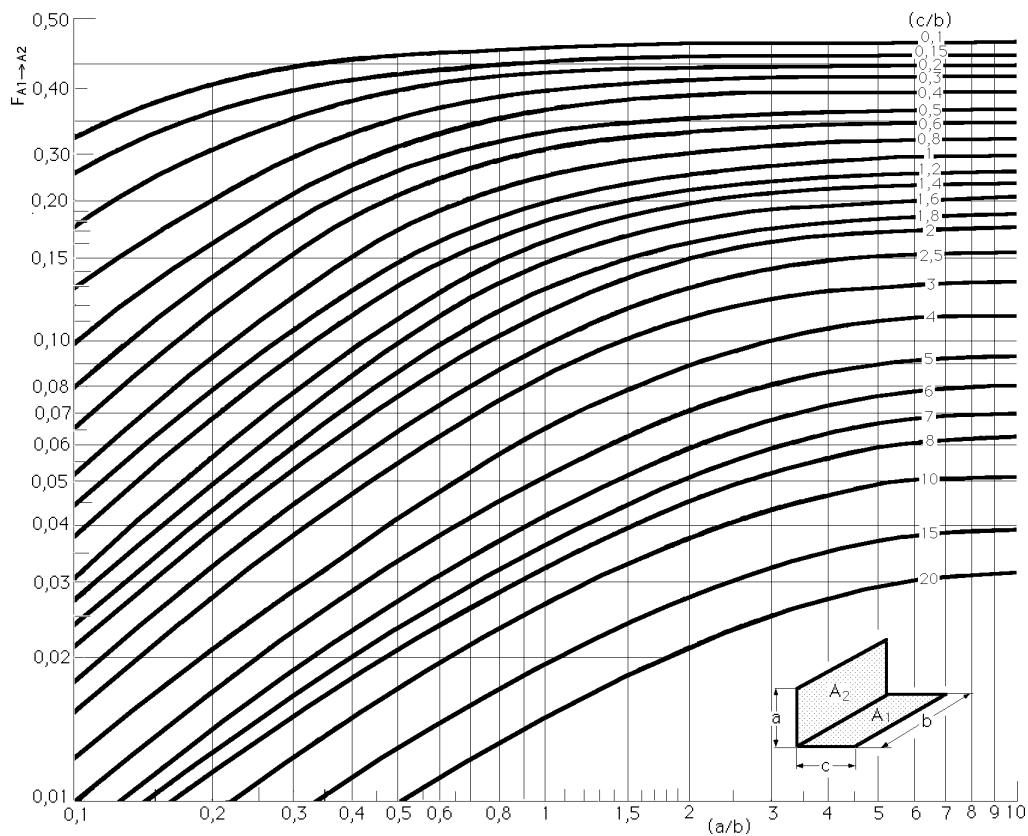
$$X = \frac{a}{b} ; Y = \frac{c}{b} ; A = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} ; F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ \arctg \frac{1}{Y} - A Y \arctg A \right\}$$



6.- DOS RECTÁNGULOS CON UNA ARISTA COMÚN FORMANDO UN ANGULO DE 90°

$$X = \frac{a}{b} ; Y = \frac{c}{b} ; X^2 + Y^2 = Z^2$$

$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = X \arctg \frac{1}{X} + Y \arctg \frac{1}{Y} - Z \arctg \frac{1}{Z} + \frac{1}{4} \ln \left[\frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + X^2} \right] \left\{ \frac{X^2(1 + Z^2)}{Z^2(1 + X^2)} \right\}^{X^2} \left\{ \frac{Y^2(1 + Z^2)}{Z^2(1 + Y^2)} \right\}^{Y^2}$$



7.- DOS RECTÁNGULOS CON UNA ARISTA COMÚN FORMANDO UN ANGULO

$$X = \frac{a}{b} \quad ; \quad Y = \frac{c}{b} \quad ; \quad Z = X^2 + Y^2 - 2 X Y \cos$$

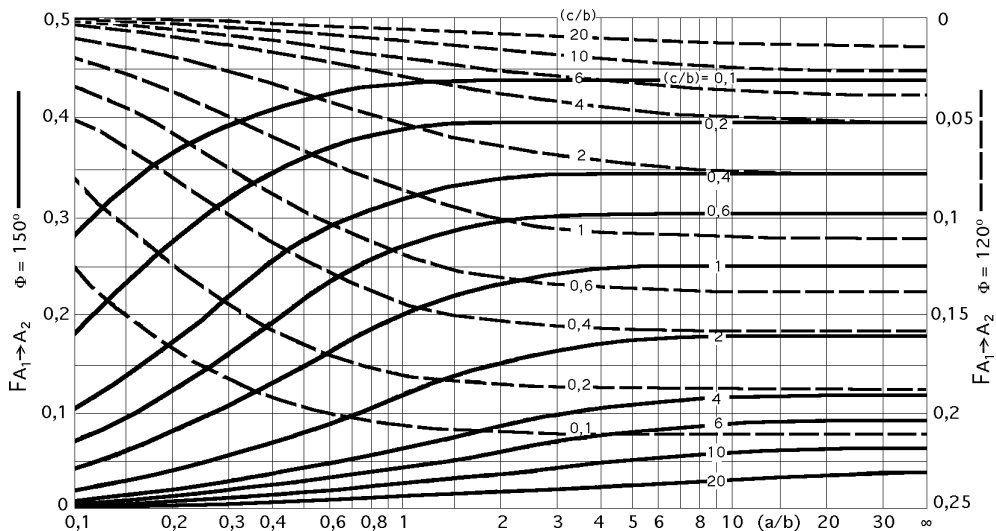
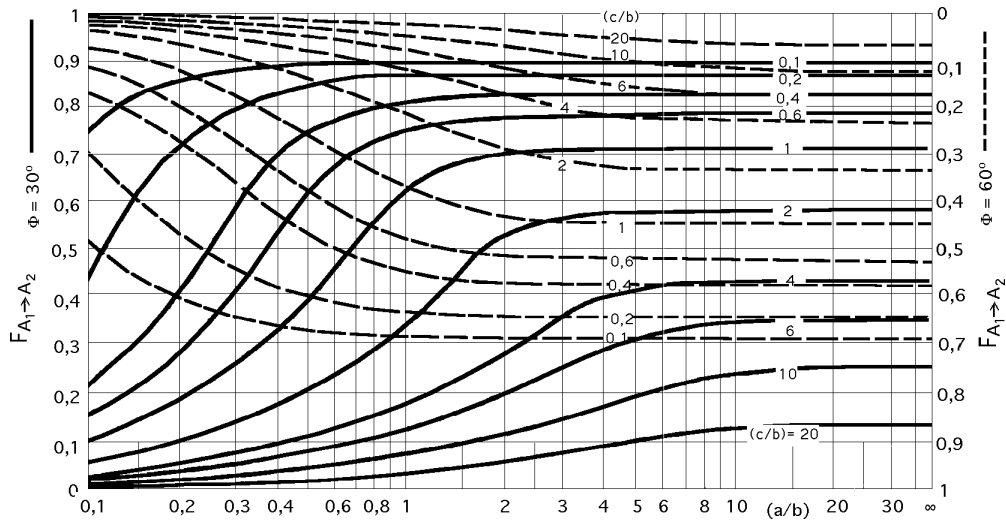
$$F_{A_1 \rightarrow A_2}(\phi) = -\frac{\sin 2}{4} \left\{ X Y \sin - \left(\frac{1}{2} - \right) (X^2 + Y^2) + Y^2 \arctg \frac{X - Y \cos}{Y \sin} + X^2 \arctg \frac{Y - X \cos}{X \sin} \right\} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2}{4} \right) \ln \frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + Z} + Y^2 \ln \frac{Y^2(1 + Z)}{Z(1 + Y^2)} + X^2 \ln \frac{X^2(1 + X^2) \cos^2}{Z(1 + Z) \cos 2} +$$

$$+ X \arctg \frac{1}{X} + Y \arctg \frac{1}{Y} - \sqrt{Z} \arctg \frac{1}{\sqrt{Z}} +$$

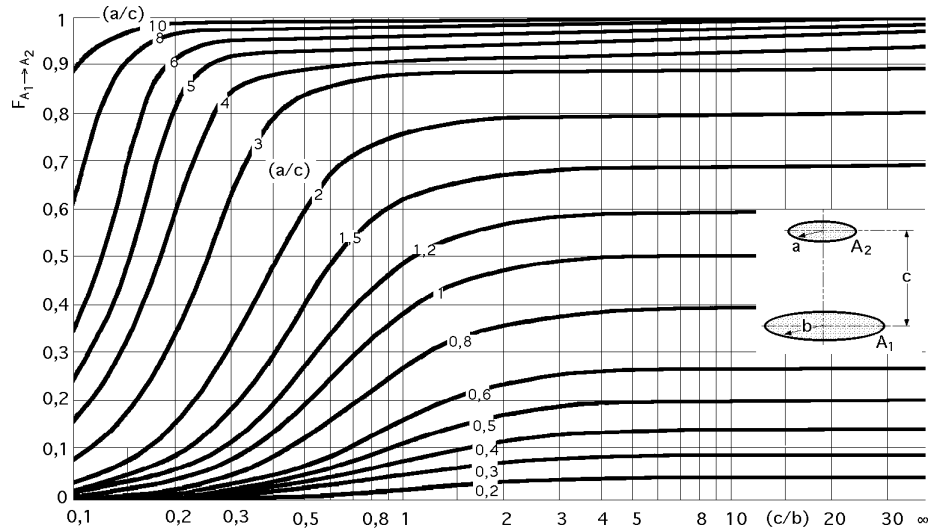
$$+ \frac{\sin}{2} \frac{\sin 2}{2} X \sqrt{1 + X^2 \sin^2} \left\{ \arctg \frac{X \cos}{\sqrt{1 + X^2 \sin^2}} + \arctg \frac{Y - X \cos}{\sqrt{1 + X^2 \sin^2}} \right\} +$$

$$+ \cos \int_0^Y \sqrt{1 + X^2 \sin^2} \left\{ \arctg \frac{X - \cos}{\sqrt{1 + X^2 \sin^2}} + \arctg \frac{\cos}{\sqrt{1 + X^2 \sin^2}} \right\} d$$

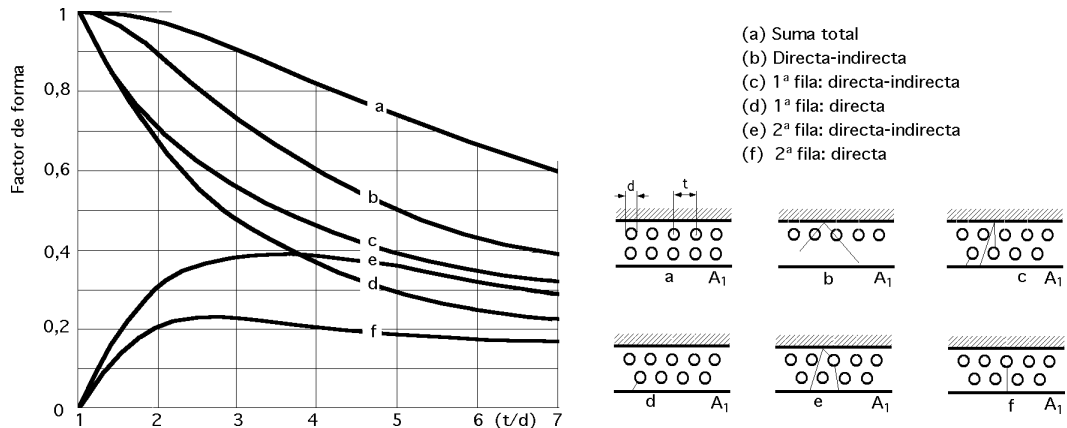


8.- SUPERFICIES CIRCULARES PLANAS CON UNA NORMAL CENTRAL COMÚN

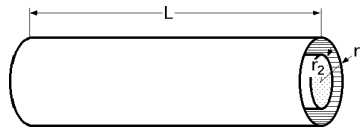
$$X = \frac{a}{c} ; Y = \frac{c}{b} ; Z = 1 + (1 + X^2) Y^2 ; F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \{ Z - \sqrt{Z^2 - 4 \frac{a^2}{b^2}} \}$$



9.- PLANO A₁ CON RESPECTO A UNA O DOS FILAS DE TUBOS PARALELAS AL PLANO



10.- CILINDROS COAXIALES FINITOS A₁ EXTERIOR, A₂ INTERIOR

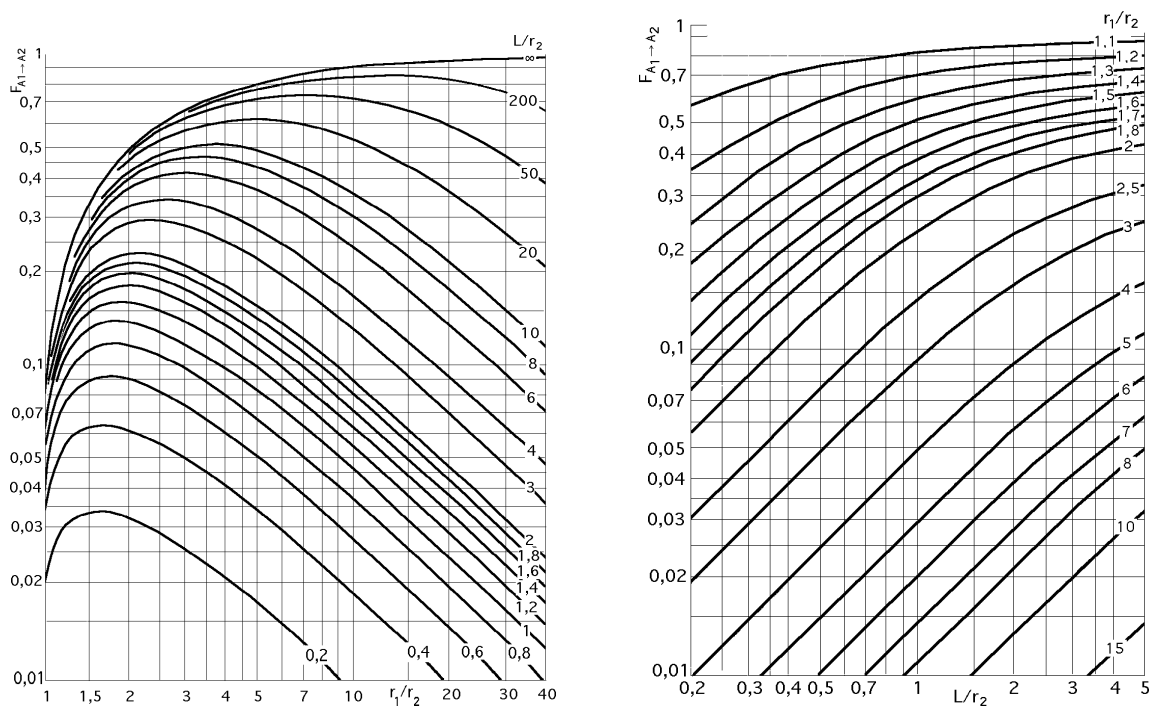


$$X = \frac{r_1}{r_2} ; Y = \frac{L}{r_2} ; A = Y^2 + X^2 - 1 ; B = Y^2 - X^2 + 1$$

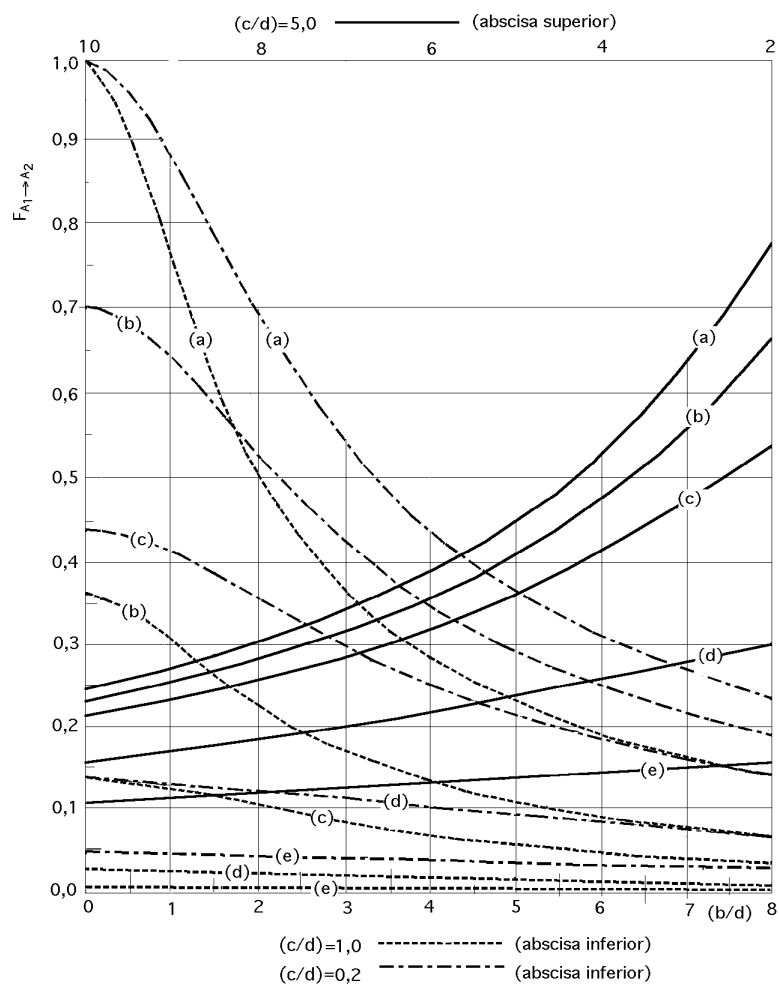
$$F_{12} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X} \left\{ \arccos \frac{B}{A} - \frac{1}{2Y} (\sqrt{(A+2)^2 - (2X)^2} \arccos \frac{B}{XA}) + B \arcsen \frac{1}{X} - \frac{A}{2} \right\}$$

$$F_{11} = 1 - \frac{1}{X} + \frac{2}{X} \arctg \left(\frac{2\sqrt{X^2 - 1}}{Y} \right) -$$

$$- \frac{Y}{2X} \left\{ \frac{\sqrt{4X^2 + Y^2}}{Y} \arcsen \left(\frac{4(X^2 - 1) + \frac{Y^2(X^2 - 2)}{X^2}}{Y^2 + 4(X^2 - 1)} \right) - \arcsen \frac{X^2 - 2}{X^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{4X^2 + Y^2}}{Y} - 1 \right) \right\}$$



11.- RECTÁNGULO A_1 CON CILINDRO FINITO A_2



XX.- RADIACIÓN TÉRMICA

INTERCAMBIOS RADIATIVOS

XX.1.- INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE SUPERFICIES NEGRAS

Se supondrá que se alcanzan condiciones de estado estacionario y que todas las superficies son negras, difusas e isotermas. Toda superficie no isoterma se subdivide en otras hasta que las más pequeñas estén a una temperatura uniforme.

Asimismo se tendrá en cuenta que el medio que separa las superficies es transparente a la radiación, es decir, ni la emite, ni la absorbe, ni la dispersa; se supondrá que las superficies actúan como emisores y reflectores difusos, que no imponen ninguna restricción, por cuanto un cuerpo negro es siempre una superficie difusa. Con estas condiciones se pueden aplicar las expresiones encontradas para el factor de forma.

Los flujos que intervienen en el proceso térmico de la radiación son:

$Q_{i \rightarrow j}$ es la energía radiante emitida por la superficie i y que es absorbida por la superficie j

$Q_{i(\text{neta})}$ es la energía que hay que añadir a la superficie i para mantener constante su temperatura

$Q_{i \leftarrow j}$ es el intercambio de energía entre las superficies i y j

Para evaluar estas energías radiantes consideraremos una geometría sencilla formada por dos superficies negras a T_1 y T_2 y una tercera superficie ficticia a T_3 que representa el medio exterior, conformando entre las tres un recinto, Fig XX.1.

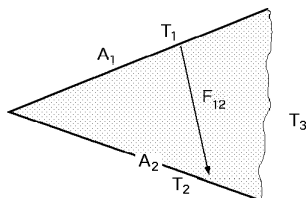


Fig XX.1. Dos planos superficies negras y el medio exterior a T_3

La energía radiante emitida por la superficie a T_1 que llega a la superficie a T_2 y que es absorbida por ésta, es:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{12} E_{b1}$$

siendo $E_b = \sigma T^4$ el poder emisor total que viene dado por la integral de distribución de Planck para todas las longitudes de onda.

La energía emitida por la superficie a T_2 que es absorbida por la superficie a T_1 , es:

$$Q_{2 \rightarrow 1} = A_2 F_{21} E_{b2} = A_1 F_{12} E_{b2}$$

El intercambio térmico entre las superficies a T_1 y T_2 es la diferencia entre las anteriores, es decir:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1} = A_1 F_{12} E_{b1} - A_1 F_{12} E_{b2} = A_1 F_{12} (E_{b1} - E_{b2}) = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1 F_{12}}}$$

La expresión $\frac{1}{A_1 F_{12}}$ se denomina resistencia geométrica.

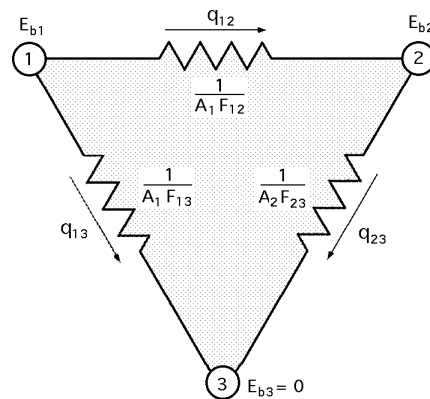


Fig XX.2.- Analogía de resistencias térmicas

Los potenciales del circuito geométrico son los poderes emisivos del cuerpo negro en ambas superficies. La representación del circuito térmico parcial aplicado a las tres superficies anteriores se puede poner como se indica en la Fig XX.2.

La energía neta $q_{1(neta)}$ que se debe añadir a la superficie A_1 para mantener tanto el régimen estacionario, como la temperatura constante, es la diferencia entre la energía emitida por la superficie A_1 y la absorbida asimismo por A_1 procedente de A_2 y A_3 .

La energía emitida por la superficie A_1 es:

$$Q_{1(emitida)} = A_1 E_{b1}$$

La energía absorbida por la superficie A_1 procedente de las superficies A_2 y A_3 , es:

$$\begin{aligned} Q_{1(absorbida)} &= Q_{11} + Q_{21} + Q_{31} = A_1 F_{11} E_{b1} + A_2 F_{21} E_{b2} + A_3 F_{31} E_{b3} = \\ &= A_1 (F_{11} E_{b1} + F_{12} E_{b2} + F_{13} E_{b3}) \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} Q_{1(neta)} &= Q_{1(emit.)} - Q_{1(absorb.)} = A_1 \{ E_{b1} - (F_{11} E_{b1} + F_{12} E_{b2} + F_{13} E_{b3}) \} = \\ &= A_1 \{ (1 - F_{11}) E_{b1} - F_{12} E_{b2} - F_{13} E_{b3} \} \end{aligned}$$

De igual manera, los valores de $q_{2(neta)}$ y $q_{3(neta)}$ son, respectivamente:

$$Q_{2(neta)} = A_2 \{ -F_{21} E_{b1} + (1 - F_{22}) E_{b2} - F_{23} E_{b3} \}$$

$$Q_{3(neta)} = A_3 \{ -F_{31} E_{b1} - F_{32} E_{b2} + (1 - F_{33}) E_{b3} \}$$

conformando las tres el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q_{1(neta)} = A_1 \{ E_{b1} - (F_{11} E_{b1} + F_{12} E_{b2} + F_{13} E_{b3}) \}$$

$$Q_{2(neta)} = A_2 \{ E_{b2} - (F_{21} E_{b1} + F_{22} E_{b2} + F_{23} E_{b3}) \}$$

$$Q_{3(neta)} = A_3 \{ E_{b3} - (F_{31} E_{b1} + F_{32} E_{b2} + F_{33} E_{b3}) \}$$

Los valores de $q_{1(neta)}$, $q_{2(neta)}$ y $q_{3(neta)}$ se pueden incluir en el circuito térmico anterior, mediante una fuente conectada a la unión de los potenciales, viniendo representada la configuración del proceso en la Fig XX.3.

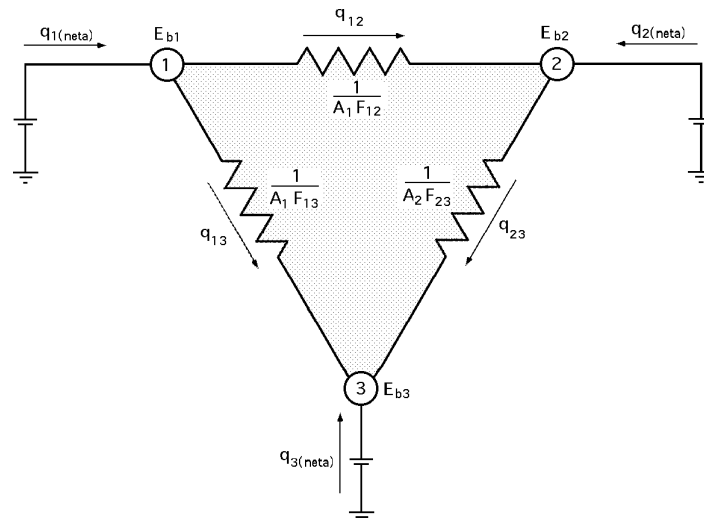


Fig XX.3.- Circuito térmico para tres superficies negras que conforman un recinto con $T_3 = 0^\circ K$

Para el caso particular en que el medio exterior se encuentre a la temperatura de referencia $T_3 = 0^\circ K$ no hay energía absorbida procedente del mismo; tampoco habría energía procedente de la propia superficie A_1 si ésta fuese plana, y no poder verse a sí misma, resultando en estas condiciones:

$$Q_{1(neta)} = A_1 (E_{b1} - F_{12} E_{b2})$$

$$Q_{2(neta)} = A_2 \{ -F_{21} E_{b1} + (1 - F_{22}) E_{b2} \}$$

$$Q_{3(neta)} = A_3 \{ -F_{31} E_{b1} - F_{32} E_{b2} \} = -A_1 F_{13} E_{b1} - A_2 F_{23} E_{b2}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden deducir también a partir del circuito térmico, teniendo en cuenta que en cada nudo, en condiciones estacionarias, el Principio de conservación de la energía implica que la suma de todos los flujos térmicos tiene que ser cero, (Ley de Kirchhoff), por lo que:

$$\begin{aligned}
Q_{1(\text{neta})} &= Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 3} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{E_{b1} - E_{b3}}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} = \\
&= A_1 F_{12} E_{b1} - A_1 F_{12} E_{b2} + A_1 F_{13} E_{b1} - A_1 F_{13} E_{b3} = \\
&= A_1 (F_{12} + F_{13}) E_{b1} - A_1 F_{12} E_{b2} - A_1 F_{13} E_{b3} = \left| \begin{array}{l} F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \\ F_{12} + F_{13} = 1 - F_{11} \end{array} \right| = \\
&= A_1 (1 - F_{11}) E_{b1} - A_1 F_{12} E_{b2} - A_1 F_{13} E_{b3}
\end{aligned}$$

El valor de $q_{3(\text{neta})}$ es la energía que hay que aplicar a A_3 procedente de A_1 y A_2 para mantener constante su temperatura; como se tiene que:

$$\begin{aligned}
Q_{1(\text{neta})} + Q_{2(\text{neta})} + Q_{3(\text{neta})} &= 0 \\
Q_{3(\text{neta})} &= -Q_{1 \rightarrow 3} - Q_{2 \rightarrow 3} = \left| \begin{array}{l} Q_{1 \rightarrow 3} = A_1 F_{13} E_{b1} \\ Q_{2 \rightarrow 3} = A_2 F_{23} E_{b2} \end{array} \right| = -A_1 F_{13} E_{b1} - A_2 F_{23} E_{b2}
\end{aligned}$$

Esta técnica se puede extender a cualquier número de superficies negras que conformen un recinto; la aplicación de la ley de Kirchoff a circuitos implica en su forma general que:

$$Q_{i(\text{neta})} = \sum_{j=1}^n Q_{i \rightarrow j}, \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots$$

en la que el término, $i = j$, no está incluido en el sumatorio. La aplicación de la ley de Ohm al circuito térmico proporciona:

$$Q_{i \rightarrow j} = \frac{E_{bi} - E_{bj}}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = A_i F_{ij} (T_i^4 - T_j^4)$$

XX.2.- INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE DOS SUPERFICIES NEGRAS Y UNA REFRACTARIA

SUPERFICIES REFRACTARIAS.- Cuando el flujo neto de calor sobre una superficie i en un sistema radiativo es cero $q_{i(\text{neta})} = 0$ se dice que esta superficie es refractaria, o también superficie de reirradiación. Estas superficies intercambian calor por radiación, y si son despreciables otras formas de transmisión de calor, la energía incidente, o irradiación, es igual a la energía que abandona la superficie, por lo que se pueden considerar como superficies reflectantes perfectas.

En la Fig XX.4 se muestra un circuito formado por dos superficies negras A_1 y A_2 y una superficie refractaria A_R . Se observa que el circuito térmico anterior, de tres superficies negras que conforman un recinto, se modifica para tener en cuenta la superficie refractaria, haciendo

$q_{R(neta)} = 0$, en el punto nodal R correspondiente, que se convierte en un potencial cuya temperatura viene determinada por las temperaturas de las demás superficies participantes, siendo su poder emisivo, $E_{bR} = T_R^4$.

CALCULO DE LA TEMPERATURA DE LA SUPERFICIE REFRACTARIA.- La temperatura T_R de la superficie refractaria de la Fig XX.4 se determina a partir del circuito térmico teniendo en cuenta que la superficie refractaria cumple:

$$q_{1R} + q_{2R} = 0 \quad ; \quad q_{1R} = -q_{2R} \quad ; \quad \frac{E_{b1} - E_{bR}}{\frac{1}{A_1 F_{1R}}} = \frac{E_{bR} - E_{b2}}{\frac{1}{A_2 F_{2R}}}$$

y como, $E_{bR} = T_R^4$, resulta:

$$T_R = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 A_1 F_{1R} + T_2^4 A_2 F_{2R}}{A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R}}}$$

en la que hay que conocer las temperaturas T_1 y T_2 , así como el área de las superficies y su posición espacial.

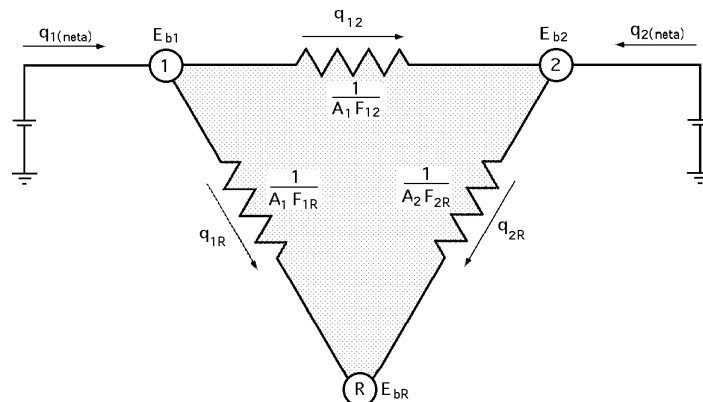


Fig XX.4.- Dos superficies negras A_1 y A_2 y una superficie refractaria R

FACTOR DE FORMA GENERAL.- La energía intercambiada entre A_1 y A_2 es la suma de la energía directamente intercambiada entre ellas y de la energía reflejada por la refractaria A_R , es decir:

$$q_{12} = A_1 E_{b1} F_{12}^* - A_2 E_{b2} F_{21}^* = A_1 F_{12}^* (E_{b1} - E_{b2}) = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1 F_{12}^*}}$$

Una expresión del factor F_{12}^* , general para dos superficies negras y m superficies refractarias, que se pueden reducir a una única refractaria A_R , se obtiene a partir de la Fig XX.5, en la que se han representado los factores de forma correspondientes a las diversas reflexiones en la superficie refractaria, y su incidencia en la superficie negra A_2 , a partir del calor emitido por la superficie A_1 .

El factor de forma F_{12}^* tiene la siguiente expresión:

$$F_{12}^* = F_{12} + F_{1R} F_{R2} + F_{1R} F_{RR} F_{R2} + F_{1R} F_{RR}^2 F_{R2} + F_{1R} F_{RR}^3 F_{R2} + \dots =$$

$$= F_{12} + F_{1R} F_{R2} (1 + F_{RR} + F_{RR}^2 + F_{RR}^3 + \dots) = F_{12} + F_{1R} F_{R2} \frac{F_{RR}^n F_{RR} - 1}{F_{RR} - 1} = F_{12} + \frac{F_{1R} F_{R2}}{1 - F_{RR}}$$

en la que el paréntesis es una progresión geométrica decreciente de razón F_{RR} .

En consecuencia se obtiene:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 F_{12}^* (E_{b1} - E_{b2}) = A_1 \left(F_{12} + \frac{F_{1R} F_{R2}}{1 - F_{RR}} \right) (E_{b1} - E_{b2})$$

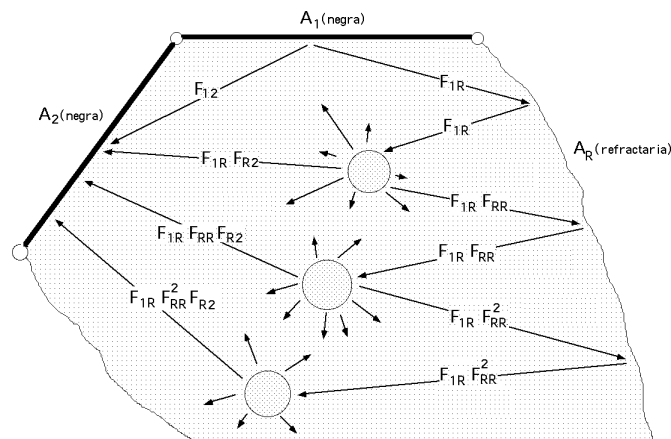


Fig XX.5.- Esquema para la determinación del factor de forma de dos superficies negras y una refractaria

Aplicándolo al caso de dos superficies negras cóncavas o planas y una refractaria que conforman un recinto, la ecuación anterior se transforma en otra, mediante las relaciones de reciprocidad y de la sumatoria, en la forma:

$$1 = F_{RR} + F_{R1} + F_{R2}$$

$$1 - F_{RR} = F_{R1} + F_{R2} = \begin{cases} A_R F_{R1} = A_1 F_{1R} & F_{R1} = \frac{A_1}{A_R} F_{1R} \\ A_R F_{R2} = A_2 F_{2R} & F_{R2} = \frac{A_2}{A_R} F_{2R} \end{cases} = \frac{A_1}{A_R} F_{1R} + \frac{A_2}{A_R} F_{2R}$$

$$F_{12}^* = F_{12} + \frac{F_{1R} F_{R2}}{1 - F_{RR}} = F_{12} + \frac{F_{1R} F_{2R} \frac{A_2}{A_R}}{F_{1R} \frac{A_1}{A_R} + F_{2R} \frac{A_2}{A_R}} = F_{12} + \frac{F_{1R} F_{2R} A_2}{F_{1R} A_1 + F_{2R} A_2} =$$

$$= F_{12} + \frac{1}{\frac{A_1}{F_{2R} A_2} + \frac{1}{F_{1R}}}$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \left(F_{12} + \frac{1}{\frac{A_1}{F_{2R} A_2} + \frac{1}{F_{1R}}} \right) A_1 (E_{b1} - E_{b2}) = \left(F_{12} + \frac{F_{1R} F_{2R} A_2}{F_{1R} A_1 + F_{2R} A_2} \right) A_1 (E_{b1} - E_{b2})$$

que es lo mismo que considerar el intercambio térmico entre A_1 y A_2 como si no hubiese superficie refractaria, incluyendo el efecto de ésta sobre las dos paredes, que se puede interpretar como una resistencia térmica adicional en paralelo.

CASOS PARTICULARES.- Para el caso de que las dos superficies negras sean planas o convexas, y las demás refractarias, conformando todas un recinto, se pueden introducir las siguientes simplificaciones:

a) *Las superficies A_1 y A_2 no se ven a sí mismas:* $F_{11} = 0$; $F_{22} = 0$

$$F_{11} + F_{12} + F_{1R} = 1 \quad ; \quad F_{1R} = 1 - F_{12}$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{2R} = 1 \quad ; \quad F_{2R} = 1 - F_{21} = 1 - F_{12} \frac{A_1}{A_2}$$

El valor de F_{12}^* , es:

$$\begin{aligned} F_{12}^* &= F_{12} + \frac{1}{\frac{A_1}{F_{2R} A_2} + \frac{1}{F_{1R}}} = F_{12} + \frac{1}{\frac{A_1}{A_2 - F_{12} A_1} + \frac{1}{1 - F_{12}}} = \\ &= F_{12} + \frac{A_2 - A_1 F_{12} - A_2 F_{12} + A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2 A_1 F_{12}} = \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2 A_1 F_{12}} \end{aligned}$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = A_1 \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2 A_1 F_{12}} (E_{b1} - E_{b2})$$

b) *Las dos superficies negras no se ven entre sí, ni entre una y otra:*

$$F_{12} = F_{21} = 0 \quad ; \quad F_{12}^* = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} (E_{b1} - E_{b2})$$

c) *Las dos superficies son además iguales, $A_1 = A_2$*

$$F_{12}^* = \frac{1}{2} \quad ; \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_1}{2} (E_{b1} - E_{b2})$$

XX.3.- INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE SUPERFICIES GRISES

Sabemos que cuando una radiación incide sobre una superficie gris, una porción de la radiación se refleja. Para el caso de superficies grises isotermas que conforman un recinto, en régimen estacionario, en el que el medio exterior no participa radiativamente, por considerarle transparente a la radiación, y en el supuesto de que la irradiación en cada superficie se distribuye uniformemente, se aplica la ley de Kirchoff de la radiación que dice:

Como en el equilibrio térmico la temperatura permanece constante, la absorptividad de una superficie es igual a su emisividad , $\alpha = \epsilon$.

Si además las superficies grises son opacas, su coeficiente de transmisividad es $\tau = 0$ y como se tiene que cumplir el balance energético de la radiación:

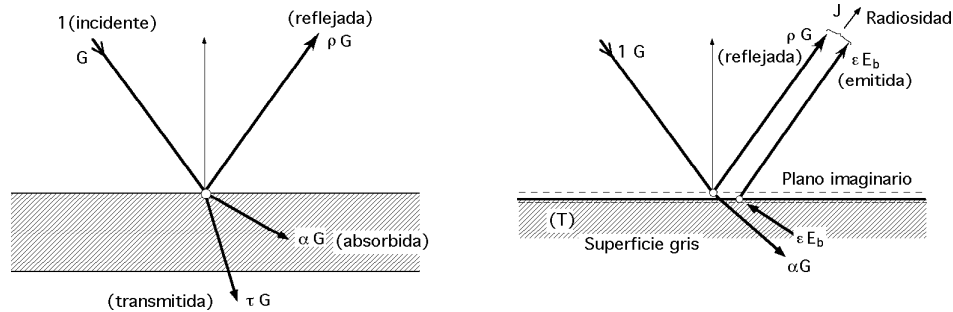


Fig XX.6.- a) Superficie gris. b) Balance energético sobre un plano imaginario por encima de la superficie

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad \rho + \alpha = 1 - \tau$$

Se define la radiosidad J como la energía radiante que abandona la superficie gris, es decir, representa toda la radiación que sale de la superficie y es igual a la suma de la fracción de energía E_b emitida por la superficie debida a su temperatura T y de la irradiación G reflejada por unidad de superficie, es decir:

$$J = E_b + \rho G$$

El flujo de calor por unidad de área a través de la superficie se puede expresar de dos maneras distintas:

a) Si se supone un plano imaginario situado a una pequeña distancia por encima de la superficie gris real A_i , cuya misión es representar el estado superficial de la misma, como plano reflectante de la radiación incidente, Fig XX.6, el balance energético sobre este plano (en régimen estacionario) exige que la energía neta que hay que suministrar a la superficie gris para mantener su temperatura, sea igual a la diferencia entre la energía J que abandona la superficie y la energía G que incide sobre la misma:

$$q_{i(neta)} = A_i (J_i - G_i)$$

b) Si suponemos un segundo plano imaginario, por debajo de la superficie gris real e infinitamente próximo a ella, de forma que la absorción y emisión ocurren bajo la superficie, se tiene:

$$q_{i(neta)} = A_i (E_{bi} - G_i) = \left| q_i = -q_i \right| = A_i (E_{bi} - G_i)$$

El flujo neto térmico a aplicar a una superficie gris cualquiera para mantener constante su temperatura, es la diferencia entre la radiosidad J y la irradiación G sobre la superficie:

$$\begin{aligned} q_{i(neta)} &= A_i (J_i - G_i) = A_i \left(J_i - \frac{J_i - E_{bi}}{\rho_i} \right) = A_i \frac{J_i (\rho_i - 1) + E_{bi}}{\rho_i} = \\ &= A_i \frac{-J_i + E_{bi}}{\rho_i} = \frac{E_{bi} - J_i}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_i} (E_{bi} - J_i) A_i \end{aligned}$$

Si esta ecuación se considera en forma de la ley de Ohm, el denominador es una resistencia térmica de radiación que separa los potenciales E_{bi} y J_i , tal como se indica en la Fig XX.7.

La resistencia es debida al hecho de que la superficie gris refleja una fracción de la radiación incidente; por lo tanto equivale a una resistencia superficial que se añade al circuito térmico para superficies negras, y que explica el intercambio radiativo entre superficies grises.

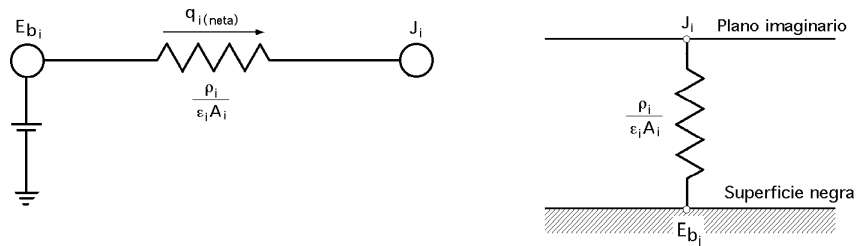


Fig XX.7.- Resistencia superficial de una superficie gris

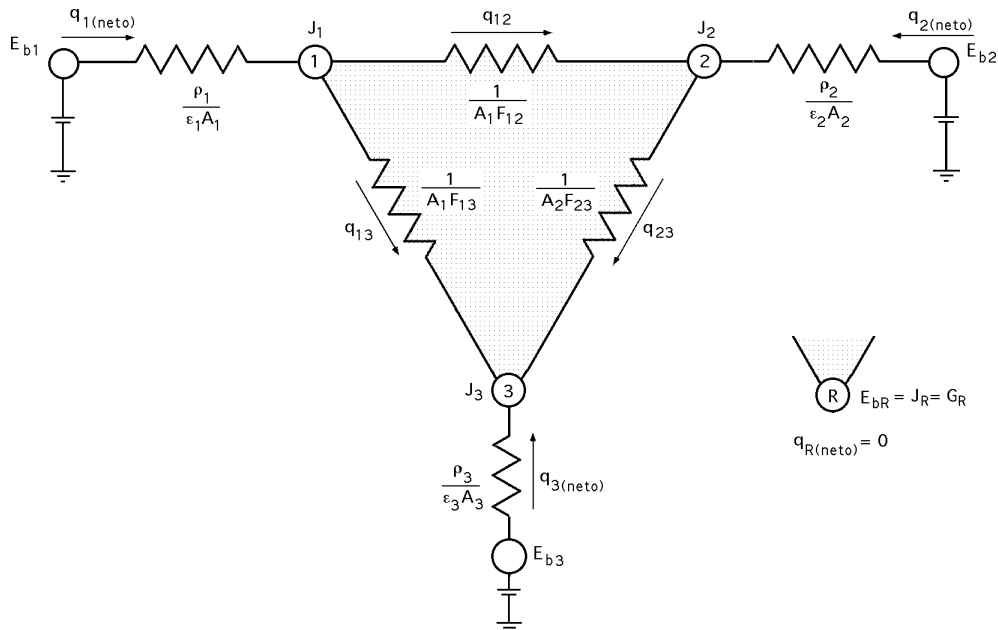


Fig XX.8.- Circuito térmico de tres superficies grises que conforman un recinto

La estructura básica del circuito desarrollado para superficies negras permanece invariable cuando se trabaja con superficies grises, por cuanto las resistencias son función únicamente de la geometría de las superficies y no de sus propiedades físicas superficiales.

La temperatura del cuerpo gris viene dada por:

$$T_i = \sqrt[4]{\frac{\frac{i}{A_i} q_{i(neta)} + J_i}{\epsilon_i}}$$

SUPERFICIES REFRACTARIAS.- El concepto de superficie refractaria $q_{R(neta)} = 0$ incluye que ésta no tiene pérdidas térmicas al exterior.

Teniendo presente el circuito térmico representado en la Fig XX.8 para tres superficies grises

que conforman un recinto, y el concepto de superficie gris, resulta evidente que:

$$\begin{aligned} Q_{R(\text{neta})} &= A_R (J_R - G_R) = 0 \\ Q_{R(\text{neta})} &= A_R (E_{bR} - G_R) = 0 \end{aligned} \quad J_R = G_R = E_{bR}$$

por lo que en una superficie refractaria, el poder emisor del cuerpo negro E_{bR} , la radiosidad J_R y la irradiación G_R , son magnitudes iguales.

Una superficie refractaria refleja toda la energía incidente sin absorber nada de ésta, es decir es una superficie perfectamente reflectora, que alcanza una temperatura de equilibrio que viene determinada por la temperatura de las otras superficies que conforman el recinto, de tal manera, que el poder emisor de la superficie refractaria es igual a la radiosidad y a la irradiación superficiales.

La temperatura de la superficie refractaria viene dada por:

$$A_R (E_{bR} - J_R) = 0 \quad T_R = \sqrt[4]{\frac{J_R}{E_{bR}}}$$

RECINTO FORMADO POR DOS SUPERFICIES GRISES, DIFUSAS Y OPACAS.- Un problema muy general es aquel en el que intervienen sólo dos superficies grises, difusas y opacas que forman un recinto, Fig XX.9, en las que $F_{13} = 1$.

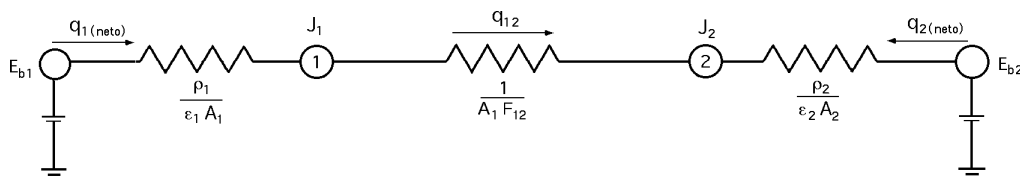


Fig XX.9.- Circuito térmico de dos superficies grises que conforman un recinto con $F_{13} = 0$

Esto implica que el medio exterior 3 que separa las superficies, no interviene en el circuito térmico ya que como $F_{11} = 0$ resulta que $F_{13} = 0$, siendo de aplicación a los siguientes casos:

- 1) Dos placas paralelas infinitamente anchas
- 2) Dos cilindros concéntricos largos, o dos esferas concéntricas
- 3) Un cuerpo pequeño rodeado por una gran superficie cerrada

El recinto térmico requiere:

$$\begin{aligned} Q_{1(\text{neta})} &= Q_{12} = -Q_{2(\text{neta})} \\ Q_{1(\text{neta})} &= \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1}{A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1}{A_2}} \end{aligned}$$

Aplicándola a los casos citados, y teniendo en cuenta que, $F_{12} = 1$, se obtiene lo siguiente:

1) *Placas paralelas infinitas de igual área: $A_1 = A_2$; $F_{12} = 1$*

$$Q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + 1 + \frac{2}{2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + 1 + \frac{1-2}{2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 1} A_1$$

2) *Dos cilindros concéntricos largos, el interior de superficie A_1 y el exterior de superficie A_2 , o dos esferas concéntricas, $F_{12} = 1$*

$$Q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1 A_1} + \frac{1}{A_1} + \frac{2}{2 A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + 1 + \frac{2 A_1}{2 A_2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + 1 + \frac{2 A_1}{2 A_2}} A_1 =$$

$$= \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{2 A_1}{2 A_2}} A_1$$

3) *Un cuerpo pequeño A_1 rodeado por una gran superficie cerrada A_2 $\frac{A_1}{A_2} = 0$; $F_{12} = 1$*

$$Q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{2 A_1}{2 A_2}} A_1 = \left| \frac{A_1}{A_2} = 0 \right| = 1 A_1 (E_{b1} - E_{b2})$$

RECINTO FORMADO POR DOS SUPERFICIES GRISES REFRACTARIAS.- El cálculo del intercambio radiativo cuando algunas de las superficies son reflectores perfectos puede ser complicado, salvo que la geometría del sistema sea sencilla.

1) *Dos placas paralelas infinitamente anchas.-* En este caso toda la radiación reflejada por una de las paredes llega directamente a la otra, sin importar si la radiación es difusa o especular, por lo que la expresión anteriormente hallada para superficies difusas es perfectamente válida:

$$Q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 1} A_1$$

2) *Dos cilindros concéntricos largos, el interior de superficie A_1 y el exterior de superficie A_2 o dos esferas concéntricas, $F_{12} = 1$*

a) Cuando la superficie interior es refractaria y la exterior no, es válida la ecuación:

$$Q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{2 A_1}{2 A_2}} A_1$$

b) Cuando la superficie exterior es refractaria, y la interior es difusa o especular, se obtiene un nuevo resultado teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

La radiación emitida por la superficie A_2 y que es interceptada por la superficie A_1 es:

$$2 E_{b2} A_2 F_{21} = 2 E_{b2} A_1 F_{12} = |F_{12} = 1| = 2 E_{b2} A_1$$

La radiación emitida y reflejada por la superficie A_1 y que es reflejada por A_2 vuelve a A_1 es:

$$A_1 (E_{b1} + G_1) = 2$$

por cuanto toda la radiación que sale de A_1 y que es reflejada por A_2 debe regresar a A_1 .

Por lo tanto, la radiación que incide sobre A_1 es:

$$A_1 G_1 = 2 E_{b2} A_1 + A_1 (E_{b1} + G_1) = 2 \quad G_1 = \frac{2 E_{b2} + E_{b1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

por lo que:

$$Q_{1(neta)} = A_1 (E_{b1} - G_1) = A_1 (E_{b1} - \frac{2 E_{b2} + E_{b1}}{1 - \frac{1}{2}}) = \dots = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 1} A_1 = (J_1 - J_2) A_1$$

que es un resultado idéntico al caso de *placas paralelas infinitas de igual área*.

RECINTO FORMADO POR DOS SUPERFICIES GRISES, DIFUSAS Y OPACAS, Y VARIAS PANTALLAS DE RADIACIÓN.- La radiación térmica entre dos superficies grises $A_1 = A_2$ difusas y opacas que forman un recinto con $F_{12} = 1$, se reduce notoriamente si se interpone entre ellas una pantalla de protección de la radiación, superficie A_3 , construida con un material de baja emisividad, cuya misión es incrementar la resistencia térmica de la radiación entre las superficies A_1 y A_2 .

1) *Placas paralelas infinitas de igual área:* $A_1 = A_2 = A_3 = A$; $F_{12} = 0$; $F_{13} = F_{32} = 1$

Si ϵ_{31} y ϵ_{32} son las emisividades del material de baja emisividad de la pantalla respecto a las superficies A_1 y A_2 y $F_{13} = F_{32} = 1$, se tiene, Fig XX.10:

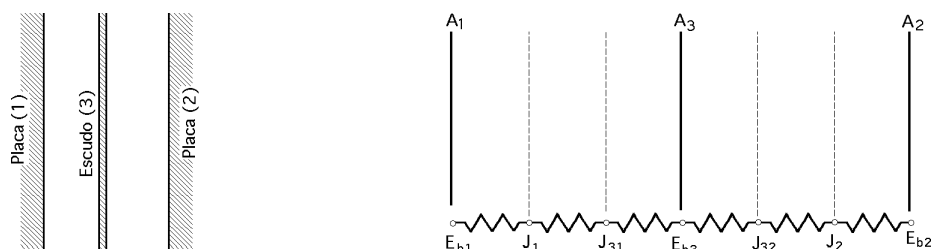


Fig XX.10.- Placas paralelas infinitas de igual área y pantalla de radiación

$$Q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{1} - \frac{1}{A}} = \frac{J_1 - J_{31}}{\frac{1}{A F_{13}}} = \frac{J_{31} - E_{b3}}{\frac{1}{\epsilon_{31} A}} = \frac{E_{b3} - J_{32}}{\frac{1}{\epsilon_{32} A}} = \frac{J_{32} - J_2}{\frac{1}{A F_{32}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{A}} =$$

$$= \frac{\frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1 - \epsilon_{31}}{\epsilon_{31}} + \frac{1 - \epsilon_{32}}{\epsilon_{32}} + \frac{1}{2}}} A = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 1) + (\frac{1}{\epsilon_{31}} + \frac{1}{\epsilon_{32}} - 1)} A$$

Si, $\epsilon_{31} = \epsilon_{32} = \epsilon_3$, resulta, $Q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 2 \frac{1 - \epsilon_3}{\epsilon_3}} A$

Si las emisividades de todas las superficies son iguales: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = \epsilon$, resulta:

$$Q_{1(neta)(1)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{2 \left(\frac{2}{\epsilon} - 1 \right)} A$$

Para el caso particular de que las superficies fuesen negras, $\epsilon = 1$, se tiene:

Sin pantalla: $Q_{1(neta)(0)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{1} A$

Con pantalla: $Q_{1(neta)(1)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{2} A$

observándose que el efecto de la placa reduce a la mitad el intercambio de energía, por lo que a la placa se la llama *escudo de radiación*

Para N pantallas protectoras con, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = \epsilon$, resulta:

$$Q_{1(neta)(N)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(N + 1) \left(\frac{2}{\epsilon} - 1 \right)} A$$

Comparando este caso de N pantallas de radiación, con el de dos placas planas paralelas infinitas de igual área, $A_1 = A_2$, y $F_{12} = 1$, sin pantallas de radiación, resulta:

$$\frac{Q_{1(neta)(N)}}{Q_{1(neta)(0)}} = \frac{1}{N + 1}$$

2) Dos cilindros concéntricos largos, uno A_1 dentro del otro A_2 , o dos esferas concéntricas opacas, $F_{12} = 1$, con una pantalla de radiación, de superficie A_3 , entre los dos cilindros o entre las dos esferas, siendo las emisividades de la pantalla de radiación, ϵ_{31} y ϵ_{32} , y los factores de forma:

$$F_{11} + F_{13} = 1 \quad ; \quad F_{11} = 0 \quad ; \quad F_{13} = 1$$

$$F_{32} + F_{33} = 1 \quad ; \quad F_{33} = 0 \quad ; \quad F_{32} = 1$$

La transferencia de calor por radiación que atraviesa estas superficies, pantalla incluida, se determina mediante la ecuación:

$$\begin{aligned}
q_{1(\text{neta})} &= \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}} = \frac{J_1 - J_{31}}{A_1 F_{13}} = \frac{J_{31} - E_{b3}}{\frac{1 - \epsilon_{31}}{\epsilon_{31} A_3}} = \frac{E_{b3} - J_{32}}{\frac{1 - \epsilon_{32}}{\epsilon_{32} A_3}} = \frac{J_{32} - J_2}{A_3 F_{32}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} = \\
&= \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \frac{A_1}{A_2} + \left(\frac{1}{\epsilon_{31}} + \frac{1}{\epsilon_{32}} - 1\right) \frac{A_1}{A_3}} A_1
\end{aligned}$$

Una aplicación interesante es la protección de un termopar A_1 de los utilizados para medir la temperatura de un flujo de gases calientes, que circulan por un conducto cilíndrico A_2 mediante una funda cilíndrica A_3 , protectora de la radiación, Fig XX.11, y el cálculo de las pérdidas de calor del termopar en estado estacionario $q_{1(\text{neta})}$, que se pueden aproximar, despreciando efectos de borde, por:

$$q_{1(\text{neta})} = q_{13} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}} = \frac{J_1 - J_{31}}{F_{13} A_1} = \frac{J_{31} - E_{b3}}{\frac{1 - \epsilon_{31}}{\epsilon_{31} A_3}} = \frac{A_1 (E_{b1} - E_{b3})}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_3} \left(\frac{1}{\epsilon_{31}} - 1\right)}$$

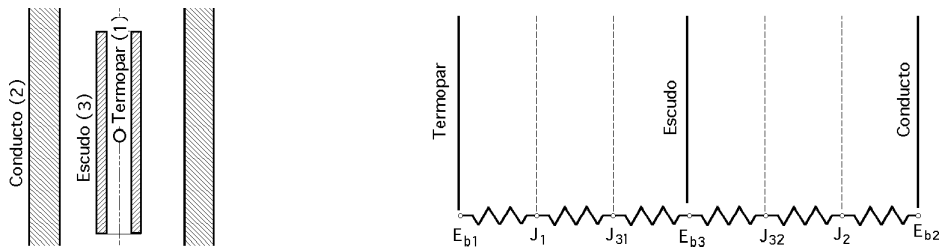


Fig XX.11.- Termopar protegido por una funda

$$q_{1(\text{neta})} = q_{32} = \frac{E_{b3} - J_{32}}{\frac{1 - \epsilon_{32}}{\epsilon_{32} A_3}} = \frac{J_{32} - J_2}{F_{32} A_3} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} = \frac{A_3 (E_{b3} - E_{b2})}{\frac{1}{\epsilon_{32}} + \frac{A_3}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)}$$

$$q_{1(\text{neta})} = q_{13} = q_{32} = \frac{A_1 (E_{b1} - E_{b3})}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_3} \left(\frac{1}{\epsilon_{31}} - 1\right)} = \frac{A_3 (E_{b3} - E_{b2})}{\frac{1}{\epsilon_{32}} + \frac{A_3}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)}$$

observándose que las pérdidas de calor por radiación dependen del tamaño A_3 y emisividad del material de la funda protectora. ϵ_{31} y ϵ_{32} . El valor de $q_{1(\text{neta})}$ es la energía intercambiada por convección entre el fluido a T_F y el termopar.

RECINTO FORMADO POR TRES SUPERFICIES GRISES, DOS OPACAS Y UNA REFRACTARIA.-

La temperatura de equilibrio de la superficie refractaria, que junto con otras dos superficies grises conforman un recinto, se obtiene a partir de:

$$q_{R(\text{neta})} + q_{1R} + q_{2R} = 0 \quad ; \quad q_{R(\text{neta})} = 0 \quad ; \quad q_{1R} + q_{2R} = 0 \quad ; \quad q_{1R} = q_{R2}$$

$$\frac{\frac{J_1 - E_{bR}}{1}}{\frac{1}{A_1 F_{1R}}} = \frac{\frac{E_{bR} - J_2}{1}}{\frac{1}{A_2 F_{2R}}} \quad ; \quad E_{bR} = T_R^4 \quad ; \quad T_R = \sqrt[4]{\frac{J_1 A_1 F_{1R} + J_2 A_2 F_{2R}}{(A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R})}}$$

Si de las tres superficies grises dos son opacas y la tercera refractaria, el circuito térmico correspondiente es el representado en la Fig XX.12.

La conservación de la energía en la superficie refractaria R requiere:

$$q_{1(\text{neta})} + q_{2(\text{neta})} + q_{R(\text{neta})} = 0 \quad ; \quad q_{R(\text{neta})} = 0 \quad ; \quad q_{1(\text{neta})} + q_{2(\text{neta})} = 0 \quad ; \quad q_{1(\text{neta})} = -q_{2(\text{neta})}$$

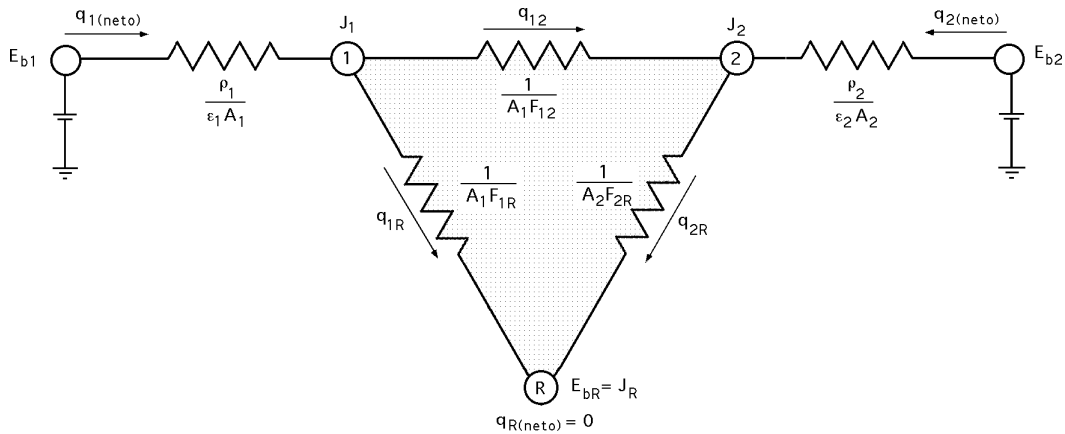


Fig XX.12.- Circuito térmico de dos superficies grises y una superficie refractaria que conforman un recinto

A su vez:

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{J_1 - J_2}{R_{\text{equiv}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + R_{\text{equiv}} + \frac{2}{A_2}}$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}^*}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}^*} + \frac{2}{A_2}}$$

$$F_{12}^* = F_{12} + \frac{F_{13} F_{32}}{1 - F_{33}}$$

en las que:

$$\frac{1}{R_{\text{equiv}}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13} + R_{23}} = \frac{R_{12} + R_{13} + R_{23}}{R_{12} (R_{13} + R_{23})}$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{\frac{1}{A_1 F_{12}} \left(\frac{1}{A_1 F_{13}} + \frac{1}{A_2 F_{23}} \right)}{\frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1}{A_1 F_{13}} + \frac{1}{A_2 F_{23}}} = \frac{\frac{F_{12}}{F_{13}} + \frac{A_1 F_{12}}{A_2 F_{23}}}{1 + \frac{F_{12}}{F_{13}} + \frac{A_1 F_{12}}{A_2 F_{23}}} \frac{1}{A_1 F_{12}} =$$

$$= \left| X = \frac{F_{12}}{F_{13}} + \frac{A_1 F_{12}}{A_2 F_{23}} \right| = \frac{X}{1 + X} \frac{1}{A_1 F_{12}}$$

El valor de $q_{1(\text{neta})}$ es:

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{X}{1 + X} \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{2}{A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{X}{1 + X} \frac{1}{F_{12}} + \frac{2}{A_2}} A_1$$

XX.4.- TÉCNICAS MATRICIALES

Cuando un problema de radiación incluye un número de superficies participantes superior a cuatro, los flujos de calor o las temperaturas de las superficies, se calculan con ordenador. Una técnica simple y poderosa es el cálculo matricial, en donde el número de superficies no influye prácticamente en el trabajo requerido para su resolución, reduciéndose el problema a determinar la matriz inversa de una dada.

Las ecuaciones matriciales que se utilizan cuando las superficies a estudiar tienen temperaturas conocidas, difieren ligeramente de las ecuaciones que se aplican cuando las superficies poseen valores conocidos del flujo de calor, por lo que habrá que considerar estos dos casos por separado.

SUPERFICIES CON TEMPERATURAS CONOCIDAS.- Para poder trabajar con este método hay que organizar en primer lugar las ecuaciones directrices en forma matricial; para ello se supondrá que se conocen todas las temperaturas de las superficies y que lo que se pretende es calcular los valores del flujo neto de calor para todas ellas; asimismo hay que tener en cuenta que todas las superficies son opacas, grises e isotermas, y que la distribución de la energía radiante sobre las mismas es uniforme.

Para simplificar desarrollaremos el método matricial considerando sólo tres superficies; el circuito térmico apropiado para este caso es el indicado en la Fig XX.8.

El flujo neto de calor para cada una de las tres superficies se puede obtener combinando las ecuaciones siguientes:

$$Q_{i(\text{neto})} = A_i (J_i - G_i) = \frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1}{A_i}} = \frac{1}{1} (E_{bi} - J_i) A_i$$

Para la superficie A_1 se tiene:

$$Q_{1(\text{neto})} = \frac{1}{1} (E_{b1} - J_1) A_1 = (J_1 - G_1) A_1 = \begin{vmatrix} A_1 G_1 = A_1 F_{11} J_1 + A_2 F_{21} J_2 + A_3 F_{31} J_3 = \\ = A_1 F_{11} J_1 + A_1 F_{12} J_2 + A_1 F_{13} J_3 \\ G_1 = F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1} (E_{b1} - J_1) A_1 = J_1 A_1 - (F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3) A_1$$

en la que la irradiación G_1 sobre la superficie A_1 es debida a la energía que procede de dicha superficie A_1 (ya que se puede suponer cóncava) y de las otras dos superficies que conforman el recinto. Ordenándola se obtiene:

$$(1 - F_{11} + \frac{1}{1}) J_1 + (-F_{12}) J_2 + (-F_{13}) J_3 = \frac{1}{1} E_{b1}$$

De igual manera para las superficies A_2 y A_3 :

$$(-F_{21}) J_1 + (1 - F_{22} + \frac{2}{2}) J_2 + (-F_{23}) J_3 = \frac{2}{2} E_{b2}$$

$$(-F_{31}) J_1 + (-F_{32}) J_2 + (1 - F_{33} + \frac{3}{3}) J_3 = \frac{3}{3} E_{b3}$$

ecuaciones que se pueden resumir en la forma matricial siguiente:

$$\begin{matrix} 1 - F_{11} + \frac{1}{1} & -F_{12} & -F_{13} & J_1 & \frac{1}{1} E_{b1} \\ -F_{21} & 1 - F_{22} + \frac{2}{2} & -F_{23} & J_2 & \frac{2}{2} E_{b2} \\ -F_{31} & -F_{32} & 1 - F_{33} + \frac{3}{3} & J_3 & \frac{3}{3} E_{b3} \end{matrix} =$$

Para el caso general de n superficies que forman un recinto, A es una matriz de $(n.n)$ elementos, de la forma:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

pudiéndose poner: $A J = B$.

Los elementos de la matriz A son, Diagonal principal, $a_{ii} = 1 - F_{ii} + \frac{i}{i}$; $i = j$
Fuera de la diagonal principal, $a_{ij} = -F_{ij}$; $i \neq j$

Las matrices columna J y B están formadas por n elementos, $J = \begin{matrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_n \end{matrix}$; $B = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}$

Los elementos de la matriz B son de la forma, $b_i = \frac{i E_{bi}}{i}$

Cuando una superficie A_i del recinto sea refractaria, $\rho_i = 1$, $\epsilon_i = 0$, por lo que, $\tau_i = 0$; la ecuación correspondiente será:

$$(1 - F_{i1}) J_1 + (-F_{i2}) J_2 + (-F_{i3}) J_3 + \dots + (-F_{in}) J_n = 0$$

Cuando una superficie A_i del recinto sea negra, se cumple $J_i = E_{bi}$ siendo los elementos de las matrices A y B del cuerpo negro:

$$a_{ij} = 0, (i \neq j) ; a_{ii} = 1 ; b_i = E_{bi}$$

Si la superficie A_1 es gris, la A_2 negra y la A_3 refractaria, la matriz correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} 1 - F_{11} + \frac{1}{1} & -F_{12} & -F_{1R} \\ 0 & 1 & 0 \\ -F_{R1} & -F_{R2} & 1 - F_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} E_{b1} \\ E_{b2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si se tienen *dos superficies negras conectadas por una rerradiante*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -F_{R1} & -F_{R2} & 1 - F_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{b1} \\ E_{b2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz J se determinan a partir de la solución de la ecuación $J = C B$, que puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} J_1 &= c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \dots + c_{1n} b_n \\ J_2 &= c_{21} b_1 + c_{22} b_2 + \dots + c_{2n} b_n \\ &\dots\dots\dots \\ J_n &= c_{n1} b_1 + c_{n2} b_2 + \dots + c_{nn} b_n \end{aligned}$$

que permite conocer los valores de la irradiación J_i sobre todas las superficies.

El flujo neto de calor en una superficie gris es: $q_{i(neta)} = \frac{1}{1} (E_{bi} - J_i) A_i$

y si la superficie A_i es negra $J_i = E_{bi}$, la expresión del flujo neto de calor es:

$$q_{i(neta)_{sup.negra}} = (E_{bi} - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} E_{bj}) A_i = (J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j) A_i = (J_i - G_i) A_i$$

SUPERFICIES CON FLUJO NETO DE CALOR CONOCIDO.- Si las temperaturas de todas las superficies que conforman el recinto se suponen desconocidas, pero se conocen los flujos netos de calor de todas ellas, la ecuación:

$$q_{1(neta)} = \frac{1}{1} (E_{b1} - J_1) A_1 = J_1 A_1 - (F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3) A_1$$

se puede poner en función de magnitudes conocidas despejando la incógnita E_{b1} y manteniendo el valor conocido $q_{1(neta)}$.

El resultado para las superficies A_1 , A_2 y A_3 , suponiendo un recinto de tres superficies grises es:

$$\begin{aligned}
 (1 - F_{11}) J_1 - F_{12} J_2 - F_{13} J_3 &= \frac{Q_{1(neta)}}{A_1} \\
 -F_{21} J_1 + (1 - F_{22}) J_2 - F_{23} J_3 &= \frac{Q_{2(neta)}}{A_2} \\
 -F_{31} J_1 - F_{32} J_2 + (1 - F_{33}) J_3 &= \frac{Q_{3(neta)}}{A_3}
 \end{aligned}$$

cuya forma matricial es:

$$\begin{bmatrix}
 1 - F_{11} & -F_{12} & -F_{13} \\
 -F_{21} & 1 - F_{22} & -F_{23} \\
 -F_{31} & -F_{32} & 1 - F_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 J_1 \\
 J_2 \\
 J_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{Q_{1(neta)}}{A_1} \\
 \frac{Q_{2(neta)}}{A_2} \\
 \frac{Q_{3(neta)}}{A_3}
 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz A son de la forma, Fuera de la diagonal principal, $a_{ij} = -F_{ij}$; $i \neq j$
 En la diagonal principal, $a_{ii} = 1 - F_{ii}$

Los elementos de la matriz B son de la forma, $\frac{Q_{i(neta)}}{A_i}$

Determinados los elementos de A y B se calcula la matriz C inversa de la matriz A; los elementos de la matriz radiosidad J vienen determinados por la ecuación $J = C B$, mientras que las temperaturas de las superficies pueden determinarse a partir de la ecuación:

$$Q_{i(neta)} = \frac{\epsilon_i}{1} (E_{bi} - J_i) A_i \quad ; \quad E_{bi} = \sigma T_i^4 = \frac{\epsilon_i}{1} \frac{Q_{i(neta)}}{A_i} + J_i \quad ; \quad T_i = \sqrt[4]{\frac{\frac{\epsilon_i}{1} \frac{Q_{i(neta)}}{A_i} + J_i}{\sigma}}$$

Si la superficie A_i fuese un cuerpo negro, $\epsilon_i = 1$, su temperatura sería, $T_i = \sqrt[4]{\frac{J_i}{\sigma}}$

XXI.- RADIACION TERMICA EN GASES NO TRANSPARENTES

XXI.1.- RADIACION A TRAVES DE UN MEDIO TRANSMISOR Y ABSORBENTE

En los apartados anteriores se ha supuesto que todas las superficies radiativas eran opacas, de forma que la energía incidente sobre la superficie no se transmitía en absoluto a través de la misma, hipótesis que simplifica en gran manera los cálculos de radiación. Sin embargo, muchas sustancias de importancia industrial, como los vidrios, algunos plásticos y los gases, no son opacos a la radiación térmica y, por lo tanto, hay que ampliar el análisis de la radiación a través de estos materiales.

TRANSFERENCIA DE CALOR ENTRE DOS SUPERFICIES INFINITAS CON UN GAS INTERMEDIO.- Para desarrollar una técnica general se puede considerar un caso simple de intercambio radiativo entre dos superficies opacas, grises, con factor de forma $F_{12} = 1$, separadas por un medio transmisor, parcial o totalmente absorbente, isoterma, gris y que no refleje en absoluto la radiación incidente, hipótesis que es particularmente válida cuando se trata de gases, aunque los vidrios y otros sólidos, parcialmente transparentes, pueden reflejar una porción de la radiación incidente.

La geometría se muestra en la Fig XXI.1; las dos superficies sólidas las llamaremos A_1 y A_2 mientras que las propiedades del gas transmisor se especifican en el subíndice g. Se puede admitir que las propiedades y temperaturas de las dos superficies sólidas son conocidas y que lo que se desea determinar son las transferencias de calor radiativo en los dos planos infinitos separados por el gas transmisor absorbente, así como la temperatura del gas.

La ley de Kirchoff aplicada al gas transmisor gris requiere, para mantener su temperatura constante que $\epsilon_g = \alpha_g$, y como la reflectividad del medio transmisor es cero, $\rho_g = 0$, resulta:

$$\epsilon_g + \rho_g + \alpha_g = 1 \quad ; \quad \epsilon_g = 1 - \rho_g = 1 - 0 \quad ; \quad 1 = \epsilon_g + \alpha_g$$

La expresión de la radiosidad de la superficie:

$$J = E_b + G$$

y la de la transferencia neta de calor:

$$Q_{i(neta)} = A_i (J_i - G_i),$$

no quedan afectadas por la presencia del gas.

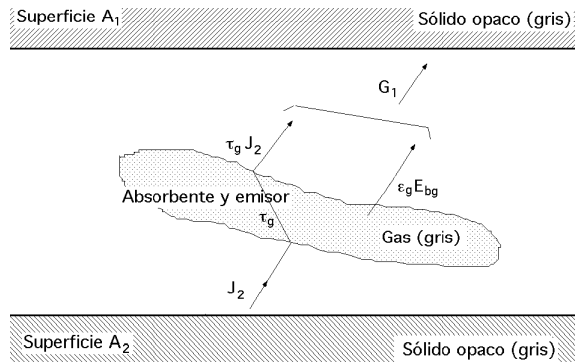


Fig XXI.1.- Dos planos infinitos separados por un gas transmisor absorbente

La expresión de la transferencia neta de calor a la superficie A_1 viene dada por la ecuación:

$$Q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = A_1 (J_1 - G_1)$$

La irradiación G_1 sobre la superficie A_1 es la suma de la radiosidad que abandona la superficie A_2 y se transmite a través del gas, $_{g} J_2$, y de la contribución debida al poder emisor del gas $_{g} E_{bg}$ y que por ser $F_{12} = 1$ es de la forma:

$$G_1 = _g J_2 + _g E_{bg}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} Q_{1(neta)} &= A_1 (J_1 - G_1) = A_1 (J_1 - _g J_2 - _g E_{bg}) = \left| 1 = _g + _g \right| = \\ &= A_1 \{ (_g + _g) J_1 - _g J_2 - _g E_{bg} \} = A_1 \{ _g (J_1 - J_2) + _g (J_1 - E_{bg}) \} = \\ &= \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 _g}} + \frac{J_1 - E_{bg}}{\frac{1}{A_1 _g}} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1 _1}} \end{aligned}$$

Un análisis semejante para la superficie A_2 proporciona la expresión:

$$Q_{2(neta)} = \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{A_2 _g}} + \frac{J_2 - E_{bg}}{\frac{1}{A_2 _g}} = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{1}{A_2 _2}}$$

El circuito térmico de la Fig XXI.2 muestra que el poder emisor E_{bg} del gas considerado

como cuerpo negro, es un potencial flotante, por lo que la temperatura del gas se convierte en una función que depende de las propiedades del gas, así como de las propiedades superficiales de las dos superficies opacas.

El gas se comporta como una sustancia refractaria, ya que no hay suministro de energía externa al gas, o sea $Q_{(neta)g} = 0$.

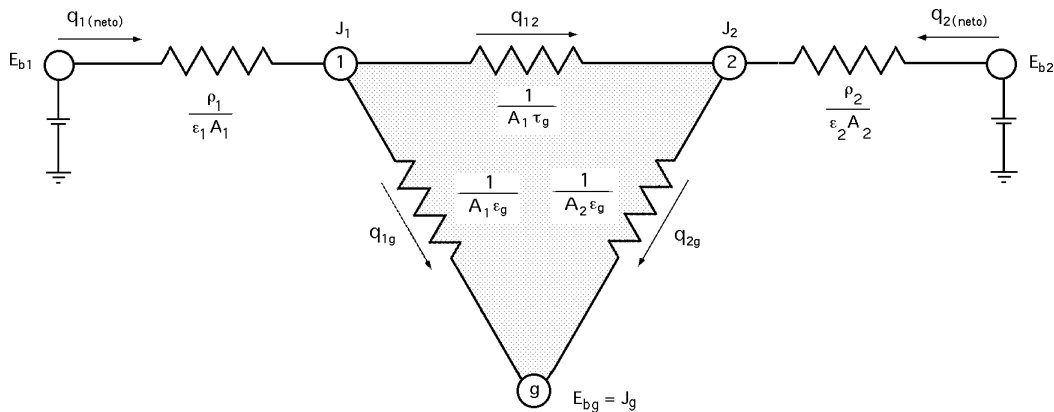


Fig XXI.2.- Analogía eléctrica para dos planos infinitos separados por un gas transmisor absorbente

Según el circuito térmico, el calor intercambiado entre las superficies A_1 y A_2 a través del gas es:

$$Q_{1(neta)} = Q_{12}^* = -Q_{2(neta)}$$

$$Q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{J_1 - J_2}{R_{equiv}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + R_{equiv} + \frac{2}{A_2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{equiv}} &= \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{1g} + R_{2g}} = \frac{R_{12} + R_{1g} + R_{2g}}{R_{12}(R_{1g} + R_{2g})} = \frac{\frac{1}{g A_1} + \frac{1}{g A_1} + \frac{1}{g A_2}}{\frac{1}{g A_1} \left(\frac{1}{g A_1} + \frac{1}{g A_2} \right)} = \frac{\frac{1}{g} + \frac{2}{g}}{\frac{2}{g}} A_1 = \\ &= \frac{g + 2}{2} \frac{g}{A_1} = \frac{1 + g}{2} A_1 \quad R_{equiv} = \frac{2}{(1 + g) A_1} \end{aligned}$$

en la que se ha tenido en cuenta que $A_1 = A_2$ por lo que:

$$Q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{2}{A_2} + \frac{2}{1 + g}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{2}{1 + g}} A_1$$

$$Q_{1(neta)} = -Q_{2(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2}}$$

El intercambio radiativo entre las dos superficies es:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{\epsilon_g A_1}} = \epsilon_g (J_1 - J_2) A_1$$

La temperatura T_g del gas se obtiene a partir de la ecuación:

$$\frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1 \epsilon_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 \epsilon_g}} + \frac{J_1 - E_{bg}}{\frac{1}{A_1 \epsilon_g}} \quad \frac{1}{\epsilon_1} (E_{b1} - J_1) = \epsilon_g (J_1 - J_2) + \epsilon_g (J_1 - E_{bg})$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} E_{b1} - J_1 \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \epsilon_g + \epsilon_g \right) + \epsilon_g J_2 = - \epsilon_g E_{bg}$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} E_{b1} - J_1 \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \epsilon_g + \epsilon_g \right) + \epsilon_g J_2 = - \epsilon_g E_{bg}$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} E_{b1} - \frac{J_1}{\epsilon_1} + \epsilon_g J_2 = - \epsilon_g T_g^4 \quad T_g = \sqrt[4]{\frac{J_1 - \epsilon_g \frac{1}{\epsilon_1} J_2 - \frac{1}{\epsilon_1} E_{b1}}{\epsilon_g}}$$

Cuando el gas no está presente, para placas paralelas infinitas $F_{12} = 1$, se cumple que:

$$Q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} A_1$$

y cuando el gas está presente:

$$Q_{1(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_g}{1 + \epsilon_g}} A_1$$

por lo que la presencia del gas reduce la transferencia neta de calor a la superficie A_1 debido a la emisividad del propio gas; la transferencia neta de calor radiativo entre las superficies también disminuye cuando el gas está presente, ya que éste absorbe parte de la energía radiante que se propaga entre las placas.

TRANSFERENCIA DE CALOR ENTRE DOS SUPERFICIES FINITAS CON UN GAS INTERMEDIO.- Cuando las superficies sean finitas, Fig XXI.3, el circuito térmico se modifica para tener en cuenta que los factores de forma no son iguales a la unidad.

Si por ejemplo se desea calcular las transferencias de calor para dos planos paralelos opacos y finitos separados por un gas no reflectivo, gris e isotermo, la expresión de la irradiación sobre la superficie A_1 es:

$$A_1 G_1 = A_2 F_{21} \epsilon_g J_2 + A_g F_{g1} \epsilon_g E_{bg} = A_1 F_{12} \epsilon_g J_2 + A_g F_{g1} \epsilon_g E_{bg}$$

y como:

$$J_1 = \epsilon_1 F_{12} + \epsilon_1 F_{1g}$$

el valor de $q_{1(\text{neta})}$ es:

$$\begin{aligned} q_{1(\text{neta})} &= A_1 (J_1 - F_{12} - F_{1g} - E_{bg}) = A_1 \{ (\epsilon_1 F_{12} + \epsilon_1 F_{1g}) J_1 - F_{12} - F_{1g} - E_{bg} \} = \\ &= A_1 \{ \epsilon_1 F_{12} (J_1 - J_2) + \epsilon_1 F_{1g} (J_1 - E_{bg}) \} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 \epsilon_1 F_{12}}} + \frac{J_1 - E_{bg}}{\frac{1}{A_1 \epsilon_1 F_{1g}}} \end{aligned}$$

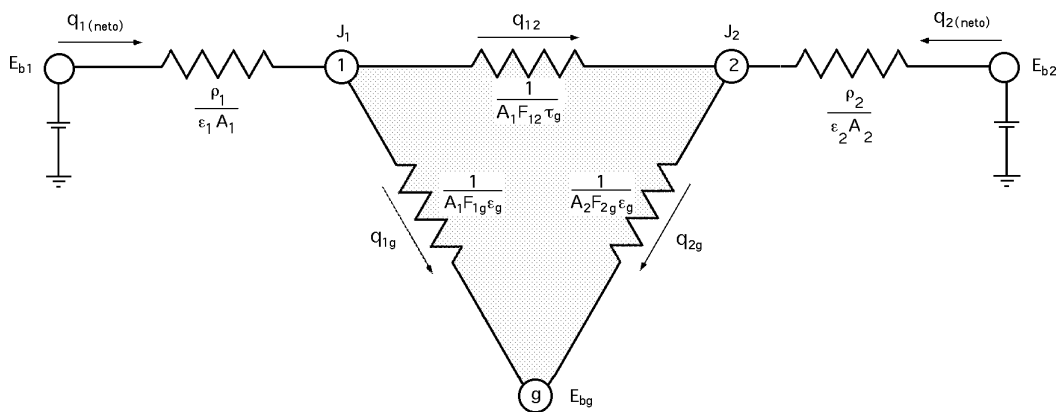


Fig XXI.3.- Analogía eléctrica para dos placas finitas separadas por un gas

INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE UN GAS ISOTERMO Y UN RECINTO NEGRO .- El recinto negro se puede equiparar a una cámara de combustión o a un horno, en cuyo interior la turbulencia garantiza que los gases contenidos se mezclen bien, estando las variaciones de temperatura limitadas a capas límite de pequeño espesor en zonas próximas a las paredes, por lo que en primera aproximación se podría considerar a los gases como isotérmicos; por otro lado, cuando se usan hidrocarburos como combustible, las paredes se pueden asimilar a superficies negras debido a la oxidación y a los depósitos de hollín.

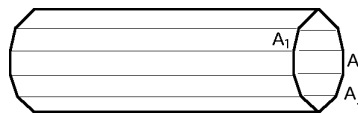


Fig XXI.4.- Recinto de n superficies negras que contiene un gas isoterma

Para su estudio se puede partir de la ecuación para dos superficies:

$$A_1 G_1 = A_1 F_{12} + A_g F_{g1} - E_{bg}$$

en la que hay que introducir las siguientes consideraciones:

$$G_1 = F_{12} + \frac{A_g}{A_1} F_{g1} - E_{bg} = \left| \begin{array}{l} A_g = A_1 \quad ; \quad J_2 = E_{b2} \\ F_{g1} = F_{12} \end{array} \right| = F_{12} (E_{b2} + E_{bg})$$

Si ahora se considera el recinto que contiene al gas isotérmico a T_g formado por n superficies negras, y del mismo se toman dos superficies A_i y A_j , la ecuación anterior se puede poner en la forma:

$$G_{ij} = F_{ij} \left(\frac{1}{\epsilon_g} E_{bj} + \frac{1}{\epsilon_g} E_{bg} \right)$$

por lo que el flujo de calor radiante a través de la superficie A_i será:

$$\begin{aligned} Q_{i(neta)} &= A_i \left(E_{bi} - \sum_{j=1}^n G_{ij} \right) = \left| G_{ij} = F_{ij} \left(\frac{1}{\epsilon_g} E_{bj} + \frac{1}{\epsilon_g} E_{bg} \right) \right| = \\ &= A_i \left(E_{bi} - \sum_{j=1}^n F_{ij} \left(\frac{1}{\epsilon_g} E_{bj} + \frac{1}{\epsilon_g} E_{bg} \right) \right) \end{aligned}$$

que son n ecuaciones lineales para los n flujos de calor.

La emisividad total del gas ϵ_g se calcula a la temperatura T_g y la transmitancia τ_g lo es para la radiación emitida por una fuente negra a la temperatura T_j que se transmite a través del gas a T_g sobre una longitud característica L .

Si el recinto es de una sola superficie A_1 a la temperatura T_1 se tiene:

$$\begin{aligned} Q_{1(neta)} &= A_1 (E_{b1} - E_{bg}) \quad \tau_g = \left| 1 - \frac{1}{\epsilon_g} \right| = A_1 \{ E_{b1} (1 - \frac{1}{\epsilon_g}) - \frac{1}{\epsilon_g} E_{bg} \} = \\ &= A_1 (E_{b1} - E_{bg}) \end{aligned}$$

La radiación emitida por las paredes y absorbida por el gas es de poca importancia por cuanto las paredes están relativamente frías, no siendo necesario tener un valor exacto de τ_g .

INTERCAMBIO RADIATIVO ENTRE UN GAS ISOTERMO Y UN RECINTO GRIS .- Para determinar el intercambio radiativo en el interior de un recinto que contiene un gas isoterma y que está conformado por superficies grises, hay que suponer que el gas también es gris, por lo que:

$$\frac{1}{\epsilon_g} = \frac{1}{\tau_g} = 1 - \tau_g$$

El flujo de calor radiante a través de la superficie A_i se puede poner en la forma:

$$Q_{i(neta)} = A_i J_i - \sum_{j=1}^n \{ A_i F_{ij} \frac{1}{\epsilon_g} J_j + A_g F_{ig} \frac{1}{\epsilon_g} E_{bg} \} = \sum_{j=1}^n \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{A_i F_{ij} \epsilon_g}} + \sum_{j=1}^n \frac{J_i - E_{bg}}{\frac{1}{A_g F_{ig} \epsilon_g}}$$

que son n ecuaciones lineales para los n flujos de calor.

XXI.2.- PROPIEDADES RADIATIVAS DE LOS GASES

La radiación emitida por los gases es completamente distinta a la emitida por una sustancia sólida; el poder emisor monocromático de una sustancia sólida es relativamente continuo para todas las longitudes de onda, mientras que la emisión y absorción de los gases tiene lugar en

bandas de estrecha longitud de onda.

La emisión y la absorción no se efectúan de manera continua sobre todo el espectro, siendo significativas en varias bandas más o menos anchas de longitud de onda de absorción relativamente fuerte, tendiendo a cero en otras bandas contiguas.

Los gases con estructuras moleculares simétricas como el O_2 , N_2 e H_2 no son sustancias fuertemente absorbentes o emisoras, por lo que en la mayor parte de los casos, cuando las temperaturas sean inferiores a las necesarias para ionizarlos, se puede despreciar la emisividad de los mismos, por lo que se pueden considerar transparentes a la radiación, es decir *diatermos*.

Sin embargo, la emisividad y la absorptividad de los gases con estructuras no simétricas pueden llegar a ser importantes. En la industria, los *gases no simétricos* más importantes son el H_2O , CO_2 , CO , SO_2 , NH_3 y los *hidrocarburos* CH_3OH , CH_3-CH_2OH , etc, que tienen poderes emisivos y absorbentes tales, que la influencia de la radiación es más importante que la debida a la convección, siendo el H_2O y CO_2 los que intervienen más directamente en estos procesos.

Otra diferencia importante entre las propiedades radiativas de los sólidos y gases opacos es el hecho de que la forma geométrica del gas afecta a estas propiedades, mientras que en un sólido opaco las propiedades no dependen de la forma del mismo.

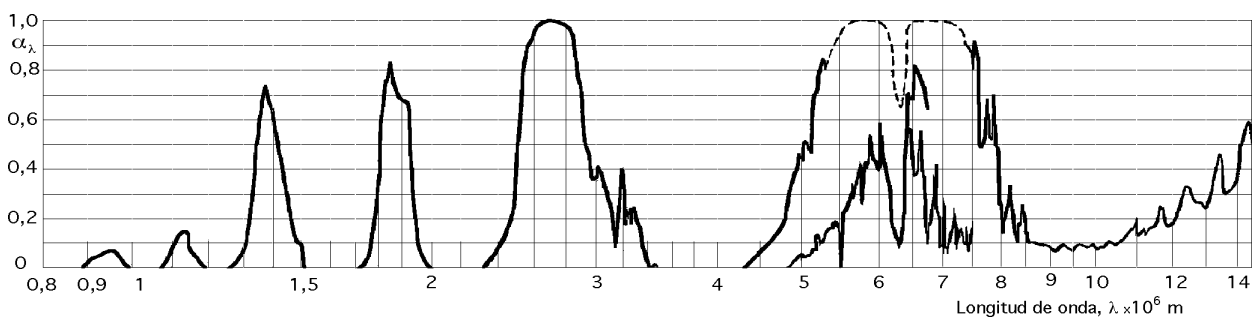


Fig XXI.5.- Absorptividad monocromática del vapor de agua

En la Fig XXI.5 se muestra la absorptividad monocromática del vapor de agua y en la Fig XXI.11 la del CO_2 .

Las propiedades se pueden resumir como sigue:

- Los poderes emisivo y absorbente de un gas son función de la temperatura.
- Como los gases están casi siempre mezclados con gases diatérmicos, el poder emisivo depende de la presión parcial del gas no diatérmico en la mezcla $= f(p)$
- En los sólidos, la radiación emitida por las moléculas lejos de la superficie es frenada por las moléculas de la superficie.

En un gas la movilidad más grande de las moléculas y su mayor distancia entre ellas hacen que una parte importante de la radiación emitida por las partes profundas llegue al contorno de delimitación de la masa. Las capas gruesas de un gas absorben más energía y transmiten menos que una capa delgada, por lo que además de especificar las propiedades que fijan el estado del gas, tales como la presión y la temperatura, hay que especificar una *longitud característica* L de la masa del gas antes de determinar sus propiedades radiativas, siendo el poder emisivo y el absor-

bente función de esta longitud L que debe recorrer la radiación en la masa. El poder emisor es función de p y L y por lo tanto del producto, $p(\text{atm}) \cdot L$ (metros), Fig XXI.6.

d) El poder absorbente del gas no es nunca igual al poder emisor ., que diferencia los gases de los sólidos grises para los cuales $\epsilon = \alpha$. Sin embargo, las llamas grises tienen, en general, un poder absorbente igual al poder emisor.

e) Es necesario distinguir los gases que emiten o absorben radiación y las llamas que están cargadas de partículas sólidas (hollín, cenizas o incombustibles), siempre luminosas, frecuentemente opacas y de poder emisor siempre muy elevado.

EMISIVIDAD DE LOS GASES.- En los gases, el poder emisor es función de la temperatura, de la presión parcial y de la longitud L que el gas debe recorrer; el valor de L depende de la forma del recinto ocupado por los gases y su valor se ha determinado experimentalmente.

En la Fig XXI.6 se muestran las curvas de la emisividad del vapor de agua a la presión total de 1 atm. y en la Fig XXI.7 las curvas de emisividad del dióxido de carbono, también a la presión de 1 atm; en estas figuras, los símbolos $p_{\text{H}_2\text{O}}$ y p_{CO_2} representan las presiones parciales de los gases.

Cuando la presión total del gas sea distinta de 1 atm, los valores de las emisividades se multiplican por un factor de corrección, cuyos valores correspondientes al vapor de agua y al dióxido de carbono $C_{\text{H}_2\text{O}}$ y C_{CO_2} vienen representados en las Fig XXI.8.9 respectivamente.

La emisividad del H_2O y del CO_2 a la presión total p_t distinta de 1 atm viene dada por:

$$(\epsilon_{\text{H}_2\text{O}})_{p_t} = C_{\text{H}_2\text{O}} (\epsilon_{\text{H}_2\text{O}})_{\text{presión atm}}$$

$$(\epsilon_{\text{CO}_2})_{p_t} = C_{\text{CO}_2} (\epsilon_{\text{CO}_2})_{\text{presión atm}}$$

La superficie negra A_1 recibe por unidad de superficie un promedio de energía del gas, igual a la energía que recibiría una superficie negra ficticia de área unidad, colocada en el centro de una semiesfera de radio L constituida por el mismo gas y a la misma temperatura T_g .

LONGITUD CARACTERÍSTICA.- La longitud característica del gas L se denomina *longitud media del haz*; sus valores para diversas geometrías se indican en la Tabla XXI.1.

Para otras geometrías distintas a las relacionadas en la Tabla XXI.1, se puede aproximar la longitud media del haz, siendo V_{gas} el volumen del gas y A la superficie del mismo, mediante la relación:

$$L = 3,6 \frac{V_{\text{gas}}}{A}$$

A veces, un horno o una cámara de combustión se pueden considerar como recintos de una sola superficie, es decir, con una temperatura de pared y una emitancia uniformes, por lo que A sería la superficie total del recinto y V_{gas} el volumen.

Para un conducto largo de sección transversal A_{trans} y perímetro P :

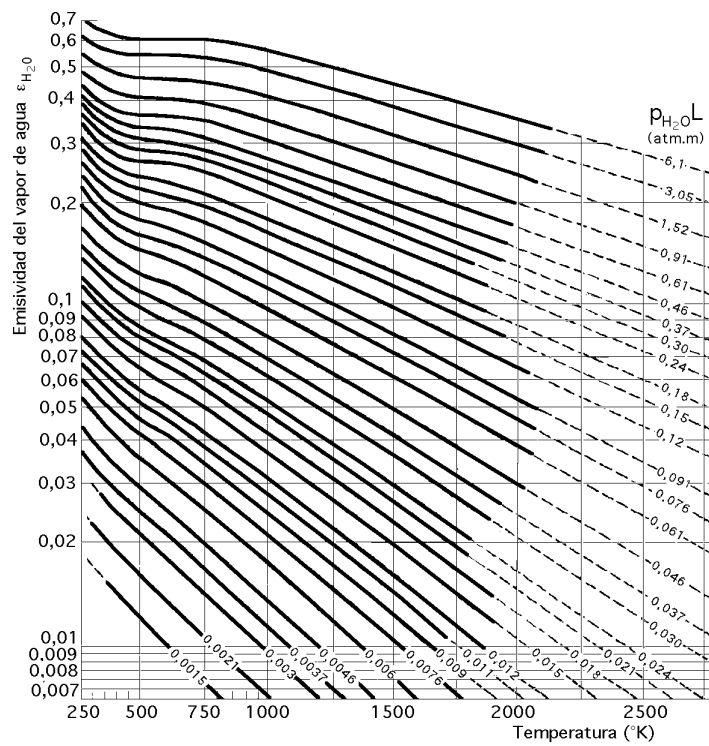


Fig XXI.6.- Emisividad del vapor de agua a la presión total de 1 atm, (Hottel)

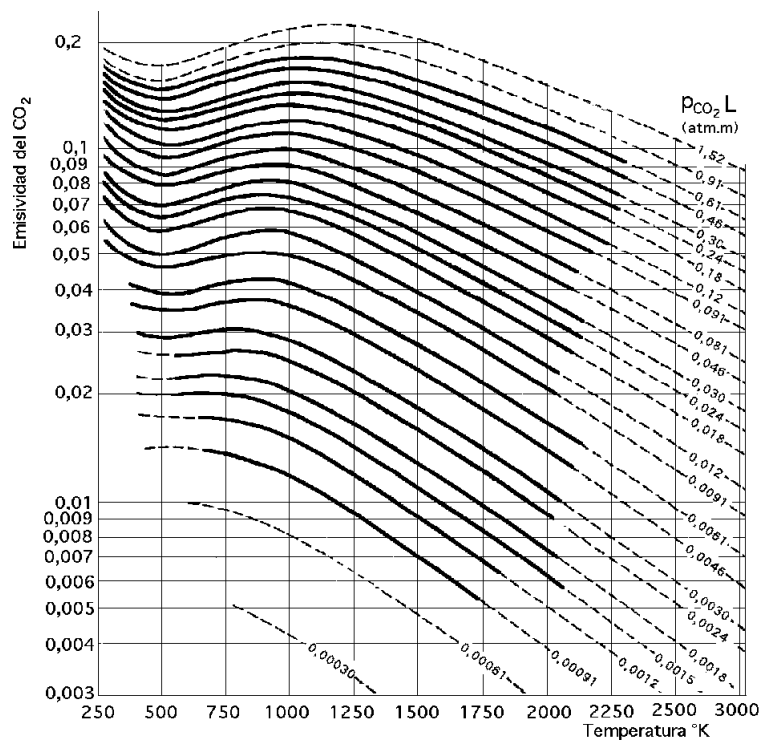


Fig XXI.7.- Emisividad del CO_2 a la presión total de 1 atm, (Hottel)

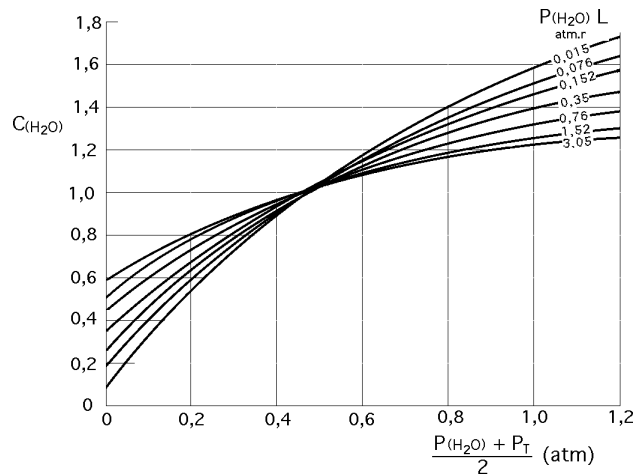


Fig XXI.8.- Factor de corrección de la emisividad del vapor de agua a presiones distintas de 1 atmósfera, (Hottel)

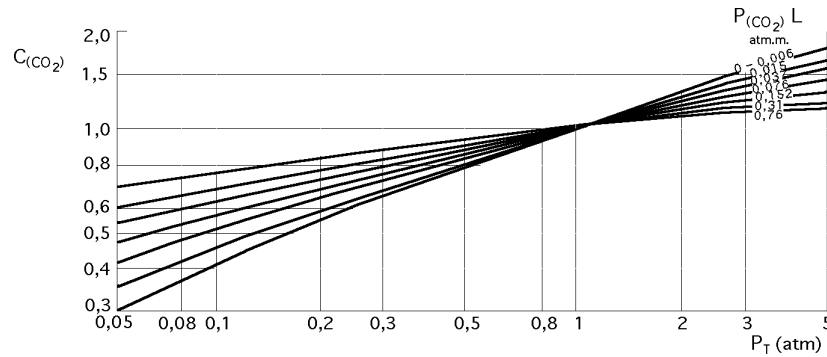


Fig XXI.9.- Factor de corrección de la emisividad del CO₂ a presiones distintas de 1 atmósfera, (Hottel)

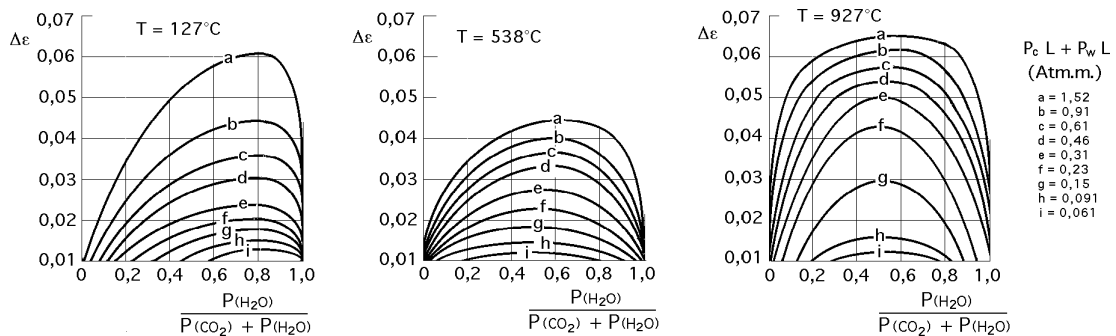


Fig XXI.10.- Factor de corrección de la emisividad de una mezcla de vapor de agua y CO₂ (Hottel)

$$L = 3,6 \frac{A_{\text{trans}}}{P} = d_{\text{equiv}}$$

La longitud media del haz para dos rectángulos paralelos iguales, de dimensiones (a.b), separados una distancia c es:

$$X = \frac{a}{c} ; Y = \frac{b}{c}$$

$$L F_{1-2} = -\frac{4c}{XY} [XY \arctg \frac{XY}{\sqrt{1+X^2+Y^2}} + X \ln \frac{X + \sqrt{1+X^2+Y^2}}{(X + \sqrt{1+X^2}) \sqrt{1+Y^2}} + Y \ln \frac{Y + \sqrt{1+X^2+Y^2}}{(Y + \sqrt{1+Y^2}) \sqrt{1+X^2}} + \sqrt{1+X^2} + \sqrt{1+Y^2} - \sqrt{1+X^2+Y^2} - 1]$$

La longitud media del haz para dos rectángulos que forman 90° y tienen una arista común c de dimensiones (a.c) y (b.c), es:

$$X = \frac{a}{c} ; Y = \frac{b}{c}$$

$$L F_{1-2} = \frac{c}{3} \frac{1}{X} \left[3 X^2 \ln \frac{(1 + \sqrt{1 + X^2}) \sqrt{X^2 + Y^2}}{X (1 + \sqrt{1 + X^2 + Y^2})} + 3 Y^2 \ln \frac{(1 + \sqrt{1 + Y^2}) \sqrt{X^2 + Y^2}}{Y (1 + \sqrt{1 + X^2 + Y^2})} + \right. \\ \left. + 3 X^2 (\sqrt{1 + X^2 + Y^2} - \sqrt{X^2 + Y^2} - \sqrt{1 + X^2}) + 3 Y^2 (\sqrt{1 + X^2 + Y^2} - \sqrt{X^2 + Y^2} - \sqrt{1 + Y^2}) + \right. \\ \left. + (1 + X^2)^{3/2} + (1 + Y^2)^{3/2} + (X^2 + Y^2)^{3/2} - (1 + X^2 + Y^2)^{3/2} + 2 X^3 + 2 Y^3 - 1 \right]$$

Tabla XXI.1.- Longitud media del haz para diversas situaciones geométricas del gas

Geometría	L
Esfera	2/3(Diámetro)
Cilindro infinito	Diámetro
Planos paralelos infinitos	2 (Distancia entre planos)
Cilindro circular infinito radiando al interior de la superficie cilíndrica	0,95 (Diámetro)
Cilindro circular semiinfinito radiando a la base	0,65 (Diámetro)
Cilindro circular semiinfinito radiando al centro de la base	0,90 (Diámetro)
Cilindro circular recto de altura igual a dos diámetros radiando a la base	0,60 (Diámetro)
Cilindro circular recto de altura igual a dos diámetros radiando a la superficie cilíndrica	0,76 (Diámetro)
Cilindro circular recto de altura igual al diámetro, radiando al centro de la base	Diámetro
Cilindro circular recto de altura igual al diámetro, radiando a toda la superficie	0,66 (Diámetro)
Cilindro circular recto de altura igual a la mitad del diámetro, radiando al centro de la base	0,43 (Diámetro)
Cilindro circular recto de altura igual a la mitad del diámetro, radiando a toda la superficie	0,46 (Diámetro)
Cubo radiando a alguna cara	0,6 (Arista)
Paralelepípedo rectangular, 1,1,4, radiando a la cara, 1x4	0,90 (Arista más corta)
Paralelepípedo rectangular, 1,1,4, radiando a la cara, 1x1	0,86 (Arista más corta)
Paralelepípedo rectangular radiando a todas las caras	0,89 (Arista más corta)
Conjunto infinito de tubos al tresbolillo al espacio exterior, Diámetro del tubo = espacio libre	3,4 (Espacio libre)
Conjunto infinito de tubos al tresbolillo al espacio exterior, Diámetro del tubo = (1/2) espacio libre	4,44 (Espacio libre)
Hemisfera radiando a un elemento y al centro de la base	0,5 (Diámetro)
Volumen entre dos planos paralelos radiando a un elemento sobre una de las caras	1,8 (Espaciado entre planos)
Volumen de gas fuera de un conjunto de tubos radiando a un único tubo,	
Disposición al tresbolillo (Distancia entre centros de los tubos, S = 2 D)	3 (S-D)
Disposición al tresbolillo (Distancia entre centros de los tubos, S = 3 D)	3,8 (S-D)
Disposición regular (en línea) S= 2D	3,5 (S-D)

EMISIVIDAD DE UNA MEZCLA DE GASES.- Cuando el H₂O y el CO₂ coexisten ambos en una mezcla, la emisividad se puede calcular sumando la correspondiente a cada uno de los gases, en el supuesto de que cada gas existiera por sí solo, a la que se resta un factor de corrección de la emisividad que indica la emisión de las bandas de longitud de onda que se superponen; el factor de corrección para la mezcla de vapor de agua y bióxido de carbono viene representado en la Fig XXI.9.

La emisividad de una mezcla de H₂O y CO₂ viene dada por:

$$mezcla = C_{CO_2} (CO_2)_{P_T=1} + C_{H_2O} (H_2O)_{P_T=1} -$$

ABSORTIVIDAD DE LOS GASES.- La determinación de la absorptividad de un gas es un poco más compleja que la emisividad ; el procedimiento incluye el uso de los diagramas de emisividades, pero modificando previamente los parámetros utilizados en los mismos.

Hay que recordar que la absorción (o la emisión) de la radiación en gases no tiene lugar sobre todo el espectro, sino que sucede sobre determinadas bandas de longitudes de onda.

En la Fig XXI.11 se muestra el espectro de absorción para el CO₂ en el que el producto de la densidad del gas por el espesor de la capa de gas L vale: $L = 2,44 \text{ kg/cm}^2$.

El espectro se compone de 4 bandas de absorción, posicionadas aproximadamente en las longitudes de onda de 15 μm , 4,3 μm , 2,7 μm y 1,9 μm .

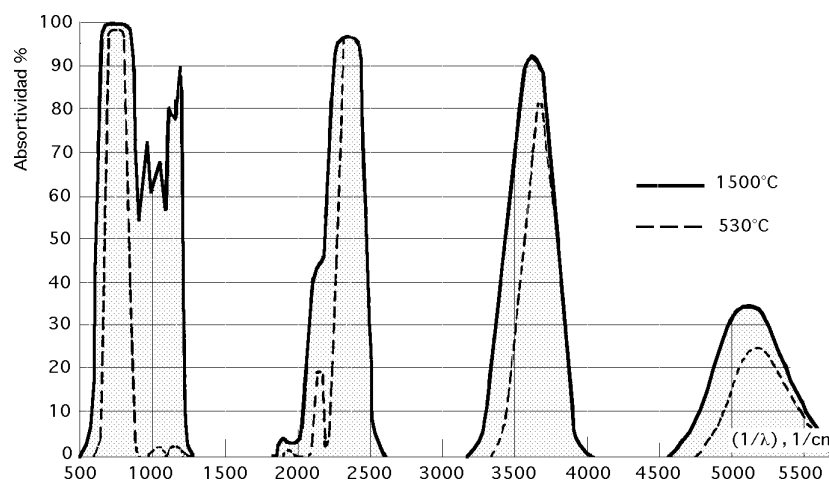


Fig XXI.11.- Absortividad espectral del CO₂ : $L = 2,44 \text{ kg/m}^2$

DETERMINACION PRACTICA DE LA EMISIVIDAD

a) Anhídrido carbónico

La presión parcial p del CO₂ es proporcional a su concentración en la mezcla. Si por ejemplo su proporción en la mezcla es del 12% a la presión atmosférica, se tiene $p = 0,12 \text{ atm}$, pero si la presión total es superior a 1 atmósfera ó 2 atm. en el caso de las calderas Velox, $p = 2 \times 0,12 = 0,24 \text{ atm}$.

Según la forma del recinto y la Tabla correspondiente se determina el producto, $p L$.

Las curvas $p L$ de la Fig XXI.6 permiten determinar conociendo la temperatura.

La absorptividad que es diferente de se determina en la misma figura utilizando el mismo valor de $p L$ que el empleado para la determinación de pero se toma como temperatura la de la superficie $T_{sól}$ del sólido que emite la radiación (si el gas está más frío), o que la recibe (si el gas está más caliente).

La absorptividad del CO₂ se calcula por un procedimiento similar, mediante la ecuación:

$$\epsilon_{CO_2} = C_{CO_2} \cdot \epsilon'_{CO_2} \left(\frac{T_{CO_2}}{T_{sól}} \right)^{0,65}$$

en la que el valor de C_{CO_2} se toma de la Fig XX.9 y el de la emisividad ϵ_{CO_2} se calcula en la Fig XX.6 para el producto: $p_{CO_2} L \frac{T_{sól}}{T_{CO_2}}$.

Ejemplo: En el supuesto de que la proporción de CO_2 sea igual a 12,2%.

$$a) p = 0,122 \text{ atm} ; L = 1 \text{ m} ; T_{gas} = 1.000^\circ C ; T_{sól} = 600^\circ C ; pL = 0,122 ; \epsilon = 0,125 ; \epsilon_{CO_2} = 0,14$$

$$b) p = 0,122 \text{ atm} ; L = 1 \text{ m} ; T_{gas} = 600^\circ C ; T_{sól} = 1000^\circ C ; pL = 0,122 ; \epsilon = 0,14 ; \epsilon_{CO_2} = 0,125$$

b) Oxido de carbono

Para este gas se utiliza el mismo diagrama que para el CO_2 pero se dividen por 2 los valores de ϵ y de ϵ_{CO_2} así determinados.

c) Vapor de agua

Se opera igual que para el CO_2 pero este diagrama se establece para un valor teórico $p = 0$ por lo los valores obtenidos se tienen que multiplicar por un factor de corrección que se obtiene de la Fig XXI.6.

Si el vapor de agua se encuentra a una temperatura T_{H_2O} para una radiación incidente que procede de una superficie a la temperatura $T_{sól}$, la absorptividad del H_2O se calcula mediante la ecuación:

$$\epsilon_{H_2O} = C_{H_2O} \cdot \epsilon'_{H_2O} \left(\frac{T_{H_2O}}{T_{sól}} \right)^{0,45}$$

en la que el valor de C_{H_2O} se obtiene de la Fig XXI.6 y el de la emisividad del vapor de agua ϵ'_{H_2O} de la Fig XXI.5, evaluada a la temperatura $T_{sól}$ para el producto (presión x longitud media del haz), $p_{H_2O} L (T_{sól}/T_{H_2O})$.

Para una presión parcial del vapor de agua = 0,122 atm, resulta:

$L = 1 \text{ m} , T_{gas} = 1025^\circ C ; T_{sól} = 750^\circ C ; pL = 0,122 ; \epsilon = 0,105 ; \epsilon_{CO_2} = 0,14$, el coeficiente de corrección es 1,07, luego:

$$\epsilon = 0,105 \times 1,07 = 0,112$$

$$\epsilon_{CO_2} = 0,14 \times 1,07 = 0,15$$

d) Humos

Los humos son producto de la combustión y contienen anhídrido carbónico, vapor de agua, nitrógeno y en el caso mas general, oxígeno, óxido de carbono y un poco de anhídrido sulfuroso, que se desprecian para estos cálculos a menos que estén en cantidades importantes.

Si tanto el vapor de agua como el CO_2 están presentes en una mezcla gaseosa, la absorptividad es de la forma:

$$(\text{mezcla}) = \epsilon_{CO_2} + \epsilon_{H_2O}$$

en la que ϵ_{H_2O} y ϵ_{CO_2} se calculan mediante las ecuaciones anteriores, mientras que ϵ_{total} se obtienen de la Fig XXI.10 a la temperatura $T_{sól}$.

Cuando el CO_2 y el H_2O radían, cada uno de ellos es opaco a la radiación del otro, ya que ellos no son diatérmicos, es decir, el H_2O intercepta una parte de la radiación emitida por el CO_2 y viceversa, introduciéndose un término correctivo ϵ_{cor} que se tiene que restar de la suma de los ϵ .

Este término viene dado por una serie de curvas cuyo eje de abscisas es $\frac{\epsilon_{H_2O}}{\epsilon_{H_2O} + \epsilon_{CO_2}}$, mientras que $\epsilon_{H_2O} L + \epsilon_{CO_2} L$, figura como un parámetro.

En el ejemplo anterior de los humos con 12,2% de CO_2 y 12,2% de vapor de agua se tenía:

$$\epsilon_{CO_2} = 0,125 \quad ; \quad \epsilon_{H_2O} = 0,112$$

Se considera el diagrama por encima de 927°C:

$$\epsilon_{CO_2} L + \epsilon_{H_2O} L = 0,122 + 0,122 = 0,244$$

$$\frac{\epsilon_{H_2O} L}{\epsilon_{CO_2} + \epsilon_{H_2O}} = \frac{0,122}{0,244} = 0,5$$

Se puede utilizar la curva 0,228 que proporciona, $\epsilon_{cor} = 0,035$.

El *poder emisivo total de los humos es:*

$$0,112 + 0,125 - 0,035 = 0,202$$

El *calor intercambiado es:*

$$Q_{1(neta)} = 4,92 \quad \epsilon_{sól} \left\{ \epsilon_{gas} \left(\frac{T_{gas}}{100} \right)^4 - \epsilon_{sól} \left(\frac{T_{sól}}{100} \right)^4 \right\}$$

que indica que el gas emite pero, al no ser transparente a la radiación, absorbe una parte de la radiación de vuelta:

$$\epsilon_{gas} \left(\frac{T_{sól}}{100} \right)^4$$

Se mejora el resultado si en vez de $\epsilon_{sól}$ se toma $\frac{\epsilon_{sól} + 1}{2}$

XXI.3.- RADIACION DE NUBES DE PARTICULAS

La radiación de nubes de partículas puede ser debida a las llamas de carbón pulverizado, llamas de gases naturales, llamas de residuos de fuel producidos en la combustión de líquidos pesados, llamas luminosas de sebos originados en el craking de hidrocarburos pesados, llamas con mucho polvo, etc; las llamas se encuentran cargadas de partículas incandescentes que aumentan

su poder emisor F como consecuencia del recalentamiento de las partículas de combustible no quemadas, o por la formación de carbono por craking, o como consecuencia de la presencia de cenizas, etc.

Para el caso de *llamas de carbón pulverizado*, debe efectuarse un proceso meticuloso de preparación del polvo de carbón, de manera que no basta una molienda, sino que además hay que seleccionar el tamaño del grano, de forma que las partículas no superen las 200 micras.

En el caso de *llamas luminosas* de sebos debidos al craking de hidrocarburos pesados, (el sebo se origina por la parte pesada del hidrocarburo), el tamaño de dichos sebos es notablemente inferior siendo del orden de 0,06 micras.

En el caso de llamas debidas al *fuel* originado en la combustión de líquidos pesados, además de los sebos existen otros sólidos que los acompañan cuyas partículas son del orden de 50 a 100 micras. Para el caso de llamas debidas a partículas de polvo, el fenómeno es mucho menos importante.

Como se puede observar, de todo esto se deduce que las dimensiones de unos casos son muy distintas a las de otros y, por lo tanto, el comportamiento de la llama será también muy distinto.

Las partículas del orden de magnitud de 200 micras son opacas a la radiación, mientras que las partículas del orden de magnitud de 0,06 micras son semitransparentes a la misma, por lo que el estudio de las *llamas luminosas de sebos* es distinto al de las *llamas de carbón pulverizado*.

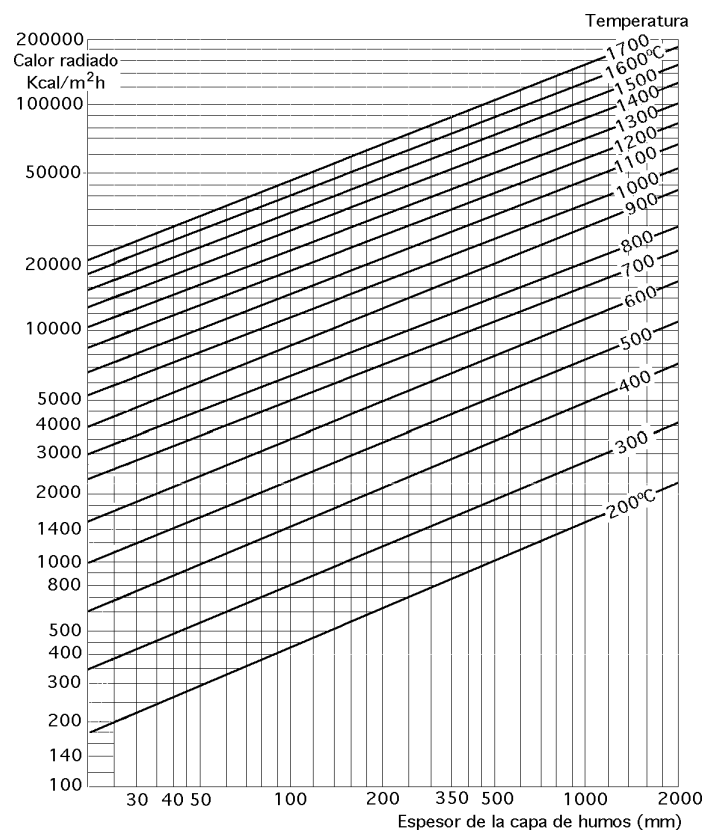


Fig XXI.12.- Humos de gas de horno de cok

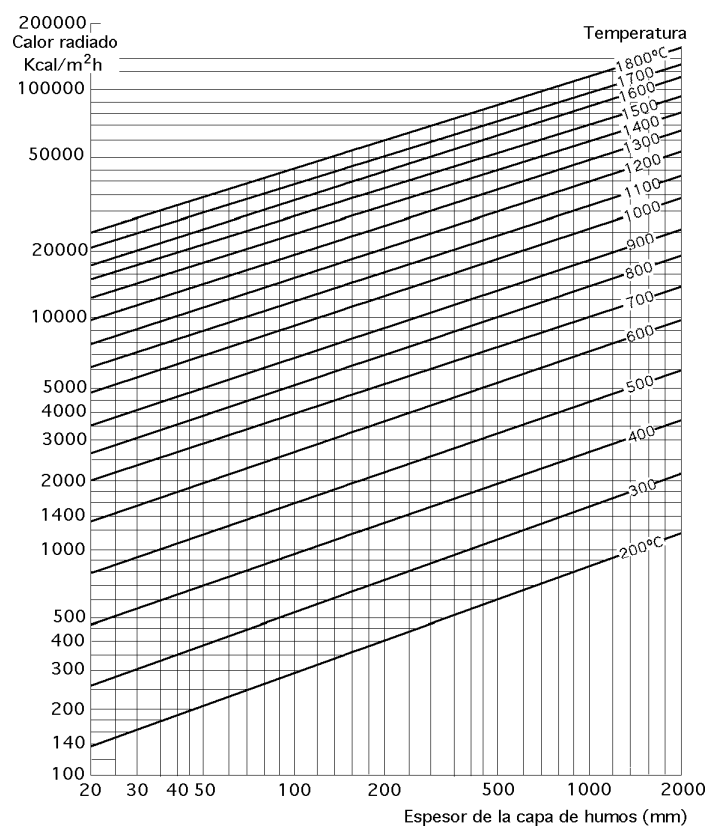


Fig XXI.13.- Humos de gas de gasógeno

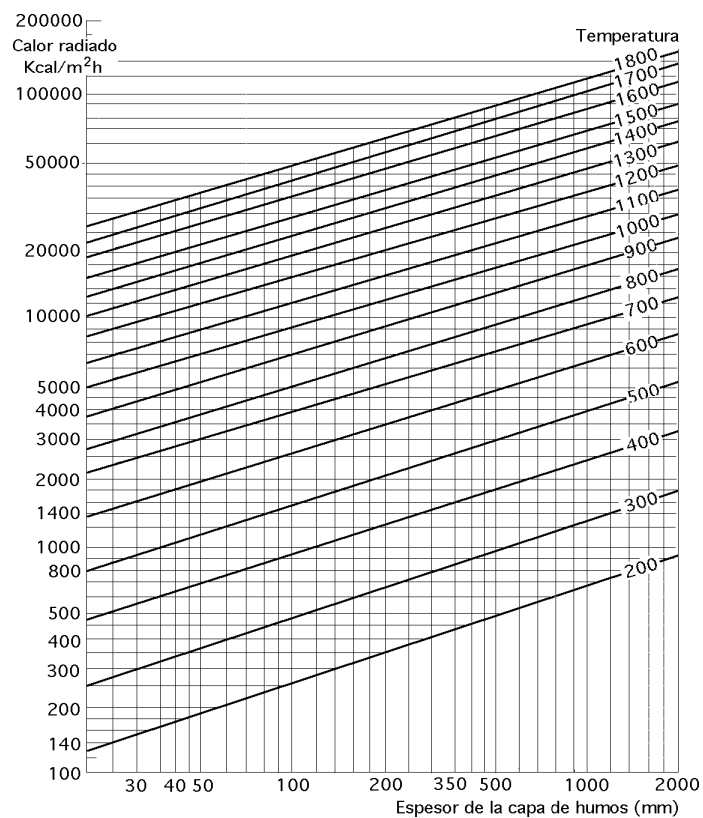


Fig XXI.14.- Humos de gas de horno alto

Para llamas claras de gases pobres y de gas de petróleo se toma $F = \text{gases}$

Para llamas de mazut, se toma:

$$F = \text{gases} + 0,1, \text{ (cuando el aspecto de la llama se aproxima a las escalas 1 y 2 de Ringelmann)}$$

$$F = \text{gases} + 0,2, \text{ (cuando el aspecto de la llama se aproxima a las escalas 3 y 4 de Ringelmann)}$$

siendo las escalas de Ringelmann unas placas cuadrículadas de espesor variable, según la progresión de la escala. Un sistema óptico permite comparar el aspecto de los humos con la impresión gris proporcionada por la visión de las escalas de Ringelmann a una distancia determinada y apreciar así la calidad de la combustión.

Para llamas de color más fuerte la combustión es defectuosa y el cálculo no tiene sentido

En la llama, el valor de F no es nunca constante, por lo que existiendo en la misma zonas diferentes, se puede considerar la radiación particular del fondo de la llama, en donde la temperatura es muy elevada.

LLAMAS LUMINOSAS.- El poder emisor de la llama se mejora añadiendo bencol, ya que se favorece la formación de sebos; el rendimiento obtenido así es mucho mayor. Se han llegado a obtener por este procedimiento valores de la emisividad $\epsilon_{\text{gas}} = 0,95$, muy próximos a la unidad.

El mecanismo de la formación de sebos no es muy conocido, pero se conocen algunos resultados; por ejemplo, se ha comprobado que si se mezcla oxígeno con el combustible no hay formación de sebos; también se sabe que la mezcla no debe ser homogénea y que existe una dependencia de la relación (aire-combustible), de la cantidad de aire primario, del grado de atomización del combustible, de la energía cinética de los gases, de la geometría de la llama, de la presencia de sumideros y refractarios, etc.

Para determinar el valor de la emisividad de las llamas luminosas, se parte de la energía dE que incide sobre un volumen determinado, que se supone conocida; en un espesor dL habrá una absorción de energía de la forma:

$$dE = -K E S dL$$

que integrada para una superficie S unidad:

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{E} = - \int_0^L K dL \quad ; \quad \ln \frac{E}{E_0} = -K L \quad ; \quad \frac{E}{E_0} = e^{-KL}$$

y considerando la absorción en tanto por uno de energía radiada, se tiene:

$$= \frac{E_0 - E}{E_0} = 1 - \frac{E}{E_0} = 1 - e^{-KL}$$

y como y están relacionadas entre sí, se puede poner:

$$= 1 - e^{-C L f(\quad)}$$

en la que C es una constante y $f(\quad)$ depende de una serie de factores, teniendo que recurrir a la

medida de temperaturas por técnicas de pirometría óptica o caña pirométrica.

LLAMAS DE CARBÓN PULVERIZADO.- El cálculo experimental del coeficiente de emisividad conduce a la expresión:

$$= 1 - e^{-x}, \text{ siendo: } x = \frac{L \left\{ (1 - Z) \frac{G_h}{d_0} \right\}^{2/3}}{T_m(\text{llamas})}$$

con:

L recorrido de la radiación

Z es el tanto por uno de sustancias volátiles y de humedad contenidas en el carbón

G_h es el peso de los productos de la combustión por unidad de peso kg/kg

d₀ es el diámetro de las partículas de carbón pulverizado antes de su combustión,

o y son los pesos específicos antes y después de la crakización

Hay que tener en cuenta que en estas emisiones aparece el fenómeno de la luminosidad con la consiguiente radiación, por lo que el valor de obtenido es por defecto. Los valores obtenidos en la mayoría de los casos, son muy próximos a la unidad. Un horno limpio pierde emisividad, mientras que otro con polvo la gana.

Para la combustión del carbón pulverizado, se adopta: $F = F = 0,8 \div 1$

XXI.4.- CALCULOS EN HORNOS Y HOGARES

El cálculo en hornos se puede hacer por aproximaciones sucesivas, dividiendo el horno en varias partes elegidas arbitrariamente y tales que en cada una de ellas las condiciones sean suficientemente uniformes.

Teniendo en cuenta el calor absorbido o proporcionado por las reacciones que se verifican, el calor aportado por los cuerpos con que se carga o que se elimina por los que se extraen, se puede hacer un balance térmico previo, conociendo los rendimientos usuales para hornos.

Para la conservación del buen estado de los refractarios no es prudente sobrepasar las 300.000 Kcal/h.m³ de laboratorio y de hogar, por lo que así se tiene una primera aproximación del volumen a adoptar. Además, si los elementos reaccionantes (hornos de vidrio por ejemplo) atacan el refractario hay que refrigerar las paredes, lo que implica la solidificación de una parte de las escorias fundidas que protegerán a los ladrillos.

En la cámara de combustión la llama se puede aproximar a una esfera, cilindro o cubo, evitándose la forma cónica en que la superficie radiante es menor y que por el vértice podría provocar recalentamientos muy localizados; la llama no se debe dirigir directamente al objeto a calentar, sino paralelamente para un mejor reparto del calor.

En la *construcción de un horno* hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones:

a) Las pérdidas al exterior a través de las paredes refractarias y algunas veces a través del suelo, son iguales a la convección entre llama y refractario, o llama y receptor, compensándose

b) La llama es gris, $F = F$; el valor de F es:

$$F = \frac{\epsilon_{\text{gas}} - \epsilon_{\text{gas}} \left(\frac{T_{\text{receptor}}}{T_{\text{gas}}} \right)^4}{1 - \left(\frac{T_{\text{receptor}}}{T_{\text{gas}}} \right)^4}$$

c) Todas las superficies refractarias tienen una temperatura común, pero desconocida

d) Se puede considerar para la llama y los productos de la combustión una temperatura media T_{gas}

e) El receptor térmico (cuerpo a calentar gris), tiene una temperatura superficial uniforme T_{Receptor} , un factor de emisión ϵ_R y una superficie A_R .

El calor emitido por la llama se determina por la ecuación:

$$Q_{1(\text{neta})} = A_R F_{\text{gas-R}}^* \{ E_{b(\text{gas})} - E_{b(\text{Receptor})} \} + h_{\text{gas-R}} A_R (T_{\text{gas}} - T_{\text{Receptor}}) + U_{\text{gas-ext}} A_{\text{ext}} (T_{\text{gas}} - T_{\text{ext}})$$

en la que el primer sumando es la radiación de las llamas al receptor, el segundo es la convección hacia el receptor y el tercero son las pérdidas al exterior

Esta ecuación es válida para cada sección en que se ha dividido el horno

Para las demás secciones se repite el mismo cálculo

El valor de $F_{\text{gas-R}}^* = \frac{1}{\frac{1}{F_{\text{gas-R}}} + \frac{1}{\epsilon_R} - 1}$, con $F_{\text{gas-R}} = 1 + \frac{\frac{A_R}{A_{\text{gas}}}}{1 + \frac{\epsilon_{\text{gas}}}{(1 - \epsilon_{\text{gas}}) F_{\text{gas-R}}}}$

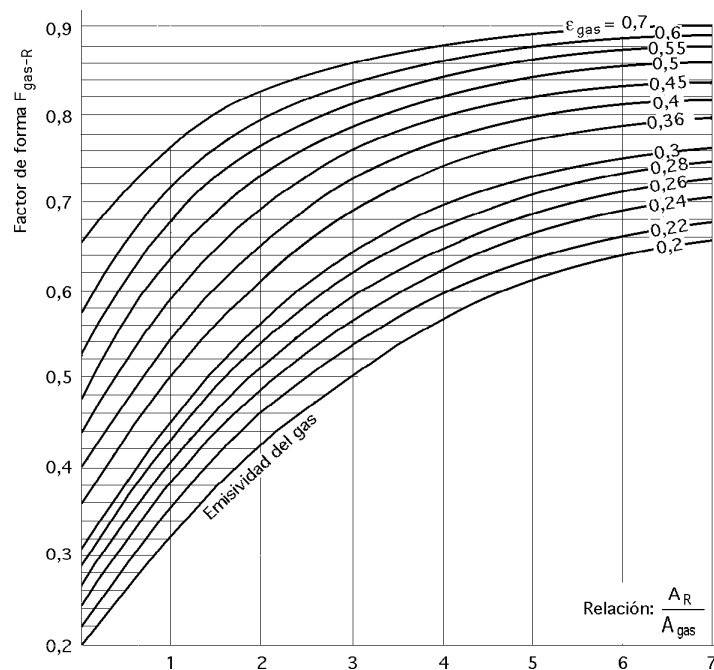


Fig XXI.15.- Factor de forma $F_{\text{gas-R}}$ relativo a la radiación entre la llama y el receptor

El valor de $F_{\text{gas-R}}$ se puede obtener, con bastante aproximación, utilizando el diagrama de la Fig XXI.15, establecido para un valor de $\epsilon_R = 0,9$.

Las temperaturas de entrada y salida de cada sección se determinan a partir del calor q_F consumido en la misma, por la relación:

$$q_F = G c_{pF} (T_{\text{Entrada llama}} - T_{\text{Salida llama}})$$

donde G es la masa total del gas de combustión y c_{pF} el calor específico medio a presión constante del gas en esta sección

Si R es diferente de 0,9 se corrige el valor encontrado para $R = 0,9$, en la forma:

$$(F_{\text{gas-R}})_R = F_{R=0,9} \frac{R}{0,9} \frac{\frac{\text{gas}}{\text{gas}} (1 - 0,9) + 0,9}{(1 - R) + R}$$

XXI.5.- MEDIDA DE TEMPERATURAS

La medida de las temperaturas del interior de un horno se hace mediante pirómetros y cañas pirométricas.

Pirometría óptica.- Los aparatos puramente ópticos utilizan la ley de Wien y deducen la temperatura del brillo de la llama.

Los aparatos semiópticos proyectan una imagen de la abertura del horno sobre un par termoelectrico que determina la temperatura.

Los pirómetros no miden más que la temperatura de lo que ellos ven, en general, la de la pared opuesta a la abertura, por lo que no permiten medir la temperatura de un gas no opaco. La medida de la temperatura de gases o de llamas, con estos aparatos, está sujeta a errores imprevisibles.

Caña pirométrica.- La caña pirométrica se utiliza a la manera de un termómetro. La lectura no indica nunca la temperatura del medio, sino la de la caña. En efecto el pirómetro situado en una condición recibe el calor del gas que le rodea y emite a su vez hacia las paredes lo que él ve.

Si: T_{pir} es la temperatura conocida del pirómetro

T_{gas} la temperatura desconocida del gas

T_{pared} la temperatura de las paredes que se puede medir

A_{pir} la superficie del pirómetro

ϵ_{pir} su poder emisor

la expresión que proporciona el valor de T_{gas} es:

$$T_{\text{gas}} = (T_{\text{pir}} - T_{\text{pared}}) \frac{A_{\text{pir}}}{h_{C(\text{gas-pir})}} + T_{\text{pared}}, \text{ siendo: } = \frac{4,92 \epsilon_{\text{pir}} \left\{ \left(\frac{T_{\text{pir}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{pared}}}{100} \right)^4 \right\}}{T_{\text{pir}} - T_{\text{pared}}}$$

XXI.6.- EJEMPLO

a) **Radiación entre sólidos.**- Calcular el flujo de calor intercambiado entre la pared de un horno de dimensiones $A_1 = 6 \times 2,50 \text{ m}^2$, a la temperatura de 250°C y una superficie $A_2 = 2 \times 1 \text{ m}^2$ situada a 3 m en el centro de la pared del horno.

Los obreros tienen que situarse del lado de A_2 , entre A_1 y A_2 , y trabajan en una corriente de aire a 20°C , siendo el coeficiente de convección por ventilación: $h_{c(\text{vent})} = 150 \text{ Kcal/h.m}^2\text{K}$.

Para los ladrillos y para la pared receptora: $\epsilon_{\text{pared}} = \epsilon_1 = 0,8$

El calor $q_{1(\text{neta})}$ emitido por el horno es:

$$q_{1(\text{neta})} = A_1 F_{12} \frac{\frac{E_{b1} - E_{b(\text{pared})}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_{\text{pared}}} - 1}} = (2,5 \times 6) \text{ m}^2 \times 0,5 \frac{(523,4^4 - T_{\text{pared}}^4)}{\frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,8} - 1} = 18.405 - 2,44 \cdot 10^{-7} T_{\text{pared}}^4$$

que en el equilibrio tiene que ser igual al calor evacuado al exterior por convección:

$$q_{\text{conv}} = h_{c(\text{vent})} A_2 (T_{\text{pared}} - T_{\text{exterior}}) = 150 \times (2 \times 1) (T_{\text{pared}} - 293) = 300 T_{\text{pared}} - 87.900$$

por lo que la temperatura de la pared es, $T_{\text{pared}} = 342^\circ\text{K} = 69^\circ\text{C}$

siendo imposible que los obreros puedan permanecer en esa zona.

Para mejorar esta situación en lo que respecta a la protección del personal, se pueden adoptar algunas soluciones, como aumentar la ventilación de aire o interponer pantallas.

Como la pared de superficie A_{pared} tiene una temperatura de 342°K recibe un calor:

$$q_{\text{conv}} = 300 T_{\text{pared}} - 87900 = 14700 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Suponiendo que el aire se insufla a 60°C y que el calor específico del aire es: $c_{\text{paire}} = 0,24$, la cantidad de aire a utilizar sería:

$$14700 = G_{\text{aire}} 0,24 (60-20) \quad G_{\text{aire}} = 1531,25 \frac{\text{kg}}{\text{hora}} = 1185 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}}$$

Para que la permanencia fuese aceptable, sería necesario triplicar este volumen por lo que la corriente de aire presentaría inconvenientes muy graves para el personal.

b) **Interposición de pantallas.**- En las condiciones anteriores, vamos a analizar el efecto de interponer una pantalla de palastro delgada de $2 \times 1 \text{ m}^2$ a una distancia de 1,5 m delante de la superficie a proteger, a igual distancia de A_1 y de A_2 ; se puede poner que:

$$\frac{1}{2} (18.405 - 2,44 \cdot 10^{-7} T_{\text{pared}}^4) = 300 T_{\text{pared}} - 87.900 \quad T_{\text{pared}} = 320^\circ\text{K} = 47^\circ\text{C}$$

observándose que la mejora es apreciable, pero insuficiente.

Si en lugar de una pantalla, se utilizan dos, espaciadas 10 cm, la igualdad anterior toma la

forma:

$$\frac{1}{3} (18405 - 2,44 \cdot 10^{-7} T_{\text{pared}}^4) = 300 T_{\text{pared}} - 87900 \quad T_{\text{pared}} = 311^{\circ}\text{K} = 38^{\circ}\text{C}$$

por lo que es suficiente una ventilación del orden de 1.000 m³/hora para eliminar las:

$$\frac{14700}{3} = 4900 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

que recibe la pared.

El problema tendría entonces solución.

Ingeniería Energética

Problemas de Ingeniería Térmica

Pedro Fernández y Carlos Renedo



Régimen Estacionario

Paredes y tubos, cilindros, esferas, calderas, aislantes, chimeneas, elementos finitos, superposición, tanques, hornos



Régimen Transitorio

Placas, paredes, termopares, templado, hornos, laminación, recuperadores, corrientes de aire, cojinetes, tratamientos térmicos



Convección

Aceites, refrigeración, calefacción, capilares, paredes, calderas, tubos



Combustión

Calderas, instalaciones térmicas, hidrocarburos



Aletas

Anulares, protuberancias, radiadores, geometrías longitudinales y transversales, calefacción, termopares



Intercambiadores de Calor

Flujo cruzado, contracorriente, carcasa y tubos, eficiencia, LMTD



Radiación

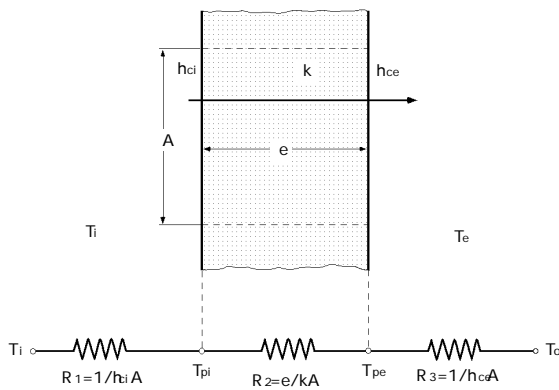
Emisividad, factor de visión, factor de forma, cuerpos negros, superficies grises

[Principal](#) - [Ingeniería Térmica](#) - Problemas

II.1.- Una pared de ladrillo de 0,1 metros de espesor y $k = 0,7 \text{ W/m}^\circ\text{K}$, está expuesta a un viento frío de 270°K , con un coeficiente de película de $40 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$. El lado opuesto de la pared está en contacto con el aire en calma a 330°K , y coeficiente de película de $10 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

Calcular el calor transmitido por unidad de área y unidad de tiempo.

RESOLUCION



$$q = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_i} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$i=1$

$$R_1 = \frac{1}{h_{ci} A} = \frac{1}{40 \times 1} = 0,025 \text{ (}^\circ\text{K/W)}$$

$$R_2 = \frac{e}{k A} = \frac{0,1}{0,7 \times 1} = 0,143 \text{ (}^\circ\text{K/W)}$$

$$R_3 = \frac{1}{h_{ce} A} = \frac{1}{10 \times 1} = 0,1 \text{ (}^\circ\text{K/W)}$$

Calor transmitido por unidad de superficie y unidad de tiempo,

$$\frac{q}{A} = \frac{330 - 270}{0,025 + 0,143 + 0,10} = 224 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

II.2.- Una pared plana grande, tiene un espesor de 0,35 m; una de sus superficies se mantiene a una temperatura de 35°C , mientras que la otra superficie está a 115°C . Únicamente se dispone de dos valores de la conductividad térmica del material de que está hecha la pared; así se sabe que a 0°C , $k = 26 \text{ W/m}^\circ\text{K}$ y a 100°C , $k = 32 \text{ W/m}^\circ\text{K}$.

Determinar el flujo térmico que atraviesa la pared, suponiendo que la conductividad térmica varía linealmente con la temperatura

RESOLUCION

Se sabe que para $T = 0^\circ\text{C}$; $k = 26 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}$ y que para $T = 100^\circ\text{C}$; $k = 32 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}$

La temperatura media de la pared es: $T_p = \frac{115 + 35}{2} = 75^\circ\text{C}$

El coeficiente de conductividad térmica media se puede obtener interpolando linealmente entre las dos temperaturas dadas,

$$\frac{\hat{k} - 26}{75} = \frac{32 - 26}{100}; \quad \hat{k} = 26 + 4,5 = 30,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$$

$$\text{Flujo térmico a través de la pared: } \frac{q}{A} = \hat{k} \frac{T_{pi} - T_{pe}}{e} = 30,5 \times \frac{115 - 35}{0,35} = 6971,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

II.3.- Calcular la densidad de flujo térmico por metro lineal de un conducto cilíndrico, de diámetro exterior $d_e = 12 \text{ cm}$, y diámetro interior $d_i = 5 \text{ cm}$, si la temperatura $T_e = 200^\circ\text{C}$ y la interior $T_i = 60^\circ\text{C}$. Se supondrá una conductividad térmica del material, a la temperatura media, de $0,50 \text{ Kcal/m.h}^\circ\text{C}$

RESOLUCION

$$q = -k A \frac{dT}{dr} = -k (2 \pi r L) \frac{dT}{dr} = -2 \pi k L \frac{T_{pi} - T_{pe}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = -2 \pi \times 0,5 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^\circ\text{C}} \times 1 \text{ m} \times \frac{60 - 200}{\ln \frac{6}{2,5}} = 502,3 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

II.4.- En un tubo cilíndrico de 4 cm de diámetro interior y 8 cm de diámetro exterior se transmite calor por conducción en dirección radial, manteniéndose las temperaturas de las superficies interior y exterior a $T_{pi} = 80^{\circ}\text{C}$ y $T_{pe} = 100^{\circ}\text{C}$. Si la conductividad térmica del material de que está formado el tubo varía linealmente con la temperatura en la forma,

$$k = 1 + 0,004 T, \text{ con } k \text{ en Kcal/m.h.}^{\circ}\text{C, y } T \text{ en } ^{\circ}\text{C}$$

Determinar la temperatura del tubo en la zona correspondiente a un diámetro $d=6$ cm en los siguientes supuestos,

a) Trabajando con el valor medio de k

b) Trabajando con el valor de k correspondiente a cada punto del tubo.

RESOLUCION

a) Trabajando con el valor medio de “k”,

$$\hat{k} = \frac{\int_{T_{pi}}^{T_{pe}} k dT}{T_{pe} - T_{pi}} = \frac{\int_{80}^{100} (1 + 0,004 T) dT}{100 - 80} = \frac{(100 - 80) + 0,004 \frac{100^2 - 80^2}{2}}{100 - 80} = 1,36 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^{\circ}\text{C}}$$

$$q = 2 \hat{k} L \frac{T_{pe} - T_{pi}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = 2 \times 1,36 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^{\circ}\text{C}} \right) \times 1 \text{ m} \frac{100 - 80}{\ln \frac{4}{2}} = 246,56 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Temperatura T del tubo en un diámetro correspondiente a, $d = 6$ cm

$$2 \times 1,36 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^{\circ}\text{C}} \right) \times 1 \text{ m} \frac{100 - T}{\ln \frac{4}{3}} = 246,56 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} ; T = 91,7^{\circ}\text{C}$$

b) En el supuesto de trabajar con el valor de “k” correspondiente a cada punto del tubo, se puede suponer un valor de “k” de la forma,

$$k = \frac{k_{T_{pe}} + k_T}{2} = \frac{(1 + 0,004 \times 100) + (1 + 0,004 T)}{2} = 1,2 + 0,002 T$$

$$246,56 = \frac{2 (1,2 + 0,002 T)(100 - T)}{\ln \frac{4}{3}} ; 0,002 T^2 + T - 108,72 = 0 ; T = 91,84^{\circ}\text{C}$$

Con esta temperatura de $91,84^{\circ}\text{C}$ habría que volver a reiniciar los cálculos.

II.5.- Un tubo de diámetro $d_e = 0,5$ metros, cuya emitancia superficial vale $\epsilon = 0,9$, que transporta vapor de agua, posee una temperatura superficial de 500°K . El tubo está localizado en una habitación a 27°C , y el coeficiente de transmisión de calor por convección entre la superficie del tubo y el aire de la habitación se puede considerar igual a $h_C = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Calcular

a) La conductancia superficial unitaria combinando radiación y convección

b) El calor disipado por unidad de tiempo y por metro de longitud del tubo

RESOLUCION

a) El tubo se puede considerar como un cuerpo emisor, rodeado por un cuerpo negro que es la habitación; además hay que tener presente la convección. Por lo tanto, la conductancia global será,

$$h = h_C + h_R$$

$$h_C = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}$$

$$Q_R = A (T_{\text{pared}}^4 - T_{\text{ext}}^4) = h_R A (T_{\text{pared}} - T_{\text{ext}})$$

$$h_R = \frac{A (T_{\text{pared}}^4 - T_{\text{ext}}^4)}{A (T_{\text{pared}} - T_{\text{ext}})} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \times 0,9 \times 1 \text{ m}^2 (500^4 - 300^4)^\circ \text{K}^4}{(500 - 300)^\circ \text{K}} = 13,88 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{C}}$$

$$h = h_C + h_R = 20 + 13,88 = 33,88 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

b) Pérdida de calor por unidad de tiempo y por metro de longitud de tubo,

$$Q = d_e L h (T_{\text{pared}} - T_{\text{ext}}) = 0,5 \times 1 \times 33,88 (500 - 300) = 10.650 \text{ W}$$

II.6.- Por una tubería de aluminio circula vapor de agua a 110°C. La tubería tiene un coeficiente de conductividad térmica $k = 185 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, un diámetro interior $d_i = 10 \text{ cm}$, y un diámetro exterior $d_e = 12 \text{ cm}$. La tubería está situada en una habitación en la que la temperatura ambiental del aire es de 30°C, siendo el coeficiente de transferencia térmica convectiva entre la tubería y el aire $h_c = 15 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Determinar la transferencia de calor para los siguientes casos,

a) La tubería no se encuentra aislada

b) La tubería se encuentra aislada y, para ello, se recubre con una capa de aislante de 5 cm de espesor, $k_I = 0,20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$. Se admitirá que es despreciable la resistencia convectiva del vapor.

RESOLUCION

a) Como el h_{Cvapor} es muy elevado, su resistencia convectiva será muy pequeña (despreciable), y podemos considerar que la temperatura interior de la pared coincide con la temperatura del vapor.

$$q = \frac{T_{\text{vapor}} - T_F}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{T_{\text{vapor}} - T_F}{R_2 + R_3} = \frac{T_{\text{vapor}} - T_F}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2k} + \frac{1}{r_e h_{cF}}} = \frac{110 - 30}{\frac{\ln \frac{6}{5}}{2 \times 185} + \frac{1}{2 \times 0,06 \times 15}} = \frac{110 - 30}{\{1,568 \times 10^{-4}\} + 0,1768} = 452 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

b) Tubería con revestimiento térmico,

$$q = \frac{T_{\text{vapor}} - T_F}{R_1 + R_2 + R_3^* + R_4} = \frac{T_{\text{vapor}} - T_F}{R_2 + R_3^* + R_4} = \frac{T_{\text{vapor}} - T_F}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2k} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_e}}{2k^*} + \frac{1}{r_e h_{cF}}} = \frac{110 - 30}{\frac{\ln \frac{6}{5}}{2 \times 185} + \frac{\ln \frac{11}{6}}{2 \times 0,2} + \frac{1}{2 \times 0,11 \times 15}} = \frac{110 - 30}{\{1,568 \times 10^{-4}\} + 0,4823 + 0,09645} = 138,2 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

Se observa que la presencia del aislamiento reduce la pérdida de calor en un 70%. En ambos casos se podía haber despreciado la resistencia térmica de la tubería de Al sin perder mucha exactitud en el cálculo de la transferencia de calor por unidad de tiempo.

II.7.- En la parte exterior de una caldera existe una temperatura de 80°C. Para evitar accidentes se construye un muro que aísla la caldera del medio exterior, que se encuentra a 25°C.

Las dimensiones de este muro son, Longitud 18 m; Altura = 8,50 m; Espesor = 0,40 m

Los coeficientes de transmisión de calor son, $h_{\text{Caire-pared interior}} = 8 \text{ Kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ \text{C}$

$h_{\text{Caire-pared exterior}} = 20 \text{ Kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ \text{C}$

La conductividad térmica del muro, $k = 0,70 \text{ Kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ \text{C}$

Determinar

a) El número de calorías perdidas al exterior a través del muro

b) Se recubre exteriormente la pared con un material aislante, tanto por la parte que mira a la caldera, como la que da al medio exterior; su espesor es de 1 cm., y su conductividad térmica $k^* = 0,06$ Kcal/m.h.°C. ¿Cuál será ahora la cantidad de calor cedida al exterior?

RESOLUCION

a) Número de calorías perdidas al exterior a través del muro

$$Q = S \frac{T_{\text{ext. caldera}} - T_{\text{medio exterior}}}{\frac{1}{h_{C(\text{aire-pared interior})}} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_{C(\text{aire-pared exterior})}}} = (18 \times 8,5) \text{ m}^2 \frac{80 - 25}{\frac{1}{8} + \frac{0,4}{0,70} + \frac{1}{20}} = 11.273,7 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

b) Calor cedido al exterior si se recubre exteriormente la pared con un material aislante, tanto por la parte que mira a la caldera, como la que da al medio exterior, de espesor 1 cm., y conductividad térmica $k^* = 0,06$ Kcal/m.h.°C.

$$Q = (18 \times 8,5) \text{ m}^2 \frac{80 - 25}{\frac{1}{8} + \frac{0,02}{0,06} + \frac{0,4}{0,70} + \frac{1}{20}} = 7.793,38 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

II.8.- Por una tubería de plástico $k = 0,5$ W/m°K circula un fluido de modo que el coeficiente de transferencia de calor por convección, fluido-pared es $h_{cF} = 300$ W/m²°K. La temperatura media del fluido es $T_F = 100^\circ\text{C}$. La tubería tiene un diámetro interior $d_i = 3$ cm, y un diámetro exterior $d_e = 4$ cm. Si la cantidad de calor que se transfiere a través de la unidad de longitud de tubería en la unidad de tiempo es de 500 W/m., calcular,

a) La temperatura de la superficie exterior de la tubería

b) El coeficiente de transferencia térmica global, tomando como referencia la superficie exterior de la tubería

RESOLUCION

a) Temperatura de la superficie exterior de la tubería,

$$q = \frac{T_F - T_{pF}}{R_1 + R_2} = \frac{T_F - T_{pF}}{\frac{1}{2 r_i h_{cF}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{k}}$$

$$500 \frac{\text{W}}{\text{m}} = \frac{100 - T_{pF}}{\frac{1}{2 \times 0,015 \times 300} + \frac{\ln \frac{2}{1,5}}{0,5}} = \frac{100 - T_{pF}}{0,12693} \quad T_{pF} = 36,5^\circ\text{C}$$

b) El coeficiente global de transmisión de calor U, basado en la superficie exterior de la pared A_e , es de la forma,

$$U_e A_e = \frac{1}{\frac{1}{2 r_i L h_{cF}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{L k}}; A_e = 2 r_e L; L = 1 \text{ metro}$$

$$U_e = \frac{1}{\frac{2 r_e L}{2 r_i L h_{cF}} + \frac{2 r_e L \times \ln \frac{r_e}{r_i}}{2 L k}} = \frac{1}{\frac{r_e}{r_i h_{cF}} + \frac{r_e \ln \frac{r_e}{r_i}}{k}} = \frac{1}{\frac{0,02}{0,015 \times 300} + \frac{0,02}{0,5} \ln \frac{2}{1,5}} = 62,69 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°K}}$$

Comprobación: $q = U_e A_e (T_F - T_{pF}) = 62,69 \times 2 \times 0,02 (100 - 36,53) = 500 \frac{W}{m}$

II.9.- Un conductor eléctrico de 1 mm de diámetro, se recubre con una capa de un aislante plástico de espesor $e = 2 \text{ mm}$, $k_I = 0,5 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. El hilo está rodeado de aire con una temperatura ambiental $T_F = 25^\circ\text{C}$ y un coeficiente de convección $h_c = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ siendo la temperatura del conductor de 100°C .

Determinar

a) El calor disipado por unidad de tiempo, con aislamiento y sin él.

b) La temperatura exterior del aislamiento

Se supondrá que la temperatura del hilo no se ve afectada por la presencia del aislamiento.

RESOLUCION

a.1) Calor transferido por unidad de longitud, con aislamiento,

$$r_0 = r_{\text{núcleo}} + \text{espesor aislamiento} = (0,5 \times 10^{-3}) + (2 \times 10^{-3}) = 2,5 \times 10^{-3} \text{ metros}$$

$$\text{Nº de Biot: } Bi = \frac{h_{c0} r_0}{k_I} = \frac{10 \times \{2,5 \times 10^{-3}\}}{0,5} = 0,05 < 0,1 \text{ (R.T.D.)}$$

Como $Bi < 1$, la presencia del aislamiento hará aumentar la transferencia de calor del hilo.

$$r_C = \frac{k_I}{h_{c0}} = \frac{0,5 \frac{W}{m^\circ K}}{10 \frac{W}{m^2 K}} = 0,05 \text{ m}$$

La cantidad de calor transferida por unidad de longitud, en la unidad de tiempo, es,

$$q = \frac{T_{pi} - T_F}{\frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2 k_I} + \frac{1}{2 r_0 h_{c0}}} = \frac{100 - 25}{\frac{\ln \frac{2,5}{0,5}}{2 \times 0,5} + \frac{1}{2 (2,5 \times 10^{-3}) 10}} = 10,9 \frac{W}{m}$$

a.2) Calor transferido por unidad de longitud, sin aislamiento,

$$q = h_{c0} \frac{A_i}{L} (T_{pi} - T_F) = 10 \left\{ \frac{2 \times 0,0005 L}{L} \right\} (100 - 25) = 2,36 \frac{W}{m}$$

La adición del aislamiento disipa 4,6 veces más calor que sin aislamiento.

b) Temperatura en el exterior del aislamiento,

$$q = h_{c0} \frac{A_e}{L} (T_{pe} - T_F) = 10 \left\{ \frac{2 \times 0,0025 L}{L} \right\} (T_{pe} - 25) = 10,9 \frac{W}{m}$$

$$T_{pe} = 25 + \frac{10,9}{0,1571} = 25 + 69,4 = 94,38^\circ\text{C}$$

II.10.- Determinar la corriente máxima que puede circular por un conductor de aluminio $k = 204 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, desnudo y de 1 mm de diámetro, sin que su temperatura supere los 200°C . El hilo se supondrá colocado en el aire, con una temperatura ambiental de 25°C , siendo el coeficiente de transferencia térmica por convección-radiación entre el hilo y el aire $h_c = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$. Se supondrá que la resistencia eléctrica del hilo conductor es de $0,037 \text{ } \Omega/\text{m}$.

RESOLUCION

Distribución de temperaturas en el hilo,

$$T = T_F + \frac{E r_0}{2 h_{cF}} \left\{ 1 + \frac{r_0 h_{cF}}{2 k} - \frac{r^2 h_{cF}}{2 k r_0} \right\}$$

$$T_{\text{máx}} = T_F + \frac{E r_0}{2 h_{cF}} \left\{ 1 + \frac{r_0 h_{cF}}{2 k} \right\}$$

$$E = \frac{R I^2}{\text{Volumen}} = \frac{R I^2}{A L} = \frac{R I^2}{r_0^2 L}$$

Como T no debe sobrepasar los 200°C, implica que ésta será la $T_{\text{máx}}$ a considerar.

$$T_{\text{máx}} = 200 = 25 + \frac{R I^2}{2 r_0 L h_{cF}} \left\{ 1 + \frac{r_0 h_{cF}}{2 k} \right\}$$

$$T_{\text{máx}} = 200 = 25 + \frac{0,037 \text{ W} \times I^2 (\text{Amp})^2}{2 (0,5 \times 10^{-3}) \times 1 \text{ m}^2 \times 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{°C}}} \left\{ 1 + \frac{0,5 \times 10^{-3} \times 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{°C}}}{2 \times 204 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{°C}}} \right\} = 25 + 1,1775 I^2$$

de la que se deduce el valor, $I = 12,2 \text{ A}$

Hemos hecho uso del siguiente ajuste de unidades,

$$1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{W}}{\text{A}^2} ; 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{W}}{\text{A}} = 1 \text{ A} ; 1 \text{ A}^2 = 1 \text{ W} ; \frac{R I^2}{r_0 L h_{cF}} = \frac{\text{A}^2}{\text{m.m.} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{°C}}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{°C}}} = \text{°C}$$

II.11.- Un cable eléctrico se encuentra aislado por una vaina de recubrimiento de un material de conductividad térmica $k = 0,5 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$, y éste a su vez está situado en un ambiente formado por un fluido que presenta un coeficiente de película $h_c = 10 \text{ Kcal/h.m}^2\text{°C}$. El diámetro del cable es de 10 mm.

Determinar

a) El espesor del material de recubrimiento que producirá el máximo flujo de calor

b) Si el recubrimiento está formado por capas de 10 mm de espesor, el número de estas capas necesarias para que el flujo de calor deje de ser máximo

RESOLUCION

$$q = \frac{2 L \{T_{pi} - T_F\}}{\frac{1}{r_0 h_{c0}} + \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{k_1}}$$

a) Flujo máximo de calor: ($Bi = 1$), $r_c = \frac{k_1}{h_{cF}}$

$$r_c = \frac{k_1}{h_{cF}} = \frac{0,5}{10} = 0,05 \text{ m} \quad \text{un espesor de material de recubrimiento de: } 50 \text{ mm} - 5 \text{ mm} = 45 \text{ mm}$$

b) N° de capas para que el flujo de calor deje de ser máximo: $\frac{45}{10} = 4,5 \quad 5 \text{ capas}$

II.12.- Una pared plana de 2 cm de espesor genera uniformemente un calor $E = 5 \times 10^5 \text{ Kcal/h.m}^2$. La conductividad térmica del material se supone constante de valor $k = 2 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$. La pared se encuentra rodeada de un fluido a 20°C y coeficiente de película de 50 Kcal/h.m²°C.

Determinar,

a) La distribución de temperaturas en el interior del sólido y calcular la temperatura en el plano de simetría y en la superficie exterior de la pared.

b) El flujo térmico al exterior

c) El espesor que debería tener la pared para la energía E generada, si la temperatura máxima que admite el material es de 175°C

RESOLUCION

a) Distribución de temperaturas en el interior del sólido y calcular la temperatura en el plano de simetría y en la superficie exterior de la pared.

$$T = T_F + \frac{E L}{k} \left\{ \frac{L}{2} - \frac{x^2}{2L} + \frac{k}{h_{cF}} \right\} = T_{\text{máx}} - \frac{E x^2}{2k} = T_1 + \frac{E}{2k} (L^2 - x^2)$$

$$T = 20 + \frac{5 \times 10^5 \times 0,01}{2} \left\{ \frac{0,01}{2} - \frac{x^2}{2 \times 0,01} + \frac{2}{50} \right\} = 132,5 - (1,25 \times 10^5) x^2$$

Para, $x = 0$, $T = T_{\text{máx}} = 132,5^\circ\text{C}$

Para, $x = 0,01$, $T = T_1 = 132,5 - (1,25 \times 10^5 \times 0,01^2) = 120^\circ\text{C}$

b) Flujo de calor al exterior

$$\frac{Q}{A} = 2 E L = 2 \times 5 \times 10^5 \times 0,01 = 10^4 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2}$$

c) Espesor de la pared si la energía generada fuese tal que la $T_{\text{máx}} = 175^\circ\text{C}$, ($x = 0$)

$$175 = 20 + \frac{5 \times 10^5 L}{2} \left\{ \frac{L}{2} - 0 - \frac{2}{50} \right\} = 20 - (1,25 \times 10^5) L^2 + 10.000 L ; L = 0,01329 \text{ m}$$

Espesor, $e = 2 L = 2 \times 0,01329 = 0,02658 \text{ m}$

II.13.- El muro de un edificio consiste en, a) Una capa exterior de ladrillo de revestimiento $k_1 = 1,1 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$ de 10 cm de espesor; b) Una capa de ladrillo corriente $k_2 = 0,6 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$ de 15 cm de espesor; c) Una capa de enlucido $k_3 = 0,4 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$ de 0,125 cm de espesor. Sabiendo que en el exterior circula aire a una velocidad de 16 Km/hora y temperatura $T_e = 35^\circ\text{C}$, y que el aire del interior se encuentra a una temperatura $T_i = 22^\circ\text{C}$ con un $h_{ci} = 6,8 \text{ Kcal/h.m}^2^\circ\text{C}$, determinar la temperatura de la pared revocada con yeso sabiendo que para placa plana y fluido aire, sabiendo que $Nu = 0,0288 Re^{0,8} Pr^{0,33}$ y $Pr_{\text{aire}} = 0,71$

RESOLUCION

En Tablas se encuentra que,

aire a $35^\circ\text{C} = 17,46 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$; $k_{\text{aire a } 35^\circ\text{C}} = 0,0268 \text{ W/m}^\circ\text{K}$

$$Re = \frac{L u}{\nu} = \frac{1 \text{ m} \times \frac{16.000 \text{ m}}{3.600 \text{ seg}}}{17,46 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 225.430$$

$$Nu = 0,0288 (225.430)^{0,8} (0,71)^{0,33} = 544,66$$

$$h_{ci} = \frac{Nu k_{Fi}}{L} = \frac{544,66 \times 0,0268}{0,1} = 14,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2^\circ\text{C}} = 12,55 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2^\circ\text{C}}$$

ya que: $1 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} = 1,163 \text{ W}$

$$\frac{q}{A} = \frac{T_e - T_i}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{35 - 22}{\frac{1}{12,55} + \frac{0,1}{1,1} + \frac{0,15}{0,6} + \frac{0,0125}{0,4} + \frac{1}{6,8}} = \frac{13}{0,5989} = 21,70 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}$$

Temperatura de la pared revocada con yeso,

$$\frac{q}{A} = 6,8 (T_{pi} - 22) = 21,70 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2} ; T_{pi} = 25,2^\circ\text{C}$$

II.14.- Sea una pared compuesta de dos capas de 20 cm de espesor de forma que uno de sus lados está completamente aislado, a la temperatura de 50°C.

Sabiendo que las conductividades térmicas de las placas son de 15 y 20 W/m°C y que la primera genera calor a razón de 1000 W/m³, determinar las temperaturas en la unión de las paredes y en la pared exterior

RESOLUCION

a) Temperaturas en la unión de las paredes y en la pared exterior

Régimen permanente

Pared aislada térmicamente; todo el calor sale por la otra pared

Primera pared,

Distribución de temperaturas: $T_1(x) = -\frac{E x^2}{2k} + C_1 x + C_2$

Flujo de calor,

$$q_1 = -k \frac{T}{x} = k \frac{E x}{k} - k C_1 = E x - k C_1$$

Condiciones,

$$\text{Para } \{x = 0\} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{x=0} = 50^\circ\text{C} \quad ; \quad 50^\circ\text{C} = -0 + 0 + C_2 \quad ; \quad C_2 = 50^\circ\text{C} \\ \left(\frac{T}{x}\right)_{x=0} = 0 \quad ; \quad 0 - k C_1 = 0 \quad ; \quad C_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$T_1(x) = -\frac{E x^2}{2k} + 50$$

Flujo de calor: $q_1 = E x = 1000 x$; (Varía con la distancia x)

Segunda pared,

Distribución de temperaturas, $T_2(x) = C_3 x + C_4$

$$\text{Flujo de calor: } q_2 = -k' \frac{T}{x} = -k' C_3$$

Condiciones de contorno,

$$\text{Para } \{x = 0,2\} \quad (q_1)_{x=0,2} = q_2 \quad ; \quad 1000 \times 0,2 = -20 C_3 \quad ; \quad C_3 = -10^\circ\text{C}$$

$$T_{1(x=0,2)} = T_{2(x=0,2)} \quad ; \quad -\frac{E x 0,2^2}{2 \times 15} + 50 = C_3 x + C_4 = (-10 \times 0,2) + C_4$$

$$-\frac{1000 \times 0,2^2}{2 \times 15} + 50 = -2 + C_4 \quad ; \quad C_4 = 50,67$$

$$\text{luego, } T_2(x) = -10 x + 50,67$$

$$\text{Flujo de calor: } q_2 = -k' C_3 = -20 \times (-10) = 200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{Cte en la pared})$$

a) Temperatura en la unión de las paredes

$$T_{1(x=0,2)} = T_{2(x=0,2)} = -10 x + 50,67 = -(10 \times 0,2) + 50,67 = 48,67^\circ\text{C}$$

b) Temperatura en el extremo no aislado

$$T_{2(x=0,4)} = -10 x + 50,67 = -(10 \times 0,4) + 50,67 = 46,67^\circ\text{C}$$

II.15.- Una tubería de hierro de $d_e = 102 \text{ mm}$ y $d_i = 92 \text{ mm}$, $k = 50 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$ de una instalación de calefacción, conduce agua a 90°C , atravesando un local cuya temperatura es de 15°C . La tubería está aislada con una coquilla de material aislante de $e = 25 \text{ mm}$ y $k^* = 0,04 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$, envuelta en carbón asfáltico de 5 mm de espesor y $k' = 0,12 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$.

$h_{cF} = 1000 \text{ Kcal/h.m}^2^\circ\text{C}$; $h_{ce} = 8 \text{ Kcal/h.m}^2^\circ\text{C}$

Determinar,

- La pérdida horaria de calor por metro lineal de tubería**
- El coeficiente global de transmisión de calor U .**
- Las temperaturas superficiales de la tubería aislada y del interior de la tubería**
- Comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a la pared desnuda**

RESOLUCION

a) Pérdida de calor horaria por metro lineal de tubería

$$\begin{aligned} \frac{q}{L} &= \frac{2 (T_{\text{agua}} - T_{\text{ext}})}{\frac{1}{r_1 h_{cF}} + \frac{1}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{k'} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{r_4 h_{ce}}} = \frac{2 (T_{\text{agua}} - T_{\text{ext}})}{\frac{1}{r_1 h_{cF}} + \frac{1}{k_{12}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{k_{23}} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{k_{34}} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{r_4 h_{ce}}} = \\ &= \frac{2 (90 - 15)}{\frac{1}{0,046 \times 1000} + \frac{\ln \frac{51}{46}}{50} + \frac{\ln \frac{76}{51}}{0,04} + \frac{\ln \frac{81}{76}}{0,12} + \frac{1}{0,081 \times 8}} = 39,04 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}} \end{aligned}$$

b) Coeficiente global de transmisión de calor U , referido a la sección exterior $2 r_4 L$

$$\begin{aligned} U_{(r=r_4)} &= \frac{1}{\frac{r_4}{r_1 h_{cF}} + \frac{r_4}{k_{12}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_4}{k_{23}} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_4}{k_{34}} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{h_{ce}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{0,081}{0,046 \times 1000} + \frac{0,081 \times \ln \frac{51}{46}}{50} + \frac{0,081 \times \ln \frac{76}{51}}{0,04} + \frac{0,081 \times \ln \frac{81}{76}}{0,12} + \frac{1}{8}} = 1,023 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2^\circ\text{C}} \end{aligned}$$

c) Temperatura de la pared interior-fluido caliente,

$$\begin{aligned} \frac{q}{L} &= 2 r_1 h_{cF} (T_F - T_{pF}) = 39,04 \text{ Kcal} \\ T_{pF} &= T_F - \frac{39,04}{2 r_1 h_{cF}} = 90^\circ\text{C} - \frac{39,04}{2 \times 0,046 \times 1000} = 89,86^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Temperatura de la pared exterior-fluido exterior:

$$\begin{aligned} \frac{q}{L} &= 2 r_4 h_{ce} (T_{pe} - T_e) = 39,04 \text{ Kcal} \\ T_{pe} &= T_e + \frac{39,04}{2 r_4 h_{ce}} = 15^\circ\text{C} + \frac{39,04}{2 \times 0,081 \times 8} = 24,6^\circ\text{C} \end{aligned}$$

d) Comparar los resultados con los correspondientes a la pared desnuda,

$$\frac{q}{L} = \frac{2 (T_F - T_e)}{\frac{1}{r_1 h_{cF}} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{k_{12}} + \frac{1}{r_2 h_{ce}}} = \frac{2 (90 - 15)}{\frac{1}{0,046 \times 1000} + \frac{\ln \frac{51}{46}}{50} + \frac{1}{0,051 \times 8}} = 190,4 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}}$$

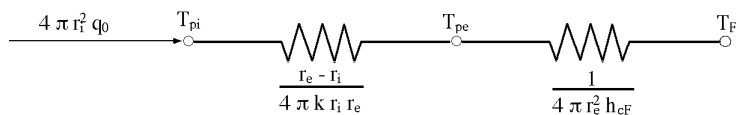
$$U = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 h_{cF}} + \frac{r_2 \ln \frac{r_2}{r_1}}{k_{12}} + \frac{1}{h_{ce}}} = \frac{2 (90 - 15)}{\frac{0,051}{0,046 \times 1000} + \frac{0,051 \times \ln \frac{51}{46}}{50} + \frac{1}{8}} = 7,92 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2^\circ\text{C}}$$

$$T_1 = T_F - \frac{\frac{q}{L}}{2 \frac{1}{r_1 h_{cF}}} = 90 - \frac{190,4}{2 \times 0,046 \times 1000} = 89,34^\circ\text{C}$$

$$T_2 = T_e + \frac{\frac{q}{L}}{2 \frac{1}{r_2 h_{ce}}} = 15 + \frac{190,4}{2 \times 0,051 \times 8} = 89,27^\circ\text{C}$$

II.16.- Una esfera hueca de radio interior r_i y radio exterior r_e está calentada eléctricamente por la pared interior a razón de q_0 W/m². Por la pared exterior se disipa el calor a un fluido que se encuentra a T_F , siendo h_{cF} el coeficiente de transmisión de calor por convección-radiación y “ k ” la conductividad térmica del sólido. Determinar las temperaturas T_{pi} y T_{pF} sabiendo que $r_i = 3$ cm, $r_e = 5$ cm, $h_{cF} = 400$ W/m²°C, $T_F = 100^\circ\text{C}$, $k = 15$ W/m°C, $q_0 = 10^5$ W/m².

RESOLUCION



$$4 \pi r_i^2 q_0 = \frac{T_{pi} - T_{pF}}{\frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e}} = \frac{T_{pF} - T_F}{\frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}} = \frac{T_{pi} - T_F}{\frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e} + \frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}}$$

De la ecuación,

$$4 \pi r_i^2 q_0 = \frac{T_{pi} - T_F}{\frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e} + \frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}}$$

se obtiene T_{pi} en la forma,

$$\begin{aligned} T_{pi} &= T_F + 4 \pi r_i^2 q_0 \left\{ \frac{r_e - r_i}{4 \pi k r_i r_e} + \frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}} \right\} = T_F + q_0 \left\{ \frac{r_i (r_e - r_i)}{k r_e} + \frac{r_i^2}{r_e^2 h_{cF}} \right\} = \\ &= 100 + 10^5 \left\{ \frac{0,03 \times (0,05 - 0,03)}{15 \times 0,05} + \frac{0,03^2}{0,05^2 \times 400} \right\} = 270^\circ\text{C} \end{aligned}$$

De la ecuación,

$$4 \pi r_i^2 q_0 = \frac{T_{pF} - T_F}{\frac{1}{4 \pi r_e^2 h_{cF}}}$$

se obtiene T_{pF} ,

$$T_{pF} = T_F + \frac{4 \pi r_i^2 q_0}{4 \pi r_e^2 h_{cF}} = T_F + \frac{r_i^2 q_0}{r_e^2 h_{cF}} = 100 + \frac{0,03^2 \times 10^5}{0,05^2 \times 400} = 190^\circ\text{C}$$

II.17.- La sección recta de una pared prismática tiene de dimensiones, $1 \times 0,5$ m².

Determinar,

a) La distribución de temperaturas, sabiendo que para, $y = 0$, la temperatura correspondiente es de 100°C . El resto de los lados está a 0°C

b) Temperatura en el centro

RESOLUCION

a) Distribución de temperaturas

$$T = 2 T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{n(b-y)}{a}}{\text{Sh} \frac{n b}{a}} \frac{1 - (-1)^n}{n} \text{sen} \frac{n x}{a} =$$

$$= 2 \times 100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{n(0,5-y)}{a}}{\text{Sh} \frac{n b}{a}} \frac{2}{n} \text{sen} \frac{n x}{a} \quad (\text{con: } n = 1, 3, 5, 7, \dots) = 127,3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \{ \frac{n(0,5-y)}{a} \}}{\text{Sh} (\frac{n b}{a})} \frac{\text{sen}(\frac{n x}{a})}{n}$$

b) Temperatura en el centro, $x = 0,5 \text{ m}$; $y = 0,25 \text{ m}$

$T_{\text{centro}} =$

$$= 127,3 \left\{ \frac{\text{Sh} (\frac{x}{a} 0,25)}{\text{Sh} (\frac{x}{a} 0,5)} \frac{\text{sen}(\frac{x}{a} 0,5)}{1} + \frac{\text{Sh} (\frac{x}{a} 3 \times 0,25)}{\text{Sh} (\frac{x}{a} 3 \times 0,5)} \frac{\text{sen}(\frac{x}{a} 3 \times 0,5)}{3} + \frac{\text{Sh} (\frac{x}{a} 5 \times 0,25)}{\text{Sh} (\frac{x}{a} 5 \times 0,5)} \frac{\text{sen}(\frac{x}{a} 5 \times 0,5)}{5} + \dots \right\} =$$

$$= 127,3 (0,373 - 0,0313 + 0,00393 - \dots) = 44,4^\circ\text{C}$$

II.18.- Para determinar la temperatura de un fluido que circula por el interior de una tubería recubierta de aislante, se ha dispuesto una soldadura de un termopar directamente sobre el tubo, bajo el aislante. El material del tubo es de un metal cuya conductividad térmica tiene un valor de $40 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$, mientras que la del aislante es de $0,04 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, siendo las dimensiones, $r_1 = 25 \text{ mm}$; $r_2 = 28 \text{ mm}$; $r_3 = 100 \text{ mm}$. La medida efectuada con el termopar es de $T_2 = -40^\circ\text{C}$, siendo las propiedades del fluido en estas condiciones las siguientes,

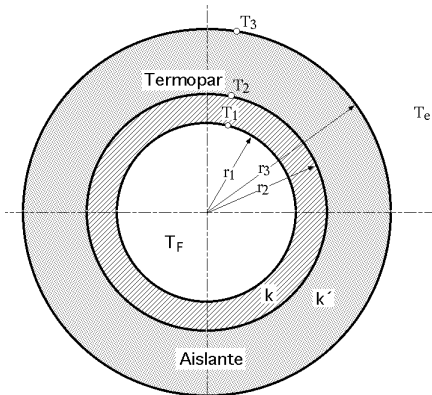
$$k_F = 0,2 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^\circ\text{C}}; \quad \rho_F = 1,25 \frac{\text{Kg}}{\text{dm}^3}; \quad c_{pF} = 0,3 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}; \quad \mu = 0,001 \frac{\text{N seg}}{\text{m}^2} = 0,001 \frac{\text{Kg}}{\text{seg m}}$$

Si el fluido no cambia de estado y su velocidad de circulación es de 1 m/seg , se desea obtener,

- El coeficiente de película existente entre el fluido y la pared interna
- Si el coeficiente de película exterior es de $10 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$, ¿Cuál será el coeficiente global de transmisión referido a la superficie externa?
- Flujo térmico por unidad de longitud sobre la superficie externa, sabiendo que $T_e = 20^\circ\text{C}$
- Temperatura de la superficie exterior
- Error cometido en la lectura al situar el termopar en (2) y no en (1)

RESOLUCION

a) Coeficiente de película existente entre el fluido y la pared interna



$$Re = \frac{u d_1}{\nu} = \frac{1 \text{ (m/seg)} \times 0,05 \text{ m}}{\frac{0,001 \text{ Kg/seg.m}}{1,25 \times 10^3 \text{ (Kg/m}^3)}} = 62500 \text{ (turbulento)}$$

$$Pr = \frac{c_p}{k} = \frac{0,001 \frac{\text{Kg}}{\text{seg.m}} \times 0,3 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}}{0,2 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^\circ\text{C}}} \times 3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}} = 5,4$$

Como este fluido se calienta, la ecuación de Dittus Boelter toma la forma,

$$Nu = 0,023 \times Re^{0,8} \times Pr^{0,4} = 0,023 \times 62500^{0,8} \times 5,4^{0,4} = 310$$

$$h_{cF} = \frac{Nu \cdot k}{d_1} = \frac{310 \times 0,2 \frac{Kcal}{h.m.^{\circ}C}}{0,05 m} = 1240 \frac{Kcal}{h.m.^2.^{\circ}C}$$

b) Coeficiente global de transmisión referido a la superficie externa, si el coeficiente de película exterior es de 10 Kcal/h.m².°C,

$$q = 2 \cdot r_3 \cdot h_{ce} (T_e - T_3) = \frac{2 \cdot k' (T_3 - T_2)}{\ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{2 \cdot k (T_2 - T_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 2 \cdot r_1 \cdot h_{cF} (T_1 - T_F) =$$

$$= \frac{2 (T_e - T_F)}{\frac{1}{r_3 h_{ce}} + \frac{1}{k'} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_1 h_{cF}}} = 2 \cdot r \cdot U (T_e - T_F)$$

Si se toma como referencia la superficie exterior (3), se tiene,

$$q = 2 \cdot (r \cdot U)_3 (T_e - T_F) \quad U_3 = \frac{1}{\frac{1}{h_{ce}} + \frac{r_3}{k'} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_3}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3}{r_1 h_{cF}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{11,627} + \frac{0,1}{0,04} \ln \frac{0,1}{0,025} + \frac{0,1}{46,5} \ln \frac{0,028}{0,025} + \frac{0,1}{1441,8 \times 0,025}} = 0,2815 \frac{W}{m^2.^{\circ}C}$$

en la que se ha tenido en cuenta que,

$$h_{ce} = 10 \frac{Kcal}{h m^2.^{\circ}C} = 10 \times \frac{4186}{3600} \frac{W}{m^2.^{\circ}C} = 11,627 \frac{W}{m^2.^{\circ}C}$$

$$h_{cF} = 1240 \frac{Kcal}{h m^2.^{\circ}C} = 1441,8 \frac{W}{m^2.^{\circ}C}$$

$$k = 40 \frac{Kcal}{h m.^{\circ}C} = 46,5 \frac{W}{m.^{\circ}C}$$

c) Flujo térmico por unidad de longitud sobre la superficie externa, sabiendo que T_e=20°C

Se puede calcular un coeficiente global parcial U₃* que contemple únicamente la convección exterior y la conducción a través del aislante,

$$U_3^* = \frac{1}{\frac{1}{h_{ce}} + \frac{r_3}{k'} \ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{11,627} + \frac{0,1}{0,04} \ln \frac{0,1}{0,028}} = 0,3059 \frac{W}{m^2.^{\circ}C}$$

Flujo térmico,

$$q = 2 \cdot r_3 \cdot U_3^* (T_e - T_2) = 2 \cdot 0,1 \times 0,3059 \times \{20 - (-40)\} = 11,53 \frac{W}{m}$$

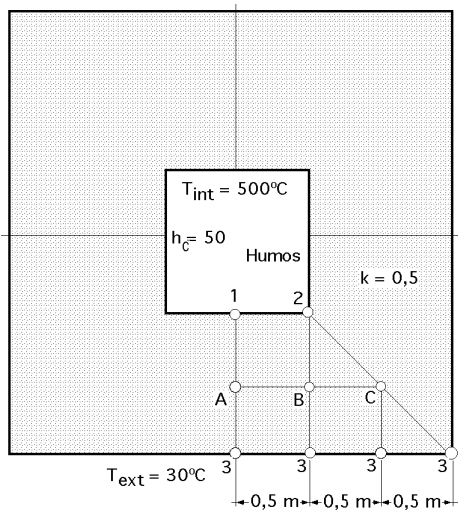
d) Temperatura de la superficie exterior

$$q = 2 \cdot r_3 \cdot h_{ce} (T_e - T_3) \quad T_3 = T_e - \frac{q}{2 \cdot r_3 \cdot h_{ce}} = 20^{\circ}C - \frac{11,53}{2 \times 0,1 \times 11,627} = 18,42^{\circ}C$$

e) Error cometido en la lectura al situar el termopar en (2) y no en (1)

$$q = \frac{T_2 - T_1}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \cdot k}} = \frac{T_1 - T_F}{\frac{1}{h_{cF} \cdot 2 \cdot r_1}} = \frac{T_2 - T_F}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \cdot k} + \frac{1}{h_{cF} \cdot 2 \cdot r_1}}$$

$$T_2 - T_F = q \left\{ \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \cdot k} + \frac{1}{h_{cF} \cdot 2 \cdot r_1} \right\} = 11,53 \times \left\{ \frac{\ln \frac{28}{25}}{2 \times 46,5} + \frac{1}{1441,8 \times 2 \times 0,025} \right\} = 0,137^{\circ}C$$



II.19.- Mediante los balances de energía necesarios, hallar la matriz de temperaturas correspondientes a los puntos A, B, C, (1) y (2), de la sección transversal de una chimenea, por cuyo interior circulan gases a 500°C, estando la pared exterior a 30°C, sabiendo que el coeficiente de película de los gases es de 50 W/m².°C, y la conductividad térmica del material de la chimenea, $k = 0,5$ W/m.°C

RESOLUCION

$$T_A = \frac{T_1 + 2 T_B + T_3}{4}$$

$$T_B = \frac{T_2 + T_A + T_C + T_3}{4}$$

$$T_C = \frac{2 T_B + 2 T_3}{4} = \frac{T_B + T_3}{2}$$

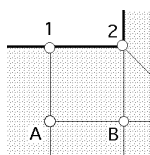
$$T_1 + 2 T_B + T_3 - 4 T_A = 0$$

$$T_2 + T_A + T_C + T_3 - 4 T_B = 0$$

$$T_B + T_3 = 2 T_C$$

$$Bi = \frac{h_c F}{k} \times = \frac{50 \times 0,5}{0,5} = 50$$

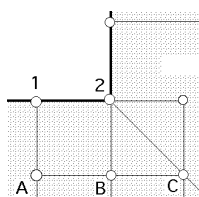
Cálculo de T_1 ,



$$\frac{2 T_2}{2} + T_A - (2 + Bi) T_1 + Bi T_F = 0 \quad ; \quad T_2 + T_A - (2 + 50) T_1 + (50 \times 500) = 0$$

$$T_2 - 52 T_1 + T_A + 25000 = 0$$

Cálculo de T_2 ,



$$\frac{2 T_1}{2} + 2 T_B - (3 + Bi) T_2 + Bi T_F = 0 \quad ; \quad T_1 + 2 T_B - 53 T_2 + (50 \times 500) = 0$$

$$T_1 - 53 T_2 + 2 T_B + 25000 = 0$$

$$\begin{pmatrix} T_1 + 0 + 0 + 2 T_B - 4 T_A = -30 \\ 0 + T_2 + T_C - 4 T_B + T_A = -30 \\ 0 + 0 - 2 T_C + T_B + 0 = -30 \\ T_1 - 53 T_2 + 0 + 2 T_B + 0 = -25000 \\ -52 T_1 + T_2 + 0 + 0 + T_A = -25000 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = 494,84^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 489,41^\circ\text{C}$$

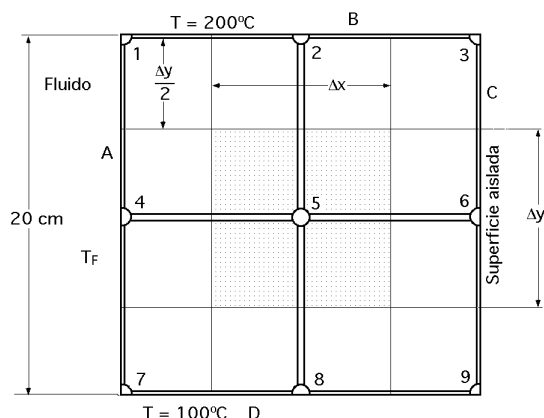
$$T_A = 242,15^\circ\text{C}$$

$$T_B = 221,80^\circ\text{C}$$

$$T_C = 125,94^\circ\text{C}$$

II.20.- Determinar la distribución de temperaturas en régimen estacionario y las transferencias de calor por unidad de tiempo, procedentes de las cuatro superficies del cuerpo bidimensional de sección cuadrada indicado en la figura, $k = 1 \text{ W/m}^2\text{C}$, con $E = 0$. Dos de los límites son isotermos a $T_B = 200^\circ\text{C}$ y $T_D = 100^\circ\text{C}$ respectivamente, un tercero está aislado y el cuarto transfiere energía por convección a un fluido con $h_C = 50 \text{ W/m}^2\text{C}$ y $T_F = 50^\circ\text{C}$. Dimensiones (20 x 20) cm.

a) Por el método numérico ; b) Por el método de relajación ; c) Por técnicas matriciales ; d) Por el método de iteración



RESOLUCION

a) Método numérico

Dividimos el cuerpo de forma que los nudos se numeren del 1 al 9 tal como se indica en la figura

Las celdillas son cuadradas con $x = y = 10 \text{ cm}$

Los nudos 1, 2, 3, tienen una temperatura igual a $T_B = 200^\circ\text{C}$

Los nudos 7, 8, 9, tienen una temperatura igual a $T_D = 100^\circ\text{C}$

Los nudos 4, 5, 6, tienen temperaturas desconocidas

$$Bi = \frac{h_{cF} x}{k} = \frac{50 \times 0,1}{1} = 5$$

$$\text{Nudo 5: } T_4 + T_2 + T_6 + T_8 - 4 T_5 = 0 ; T_4 + 200 + T_6 + 100 - 4 T_5 = 0$$

$$T_4 + T_6 - 4 T_5 = -300$$

El nudo 4 está situado en el borde por donde se transfiere calor por convección de modo que,

$$\text{Nudo 4: } \frac{T_1 + T_7}{2} + T_5 + Bi T_F - (2 + Bi) T_4 = 0 ; \frac{200 + 100}{2} + T_5 + (5 \times 50) - (2 + 5) T_4 = 0$$

$$T_5 - 7 T_4 = -400$$

El nudo 6 está situado sobre el contorno aislado por lo que, $q_{3-6} + q_{5-6} + q_{9-6} = 0$

$$k \frac{x}{2} \frac{T_3 - T_6}{y} + k y \frac{T_5 - T_6}{x} + k \frac{x}{2} \frac{T_9 - T_6}{y} = 0 ; \frac{T_3 + T_9}{2} + T_5 - 2 T_6 = 0$$

$$\frac{200 + 100}{2} + T_5 - 2 T_6 = 0 ; T_5 - 2 T_6 = -150$$

$$\begin{cases} T_4 + T_6 - 4 T_5 = -300 \\ T_5 - 7 T_4 = -400 \\ T_5 - 2 T_6 = -150 \end{cases} \quad \begin{aligned} T_4 &= 75,5^\circ\text{C} \\ T_5 &= 128,7^\circ\text{C} \\ T_6 &= 139,4^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido desde la superficie A al fluido,

$$q_A = q_{F-1} + q_{F-4} + q_{F-7} = h_{cF} y \left\{ \frac{T_F - T_1}{2} + (T_F - T_4) + \frac{T_F - T_7}{2} \right\} =$$

$$= (50 \times 0,1) \left\{ \frac{50 - 200}{2} + (50 - 75,5) + \frac{50 - 100}{2} \right\} = -627 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

El signo (-) indica que el calor se desprende del sólido

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido en la superficie B,

$$q_B = q_{1-4} + q_{2-5} + q_{3-6} + q_{1-F} = k \times \left\{ \frac{T_1 - T_4}{2y} + \frac{T_2 - T_5}{y} + \frac{T_3 - T_6}{2y} \right\} + h_{cF} \frac{y}{2} (T_1 - T_F) = 538,8 \frac{W}{m}$$

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido en la superficie C, (aislada),

$$q_C = 0$$

Transferencia de calor por unidad de tiempo y por unidad de espesor del sólido en la superficie D,

$$q_D = q_{7-4} + q_{8-5} + q_{9-6} + q_{7-F} = k \times \left\{ \frac{T_7 - T_4}{2y} + \frac{T_8 - T_5}{y} + \frac{T_9 - T_6}{2y} \right\} + h_{cF} \frac{y}{2} (T_7 - T_F) = 88,8 \frac{W}{m}$$

Comprobación global,

$$q_{neta} = q_A + q_B + q_C + q_D = -627,5 + 538,8 + 0 + 88,8 = 0,1 \frac{W}{m}$$

que es una muy buena aproximación.

b) Técnicas de relajación

$$\begin{cases} T_5 - 7T_4 + 400 = R_4 \\ T_4 + T_6 - 4T_5 + 300 = R_5 \\ T_5 - 2T_6 + 150 = R_6 \end{cases}$$

Temperaturas que se pueden presuponer inicialmente

$$T_4 = 80^\circ\text{C} ; T_5 = 100^\circ\text{C} ; T_6 = 150^\circ\text{C}$$

de acuerdo con los límites extremos del problema, $T_F = 50^\circ\text{C}$ y $T_B = 200^\circ\text{C}$

Cálculo de los residuos,

$$\begin{cases} R_4 = T_5 - 7T_4 + 400 \\ R_5 = T_4 + T_6 - 4T_5 + 300 \\ R_6 = T_5 - 2T_6 + 150 \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = 100 - (7 \times 80) + 400 = -60^\circ\text{C} \\ R_5 = 80 + 150 - (4 \times 100) + 300 = 130^\circ\text{C} \\ R_6 = 100 - (2 \times 150) + 150 = -50^\circ\text{C} \end{cases}$$

Corrección de temperaturas.- Tomamos el mayor residuo en valor absoluto R_5 y aumentamos T_5 , por ejemplo en 35°C , $T_5 = 135^\circ\text{C}$, de forma que el residuo R_5 cambie de signo, por lo que los nuevos residuos serán,

$$\begin{cases} T_4 = 80^\circ\text{C} \\ T_5 = 135^\circ\text{C} \\ T_6 = 150^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = 135 - (7 \times 80) + 400 = -25^\circ\text{C} \\ R_5 = 80 + 150 - (4 \times 135) + 300 = -10^\circ\text{C} \\ R_6 = 135 - (2 \times 150) + 150 = -15^\circ\text{C} \end{cases}$$

Tomamos el mayor residuo en valor absoluto R_4 y modificamos T_4 en una cantidad que haga R_4 positivo, por ejemplo disminuyendo T_4 en 4°C , $T_4 = 76^\circ\text{C}$,

$$\begin{cases} T_4 = 76^\circ\text{C} \\ T_5 = 135^\circ\text{C} \\ T_6 = 150^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = 135 - (7 \times 76) + 400 = +3^\circ\text{C} \\ R_5 = 76 + 150 - (4 \times 135) + 300 = -14^\circ\text{C} \\ R_6 = 135 - (2 \times 150) + 150 = -15^\circ\text{C} \end{cases}$$

y así sucesivamente,

$$\text{Disminuimos } T_6 \text{ en } 10^\circ\text{C:} \quad \begin{cases} T_4 = 76^\circ\text{C} \\ T_5 = 135^\circ\text{C} \\ T_6 = 140^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = 3 \\ R_5 = -24 \\ R_6 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Disminuimos } T_5 \text{ en } 7^\circ\text{C:} \quad \begin{cases} T_4 = 76^\circ\text{C} \\ T_5 = 128^\circ\text{C} \\ T_6 = 140^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = -4 \\ R_5 = 4 \\ R_6 = -2 \end{cases}$$

Disminuimos T_4 en 1°C : $\begin{cases} T_4 = 75^\circ\text{C} \\ T_5 = 128^\circ\text{C} \\ T_6 = 140^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = 3 \\ R_5 = 3 \\ R_6 = -2 \end{cases}$

Aumentamos T_5 en $0,8^\circ\text{C}$: $\begin{cases} T_4 = 75^\circ\text{C} \\ T_5 = 128,8^\circ\text{C} \\ T_6 = 140^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = 3,8 \\ R_5 = -0,2 \\ R_6 = -1,2 \end{cases}$

Aumentamos T_4 en $0,55^\circ\text{C}$: $\begin{cases} T_4 = 75,55^\circ\text{C} \\ T_5 = 128,8^\circ\text{C} \\ T_6 = 140^\circ\text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} R_4 = -0,05 \\ R_5 = 0,35 \\ R_6 = -1,2 \end{cases}$

etc.

c) Técnicas matriciales

Se utilizará una red de 5 cm

Determinación de los valores de las matrices A y B

a) Todos los nudos interiores se resuelven de la misma forma, por ejemplo,

$$q_{3 \rightarrow 8} + q_{7 \rightarrow 8} + q_{13 \rightarrow 8} + q_{9 \rightarrow 8} = 0$$

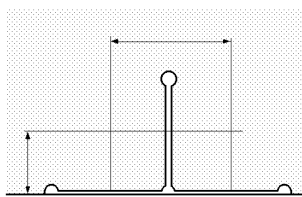
b) Las ecuaciones de los nudos que están en las superficies se determinan mediante tablas,

$$Bi = \frac{h_c F}{k} \frac{x}{1} = \frac{50 \times 0,05}{1} = 2,5$$

$$(Bi) T_F = 2,5 \times 50 = 125^\circ\text{C} ; 2 + Bi = 4,5$$

Los nudos situados en las superficies isotermas a T_B y T_D tienen temperaturas conocidas, quedando por determinar las temperaturas de los 15 nudos restantes

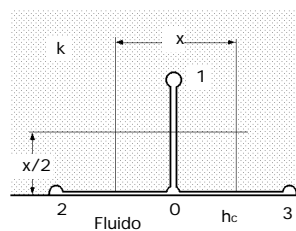
Superficie plana (Frontera aislada)



Frontera aislada

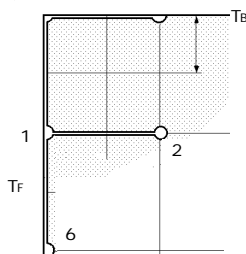
$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 - 2 T_0 = 0$$

Superficie plana en contacto con un fluido a T_F



$$\frac{T_2 + T_3}{2} + T_1 + (Bi) T_F - (2 + Bi) T_0 = 0$$

Nudo (1)

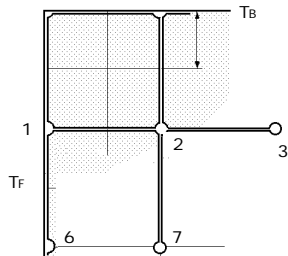


$$\frac{T_B + T_6}{2} + T_2 + 125 - 4,5 T_1 = 0$$

$$\frac{200 + T_6}{2} + T_2 + 125 - 4,5 T_1 = 0$$

$$\frac{T_6}{2} + T_2 - 4,5 T_1 = -225$$

Nudo (2)

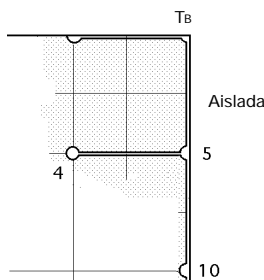


$$\begin{aligned} T_1 + T_B + T_3 + T_7 - 4 T_2 &= 0 \\ T_1 + 200 + T_3 + T_7 - 4 T_2 &= 0 \\ \boxed{T_1 - 4 T_2 + T_3 + T_7 = -200} \end{aligned}$$

Nudo 3 : $\boxed{T_2 - 4 T_3 + T_4 + T_B = -200}$

Nudo 4 : $\boxed{T_3 - 4 T_4 + T_5 + T_5 = -200}$

Nudo 5,



$$\begin{aligned} \frac{T_B + T_{10}}{2} + T_4 - 2 T_5 &= 0 \\ \frac{200 + T_{10}}{2} + T_4 - 2 T_5 &= 0 \\ \boxed{T_4 - 2 T_5 + \frac{T_{10}}{2} = -100} \end{aligned}$$

Nudo 6 : $\boxed{\frac{T_1 + T_{11}}{2} + T_7 + 125 - 4,5 T_6 = 0}$

Nudo 7 : $\boxed{T_2 + T_6 - 4 T_7 + T_8 + T_{12} = 0}$

Nudo 8 : $\boxed{T_3 + T_7 - 4 T_8 + T_9 + T_{13} = 0}$

Nudo 9 : $\boxed{T_4 + T_8 - 4 T_9 + T_{10} + T_{14} = 0}$

Nudo 10 : $\boxed{\frac{T_5 + T_{15}}{2} + T_9 - 2 T_{10} = 0}$

Nudo 11 : $\boxed{\frac{T_6}{2} - 4,5 T_{11} + T_{12} = -175}$

Nudo 12 : $\boxed{T_7 + T_{11} - 4 T_{12} + T_{13} = -100}$

Nudo 13 : $\boxed{T_8 + T_{12} - 4 T_{13} + T_{14} = -100}$

Nudo 14 : $\boxed{T_9 + T_{13} - 4 T_{14} + T_{15} = -100}$

Nudo 15 : $\boxed{\frac{T_{10}}{2} + T_{14} - 2 T_{15} = -50}$

Muchos de los elementos de la matriz A son cero, concentrándose los no nulos en las proximidades de la diagonal principal.

Los elementos de la matriz B son las constantes de los segundos miembros.

Temperaturas							
(1) = 88,57	(2) = 138,9	(3) = 158,56	(4) = 166,3	(5) = 168,38	(6) = 69,3	(7) = 108,5	(8) = 129,00
(9) = 138,28	(10) = 140,9	(11) = 68,1	(12) = 96,83	(13) = 110,69	(14) = 116,9	(15) = 118,68	

c) Técnicas de iteración Para los datos del primer caso (método numérico)

$$\text{Nudo 4 : } T_4 = \frac{400}{7} + \frac{T_5}{7}$$

$$\text{Nudo 5 : } T_5 = \frac{300}{4} + \frac{T_4 + T_6}{4}$$

$$\text{Nudo 6 : } T_6 = \frac{150}{2} + \frac{T_5}{2}$$

$$\text{supondremos que: } \begin{cases} T_4 = 80^\circ\text{C} \\ T_5 = 100^\circ\text{C} \\ T_6 = 150^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$1^{\text{a}} \text{ etapa de iteración: } \begin{cases} T_4 = \frac{400}{7} + \frac{100}{7} = 71,43^\circ\text{C} \\ T_5 = \frac{300}{4} + \frac{71,43 + 150}{4} = 130,36^\circ\text{C} \\ T_6 = \frac{150}{2} + \frac{130,36}{2} = 140,18^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ etapa de iteración: } \begin{cases} T_4 = \frac{400}{7} + \frac{130,66}{7} = 75,77^\circ\text{C} \\ T_5 = 75 + \frac{77,75 + 150}{4} = 128,98^\circ\text{C} \\ T_6 = 75 + \frac{128,98}{2} = 139,49^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ etapa de iteración: } \begin{cases} T_4 = \frac{400}{7} + \frac{128,98}{7} = 75,57^\circ\text{C} \\ T_5 = 75 + \frac{75,57 + 139,49}{4} = 128,77^\circ\text{C} \\ T_6 = 75 + \frac{128,77}{2} = 139,38^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$4^{\text{a}} \text{ etapa de iteración: } \begin{cases} T_4 = \frac{400}{7} + \frac{128,77}{7} = 75,538^\circ\text{C} \\ T_5 = 75 + \frac{75,57 + 139,38}{4} = 128,737^\circ\text{C} \\ T_6 = 75 + \frac{128,737}{2} = 139,368^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$5^{\text{a}} \text{ etapa de iteración: } \begin{cases} T_4 = \frac{400}{7} + \frac{128,737}{7} = 75,534^\circ\text{C} \\ T_5 = 75 + \frac{75,538 + 139,368}{4} = 128,726^\circ\text{C} \\ T_6 = 75 + \frac{128,737}{2} = 139,368^\circ\text{C} \end{cases}$$

$$6^{\text{a}} \text{ etapa de iteración: } \begin{cases} T_4 = \frac{400}{7} + \frac{128,726}{7} = \boxed{75,532^\circ\text{C}} \\ T_5 = 75 + \frac{75,534 + 139,368}{4} = \boxed{128,725^\circ\text{C}} \\ T_6 = 75 + \frac{128,726}{2} = \boxed{139,363^\circ\text{C}} \end{cases}$$

II.21.- Una placa sólida de sección rectangular de dimensiones (70 x 100) cm² y espesor infinito, tiene en régimen permanente las temperaturas en sus caras tal como se indica, (x = 0; T = 50°C), (x = 70 cm; T = 150°C), (y = 0; T = 250°C), (y = 100 cm ; T = 200°C)

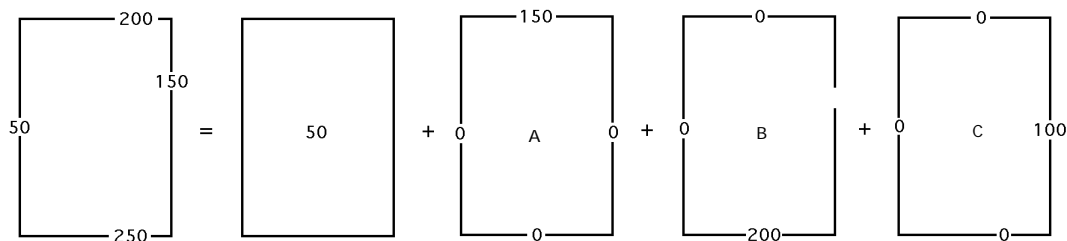
Determinar,

a) La distribución de temperaturas

b) Valor de la temperatura en el centro geométrico de la sección

RESOLUCION

a) La configuración inicial se puede descomponer en otras más simples para poder aplicar el método de superposición.



La distribución de temperaturas es de la forma, $T = 50 + T_A + T_B + T_C$

$$T_A = 2 \times 150 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{n y}{70}}{\text{Sh} \frac{n 100}{70}} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{n x}{70}$$

$$T_B = 2 \times 200 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{n (100-y)}{70}}{\text{Sh} \frac{n 100}{70}} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{n x}{70}$$

$$T_C = 2 \times 100 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Sh} \frac{n x'}{100}}{\text{Sh} \frac{n 70}{100}} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin \frac{n x'}{100}$$

$$T = 50 + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4 \times 150}{\text{Sh} \frac{n 100}{70}} \frac{\sin \frac{n x}{70}}{n} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4 \times 200}{\text{Sh} \frac{n 100}{70}} \frac{\sin \frac{n x}{70}}{n} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4 \times 100}{\text{Sh} \frac{n 70}{100}} \frac{\sin \frac{n x'}{100}}{n}$$

b) Temperatura en el centro; hay que tener en cuenta que, $x = 35$; $y = 50$; $x' = 50$; $y' = 35$

Resolviendo se obtiene, $T_A = 20,03 - 0,076 + 0,0005 - \dots = 19,95$

$$T_B = 26,7 - 0,101 + 0,0007 - \dots = 26,6$$

$$T_C = 38,17 - 1,57 + 0,104 - 0,0083 + 0,0007 - \dots = 36,699$$

$$T_{\text{centro}} = 50 + 19,95 + 26,6 + 36,699 = 133,25$$

II.22.- Sea un cilindro macizo de 50 cm de radio y 50 cm de altura; la cara superior se encuentra a una temperatura doble que la superficie lateral, y la cara inferior se encuentra aislada térmicamente; en estas condiciones se sabe que la temperatura en el centro es de 120°C.

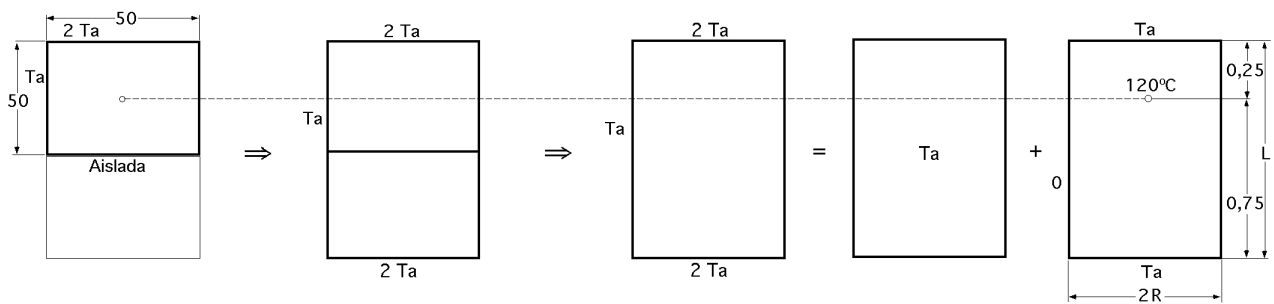
Determinar

a) La temperatura en la superficie lateral

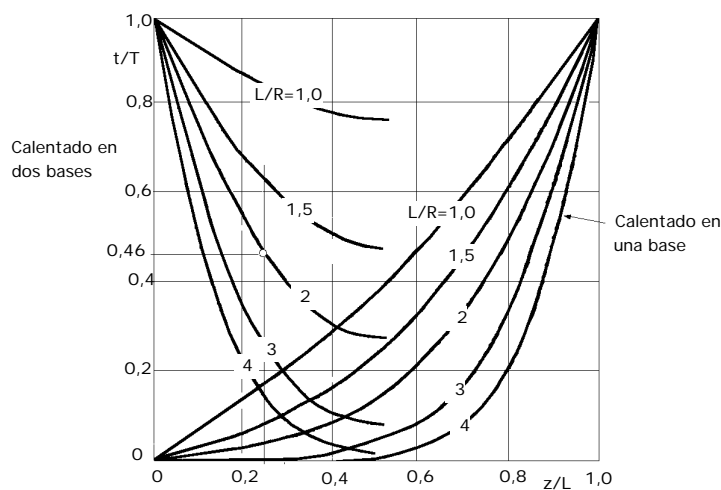
b) La temperatura en la base aislada térmicamente

RESOLUCION

Al tener el cilindro una base aislada térmicamente, esto equivale a duplicar su longitud, y estudiar la distribución de temperaturas en un cilindro de longitud (0,50 x 2 = 1 m), y temperatura en las bases $2 T_A$.

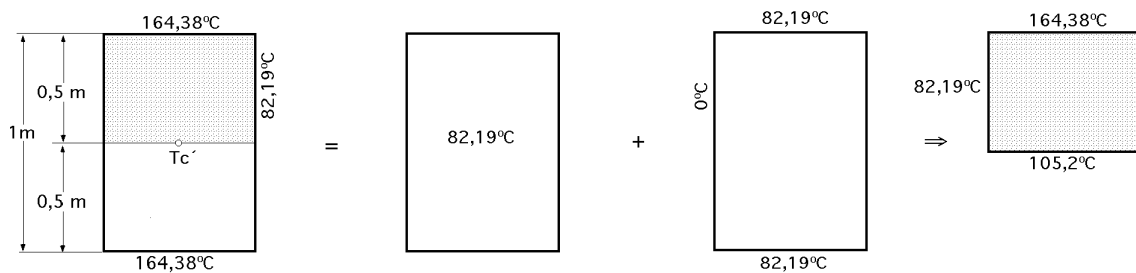


En estas condiciones, el nuevo cilindro se puede descomponer en otros dos, uno a temperatura uniforme T_A , y otro con temperatura en las bases T_A , y temperatura 0 en la superficie lateral. Haciendo uso de la gráfica correspondiente, teniendo en cuenta que, $L/R = 1/0,5 = 2$ y $z/L = 0,25/1 = 0,25$, resulta que $t/T = 0,46$; por lo tanto,



$$120 = T_A + 0,46 T_A = 1,46 T_A \quad ; \quad T_A = 82,19^\circ\text{C} \quad ; \quad 2 T_A = 2 \times 82,19 = 164,38^\circ\text{C}$$

b) Temperatura en la base aislada térmicamente,



Es como hallar la temperatura $T_{C'}$ en el centro de la siguiente configuración, que a su vez se descompone en otras dos, una de temperatura uniforme $82,19^\circ\text{C}$, y otra con temperatura en las bases de $82,19^\circ\text{C}$ y temperatura lateral 0°C .

Por lo tanto, como, $z/L = 0,5/1 = 0,5$, $L/R = 2$, resulta, $t/L = 0,28$

$$T_{C'} = 82,19 + 0,28 \times 82,19 = 105,2^\circ\text{C}$$

II.23.- Un cilindro macizo de 1 m de longitud y 0,5 m de radio se calienta de tal modo que su base superior posee una temperatura doble que la de su base inferior; la superficie lateral se encuentra a 100°C. En estas condiciones se ha medido la temperatura en el centro del cilindro obteniéndose un valor de 120°C. ¿Cuál es la temperatura de las bases?

RESOLUCION

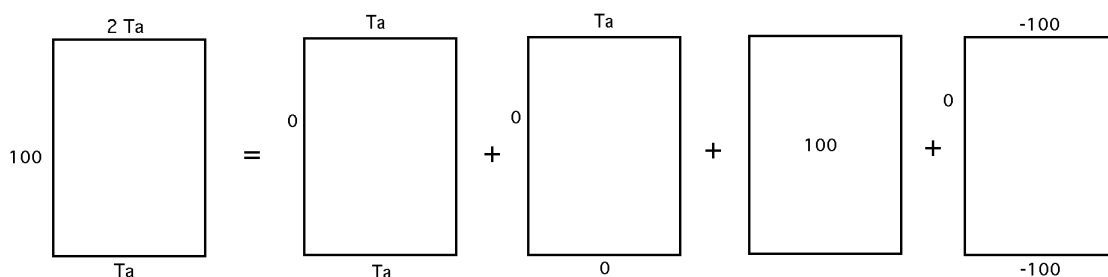
Por el principio de superposición descomponemos el problema en otros más sencillos,

Mediante la utilización de gráficas para cilindros,

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{0,5} = 2 \quad ; \quad \text{centro: } \frac{Z}{L} = 0,5$$

Cilindro calentado en ambos extremos: $\frac{t}{T} = 0,28$

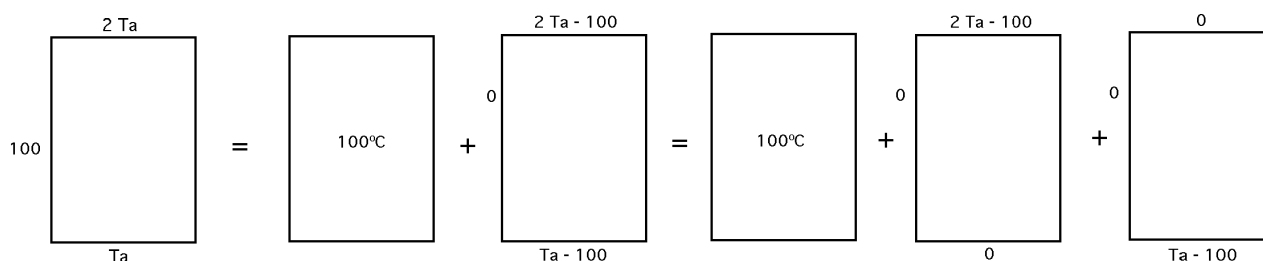
Cilindro calentado en un extremo: $\frac{t}{T} = 0,14$



Como la temperatura en el centro es de 120°C, resulta,

$$120 = 0,28 Ta + 0,14 Ta + 100 + 0,28 (-100) = 0,42 Ta + 72 \quad ; \quad Ta = 114,3^\circ\text{C} \quad ; \quad 2 Ta = 228,6^\circ\text{C}$$

De otra forma,



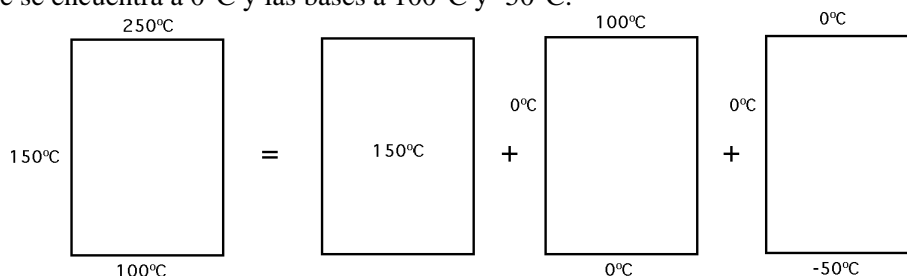
$$120 = 0,14 (Ta - 100) + 0,14 (2 Ta - 100) + 100 = 0,42 Ta + 72$$

$$Ta = 114,3^\circ\text{C} \quad ; \quad 2 Ta = 228,6^\circ\text{C}$$

II.24.- Un cilindro macizo de 10 cm de longitud y 20 cm de diámetro se calienta a 150°C en la superficie lateral, a 250°C en un extremo y a 100°C en el otro. ¿Cuál es la temperatura en el centro del cilindro?

RESOLUCION

Se pueden restar 150°C a todas las temperaturas, con lo que el problema es equivalente al de un cilindro en el que la superficie se encuentra a 0°C y las bases a 100°C y -50°C.



Para el cilindro de base superior a 100°C , $L/R = 1$; $z/L = 0,5$, la gráfica, para el caso de cilindro calentado en una base, proporciona,

$$t/T = 0,385 \quad ; \quad t = 0,385 \times T = 0,385 \times 100 = 38,5^{\circ}\text{C}$$

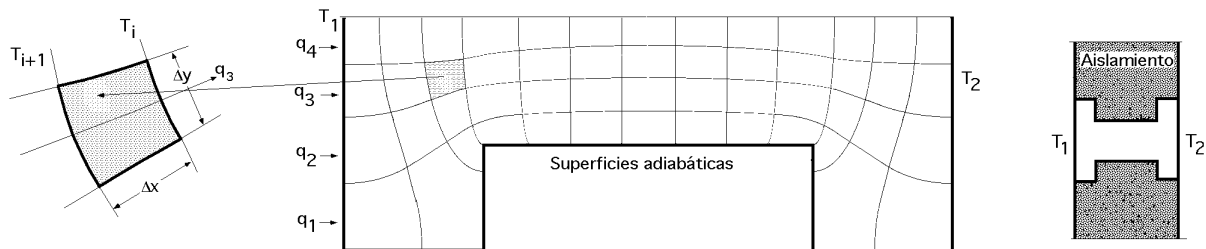
Para el cilindro de base inferior a -50°C , $L/R = 1$; $z/L = 0,5$, la gráfica, para el caso de cilindro calentado en una base, proporciona,

$$t/T = 0,385 \quad ; \quad t = 0,385 \times T = 0,385 \times (-50) = -19,25^{\circ}\text{C}$$

Al añadir los 150°C restados en un principio y superponer las dos soluciones, se obtiene,

$$T_{\text{centro}} = 38,5 - 19,25 + 150 = 169,25^{\circ}\text{C}$$

II.25.- Determinar la transferencia de calor por unidad de tiempo a través de la viga de la figura, si $T_1 = 500^{\circ}\text{C}$, $T_2 = 200^{\circ}\text{C}$ y $k = 70 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.



RESOLUCION

En la viga se tiene que, $M = 13$; $N = 4$; $T_{\text{global}} = T_1 - T_2 = 500 - 300 = 300^{\circ}\text{C}$

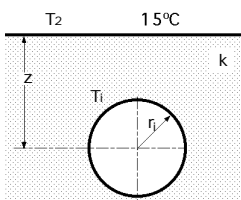
Como para determinar N sólo se ha considerado la mitad de la viga, la transferencia de calor en la unidad de tiempo a través de la unidad de espesor de la misma es,

$$Q = 2k \frac{N}{M} (T_1 - T_2) = 2 \times 70 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \times \frac{4}{13} \times 300^{\circ}\text{C} = 12.923 \text{ W/m}$$

II.26.- Un tanque esférico de diámetro $d=0,5$ metros contiene materiales radiactivos y va enterrado en la tierra a una profundidad de $1,25$ metros, medidos desde el centro de la esfera hasta la superficie del suelo. La superficie del tanque se mantiene a una temperatura uniforme $T_1=100^{\circ}\text{C}$, consecuencia del proceso de radiación, mientras que la superficie de la tierra está a una temperatura de 15°C .

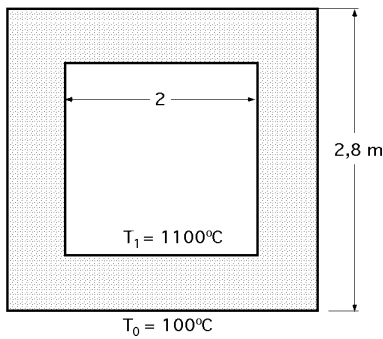
Sabiendo que la conductividad térmica de la tierra es de $0,8 \text{ W/m}\cdot\text{C}$, determinar el calor generado en el tanque como consecuencia de los procesos radiactivos que acontecen en su interior.

RESOLUCION



$$F = \frac{4}{1 - \frac{r_1}{2z}} = \left| z \gg r_1 \right| = \frac{4 \times 0,25}{1 - \frac{0,25}{2 \times 1,25}} = 3,49 \text{ metros}$$

$$Q = F k (T_1 - T_2) = 3,49 \text{ m} \times 0,8 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{C}} (100 - 15)^{\circ}\text{C} = 237,3 \text{ W}$$



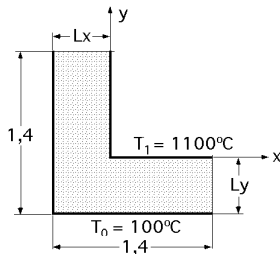
II.27.- La sección recta de las paredes de un horno tiene la forma que se indica en la figura, en la que sus dimensiones exteriores son $2,8 \times 2,8 \text{ m}^2$, el espesor de las paredes $L=40 \text{ cm}$, temperatura de las superficies interiores 1100°C , temperatura de las paredes exteriores 100°C , conductividad térmica $k = 0,1 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$.

Determinar,

a) La distribución de temperaturas

b) El calor disipado al exterior

RESOLUCION



Cálculo de la resistencia térmica,

Considerando un cuadrante y aplicando la ecuación de paredes en ángulo recto,

$$L_x = L_y = \text{espesor} = e ; x = 1,4 - e = 1,4 - 0,4 = 1$$

$$R = \frac{1}{k \left[\frac{x}{L_y} + \frac{y}{L_x} + \frac{2}{4} \ln \frac{L_x^2 + L_y^2}{L_x^2 L_y^2} \right] + \frac{2}{L_x} \frac{L_y}{\text{arc tg}} \left(\frac{L_x}{L_y} \right) + \frac{2}{L_y} \frac{L_x}{\text{arc tg}} \left(\frac{L_y}{L_x} \right)} = |L_x = L_y| =$$

$$= \frac{1}{k \left(2 \frac{x}{L_x} - \frac{2}{4} \ln 2 + 1 \right)} = \frac{1}{0,1 \left(2 \frac{1}{0,4} - \frac{2}{4} \ln 2 + 1 \right)} = 1,7989 \frac{\text{h.m.}^\circ\text{C}}{\text{Kcal}} = \frac{1}{0,5558} \frac{\text{h.m.}^\circ\text{C}}{\text{Kcal}}$$

Para 4 ángulos rectos,

$$R_{\text{Total}} = \frac{1}{4 \times 0,5558} \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}} = \frac{1}{2,2235} \frac{\text{h.m.}^\circ\text{C}}{\text{Kcal}}$$

a) Distribución de temperaturas

$$\text{Eje } x = T_1 - T_0 = \frac{x}{L_y} + \frac{1}{4} \left[\ln \frac{L_x^2 + L_y^2}{L_x^2} + 2 \frac{L_x}{L_y} \text{arc tg} \left(\frac{L_y}{L_x} \right) \right]$$

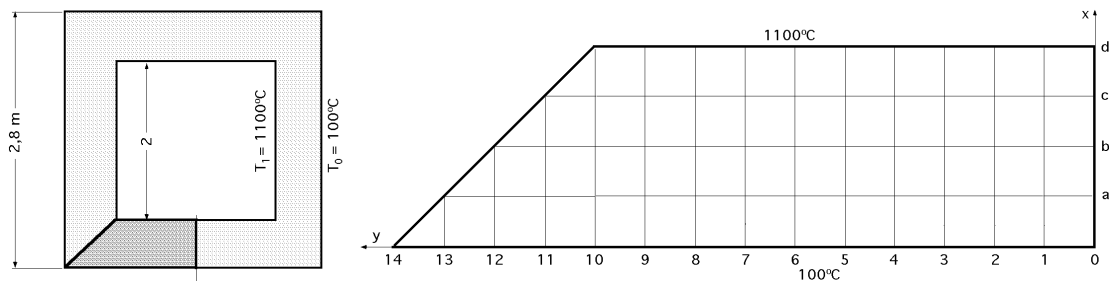
$$\text{Eje } y = T_1 - T_0 = \frac{y}{L_x} + \frac{1}{4} \left[\ln \frac{L_x^2 + L_y^2}{L_y^2} + 2 \frac{L_y}{L_x} \text{arc tg} \left(\frac{L_x}{L_y} \right) \right]$$

b) Calor disipado al exterior

$$q = \frac{T_1 - T_0}{R} = \frac{1100 - 100}{\frac{1}{2,2235}} = 2223,5 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}}$$

METODO NUMERICO

Consideraremos mallas cuadradas de $(0,1 \times 0,1) \text{ m}$; tomamos 1/8 de sección.



Los puntos en contacto con la superficie exterior están a 100°C

$$T_{0-0} = T_{0-1} = T_{0-2} = T_{0-3} = \dots = T_{0-14} = 100^\circ\text{C}$$

Los puntos en contacto con la superficie interior están a 1100°C

$$T_{d-0} = T_{d-1} = T_{d-2} = T_{d-3} = \dots = T_{d-10} = 1100^\circ\text{C}$$

Asu vez,

$$T_{1-a} = T_{1-b} ; T_{1-b} = T_{1-c}$$

$$T_{12-a} = T_{13-b} ; T_{11-b} = T_{12-c} ; T_{10-c} = T_{11-d}$$

$$\text{Nudos interiores: } T_A + T_B + T_C + T_D = 4 T_i$$

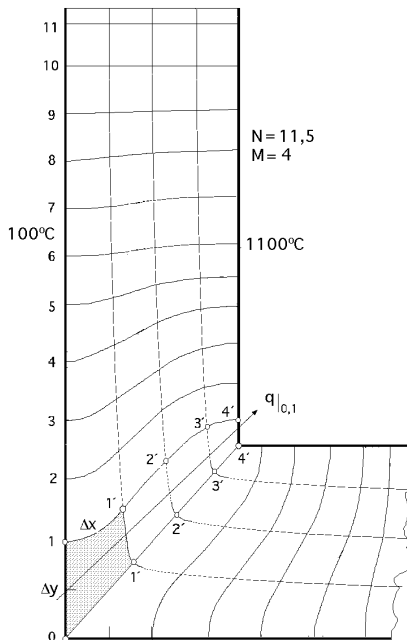
La resolución de estas ecuaciones proporciona la siguiente tabla de valores,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	350	349	348	347	347	347	346	342	335	320	292	252	205	152
b	600	599	598	597	596	596	594	588	572	552	499	417	311	---
c	850	850	849	847	846	846	845	842	836	810	755	586	---	---

Cantidad de calor que se pierde al exterior por el octante: $q = 282,4 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}}$

Calor que se pierde al exterior para todo el bloque: $Q = 282,4 \times 8 = 2259,2 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}}$

METODO GRAFICO



La cantidad de calor por unidad de altura que pasa a través del elemento (0,1), (1,1') es,

$$q_{0-1} = k (T_{1'} - 100) \frac{(11')}{(10)} = q_{1'-1'} = q_{2'-2'} = q_{3'-3'} \dots$$

Si los cuadriláteros se han construido de forma que la suma de los dos lados opuestos sean iguales, se cumple,

$$\frac{(11')}{(10)} = \frac{(1'2')}{(1'1')} = \frac{(2'3')}{(2'2')} = \dots = \frac{x}{y}$$

por lo que,

$$q_{0-1} = k (1100 - 100) (1 + 1 + 1 + 1) = 4000 k$$

Si el número de cuadrados curvilíneos es M, se tiene,

$$q_{0-1} = k \frac{T}{M} = k \frac{1100 - 100}{M}$$

Análogamente para la cantidad de calor que atraviesa las isoterma,

$$(0-1), (1-2), \dots (10-11), (11-12) \dots (1'-1') \dots (2'-2') \dots$$

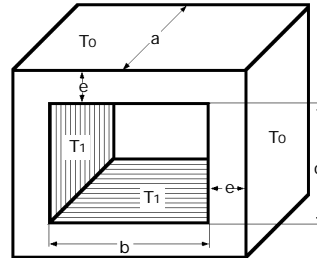
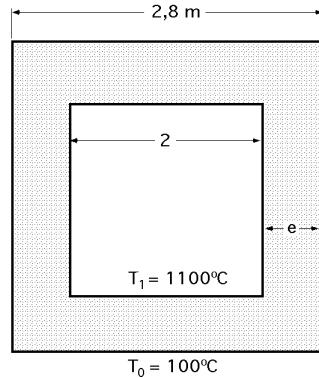
$$q = q_{0-1} + q_{0-2} + \dots = N q_{0-1}$$

Cantidad de calor total para toda la sección,

$$Q = k \frac{N}{M} (1100 - 100) \times 8 = \frac{11,5}{4} \times 0,1 \times (1100 - 100) \times 8 = 2200 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}}$$

METODO DEL FACTOR DE FORMA

$$e = 0,4 \text{ m}; \frac{e}{5} = \frac{0,4}{5} = 0,08 \text{ m}; \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \text{ m}; a > e/5 \\ b = 2 \text{ m}; b > e/5 \\ c = 2 \text{ m}; c > e/5 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{A_1}{e} + 2,16 (a + b + c) + 1,2 e \\ (a, b, c) > e/5 \end{array} \right\}$$



Area de la superficie interna: $A_1 = (2 \times 2) \times 1 = 4 \text{ m}^2$

$$F = \frac{4}{0,4} + 2,16 (1 + 2 + 2) + (1,2 \times 0,4) = 21,28$$

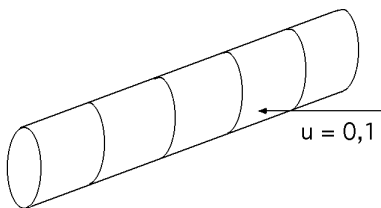
$$q = k F (T_1 - T_0) = 0,1 \times 21,28 \times (1100 - 100) = 2128 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}}$$

II.28.- Para el almacenamiento de productos radiactivos de conductividad térmica $k_r = 20 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ se utilizan contenedores cilíndricos de acero $k_a = 15 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, de diámetro interior 1 metro y espesor 0,1 m.

La energía generada por el material radiactivo tiene un flujo térmico, $E = 10^5 \text{ W/m}^3$.

Los contenedores se sumergen en el fondo marino en donde el agua está a 5°C . Los contenedores están unidos por sus bases conformando un cilindro continuo en posición horizontal, estando sometidos a unas corrientes marinas horizontales, normales a los contenedores, de velocidad $0,1 \text{ m/seg}$.

Determinar



- El coeficiente de película contenedor-agua
- La temperatura de la pared del contenedor exterior e interior
- La temperatura en el eje del contenedor, y a una distancia radial de 0,3 m
- La fuerza de arrastre por cada 50 metros de longitud de contenedores

Propiedades medias de la película de agua en contacto con los contenedores,

$$= 995 \text{ kg/m}^3; c_p = 4,18 \text{ kJ/kg}^\circ\text{K}; k = 0,61 \text{ W/m}^\circ\text{K}; \nu = 0,148 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}; \alpha = 0,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}; Pr = 6$$

RESOLUCION

a) Coeficiente de película contenedor-agua

$$Re = \frac{u_F d}{\nu} = \frac{0,1 \text{ m} \times 1,2 \text{ (m/seg)}}{0,8 \times 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{seg)}} = 150.000$$

$$Nu = C Re^n Pr^{1/3} = \left| \begin{array}{l} C = 0,0266 \\ n = 0,805 \end{array} \right| = 0,0266 \times (150000)^{0,805} \times 6^{0,0266} = 710 \text{ (general)}$$

$$Nu = 1,11 C Re^n Pr^{0,42} = \left| \begin{array}{l} C = 0,0266 \\ n = 0,805 \end{array} \right| = 1,11 \times 0,0266 \times (150000)^{0,805} \times 6^{0,42} = 920 \text{ (líquidos)}$$

Tomaremos, $Nu = 920$

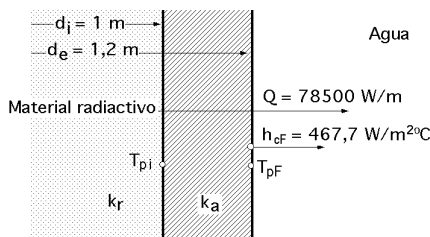
$$920 = \frac{h_{cF} d}{k} ; h_{cF} = \frac{920 \times 0,01}{1,2} = 467,7 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

b) Temperatura de la pared del contenedor exterior e interior

Se considerará conducción monodimensional radial, viniendo los resultados por unidad de longitud del cilindro 1 m. La energía que generan los productos radiactivos se disipa al exterior por convección, atravesando las paredes del contenedor.

El calor generado por los residuos radiactivos por unidad de longitud del cilindro es,

$$Q = E V = E \times r^2 = 10^5 \frac{W}{m^3} \times 0,5^2 m^2 = 78.500 \frac{W}{m}$$



Temperatura exterior del contenedor T_{pF}

$$Q = \frac{T_{pF} - T_{agua}}{\frac{1}{2 r_e h_{cF}}} = \frac{T_{pF} - 5^\circ C}{\frac{1}{2 \times 0,6 m \times 467,7 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}}} = 78500 \frac{W}{m}$$

$$T_{pF} = 49,5^\circ C$$

Temperatura interior del contenedor T_{pi}

$$Q = \frac{T_{pi} - T_{pF}}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2 k}} = \frac{T_{pi} - 49,5^\circ C}{\frac{\ln \frac{0,6}{0,5}}{2 \times 15 \frac{W}{m \cdot ^\circ K}}} = 78500 \frac{W}{m}$$

$$T_{pi} = 201,3^\circ C$$

c) Temperatura en el eje del contenedor

Dentro de los residuos se establece un problema de generación de energía, por lo que la $T_{m\acute{a}x}$ se establece en la línea del eje central

$$T_{m\acute{a}x} = T_{pi} + \frac{E r_i^2}{4 k_r} = 201,3 + \frac{10^5 \frac{W}{m^3} \times 0,5^2 m^2}{4 \times 20 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}} = 513,8^\circ C$$

Temperatura a una distancia radial de 0,3 m,

$$T_{(r=0,3)} = T_{pi} + \frac{E r_i^2}{4 k_r} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_i} \right)^2 \right\} = 201,3 + \frac{10^5 \frac{W}{m^3} \times 0,5^2 m^2}{4 \times 20 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}} \left\{ 1 - \left(\frac{0,3}{0,5} \right)^2 \right\} = 401,45^\circ C$$

d) La fuerza de arrastre por cada 50 metros de longitud de contenedores

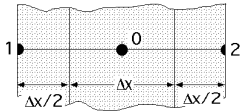
$$F_{arrastre} = \frac{C_w u_F^2 A_{Frontal}}{2} = \left| \begin{array}{l} Re = 150000 \quad C_w = 1,6 \\ A_{Frontal} = 50 \times 1,2 = 60 m^2 \end{array} \right| = 1,6 \times 996 \frac{Kg}{m^3} \times 0,1^2 \frac{m^2}{seg^2} \times 60 m^2 = 477,6 N$$

III.1.- Se tiene una placa de 10 cm de espesor, a una temperatura uniforme de 20°C, que se introduce en un medio a 100°C, adquiriendo instantáneamente esta temperatura.

Determinar mediante técnicas numéricas, el tiempo necesario para que el plano medio de la pieza alcance una temperatura de 60°C.

Datos, $\alpha = 6.10^{-6} \frac{m^2}{seg}$

RESOLUCION



a) Tiempo necesario para que el plano medio de la pieza alcance una temperatura de $T = 60^\circ C$.

Ecuación diferencial unidimensional

$$\frac{T}{t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_1 - 2T + T_2}{x^2} = |T_1 = T_2| = \frac{2T_1 - 2T}{x^2} = 2 \frac{T_1 - T}{x^2}$$

Integrándola, $\frac{dT}{T_1 - T} = \frac{2}{x^2} dt$; $\int_{293}^{333} \frac{dT}{T_1 - T} = \frac{2}{x^2} \int_0^t dt$

$$T_1 = 100 + 273 = 373^\circ K$$

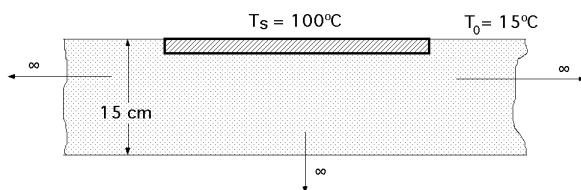
$$-\ln(T_1 - T) \Big|_{293}^{333} = \frac{2}{x^2} t \Big|_0^t ; -\ln \frac{373 - 333}{373 - 293} = \frac{2 \times 6.10^{-6} t}{0.05^2} \quad t = 144,4 \text{ seg}$$

III.2.- Un calentador plano y grande, con una temperatura superficial de 100°C, se coloca en contacto directo con la tierra $k = 2,0 \text{ W/m}^\circ K$, $\alpha = 5.10^{-7} m^2/seg$. Si el suelo estaba originariamente a una temperatura uniforme de 15°C, determinar,

a) La temperatura del plano situado a 15 cm por debajo del calentador, dos horas después de que se aplique calor por contacto

b) La cantidad de calor total conducido hacia el interior de la tierra por unidad de área en las dos primeras horas

RESOLUCION



a) Temperatura del plano situado a 15 cm por debajo del calentador, dos horas después de que se aplique calor

Dado que se puede considerar a la Tierra como un sólido semiinfinito, cuando el calentador entra en contacto con

ella la condición de contorno se puede considerar isotérmica, por cuanto hay un cambio brusco de la temperatura de la superficie; la distribución de temperaturas es,

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = G(u) = G\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = G\left(\frac{0,15}{2\sqrt{5 \times 10^{-7} \times 2 \times 3600}}\right) = G(1,25) = 0,92287$$

$$T(x,t) = T_s + G(u) (T_0 - T_s) = 100 + 0,92287 \times (15 - 100) = 21,55^\circ C$$

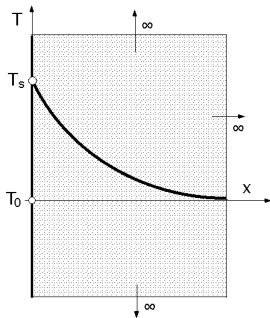
b) La cantidad de calor total conducido hacia el interior de la tierra por unidad de área en las dos primeras horas es,

$$Q(t) = 2k(T_s - T_0) \sqrt{\frac{t}{\pi}} = 2 \times 2 \frac{W}{m^\circ C} (100 - 15)^\circ C \sqrt{\frac{7200 \text{ seg}}{5 \times 10^{-7} \frac{m^2}{seg}}} = 6,394 \frac{kW}{m^2}$$

III.3.- Una pared de hormigón $\alpha = 7.10^{-7} \text{ m}^2/\text{seg}$ está inicialmente a una temperatura uniforme de $T_0 = 25^\circ\text{C}$. Repentinamente una de sus caras aumenta su temperatura y pasa a valer 125°C , manteniéndose esta temperatura indefinidamente.

Calcular la temperatura a 5, 10 y 15 cm de la superficie caliente, 30 minutos después del ascenso brusco de la temperatura superficial de la pared.

RESOLUCION



Al haber un cambio repentino en la temperatura de la superficie, la condición de contorno es isotérmica

Para 30 minutos = 1800 segundos, el valor de “u” es

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{x}{2\sqrt{7.10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \times 1800 \text{ seg}}} = 14,08 \text{ x}$$

a) Para: $x = 0,05 \text{ m}$; $u = 14,08 \times 0,05 = 0,7042$ $G(u) = 0,6806$

$$T(x,t) = T_s + G(u)(T_0 - T_s) = 125 + 0,68 \times (25 - 125) = 56,9^\circ\text{C}$$

b) Para: $x = 0,1 \text{ m}$; $u = 14,08 \times 0,1 = 1,408$ $G(u) = 0,95358$

$$T(x,t) = T_s + G(u)(T_0 - T_s) = 125 + 0,95358 \times (25 - 125) = 29,64^\circ\text{C}$$

c) Para: $x = 0,15 \text{ m}$; $u = 14,08 \times 0,15 = 2,1126$ $G(u) = 0,9971$

$$T(x,t) = T_s + G(u)(T_0 - T_s) = 125 + 0,9971 \times (25 - 125) = 25,29^\circ\text{C}$$

Este último resultado está muy próximo a la T_0 inicial, por lo que el calor no ha penetrado en los 30 minutos a esa profundidad.

III.4.- Una placa de acero de 1 cm de espesor se saca de un horno a 600°C y se sumerge en un baño de aceite a 30°C . Si se calcula que el coeficiente de transferencia de calor es de $400 \text{ W/m}^2\text{K}$, ¿cuánto tiempo tarda la placa en enfriarse hasta 100°C ?

Tomar para el acero, $k = 50 \text{ W/m}^\circ\text{K}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ y $c_p = 450 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$.

RESOLUCION

Lo primero que hay que hacer es determinar el n° de Biot para ver en qué tipo de condición térmica estamos. Para una placa de ancho a, altura h y espesor e, y despreciando el efecto de los bordes, se tiene,

$$Bi = \frac{h_C L}{k} = \left| \frac{V}{A} = \frac{a e h}{2 a h} = \frac{e}{2} \right| = \frac{h_C \frac{e}{2}}{k} = \frac{400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} 0,005 \text{ m}}{50 \frac{\text{W}}{\text{m} \text{K}}} = 0,04 < 0,1$$

luego admite la condición de resistencia térmica interna despreciable.

$$Fo = \frac{t}{\left(\frac{V}{A}\right)^2} = \frac{t}{\left(\frac{e}{2}\right)^2} = \left| \frac{k}{c_p} = \frac{50 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}}{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 450 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}}} = 1,4245 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \right| = \frac{1,4245 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} t}{\left(\frac{0,01}{2}\right)^2} = 0,5698 \text{ t}$$

Distribución de temperaturas: $\frac{T(t) - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-(Bi)(Fo)}$

$$\frac{100 - 30}{600 - 30} = 0,1228 = e^{-0,04 \times 0,5698 t} \quad ; \quad t = 92 \text{ seg}$$

III.5.- Un experimento sobre procesamiento de materiales en condiciones de microgravedad en un transbordador espacial exige el enfriamiento de una pieza en un flujo forzado de algún gas inerte. Una esfera metálica de 1 cm de diámetro sale de un horno a 800°C y se enfria hasta 500°C mediante un flujo de gas nitrógeno a 25°C. El coeficiente de transferencia de calor por convección para el enfriamiento es de 25 W/m²K.

Las propiedades del material de la esfera son, $\rho = 14000 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 140 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$; emisividad, $\epsilon = 0,1$.

Las superficies del entorno pueden considerarse como casi negras a 250C.

Determinar el tiempo necesario del experimento

RESOLUCION

Al tratarse de un enfriamiento en un gas, el modelo de enfriamiento con resistencia térmica interna despreciable se puede suponer es válido.

El coeficiente de transferencia de calor lo será por convección y por radiación $h = h_c + h_r$

Distribución de temperaturas: $\frac{T(t) - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-(Bi)(Fo)}$

$$h_r = \frac{(\epsilon \sigma (T_0^2 + T_F^2) (T_0 + T_F))}{(T_0 - T_F)} = 0,1 \times 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^4} (1073^2 + 298^2) (1073 + 298) \text{ } ^\circ\text{K}^3 = 9,64 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}}$$

$$Bi \text{ Fo} = \frac{h \frac{V}{A}}{k} \frac{t}{\left(\frac{V}{A}\right)^2} = \frac{h_c + h_r}{k} \frac{\frac{k}{c_p} t}{\frac{4}{3} \frac{R^3}{4 R^2}} = \frac{3 (h_c + h_r) t}{c_p R} = \frac{3 (25 + 9,64) \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}} t}{14000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 140 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}} 0,005 \text{ m}} = 0,010604 t$$

$$\frac{500 - 25}{800 - 25} = 0,613 = e^{-Bi \text{ Fo}} = e^{-0,010604 t} \quad t = 46,15 \text{ seg}$$

Comprobación,

$$Bi = \frac{h \frac{R}{3}}{k} = \frac{34,6 \times \frac{0,005}{3}}{k} = \frac{0,05767}{k} \ll 0,1$$

III.6.- Una conducción de 10 cm de diámetro exterior está enterrada en el suelo, de forma que éste se encuentra a una temperatura uniforme de 10°C. En el invierno se produce una caída de temperatura a nivel del suelo del orden de -15°C y se mantiene así durante 50 días.

Determinar

a) A qué profundidad mínima habrá que colocar la tubería para que el agua que circula por el interior no congele

b) La cantidad de calor que se disipa al exterior cada día

Datos: $\alpha = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$; $k = 1,5 \text{ W/m}^\circ\text{K}$

RESOLUCION

a) Profundidad mínima a la que habrá que colocar la tubería para que el agua que circula por el interior no congele

Se puede interpretar la Tierra como un sólido semiinfinito, de forma que el enfriamiento provoque una situación de contorno isotérmica, ya que su efecto a mucha profundidad sería inapreciable

$$u = \frac{x}{2 \sqrt{t}} = \left| \begin{array}{l} = 0,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \\ t = 50 \times 24 \times 3600 \text{ seg} = 4,32 \cdot 10^6 \text{ seg} \end{array} \right| = \frac{x}{2 \sqrt{0,2 \cdot 10^{-6} \times 4,32 \cdot 10^6}} = 0,5379 x$$

$$G(u) = \frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{0 - (-15)}{10 - (-15)} = \frac{15}{25} = 0,6 \quad \left\{ \begin{array}{l} G(u) = 0,60386 ; u = 0,60 \\ G(u) = 0,58792 ; u = 0,58 \end{array} \right\} \quad u = 0,59515$$

luego la profundidad mínima para que el agua no congele es,

$$u = 0,59515 = 0,5379 \times x ; \quad x = 1,1064 \text{ m}$$

b) Cantidad de calor que se disipa al exterior cada día

$$q(t) = \frac{-k(T_0 - T_s)}{\sqrt{\pi t}} = \frac{-1,5 \times [10 - (-15)] \frac{\text{W}}{\text{m}}}{\sqrt{\pi \times 0,2 \times 10^{-6} \times t} \text{ m}} = \frac{-47308}{\sqrt{t}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$Q(t) = \int_0^t q(t) dt = \int_0^{86400} \frac{-47308}{\sqrt{t}} dt = 27,81 \cdot 10^6 \frac{\text{W} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} = 7,725 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Superficie A de evacuación por metro de longitud de tubería,

$$A = 2 \pi R L = \pi \times 0,1 \times 1 = 0,31416 \text{ m}^2$$

$$Q(t) = 7,725 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2} \times 0,31416 \text{ m} = 2,427 \frac{\text{kW}}{\text{metro de longitud de tubería}}$$

III.7.- La temperatura de un chorro de gas se mide con un termopar; la unión del mismo se puede considerar aproximadamente como una esfera de diámetro $d = 1 \text{ mm}$, $k = 25 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, $\rho = 8400 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 0,4 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$. El coeficiente de película entre el chorro de gas y la unión del termopar es $h_C = 560 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$.

Determinar,

a) El tiempo que tardará el termopar en registrar el 99% de la temperatura del chorro

b) El tiempo que tardará el termopar en registrar el 99,99% de la temperatura del chorro. ¿Podría medir la temperatura exacta? ¿Por qué?

RESOLUCION

Dado que el fluido exterior es un gas, y el sólido es metálico, parece muy probable que la condición de contorno sea de resistencia térmica despreciable; para ello habrá que determinar el número de Bi y ver si es menor de 0,1.

$$Bi = \frac{h_C L}{k} = \frac{h_C \frac{V}{A}}{k} = \frac{h_C \frac{3}{4} \frac{R^3}{R^2}}{k} = \frac{h_C \frac{R}{3}}{k} = \frac{560 \times \frac{1 \cdot 10^{-3}}{6}}{25} = 3,73 \cdot 10^{-3}$$

por lo que sí se puede considerar como sólido con resistencia térmica interna despreciable.

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi Fo} = e^{-\frac{h_C A t}{V c_p}} = e^{-\frac{h_C t}{\frac{R}{3} c_p}} = e^{-\frac{560 \frac{\text{W}}{\text{m}^2^\circ\text{C}} t}{8400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{0,001}{6} \text{ m} \times 400 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}}} = e^{-t}, \text{ con } t \text{ en segundos}$$

a) Tiempo que tardará el termopar en registrar el 99% de la temperatura del chorro

Para que el termopar registre el 99% de la diferencia de temperatura aplicada, o lo que es lo mismo, la fracción de temperatura que queda sin precisar, se puede poner,

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{1}{100} = e^{-t} ; \quad t = 4,6 \text{ segundos}$$

b) Tiempo que tardará el termopar en registrar el 99,99% de la temperatura del chorro. ¿Podría medir la temperatura exacta? ¿Por qué?

Para un 99,99% de precisión,

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{1}{10000} = e^{-t} ; t = 9,21 \text{ segundos}$$

Para un 100% de precisión, la temperatura medida sería la exacta,

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{1}{10000} = e^{-t} ; t = \text{segundos}$$

III.8.- Una placa de Al, $k = 160 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, $\rho = 2790 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 0,88 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$, de espesor, $e = 3 \text{ cm}$ y con una temperatura uniforme $T_0 = 225^\circ\text{C}$ se sumerge, agitándola, en un fluido que se encuentra a una temperatura constante $T_F = 25^\circ\text{C}$. El coeficiente de transmisión de calor entre la placa y el fluido es $h_C = 320 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$.

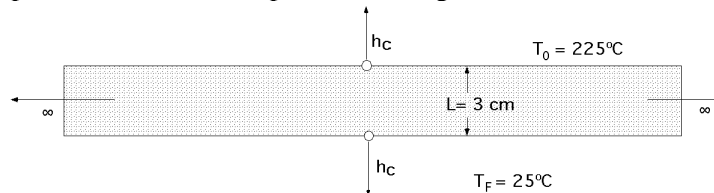
Determinar

- El tiempo requerido para que el centro de la lámina alcance 50°C**
- El calor intercambiado (en Kcal), si la superficie de la lámina es de 1 m^2 .**

RESOLUCION

a) Tiempo requerido para que el centro de la lámina alcance 50°C

La convección se realiza por las dos caras de superficie A, luego,



$$Bi = \frac{h_C x}{k} = \frac{h_C \frac{V}{A}}{k} = \frac{h_C \frac{L}{2}}{k} = \frac{320 \times \frac{0,03}{2}}{160} = 0,03 < 0,1$$

por lo que el sólido se comporta con resistencia térmica despreciable.

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi Fo} = \left| \begin{array}{l} = \frac{k}{c_p} = \frac{160 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}}{2790 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,88 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}}} = 0,06517 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \\ \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{50 - 25}{225 - 25} = 0,125 \\ Fo = \frac{t}{\left(\frac{V}{A}\right)^2} = \frac{t}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{0,06517 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} t}{0,015^2} = 0,2896 t \end{array} \right| = e^{-0,03 \times 0,2896 t} = 0,125$$

Resolviendo se obtiene el tiempo requerido para que el centro de la placa alcance 50°C : $t = 239,4 \text{ seg}$.

(con programa informático 242,5 seg y con el gráfico de Heisler 241,7 seg) ($h_C/k = 2$, convección)

b) Calor intercambiado, si la superficie de la lámina es de 1 m^2 .

Calor intercambiado en Kcal si, $A = 2 \times 1 \text{ m}^2$

$t = 240 \text{ segundos}$; $Fo = 0,2896 \times 240 = 69,50$

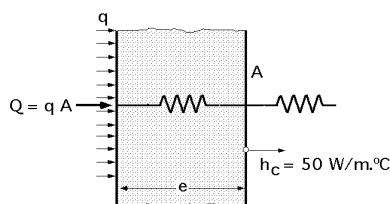
$$Q(t) = h_C A (T_0 - T_F) t \frac{1 - e^{-Bi Fo}}{Bi Fo} = 320 (\text{W/m}^2^\circ\text{C}) \times 2 (\text{m}^2) (225 - 25)^\circ\text{C} \times 240 (\text{seg}) \frac{1 - \exp(-3 \times 10^{-2} \times 69,50)}{3 \times 10^{-2} \times 69,50} =$$

$$= 12_1902.295 (\text{W} \cdot \text{seg}) = 12_1902.295 (\text{Joules}) = \frac{12.902,295 (\text{kJoul})}{4,186 \frac{\text{kJoul}}{\text{Kcal}}} = 3.082 \text{ Kcal}$$

III.9.- Una plancha eléctrica tiene una base de acero $k = 70 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, $\rho = 7840 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 0,45 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$ y pesa 1 kg . Dicha base tiene una superficie de calentamiento $A = 0,025 \text{ m}^2$ y se calienta con el calor procedente de una resistencia eléctrica que proporciona $Q = 250 \text{ W}$. Inicialmente la temperatura de la placa base es $T_0 = 20^\circ\text{C}$; a medida que la placa se va calentando disipa calor por convección a un fluido exterior que se encuentra a $T_F = 20^\circ\text{C}$, con un coeficiente $h_{cF} = 50 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$.

Calcular la temperatura de la placa al cabo de 5 minutos después de iniciado el calentamiento de la misma.

RESOLUCION



$$\text{Flujo de calor: } q = \frac{Q}{A} = \frac{250 \text{ W}}{0,025 \text{ m}^2} = 10.000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Cálculo del espesor "e", Masa} = V = (\text{Espesor} \times A) = e A$$

$$e = \frac{\text{Masa}}{A} = \frac{1 \text{ kg}}{0,025 \text{ m}^2 \times 7840 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0,51 \cdot 10^{-2} \text{ m} = L = \frac{V}{A}$$

$$Bi = \frac{h_c \frac{V}{A}}{k} = \frac{h_c L}{k} = \frac{50 \times 0,51 \cdot 10^{-2}}{70} = 3,64 \cdot 10^{-3} \quad \text{Resistencia térmica despreciable}$$

$$= \frac{X}{m} + \left(0 - \frac{X}{m} \right) e^{-mt} = \left| \begin{array}{l} \frac{X}{m} = \frac{q}{h_c} = \frac{10000}{50} = 200 \\ m = \frac{h_c}{e c_p} = \frac{50}{7840 \times 0,51 \cdot 10^{-2} \times 450} = 0,002778 \end{array} \right| =$$

$$= 200 + (0 - 200) e^{-0,002778 \times 5 \times 60} = 113,09 = T - T_F = T - 20 \quad T = 133,1^\circ\text{C}$$

$$\text{Temperatura de equilibrio, } = \frac{X}{m} = 200 ; T(t) - T_F = T(t) - 20 = 200 ; T(t) = 220^\circ\text{C}$$

III.10.- Una placa grande tiene una difusividad térmica $\alpha = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$, $k = 20 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ y un espesor de $0,30 \text{ metros}$. La placa se encuentra inicialmente a la temperatura de 0°C . Su superficie se pone en contacto térmico con un cuerpo sólido a 500°C , de forma que instantáneamente, la superficie del cuerpo frío adquiere la temperatura de 500°C .

Determinar,

- La distribución de temperaturas
- Su historia, a lo largo de los 100 primeros segundos de contacto con los cuerpos calientes.
- Tiempo que debe transcurrir para que la temperatura en el plano central sea de 300°C

RESOLUCION

a) Distribución de temperaturas

Condición de contorno isotérmica (contacto de 2 cuerpos sólidos en donde la superficie del frío se pone instantáneamente a la temperatura del otro, 500°C). Longitud característica = espesor

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{5 \cdot 10^{-5} t}{0,3^2} = 5,55 \cdot 10^{-4} t$$

$$\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(n)^2 Fo\} \sin(n) \frac{1 - (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(n)^2}{L^2} t\right\} \sin(n) \frac{1 - (-1)^n}{n}$$

$$\frac{T - 500}{0 - 500} = \frac{4}{n=1,3,5} \exp \left\{ - \frac{(n)^2 \times 5 \cdot 10^{-5} t (\text{seg})}{0,3^2} \right\} \sin \frac{n \times 1}{0,3} = \frac{4}{n=1,3,5} e^{-0,005483 t n^2} \sin(10,47 n x) \frac{1}{n}$$

$$T = 500 - \frac{2000}{n=1,3,5} e^{-0,005483 t n^2} \sin(10,47 n x) \frac{1}{n}$$

b) Su historia, a lo largo de los 100 primeros segundos de contacto de los cuerpos calientes.

$$\begin{aligned} &= 0,1 ; \frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 0,24 \\ &= 0,3 ; \frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 0,6 \\ &= 0,4 ; \frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 0,69 \\ &= 0,5 ; \frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = 0,72 \end{aligned}$$

Para $t = 100 \text{ seg}$ $Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \times 100}{0,3^2} = 0,0555 < 0,2$

luego habrá que tomar más de 1 sumando del desarrollo

c) Tiempo que debe transcurrir para que la temperatura en el plano central sea de 300°C:

$$T_C = 500 - \frac{1000}{n=1,3,5} e^{-0,005483 t} \sin(10,47 \times 0,15) 2 + \dots = 300 \quad t = 212,5 \text{ seg}$$

III.11.- Una esfera de aluminio de 6 cm de diámetro se calienta en un horno hasta 200°C y mediante un dispositivo adecuado se introduce rápidamente en un conducto por donde circula aire a 50°C. Haciendo medidas de temperaturas en la esfera se obtienen los siguientes resultados,

- Un minuto después de colocar la esfera en el conducto, $T_1=182^\circ\text{C}$
- Cinco minutos después de colocar la esfera en el conducto, $T_2=129,5^\circ\text{C}$
- Diez minutos después de colocar la esfera en el conducto, $T_3=92,5^\circ\text{C}$

Datos del aluminio, constantes en el intervalo 50-200°C, $\rho = 2690 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 0,248 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$; $k=235 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

Determinar,

- a) La distribución de temperaturas
- b) El coeficiente de transmisión de calor medio, esfera-aire en $\text{Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$
- c) El flujo térmico instantáneo q/A en la superficie de la esfera en los tiempos 1 minuto, 5 minutos y 10 minutos
- d) La relación Q/Q_0 en los tiempos citados.

RESOLUCION

a) Distribución de temperaturas

Dado que el medio de enfriamiento es el aire, se puede suponer que la condición de contorno es con resistencia térmica interna despreciable

$$\frac{T - 50}{200 - 50} = \exp(-Bi Fo) = \exp \left\{ - \frac{h_c A}{V c_p} t \right\} = \frac{T - 50}{200 - 50}$$

$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{h_{cF} \times 0,01 \text{ m}}{235 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}} = 0,00004255 h_{cF}$$

que predice la historia de la relación entre el tiempo y la temperatura siempre que $Bi \ll 0,1$

$$= T - T_F = T - 50$$

$$0 = T_0 - T_F = 200 - 50 = 150^\circ\text{C}$$

$$T - 50 = 150 e^{-Bi Fo} = 0 e^{-\frac{h_{cF} 4 R^2}{3} c_p t} = 150 e^{-\frac{3 h_{cF} t}{R c_p}} = 150 e^{-\frac{3 h_{cF} t}{2690 \times 0,03 \times 0,248}} = 150 e^{-0,15 h_{cF} t}$$

$$T = 50 + 150 e^{-0,15 h_{cF} t}$$

b) El coeficiente de transmisión de calor medio, esfera-aire en Kcal/h.m².°C

Para, $t = 60 \text{ seg}$; $T_1 = 182 = 50 + 150 e^{-0,15 h_{cF1} \cdot 60} = 50 + 150 e^{-9 h_{cF1}}$

$$h_{cF1} = 0,0142 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg.m}^2.\text{°C}} = 51,13 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

Para, $t = 5 \text{ min}$; $T_2 = 129,5 = 50 + 150 e^{-0,15 h_{cF2} \cdot 300} = 50 + 150 e^{-45 h_{cF2}}$

$$h_{cF2} = 0,01410 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg.m}^2.\text{°C}} = 50,79 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

Para, $t = 10 \text{ min}$; $T_3 = 92,5 = 50 + 150 e^{-0,15 h_{cF3} \cdot 600} = 50 + 150 e^{-90 h_{cF3}}$

$$h_{cF3} = 0,01401 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg.m}^2.\text{°C}} = 50,436 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

Valor medio de $h_F = \frac{51,13 + 50,79 + 50,436}{3} = 50,78 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}} = 59,04 \frac{\text{W}}{\text{m}^2.\text{°C}}$

$Bi = 0,00004255$ $h_{cF} = 0,00004255 \times 59,04 \frac{\text{W}}{\text{m}^2.\text{°C}} = 0,00251 \ll 0,1$

luego el sólido sí tiene resistencia térmica interna despreciable.

c) Flujo térmico instantáneo Q/A en la superficie de la esfera

$$\frac{Q}{A} = h_{cF} (T(t) - T_F) = h_{cF} (T_0 - T_F) \exp(-Bi Fo) =$$

$$= h_{cF} (T_0 - T_F) \exp\left(-\frac{h_{cF} t}{c_p \frac{R}{3}}\right) = 50,78 \text{ Kcal} (200 - 50) \exp\left(-\frac{50,78 t}{2690 \times 0,248 \times \frac{0,03}{3}}\right) = \boxed{7618,5 \exp(-7,61 t)}$$

Para: $t = 1 \text{ minuto} = \frac{1}{60} \text{ hora}$ $\frac{q(t)}{A} = 7618,5 e^{-7,61 \times \frac{1}{60}} = 6710 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}$

Para: $t = 5 \text{ minutos} = \frac{1}{12} \text{ hora}$ $\frac{q(t)}{A} = 7618,5 e^{-7,61 \times \frac{1}{12}} = 4039,5 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}$

Para: $t = 10 \text{ minutos} = \frac{1}{6} \text{ hora}$ $\frac{q(t)}{A} = 7618,5 e^{-7,61 \times \frac{1}{6}} = 2142 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}$

d) Hallar la relación Q/Q₀ en los tiempos citados.

Calor evacuado en estos tiempos,

$$Q(t) = h_{cF} A (T_0 - T_F) t \frac{1 - \exp(-Bi Fo)}{Bi Fo} =$$

$$= 50,78 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}} \times (4 \times 0,03^2) \times 150 t \times \frac{1 - \exp(-7,61 t)}{7,61 t} = 11,32 [1 - e^{-7,61 t}]$$

$$\text{Para: } t = 1 \text{ minuto} = \frac{1}{60} \text{ hora} \quad Q(t) = 11,32 (1 - e^{-7,61 \times \frac{1}{60}}) = 1,34 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\text{Para: } t = 5 \text{ minutos} = \frac{1}{12} \text{ hora} \quad Q(t) = 11,32 (1 - e^{-7,61 \times \frac{1}{12}}) = 5,31 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\text{Para: } t = 10 \text{ minutos} = \frac{1}{6} \text{ hora} \quad Q(t) = 11,32 (1 - e^{-7,61 \times \frac{1}{6}}) = 8,13 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

A su vez:

$$Q_0 = m c_p (T_0 - T_F) = V c_p (T_0 - T_F) = \frac{4 R^3}{3} c_p (T_0 - T_F) =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{0,03^3 \text{ m}^3}{\text{m}^3} \times 2690 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,248 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} (200 - 50)^\circ\text{C} = 11,32 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

obteniéndose para $\frac{Q}{Q_0}$ lo siguiente:

Para 1 minuto	0,1183
Para 5 minutos	0,4696
Para 10 minutos	0,7186

III.12.- Un cilindro de fundición de gran longitud, $k = 70 \text{ W/m}^\circ\text{K}$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$, con un diámetro de 20 cm, está originariamente a una temperatura uniforme de 400°C . Se enfría la superficie exterior del cilindro, con aire a una temperatura de 50°C y un coeficiente de película $h_C = 420 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Si el aire se dirige hacia la superficie del cilindro durante un tiempo de 20 minutos, determinar,

a) Las temperaturas del eje y de la superficie en ese instante

b) La cantidad de calor transferido por unidad de longitud desde el cilindro, durante el periodo de los 20 minutos

RESOLUCION

$$Bi = \frac{h_C \frac{V}{A}}{k} = \frac{h_C \frac{R^2 h}{2 R h}}{k} = \frac{h_C \frac{R}{2}}{k} = \frac{420 \frac{0,1}{2}}{70} = 0,3 > 0,1$$

La relación $\frac{h_{CF}}{k} = \frac{420}{70} = 6 \frac{1}{\text{m}}$ condición de contorno de convección

Parámetros necesarios, $Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{2 \cdot 10^{-5} (20 \times 60)}{0,1^2} = 2,4$

$$T_0 = T_0 - T_F = 400 - 50 = 350^\circ\text{C}$$

a) Temperatura del eje en ese instante

$$\frac{(0,t)}{0} = \frac{C}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \left| \begin{array}{c} Fo = 2,40 \\ Bi = 0,6 ; Bi^{-1} = 1,666 \end{array} \right| = 0,095 ; \quad T(0,t) = T_C = 50 + (0,095 \times 350) = 83,25^\circ\text{C}$$

Temperatura de la superficie en ese instante

$$\frac{(R,t)}{(0,t)} = \left| \frac{r}{R} = 1 \right| = 0,74 = \frac{T(R,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T(R,t) - 50}{83,25 - 50} ; \quad T(R,t) = 74,6^\circ\text{C}$$

ó también:

$$\frac{(R,t)}{0} = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = \frac{C}{C} = 0,74 \times 0,095 = 0,0703 ; \quad T(R,t) = (0,0703 \times 350) + 50 = 74,6^\circ\text{C}$$

b) Cantidad de calor transferido por unidad de longitud desde el cilindro, durante 20 minutos

$$Bi^2 Fo = 0,6^2 \times 2,4 = 0,864$$

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = (\text{Gráfica de Gröber}) = 0,88$$

$$Q_0 = c_p R^2 (T_0 - T_F) = \frac{k}{2 \times 10^{-5}} R^2 (T_0 - T_F) = \frac{70}{2 \times 10^{-5}} \times 0,1^2 \times 350 = 3,848 \times 10^7 \frac{\text{W} \cdot \text{seg}}{\text{m}}$$

$$Q(t) = 0,88 Q_0 = 0,88 \times 3,848 \cdot 10^7 \frac{\text{W} \cdot \text{seg}}{\text{m}} = 3,388 \cdot 10^7 \frac{\text{W} \cdot \text{seg}}{\text{m}} = \frac{3,388 \cdot 10^7}{3600} \frac{\text{W} \cdot \text{hora}}{\text{m}} = 9,41 \frac{\text{kW}}{\text{m}}$$

III.13.- Una lámina de un cierto material de propiedades térmicas, $k = 2 \text{ Kcal/hm}^\circ\text{C}$, $\alpha = 0,0002 \text{ m}^2/\text{hora}$, tiene un espesor de 3 cm, y se encuentra a una temperatura de 24°C . En estas condiciones se introduce en un horno a 400°C . El coeficiente de convección es $h_{cF} = 60 \text{ Kcal/hm}^2^\circ\text{C}$,

Determinar

a) El tiempo que tardará el centro geométrico en alcanzar la temperatura de 300°C y la temperatura que se alcanza en ese instante en un plano situado a 1 cm del plano central

b) Si el calentamiento continúa, el tiempo necesario para que en el plano situado a 1 cm del plano central se alcancen 350°C

c) Si existiese un aislamiento perfecto en una de las caras de la lámina, el tiempo que deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 200°C .

RESOLUCION

a) Tiempo que tardará el centro geométrico en alcanzar la temperatura de 300°C

$$Bi = \frac{h_c \frac{V}{A}}{k} = \frac{h_c \frac{L}{2}}{k} = \frac{60 \times 0,015}{2} = 0,45 > 0,1$$

$$\text{Condición de contorno: } h_{cF} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (C.c. convección)}$$

En la condición de contorno de convección, la longitud característica es la mitad del espesor; mediante la gráfica de Heysler se obtiene:

$$Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{60 \times 0,015}{2} = 0,45 ; Bi^{-1} = 2,22$$

$$\frac{C}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{300 - 400}{24 - 400} = 0,27$$

$$Fo = 3,56 = \frac{t}{L^2} = \frac{2,10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} t}{0,015^2 \text{ m}^2} ; t = 4 \text{ horas}$$

Temperatura que se alcanza en ese instante en un plano situado a 1 cm del plano central

$$\frac{C}{C} = \frac{T_{1\text{cm}} - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T_{1\text{cm}} - 400}{300 - 400} = \left| Bi^{-1} = 2,22 ; \frac{x}{L} = \frac{1}{1,5} = 0,66 \right| = 0,92 \quad T_{1\text{cm}} = 400 - 0,92 \times 100 = 308^\circ\text{C}$$

b) Si el calentamiento continúa, el tiempo necesario para que en el plano situado a 1 cm del plano central se alcancen 350°C

Temperatura en el plano central en estas condiciones

$$\frac{C}{C} = \frac{T_{1\text{cm}} - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{350 - 400}{T_C - 400} = \left| Bi = 0,45 ; \frac{x}{L} = \frac{1}{1,5} = 0,66 \right| = 0,92 \quad T_C = 345,6^\circ\text{C}$$

por lo que entrando en la otra gráfica de Heisler se obtiene,

$$Bi^{-1} = 2,22$$

$$\frac{C}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{345,6 - 400}{24 - 400} = 0,145 \quad Fo = 5,1 = \frac{t}{L^2} = \frac{2,10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} t}{0,015^2 \text{ m}^2} ; t = 5,7 \text{ horas}$$

c) Si existiese un aislamiento perfecto en una de las caras de la lámina, el tiempo que deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 200°C.

El problema es similar a los casos anteriores pero con un espesor doble = 6 cm, por cuanto el plano aislado se considera como plano adiabático.

La longitud característica es $L^* = 3$ cm.

La temperatura en la cara aislada se obtiene a partir de la primera gráfica de Heysler:

$$\frac{T_c}{T_0 - T_F} = \frac{T(x,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{200 - 400}{T(0,t) - 400} = \left| \begin{array}{l} Bi = \frac{h_C L^*}{k} = \frac{60 \times 0,03}{2} = 0,9 \\ Bi^{-1} = 1,11 ; \text{ Plano central: } \frac{x}{L^*} = 0,5 \end{array} \right| = 0,915 \quad T(0,t) = 181,4^\circ\text{C}$$

Con esta temperatura y la segunda gráfica de Heisler se obtiene el n° de Fo y el tiempo correspondiente,

$$Bi^{-1} = 1,11 \quad \frac{C}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{181,4 - 400}{24 - 400} = 0,58 \quad Fo = 3,83 = \frac{t}{L^2} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{hora} t}{0,03^2 m^2} ; t = 3,735 \text{ horas}$$

III.14.- Una placa grande de acero aleado $k = 30 \text{ W/m}^\circ\text{K}$ y $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$ sale de un tren de laminación a una temperatura constante de 800°C . La placa tiene un espesor de 30 cm. Para conseguir enfriar la placa se dirigen sendos chorros de aire a gran velocidad sobre ambas caras de la placa. El aire tiene una temperatura de 30°C y el coeficiente de transferencia de calor entre el aire y la superficie de la placa es de $500 \text{ W/m}^\circ\text{K}$. A la superficie de la placa ha de aplicarse una capa de material aislante, pero la temperatura del acero tiene que estar por debajo de los 200°C , antes de que pueda aplicarse la capa.

Determinar el tiempo mínimo necesario durante el cual deberá estar enfriándose la placa antes de que pueda aplicarse la capa aislante.

RESOLUCION

$$Bi = \frac{h_C \frac{V}{A}}{k} = \frac{h_C \frac{L}{2}}{k} = \frac{500 \times 0,15}{30} = 2,5 > 0,1$$

$$\text{La relación } \frac{h_{cF}}{k} = \frac{500}{30} = 16,67 \frac{1}{m} \quad \text{condición de contorno de convección}$$

(En este ejercicio al aire se le impone un coeficiente de película muy elevado)

Temperatura en el plano medio,

$$\frac{C}{0} = \frac{T(x,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{200 - 30}{T(0,t) - 30} = \left| \begin{array}{l} Bi = \frac{h_C L}{k} = \frac{500 \times 0,15}{30} = 2,5 \\ Bi^{-1} = 0,4 ; \frac{x}{L} = 1 \end{array} \right| = 0,415 \quad T_C = T(0,t) = 439,6^\circ\text{C}$$

Tiempo mínimo necesario durante el cual deberá estar enfriándose la placa antes de que pueda aplicarse la capa aislante.

$$Bi^{-1} = 0,4 \quad \frac{C}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{439,6 - 30}{800 - 30} = 0,532 \quad Fo = 0,59 = \frac{t}{L^2} = \frac{1,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{seg} t}{0,15^2 m^2} ; t = 885 \text{ seg}$$

III.15.- Las paredes de un recuperador de calor están formadas por ladrillos de sílice de 40 cm de espesor. Una de las caras se encuentra aislada térmicamente, mientras que la otra se calienta por gases que están a 900°C con un coeficiente $h_{cF} = 100 \text{ Kcal/hm}^2^\circ\text{C}$. Si la T_0 es de 700°C , se desea conocer,

a) La temperatura en un plano situado a 20 cm de la superficie caliente al cabo de 1 hora y 10 horas respectivamente

b) Los flujos térmicos para el apartado (a)

c) El calor almacenado en la pared

RESOLUCION

Datos de la sílice,

$$c_p = 0,24 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ; k = 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^\circ\text{C}} ; \rho = 2000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; \alpha = \frac{k}{c_p \rho} = \frac{1}{2000 \times 0,24} = 0,0020 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}}$$

a) Temperatura en un plano situado a 20 cm de la superficie caliente al cabo de 1 hora

Al tratarse de un material refractario, con un bajo coeficiente k , la condición de contorno es isotérmica ya que la relación,

$$\frac{h_c}{k} = \frac{100}{1} = 100$$

$$\text{Para } t = 1 \text{ hora} \quad Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,002 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times 1 \text{ hora}}{0,4^2 \text{ m}^2} = 0,0125 < 0,1$$

que confirma se puede tratar el problema como sólido semiinfinito, ya que al ser $Fo < 0,1$ siempre lejos de la superficie se mantiene la temperatura inicial.

A) Tratamiento como sólido semiinfinito con condición de contorno isotérmica

A la distancia $x = 0,2$ m de la superficie, se tiene,

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0,20}{2\sqrt{0,002 \times 1}} = 2,236 ; G(2,236) = 0,9982$$

$$T(0,2;1) = T_s + G(u) (T_0 - T_s) = 900 + 0,9982 (700 - 900) = 700,36^\circ\text{C}$$

Temperatura en un plano situado a 20 cm de la superficie caliente al cabo de 10 horas

$$\text{Para } t = 10 \text{ horas, } Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,002 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times 10 \text{ h}}{0,4^2 \text{ m}^2} = 0,125$$

A la distancia $x = 0,2$ m de la superficie, se tiene,

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0,20}{2\sqrt{0,002 \times 10}} = 0,707 ; G(0,707) = 0,6825$$

$$T(0,2;10) = T_s + G(u) (T_0 - T_s) = 900 + 0,6825 (700 - 900) = 763,5^\circ\text{C}$$

Para ver si éste resultado es válido, tenemos que comprobar que lejos de la superficie, $x = 0,4$ m, la temperatura prácticamente no se ha modificado,

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0,40}{2\sqrt{0,002 \times 10}} = 1,414 ; G(1,414) = 0,95445$$

$$T(0,4;10) = T_s + G(u) (T_0 - T_s) = 900 + 0,95445 (700 - 900) = 709,11^\circ\text{C}$$

valor próximo a 700°C , por lo que puede considerarse como una buena aproximación.

b) Los flujos térmicos para el apartado (a)

$$\text{b) Flujo térmico sólido semiinfinito: } q(t) = \frac{-k (T_0 - T_s)}{\sqrt{\alpha t}}$$

$$q(t)_{1 \text{ hora}} = \frac{-1 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^\circ\text{C}} (700 - 900)^\circ\text{C}}{\sqrt{x \cdot 0,002 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times 1 \text{ hora}}} = 2523,1 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2}$$

$$q(t)_{10 \text{ horas}} = 797,88 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2}$$

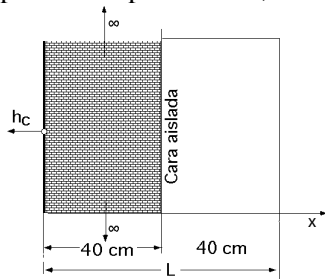
c) El calor almacenado en la pared

c) Calor almacenado en la pared: $Q(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_s - T_0) \sqrt{c_p k t}$

$$Q(1 \text{ hora}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (900 - 700)^\circ\text{C} \sqrt{2000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0,24 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^\circ\text{C}} \times 1 \text{ h}} = 4,944 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2}$$

B) Tratamiento como sólido infinito con condición de contorno isotérmica

En estas condiciones, el plano aislado se considera como plano de simetría del sólido, y éste se trata como placa plana de espesor $L = 0,80 \text{ m}$. La distribución de temperaturas es,



$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = \frac{4}{n=1,3,5} e^{-(n)^2 Fo} \frac{\text{sen}(n \frac{x}{L})}{n}$$

Para, $x = 0,20 \text{ m}$; $\frac{x}{L} = 0,2/0,8 = 1/4$

Para $t = 1 \text{ hora}$, $Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,002 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times 1 \text{ h}}{0,8^2 \text{ m}^2} = 0,003125 \ll 0,2$

por lo que se necesitan varias sumandos.

$$n = 1 ; \exp\{-(1)^2 \times 0,003125\} \frac{\text{sen}(1 \times 0,25)}{1} = 0,6856$$

$$n = 3 ; \exp\{-(3)^2 \times 0,003125\} \frac{\text{sen}(3 \times 0,25)}{3} = 0,17857$$

$$n = 5 ; \exp\{-(5)^2 \times 0,003125\} \frac{\text{sen}(5 \times 0,25)}{5} = -0,0654$$

$$n = 7 ; \exp\{-(7)^2 \times 0,003125\} \frac{\text{sen}(7 \times 0,25)}{7} = -0,02228$$

$$n = 9 ; \exp\{-(9)^2 \times 0,003125\} \frac{\text{sen}(9 \times 0,25)}{9} = 0,0083$$

La suma de estos valores es, $\frac{T(x,t) - T_s}{T_0 - T_s} = 0,7847$.

La temperatura a la distancia $x = 0,2 \text{ m}$ de la superficie, para $t = 1 \text{ hora}$ es:

$$T(x,t) = T_s + \frac{4 (T_0 - T_s)}{\pi} \times 0,7847 = 900 + 0,9992 (700 - 900) = 700,16^\circ\text{C}$$

que coincide con la del apartado (a).

$$n = 1 ; e^{-(1)^2 \times 0,03125} \frac{\text{sen}(1 \times 0,25)}{1} = 0,5194$$

Para: $t = 10 \text{ horas}$ $Fo = 0,03125$ $n = 3 ; e^{-(3)^2 \times 0,03125} \frac{\text{sen}(3 \times 0,25)}{3} = 0,01468$

$$n = 5 ; e^{-(5)^2 \times 0,03125} \frac{\text{sen}(5 \times 0,25)}{5} = -0,00006338$$

La suma de estos valores es: 0,5340166

$$T(x,t) = 900 + \frac{0,5340166 \times 4}{\pi} (700 - 900) = 764,01^\circ\text{C}$$

Para calcular el flujo de calor en la mitad del sólido se tiene:

$$q(t) = \frac{4 T_0 k A}{L} \sum_{n=1,3,5,\dots} e^{-(n)^2 Fo} = \left[\begin{array}{l} n=1 ; e^{-(.1)^2 0,03125} = 0,7346 \\ n=3 ; e^{-(.3)^2 0,03125} = 0,06229 \\ n=5 ; e^{-(.5)^2 0,03125} = 0,000448 \end{array} \right] = \frac{4 \times 700 \times 1 \times 1 \text{ m}^2}{0,8} 0,7973 = 2790 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2}$$

c) Es posible considerar al sólido como infinito con condición de contorno de convección (método exacto), ya que al ser los tiempos elevados, las distribuciones de temperatura en condición isotérmica y en condición de convección son muy parecidas.

En esta situación, el plano aislado se considera como plano de simetría del sólido, por lo que éste se considera como placa plana de $2L = 0,80 \text{ m}$

$$\text{tg}(nL) / (nL) = \text{Bi} = \frac{100 \times 0,4}{1} = 40$$

$$_1L = 1,5325 \quad _1 = \frac{1,5325}{0,4} = 3,831$$

$$_2L = 4,5979 \quad _2 = \frac{4,5979}{0,4} = 11,495$$

En Tablas se encuentra que: $_3L = 7,6647 \quad _3 = \frac{7,6647}{0,4} = 19,16$

$$_4L = 10,7334 \quad _4 = \frac{10,7334}{0,4} = 26,83$$

$$_5L = 13,8048 \quad _5 = \frac{13,8048}{0,4} = 34,51$$

La distribución de temperaturas es:

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = 2 \sum_{n=1} e^{-\frac{\pi^2}{4} n^2 t} \frac{\text{sen}(nL) \cos(n x)}{(nL) + \text{sen}(nL) \cos(nL)}$$

Para $t = 1 \text{ hora}$
 $x = 0,2$

$$e^{-\frac{\pi^2}{4} n^2 t} \frac{\text{sen}(nL) \cos(n x)}{(nL) + \text{sen}(nL) \cos(nL)} = \left[\begin{array}{ll} _1L = 1,5325 & 0,4451 \\ _2L = 4,5979 & 0,1077 \\ _3L = 7,6647 & -0,04627 \\ _4L = 10,7334 & -0,01267 \\ _5L = 13,8048 & -0,005037 \end{array} \right] = 0,49893$$

$$T(0,2 \text{ m}; 1 \text{ hora}) = 900 + 2 (200 - 900) \times 0,49893 = 700,4^\circ\text{C}$$

Para $t = 10 \text{ hora}$
 $x = 0,2$

$$e^{-\frac{\pi^2}{4} n^2 t} \frac{\text{sen}(nL) \cos(n x)}{(nL) + \text{sen}(nL) \cos(nL)} = \left[\begin{array}{ll} _1L = 1,5325 & 0,328418 \\ _2L = 4,5979 & 0,007027 \\ _3L = 7,6647 & 0,00007587 \end{array} \right] = 0,3355$$

$$T(0,2 \text{ m}; 10 \text{ horas}) = 900 + 2 (200 - 900) \times 0,3355 = 765,8^\circ\text{C}$$

III.16.- Una placa de acero está inicialmente a una temperatura uniforme de 300°C . La placa ha de enfriarse enviando sobre ella una corriente de aire a 50°C , de modo que incida sobre una de las superficies de la placa. Esta tiene un espesor de 10 cm , una difusividad térmica $= 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$ y una conductividad térmica de $k = 40 \text{ W/m}^\circ\text{K}$, siendo el coeficiente de película entre el aire y la placa de $h_C = 400 \text{ W/m}^2^\circ\text{K}$.

Determinar

- El tiempo necesario para que la superficie de la placa sobre la que incide el aire se enfríe hasta 200°C
- Cuando la superficie de la placa alcance los 200°C , las temperaturas en los planos situados a 1 cm . y

a 10 cm. de la misma.

RESOLUCION

Si $Fo \ll 1$ se puede tratar como sólido semiinfinito siempre que a una gran distancia de la superficie la temperatura sea igual a la temperatura inicial (dato que se pide en el apartado (b) para la temperatura en el plano situado a 10 cm de la superficie)

$$Bi = \frac{h_c e}{k} = \frac{400 \times 0,1}{40} = 1 \quad ; \quad Fo = \frac{t}{e^2} = \frac{10^{-5} t}{0,1^2} = 10^{-3} t$$

por lo que durante, $10^{-3} t \ll 1$, el sólido se comporta como semiinfinito, y la temperatura T_0 se mantiene prácticamente constante lejos de la superficie.

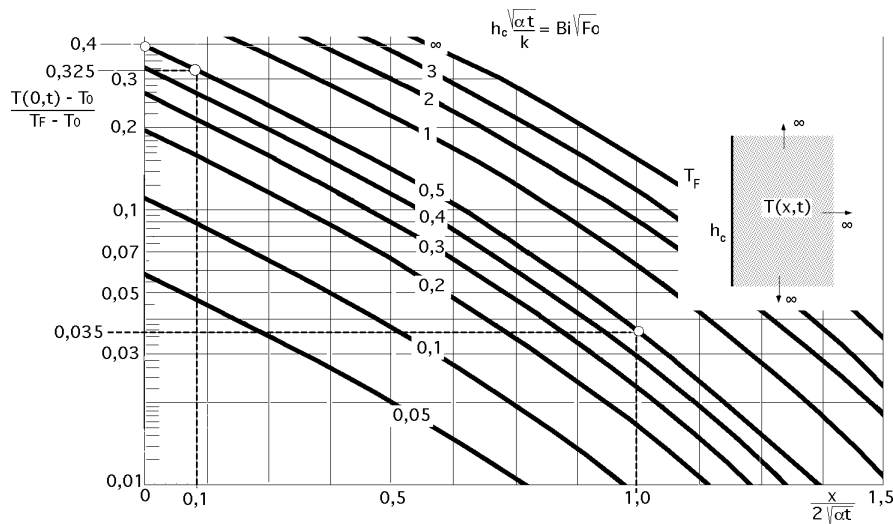
En este caso, para t por debajo de los 1000 segundos se comportaría como semiinfinito y por encima como infinito.

a) **Tiempo necesario para que la superficie de la placa sobre la que incide el aire se enfríe hasta 200°C**

Del diagrama correspondiente se obtiene que:

$$\text{Para, } x = 0 \quad ; \quad \frac{x}{2\sqrt{Fo}} = 0 \quad ; \quad \frac{C}{0} = \frac{T(0,t) - T_0}{T_F - T_0} = \frac{200 - 300}{50 - 300} = 0,40$$

$$\text{Llevando este valor a la gráfica, para } x = 0, \text{ se obtiene:} \quad \left| \begin{aligned} Bi\sqrt{Fo} &= \frac{h_c}{k} \sqrt{t} = 0,5 \\ t &= \frac{0,5^2 \times 40^2}{10^{-5} \times 400^2} = 250 \text{ seg} \end{aligned} \right| \quad Fo = 0,25$$



Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito sometido a convección

b) **Cuando la superficie de la placa alcance los 200°C, las temperaturas en los planos situados a 1 cm. y a 10 cm. de la misma.**

$$\begin{aligned} \text{Temperatura para } x = 0,1 \text{ m,} \quad \frac{x}{2\sqrt{t}} &= \frac{0,1}{2\sqrt{10^{-5} \times 250}} = 1 \\ \frac{h_c}{k} \sqrt{t} &= 0,5 \end{aligned} \quad \frac{C}{0} = \frac{T(x,t) - T_0}{T_F - T_0} = 0,035$$

$$T(x,t)|_{x=0,1} = 300 + 0,035 (50 - 300) = 291,25^\circ\text{C} < 300^\circ\text{C}$$

por lo que esta aproximación puede ser suficiente para considerar al sólido como semiinfinito

$$\text{Temperatura para } x = 0,01 \text{ m, } \frac{x}{2\sqrt{t}} = \frac{0,01}{2\sqrt{10^{-5} \times 250}} = 0,1 \quad \frac{h_C}{k} \sqrt{t} = 0,5 \quad \frac{T(x,t) - T_0}{T_F - T_0} = 0,325$$

$$T(x,t)|_{x=0,01} = 300 + 0,325 (50 - 300) = 218,75^\circ\text{C}$$

III.17.- Las bolas de cojinetes de acero al Cr $k=50 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, $\alpha=1,3\cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$ han de tratarse térmicamente. Se calientan hasta una temperatura de 650°C y luego se enfrían en un baño de aceite que tiene una temperatura de 55°C . Las bolas de los cojinetes tienen un diámetro de $4,0 \text{ cm}$. El coeficiente de transferencia de calor por convección entre las bolas y el aceite del baño es de $300 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$.

Determinar

- El tiempo durante el cual deben permanecer las bolas en el aceite antes de que su temperatura descienda hasta los 200°C*
- La cantidad de calor eliminada en cada bola en este intervalo de tiempo*
- Las transferencias de calor instantáneas, procedentes de las bolas cuando se acaban de sumergir en el baño de aceite y cuando alcanzan los 200°C .*

RESOLUCION

a) Tiempo durante el cual deben permanecer las bolas en el aceite antes de que su temperatura descienda hasta los 200°C

$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{300 \times \frac{0,02}{3}}{50} = 0,04 < 0,1 \text{ (Condición de contorno con R.T. despreciable)}$$

$$Fo = \frac{t}{\left(\frac{R}{3}\right)^3} = \frac{9 \times 1,3 \cdot 10^{-5} t}{0,02^3} = 0,2925 t$$

$$\frac{T(t)}{T_0 - T_F} = e^{-Bi Fo} = \frac{T(x,t) - T_F}{T_0 - T_F} \quad e^{-0,04 \times 0,2925 t} = \frac{200 - 55}{650 - 55} = 0,2437 \quad t = 120,6 \text{ seg}$$

b) Calor eliminado en cada bola en este intervalo de tiempo

$$Q(t) = h_{cF} A (T_0 - T_F) t \frac{1 - e^{-Bi Fo}}{Bi Fo} = \left| Fo = 0,2925 t = 0,2925 \times 120,6 = 35,28 \right| =$$

$$= 300 \times 4 \times (0,02)^2 (650 - 55) \times 120,6 \times \frac{1 - e^{-0,04 \times 35,28}}{0,04 \times 35,28} = 57930 \text{ J}$$

c) Transferencia de calor instantánea, procedentes de las bolas cuando se acaban de sumergir en el baño de aceite y cuando alcanzan los 200°C .

$$\text{En } (t = 0) \quad Fo = 0 ; \quad q(t) = h_{cF} A (T_0 - T_F) e^{-Bi Fo} = \left| Fo = 0 \right| =$$

$$= 300 \times 4 \times (0,02)^2 (650 - 55) = 897,2 \text{ W}$$

$$\text{En } (t = 120,6 \text{ seg}) \quad Fo = 35,28 ; \quad q(t) = h_{cF} A (T_0 - T_F) e^{-Bi Fo} =$$

$$= 300 \times 4 \times 0,02^2 (650 - 55) e^{-80,04 \times 35,28} = 218,8 \text{ W}$$

De otra forma: Se puede considerar condición de contorno de convección ya que $h_C/k = 300/50 = 6$

$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{300 \times 0,02}{50} = 0,12$$

Se puede suponer una temperatura periférica límite de 200°C , por cuanto el núcleo estará a mayor temperatura

$$\frac{T(R,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{200 - 55}{209,25 - 55} = 0,94 \quad ; \quad T_C = T(0,t) = 209,25^\circ\text{C}$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{209,25 - 55}{650 - 55} = 0,26 \quad \text{Fo} = 4 = \frac{t}{R^2} = \frac{1,3 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \times t (\text{seg})}{0,02^2 \text{ m}^2} \quad ; \quad \boxed{t = 123 \text{ seg}}$$

Calor almacenado inicialmente en la bola:

$$Q_0 = \frac{4}{3} R^3 c_{pF} (T_0 - T_F) = \left| = \frac{k}{c_{pF}} \right| = \frac{4}{3} (0,02)^3 \frac{50}{1,3 \cdot 10^{-5} c_{pF}} c_{pF} (650 - 55) = 76687 \text{ J}$$

Transferencia de calor para, $t = 123 \text{ seg}$

$$\text{Bi}^2 \text{ Fo} = 0,12^2 \times 4 = 0,0576 \quad \text{Grober} \quad 0,54$$

$$Q(t) = 0,54 Q_0 = 0,54 \times 76687 = 41410 \text{ J}$$

que indica que en el tiempo de 123 segundos se eliminaría realmente menos calor que utilizando el método aproximado.

III.18.- Una plancha metálica de espesor 3 cm se encuentra a una temperatura de 20°C y en estas condiciones se introduce en un horno a 1000°C.

Si la plancha se considera de grandes proporciones, determinar,

a) El tiempo que debe transcurrir para que el centro alcance 500°C

b) La temperatura que en ese instante adquiere el plano situado a 1 cm del plano central

c) El calor absorbido en ese intervalo de tiempo

d) El tiempo que debe transcurrir para que el plano situado a 1 cm del plano central alcance la temperatura de 750°C

e) Si se considera que una de las caras de la placa tiene un aislamiento térmico perfecto, ¿qué tiempo deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 500°C? ¿cuál sería en ese instante la temperatura en la cara no aislada?

Datos, $k = 8 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{hora}$; $h_C = 93 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$

RESOLUCION

$$\text{Bi} = \frac{h_{cF} \frac{V}{A}}{k} = \frac{h_{cF} \frac{L}{2}}{k} = \frac{93 \times \frac{0,03}{2}}{8} = 0,1744 > 0,1$$

$$\frac{h_{cF}}{k} = \frac{93 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{8 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 11,625 \frac{1}{\text{m}} \quad \text{C. contorno de convección}$$

a) **Tiempo que debe transcurrir para que el centro alcance 500°C**

$$\text{Bi} = \frac{h_C L}{k} = \frac{93 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times \frac{0,03}{2} \text{ m}}{8 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 0,1744 \quad \text{Bi}^{-1} = 5,734$$

Temperatura adimensional en la zona central,

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{500 - 1000}{20 - 1000} = 0,51 \quad \text{Fo} = 4,8 = \frac{t}{L^2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} t}{0,015^2} \quad t = 0,216 \text{ h} = 13 \text{ min}$$

$$\text{Bi}^{-1} = 5,734$$

b) **Temperatura que en ese instante adquiere el plano situado a 1 cm del plano central**

$$Fo = 4,8 ; \frac{x}{L} = \frac{1 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = 0,66$$

$$Bi^{-1} = 5,734$$

$$\frac{T_{1 \text{ cm}} - 1000}{500 - 1000} = 0,96 ; T_{1 \text{ cm}} = 520^\circ\text{C}$$

c) Calor absorbido en ese intervalo de tiempo

$$Q_0 = V \cdot c_p (T_0 - T_F) = \left[\begin{array}{l} = \frac{k}{c_p} \quad c_p = \frac{k}{5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{h}}} \\ V = a \cdot e = 0,03 \text{ A} \cdot \text{m}^3 \end{array} \right] =$$

$$= 0,03 \text{ A}(\text{m}^3) \frac{8 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}}{5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{h}}} (20 - 1000)^\circ\text{C} = 47,04 \text{ A} \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$Bi^2 Fo = 0,1744^2 \times 4,8 = 0,146 \quad \frac{Q}{Q_0} = 0,53$$

$$Q_0 = 47,04 \text{ A} \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$Q = 0,53 Q_0 = 0,53 \times 47,04 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2} = 24,93 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

d) Tiempo que debe transcurrir para que el plano situado a 1 cm del plano central alcance la temperatura de 750°C

$$\frac{T - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{750 - 1000}{T(0,t) - 1000} = 0,5102$$

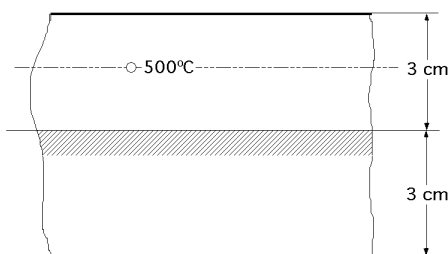
Temperatura en el plano central, $\frac{x}{L/2} = \frac{1 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = 0,66$
 $Bi^{-1} = 5,734$

$$\frac{750 - 1000}{T_C - 1000} = 0,96 ; T_C = T(0,t) = 740^\circ\text{C}$$

luego,

$$\text{luego, } \frac{T(0,T) - 1000}{20 - 1000} = \frac{750 - 1000}{20 - 1000} = 0,2657 \quad \left| \quad Fo = 8,8 = \frac{t}{L^2} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} t}{0,015^2} ; t = 0,396 \text{ h} = 23,45 \text{ min} \right.$$

e) Si se considera que una de las caras de la placa tiene un aislamiento térmico perfecto, el tiempo que deberá transcurrir para que en el plano central se alcancen 500°C



En caso de aislamiento perfecto en una de las caras, el problema es similar al caso anterior pero con $L^*/2 = 3 \text{ cm}$

$$Bi = \frac{h_{cF} L^*}{k} = \frac{93 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times 0,03 \text{ m}}{8 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 0,34875 ; Bi^{-1} = 2,867$$

Temperatura adimensional en la zona central,

$$\frac{T - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{500 - 1000}{T(0,t) - 1000} = 0,96 ; T(0,t) = 479,17^\circ\text{C} \text{ (superficie aislada)}$$

Con esta temperatura y los gráficos de Heysler se obtiene el n° de Fo,

$$\text{luego, } \frac{T - 1000}{20 - 1000} = \frac{479,17 - 1000}{20 - 1000} = 0,5314 \quad \left| \quad Fo = 2,1 = \frac{t}{L^{*2}} = \frac{5 \cdot 10^{-3} t}{0,03^2} ; t = 0,378 \text{ horas} \right.$$

$$\text{Temperatura en la cara no aislada, } \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ Bi^{-1} = 2,867 \end{array} \right| \frac{T - T_F}{T_C - T_F} = 0,84$$

$$T(x,t) = T_F + 0,84 \{T(0,t) - T_F\} = 1000 + 0,84 (479,17 - 1000) = \boxed{562,5^\circ\text{C}}$$

III.19.- Un cilindro de 10 cm de diámetro y una longitud de 16 cm, $k=0,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, $\alpha=5.10^{-7} \text{ m}^2/\text{seg}$ está inicialmente a la temperatura uniforme de 20°C . Se coloca el cilindro en un horno en el que la temperatura ambiental es de 500°C con un $h_C=30 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

Determinar

a) Las temperaturas máxima y mínima del cilindro, treinta minutos después de haberlo introducido en el horno

b) El calor absorbido en ese tiempo

RESOLUCION

$$\frac{h_{cF}}{k} = \frac{30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}}}{0,5 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}} = 60 \frac{1}{\text{m}} \quad (\text{Condición de contorno de convección})$$

Distribución de temperaturas, intersección de una placa plana de espesor 16 cm con un cilindro de diámetro 10 cm

$$P(x) C(r) = \frac{(x, r, t)}{0}$$

Proceso térmico, En el calentamiento, en el tiempo “t”, la temperatura mínima se localiza en el centro geométrico del cilindro y la temperatura máxima se corresponde con los puntos de las circunferencias de sus bases.

Temperatura mínima en, $x = 0$, $r = 0$

Temperatura máxima en, $x = L$, $r = R$

Placa infinita,

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{5 \times 10^{-7} \times 1800}{0,08^2} = 0,14 \quad ; \quad Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{30 \times 0,08}{0,5} = 4,8 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,208$$

$$P(0) = \frac{C}{0} = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,9$$

$$P(L) = \frac{C}{0} = \frac{(L,t)}{0} = \frac{C}{C} \quad \quad \quad P(L) = \frac{C}{0} = \frac{(L,t)}{0} = 0,90 \times 0,27 = 0,249$$

$$\frac{C}{C} = \frac{T(L) - T_F}{T_0 - T_F} = \left| \frac{x}{L} = 1 \right| = 0,27$$

Cilindro infinito,

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{5 \times 10^{-7} \times 1800}{0,05^2} = 0,36 \quad ; \quad Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{30 \times 0,05}{0,5} = 3 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,333$$

$$C(0) = \frac{C}{0} = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,47 \text{ (eje)}$$

$$C(R) = \frac{C}{0} = \frac{C}{C} \quad \quad \quad C(R) = \frac{C}{0} = \frac{(R,t)}{0} = 0,47 \times 0,36 = 0,1692$$

$$\frac{C}{C} = 0,36$$

Temperatura mínima del cilindro (en el centro geométrico)

$$\frac{\text{mín}}{0} = P(0) C(0) = 0,90 \times 0,47 = 0,423 = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} ; T_C = T_{\text{mín}} = 0,423 (20 - 500) + 500 = 297^\circ\text{C}$$

Temperatura máxima del cilindro (en la circunferencia de las bases)

$$\frac{\text{máx}}{0} = P(L) C(R) = 0,249 \times 0,1692 = 0,042 = \frac{T_{\text{máx}} - T_F}{T_0 - T_F} ; T_{\text{máx}} = 0,042 (20 - 500) + 500 = 480^\circ\text{C}$$

b) Calor absorbido en ese tiempo

$$Q = c_p V (T_0 - T_F)$$

$$\text{Placa, } Bi^2 Fo = 4,8^2 \times 0,14 = 3,2256 \quad \text{placa} = \frac{Q}{Q_0} = 0,52$$

$$\text{Cilindro, } Bi^2 Fo = 3^2 \times 0,36 = 3,24 \quad \text{cilindro} = \frac{Q}{Q_0} = 0,7$$

$$= \text{placa} + \text{cilindro} (1 - \text{placa}) = 0,52 + 0,7 (1 - 0,52) = 0,52 + 0,336 = 0,856$$

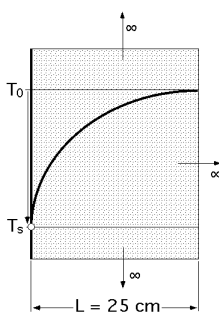
$$Q = c_p V (T_0 - T_F) = \left[\begin{array}{l} = \frac{k}{c_p} ; \quad c_p = \frac{k}{D} \\ D = 0,1 \text{ m} ; \quad h = 0,16 \text{ m} \end{array} \right] = \frac{k}{D} V (T_0 - T_F) =$$

$$= 0,856 \frac{0,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}}{5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} R^2 h m^3 (20 - 500)^\circ\text{K} = 0,856 \frac{0,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}}{5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} \times 0,05^2 \text{ m}^2 \times 0,16 \text{ m}^3 (20 - 500)^\circ\text{K} =$$

$$= 516327 \text{ W seg} = 516327 \text{ Joules} = \frac{516327 \text{ Kcal}}{4,186 \times 1000} = 123,34 \text{ Kcal}$$

III.20.- Una pared de ladrillo de 25 cm de espesor, que se encontraba inicialmente a una temperatura $T_0 = 90^\circ\text{C}$, reduce bruscamente la temperatura de una de sus caras hasta alcanzar una temperatura de $T_s = 15^\circ\text{C}$.

Determinar,



a) La temperatura del plano que se encuentra a 10 cm de la superficie, cuando hayan transcurrido 2 horas

b) El calor disipado a través de la pared en ese tiempo

c) Suponiendo ahora que las paredes del ladrillo se ponen en contacto con un fluido exterior a 15°C , siendo el coeficiente de película $h_{CF} = 10 \text{ Kcal/h.m}^2\cdot^\circ\text{C}$

Determinar,

c-1) La temperatura en un plano situado a 10 cm del plano central, al cabo de 2 horas

c-2) La temperatura en un plano situado a 10 cm de la superficie, al cabo de 2 horas

c-3) El calor disipado a través de la pared en dicho tiempo

$$\text{Datos del ladrillo: } c_{pF} = 0,2 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}} ; \quad = 0,00185 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} ; \quad = 1602 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \quad k = 0,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^\circ\text{K}}$$

RESOLUCION

a) Temperatura del plano que se encuentra a 10 cm de la superficie, cuando hayan transcurrido 2 horas

El variar bruscamente la temperatura de una de las caras, implica una condición de contorno isotérmica, siempre que Fo sea menor que la unidad

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,00185 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times 2 \text{ horas}}{0,25^2 \text{ m}^2} = 0,0592$$

Con este valor de Fo se puede tratar también como sólido semiinfinito, ya que $Fo < 1$ implica que lejos de la superficie la temperatura de la cara opuesta permanece a la temperatura inicial de 90°C

Para: $x = 0,25 \text{ m}$; $u = \frac{x}{2\sqrt{t}} = \frac{0,25}{2\sqrt{0,00185 \times 2}} = 2,054$ $G(u) = 0,99615$

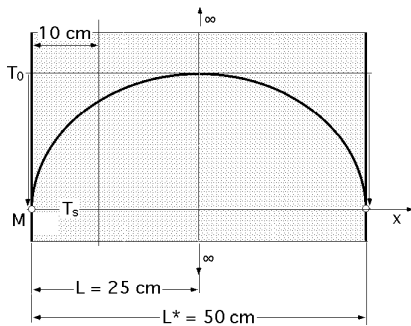
$T_{(0,25 \text{ m} ; 2 \text{ horas})} = 15 + 0,99615 \times (90 - 15) = 89,71^\circ\text{C}$ 90°C (SI sólido semiinfinito)

Para: $x = 0,10 \text{ m}$; $u = \frac{x}{2\sqrt{t}} = \frac{0,1}{2\sqrt{0,00185 \times 2}} = 0,822$ $G(u) = 0,754$

$T_{(0,1 \text{ m} ; 2 \text{ horas})} = 15 + 0,754 \times (90 - 15) = 71,55^\circ\text{C}$

b) Calor disipado a través de la pared en ese tiempo

$Q_{(2 \text{ horas})} = \frac{2}{\sqrt{t}} (T_s - T_0) \sqrt{c_{pF} k t} = \frac{2}{\sqrt{t}} (15 - 90) \sqrt{1602 \times 0,2 \times 0,6 \times 2} = 1659,4 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2}$



PUEDE TRATARSE COMO SOLIDO INFINITO CON CONDICION DE CONTORNO ISOTERMICA, si se duplica el espesor a $2L = 50 \text{ cm}$; las condiciones de contorno implican que la temperatura en $x=0$ y $x=2L$ tienen que ser la misma.

La x se toma a partir del origen de coordenadas M, y por la simetría de la distribución de temperaturas, su valor está entre 0 y 0,25, mientras que $L^* = 0,5 \text{ m}$

$Fo = \frac{t}{L^{*2}} = \frac{0,00185 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times 2 \text{ horas}}{0,5^2 \text{ m}^2} = 0,0148$

$= \frac{x}{L^*} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$

$\frac{T_{10 \text{ cm}} - T_s}{T_0 - T_s} = 0,735$

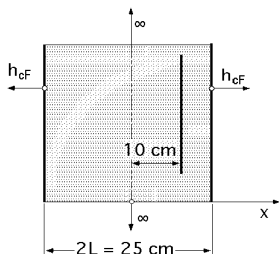
$T_{10 \text{ cm}} = 15 + 0,735 (90 - 15) = 70,13^\circ\text{C}$

b) Calor disipado a través de la pared en ese tiempo,

$\frac{Q_{x=0}}{A} = 0,265 \frac{Q_0}{A} = \left| \begin{array}{l} \frac{Q_0}{A} = L \quad c_{pF} (T_0 - T_s) = \\ = 0,25 \times 1602 \times 0,2 \times (90 - 15) = 6008 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2} \end{array} \right| = 0,265 \times 6008 = 1592 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2}$

c) Suponiendo ahora que las paredes del ladrillo se ponen en contacto con un fluido exterior a 15°C , siendo el coeficiente de película $h_{cF} = 10 \text{ Kcal/h.m}^2\cdot^\circ\text{C}$

c-1) Temperatura en un plano situado a 10 cm del plano central, al cabo de 2 horas



Sólido infinito con condición de contorno de convección

$Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{10 \times 0,125}{0,6} = 2,083$; $Bi^{-1} = 0,48$

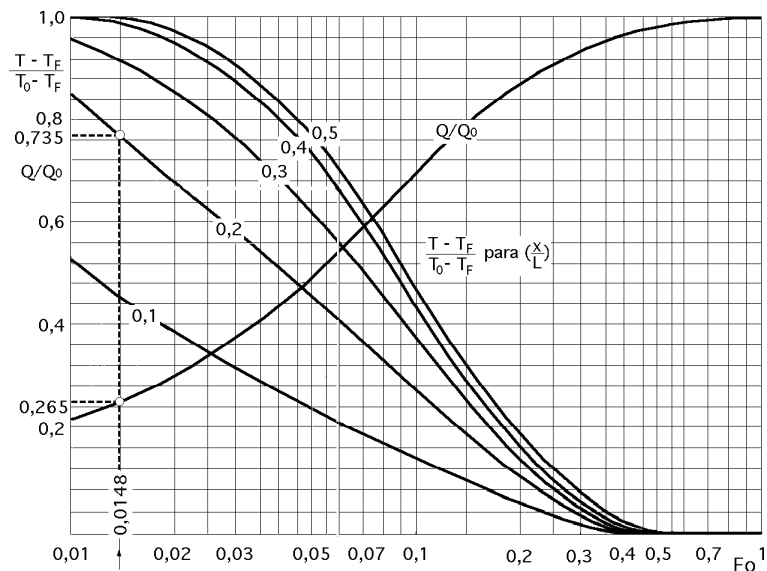
$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,00185 \times 2}{0,125^2} = 0,2368$ $= \frac{x}{L} = \frac{0,1}{0,125} = 0,8$

$Bi^2 Fo = 2,083^2 \times 0,2368 = 1,0274$

Temperatura en el plano medio:

$\frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \left| \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0,48 \\ Fo = 0,2368 \end{array} \right| = 0,71$

$T(0,t) = T_F + 0,71 (T_0 - T_F) = 15 + 0,71 (90 - 15) = 68,25^\circ\text{C}$ (Plano medio)



Temperatura en un plano situado a 10 cm del plano central, al cabo de 2 horas

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_C - T_F} = \left| \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0,48 \\ \frac{x}{L} = \frac{0,1}{0,125} = 0,8 \end{array} \right| = 0,64$$

$$T(x,T) = T_F + 0,64 (T_C - T_F) = 15 + 0,64 (68,25 - 15) = 49,08^\circ\text{C}$$

c-2) Temperatura en un plano situado a 10 cm de la superficie, al cabo de 2 horas

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_C - T_F} = \left| \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0,48 \\ \frac{x}{L} = \frac{0,025}{0,125} = 0,2 \end{array} \right| = 0,98$$

$$T(x,T) = T_F + 0,98 (T_C - T_F) = 15 + 0,98 \times (68,25 - 15) = 67,18^\circ\text{C}$$

c-3) Calor disipado a través de la pared en dicho tiempo

$$\frac{Q}{Q_0} = \left| \begin{array}{l} Bi^2 Fo = 1,0274 \\ Bi = 2,083 \end{array} \right| = 0,25 \quad ; \quad \frac{Q}{A} = 0,25 \times 6007,5 = 1501,7 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2}$$

III.21.- Una barra cilíndrica de acero inoxidable 18-8, de 20 cm de diámetro, se calienta a 1000°C y a continuación se temple en un baño de aceite a 50°C, en el que el coeficiente de película es $h_C = 500 \text{ Kcal/h.m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

Determinar

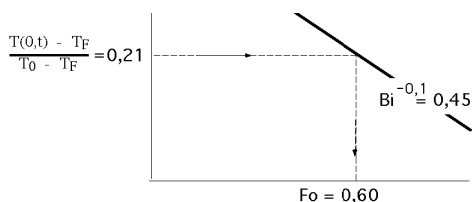
a) El tiempo que transcurrirá hasta que el eje del cilindro alcance una temperatura de 250°C.

b) La temperatura que se alcanzará en $r = 0,05 \text{ m}$ al cabo de ese tiempo.

Datos del acero, $\rho = 7.817 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 0,11 \text{ Kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$; $k = 22,5 \text{ Kcal/m.h} \cdot ^\circ\text{C}$; $\alpha = 0,01598 \text{ m}^2/\text{hora}$

RESOLUCION

$$\frac{h_{cF}}{k} = \frac{500}{22,5} = 22,2 \text{ (C.c. convección)}$$



$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{500 \times 0,1}{22,5} = 2,22 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,45$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{250 - 50}{1000 - 50} = 0,21$$

a) Tiempo que transcurrirá hasta que el eje del cilindro alcance una temperatura de 250°C,

$$Fo = 0,60 = \frac{t}{R^2} \quad t = \frac{0,6 R^2}{0,01598 \frac{m^2}{h}} = \frac{0,6 \times 0,1^2 m^2}{0,01598 \frac{m^2}{h}} = 0,375 h = 22 \text{ min } 30 \text{ seg}$$

b) Temperatura que se alcanzará en $r = 0,05 m$ al cabo de ese tiempo,

$$\frac{T(0,5; t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \left| \frac{r}{R} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \right| = 0,85$$

$$T(0,5; t) = T_F + 0,85 \{T(0,t) - T_F\} = 50 + 0,85 \{250 - 50\} = 220^\circ C$$

III.22.- Una barra de acero de $(5 \times 4) \text{ cm}^2$ de sección transversal y 4 metros de longitud, $k = 60 \text{ W/m}^\circ C$, $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$ está inicialmente a una temperatura uniforme de 225°C.

A continuación se la introduce en un medio convectivo con un coeficiente $h_{CF} = 500 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ C$, estando el ambiente a 25°C.

Calcular la temperatura en el centro para un tiempo de 2 minutos después de haberla sometido a la acción del medio convector exterior

RESOLUCION

Definimos una temperatura adimensional de la forma,

$$\frac{(x,t)}{0} = \frac{T(x,y,t) - T_F}{T_0 - T_F} = P(x) P(y)$$

Llamamos $\frac{1(0,t)}{0}$ la solución (centro) de temperatura adimensional para una placa de espesor $2 L_1 = 5 \text{ cm}$

$$Fo = \frac{t}{L_1^2} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-5}) (2 \times 60)}{2,5^2 \cdot 10^{-4}} = 3,1 \quad \frac{1(0,t)}{0} = 0,58$$

$$Bi^{-1} = \frac{k}{h_{cF} L_1} = \frac{60}{500 \times 2,5 \cdot 10^{-2}} = 4,8$$

Llamamos $\frac{2(0,t)}{0}$ la solución (centro) de temperatura adimensional para una placa de espesor $2 L_2 = 4 \text{ cm}$

$$Fo = \frac{t}{L_2^2} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-5}) (2 \times 60)}{2^2 \cdot 10^{-4}} = 4,8 \quad \frac{1(0,t)}{0} = 0,45$$

$$Bi^{-1} = \frac{k}{h_{cF} L_2} = \frac{60}{500 \times 2 \cdot 10^{-2}} = 6$$

Para las dos dimensiones se tiene: $0,58 \times 0,45 = 0,26$

Temperatura en el centro para el problema bidimensional,

$$0,26 = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T(0,t) - 25}{225 - 25} \quad T(0,t) = 25 + 0,26 \times (225 - 25) = 77^\circ C$$

III.23.-Una lata cilíndrica de 5 cm de espesor y 30 cm de diámetro contiene un determinado producto a una temperatura uniforme de 15°C, y se calienta mediante una corriente de aire a 160°C. Sabiendo que, $\alpha = 0,04 \text{ m}^2/\text{hora}$, $k = 4 \text{ Kcal/h.m.}^\circ C$; $h_C(\text{aire-lata}) = 20 \text{ Kcal/h.m}^2 \cdot ^\circ C$

Determinar

a) El tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea, por lo menos, de 138°C

b) La temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

c) El calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento

RESOLUCION

a) Tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea de 138°C

El diámetro del cilindro es bastante mayor que la altura, por lo que la transmisión de calor se realizará, principalmente, en sentido axial, por lo que sería equivalente al de transmisión de calor por conducción en régimen transitorio en una placa de 5 cm de espesor y longitud infinita.

$$Bi = \frac{h_C L}{k} = \frac{20 \times 0,025}{4} = 0,125 ; \quad \frac{1}{Bi} = 8 ; \quad \frac{h_C}{k} = 5 \text{ m (c.c. de convección)}$$

En el plano medio de la placa hay que conseguir una temperatura, $T = 138^\circ\text{C}$

De los gráficos de Heisler se obtiene la temperatura adimensional en el plano medio de la placa,

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{138 - 160}{15 - 160} = 0,1517 ; \quad Fo = 16 = \frac{t}{L^2} ; \quad t = \frac{16 \times 0,025^2 \text{ m}^2}{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{h}}} = 0,25 \text{ h} = 15 \text{ min}$$

que es un valor bastante aproximado.

b) Temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

b.1.- Conducción bidimensional

Placa infinita,

$$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,1517$$

$$P(L) = \frac{(L,t)}{0} = \frac{(L,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,93 \times 0,1517 = 0,1411$$

$$\frac{(L,t)}{(0,t)} = \frac{T(L) - T_F}{T_C - T_F} = \left| \frac{x}{L} = 1 \right| = 0,93$$

$$\text{Cilindro infinito,} \quad Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \times 0,25 \text{ h}}{0,15^2 \text{ m}^2} = 0,444$$

$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{20 \times 0,15}{4} = 0,75 ; \quad Bi^{-1} = 1,333$$

$$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,58 \text{ (eje)}$$

$$C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \frac{(R,t)}{\text{eje}} \frac{\text{eje}}{0} = \left| \begin{array}{c} \frac{\text{eje}}{0} = 0,58 \\ \frac{(R,t)}{\text{eje}} = \frac{(R,t)}{(0,t)} = 0,62 \end{array} \right| = 0,58 \times 0,62 = 0,3596$$

Temperatura en el centro de la base:

$$P(L) C(0) = 0,1411 \times 0,58 = 0,0818$$

$$\frac{x}{0} = \frac{T_x - T_F}{T_0 - T_F} = 0,0818 ; \quad T_x = T_F + 0,0818 (T_0 - T_F) = 160 + 0,0818 \times (15 - 160) = \boxed{148,14^\circ\text{C}}$$

b.2.- Conducción unidimensional

$$\frac{T(x,T) - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T(x,T) - 160}{138 - 160} = 0,93 \quad ; \quad T(x,T) = 160 + (138 - 160) \times 0,93 = \boxed{139,5^\circ\text{C}}$$

c) Calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento

$$Q_0 = V \cdot c_{pF} \cdot T = \left| c_{pF} = \frac{k}{R^2 L} \right| = V \frac{k}{R^2 L} \cdot T = (\times 0,15^2 \times 0,05) \text{ m}^3 \frac{4 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}}}{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{h}}} (160 - 15)^\circ\text{C} = 51,24 \text{ Kcal}$$

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \frac{36}{60}}{0,025^2} = 38,4 \quad \frac{Q}{Q_0} = 0,97 \quad ; \quad Q = 0,97 \times 51,24 = 49,70 \text{ Kcal}$$

$$Bi^2 Fo = 0,6 \quad ; \quad Bi = 0,125$$

III.24.- Un cilindro de acero, $k = 25 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, $\alpha = 1,11 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$, tiene 10 cm de diámetro y 20 cm de longitud, y se encuentra inicialmente a una temperatura de 850°C .

Se le sumerge en agua a 20°C y sabiendo que el coeficiente de transmisión de calor por convección en cualquier punto del cilindro es de $1725 \text{ W/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$, determinar,

a) El tiempo que debe transcurrir para que el cilindro alcance una temperatura de 350°C en su centro de gravedad.

b) La temperatura que en ese instante se alcanzará en la circunferencia de sus bases.

c) La temperatura en el centro de la base

d) La temperatura en la mitad de la pared cilíndrica

RESOLUCION

a) Tiempo que debe transcurrir para que el cilindro alcance una temperatura de 350°C en su centro de gravedad.

$$\frac{h_{cF}}{k} = \frac{1725}{25} = 69 \frac{1}{\text{m}} \quad (\text{Condición de contorno de convección})$$

$$\frac{(x,r,t)}{0} = P(x) \cdot C(r)$$

Nota, Este Problema está realizado con la formulación correspondiente, (Resultados exactos)

Placa plana infinita de espesor 20 cm

$$Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{1725 \times 0,1}{25} = 6,9 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,145$$

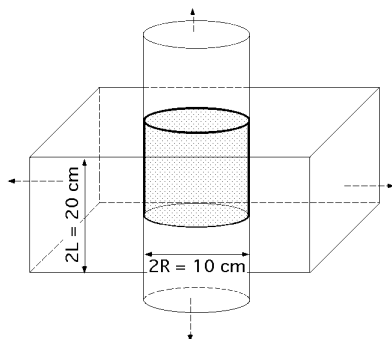
Temperatura adimensional en el plano medio,

$$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{350 - 20}{850 - 20} = 0,3975$$

Entrando en la segunda gráfica de Heysler para placa plana infinita con $P(0) = 0,3975$ y $Bi^{-1} = 0,145$ se obtiene un n° de $Fo = 0,60$, por lo que,

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{1,11 \times 10^{-5} t}{0,1^2} = 1,11 \times 10^{-3} t = 0,60 \quad ; \quad \boxed{t = 552 \text{ seg}}$$

Cilindro infinito de radio 5 cm



$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{1725 \times 0,05}{25} = 3,45 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,29$$

Temperatura adimensional en el eje del cilindro:

$$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{350 - 20}{850 - 20} = 0,3975 \quad (\text{la misma que en la placa})$$

Entrando en la segunda gráfica de Heysler para cilindro infinito con $C(0) = 0,3975$ y $Bi^{-1} = 0,29$ se obtiene un n° de $Fo = 0,38$, por lo que:

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{1,11 \cdot 10^{-5} t}{0,05^2} = 0,38 \quad t = 85,5 \text{ seg}$$

que es el mínimo de los dos tiempos, y que nos da una buena referencia para iterar.

En lo que sigue, mantendremos los resultados obtenidos con las Tablas

Para $t = 80$ segundos

$$Bi^{-1} = 0,145$$

$$\text{Placa} \quad Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{1,11 \cdot 10^{-5} \times 80}{0,1^2} = 0,088 \quad \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,98$$

$$Bi^{-1} = 0,29$$

$$\text{Cilindro} \quad Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{1,11 \cdot 10^{-5} \times 80}{0,05^2} = 0,35 \quad \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,4336$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,98 \times 0,4336 = 0,425 \quad ; \quad T_C = 20 + (850 - 20) \times 0,425 = 372,75^\circ\text{C}$$

Para $t = 90$ segundos

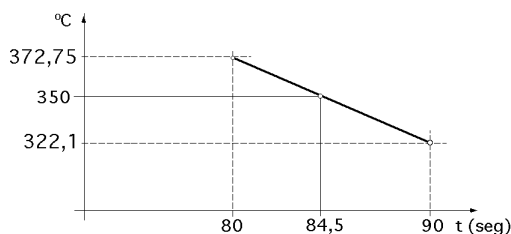
$$Bi^{-1} = 0,145$$

$$\text{Placa} \quad Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{1,11 \cdot 10^{-5} \times 90}{0,1^2} = 0,099 \quad \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,974$$

$$Bi^{-1} = 0,29$$

$$\text{Cilindro} \quad Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{1,11 \cdot 10^{-5} \times 90}{0,05^2} = 0,4 \quad \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,373$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,974 \times 0,373 = 0,364 \quad ; \quad T_C = 20 + (850 - 20) \times 0,364 = 322,12^\circ\text{C}$$



Para alcanzar la temperatura de 350°C en el (c.d.g.) del cilindro, son necesarios, aproximadamente, 84,5° segundos.

b) Temperatura que en ese instante se alcanzará en la circunferencia de sus bases.

Placa:

$$P(L) = \frac{(L,t)}{0} = \frac{(L,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = \left| \begin{array}{l} \frac{(0,t)}{0} = P(0) = 0,3975 \text{ (dato)} \\ \frac{(L,t)}{(0,t)} = 1 \end{array} \right| = 0,62 \times 0,3975 = 0,2464$$

Cilindro:

$$C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = \left| \begin{array}{c} \frac{(0,t)}{0} = C(0) = 0,3975 \\ \frac{(R,t)}{(0,t)} = 1 = 0,34 \end{array} \right| = 0,34 \times 0,3975 = 0,1351$$

$$\frac{\min}{0} = \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = P(L) C(R) = 0,2464 \times 0,1312 = 0,0333$$

$$T = 20 + 0,033 \times (850 - 20) = 47,6^\circ\text{C}$$

c) Temperatura en el centro de la base

$$\frac{(L,0,t)}{0} = \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = P(L) C(0) = 0,2464 \times 0,3975 = 0,098$$

$$T = 20 + 0,098 \times (850 - 20) = 101,34^\circ\text{C}$$

d) Temperatura en la mitad de la pared cilíndrica

$$\frac{(0,R,t)}{0} = \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = P(0) C(R) = 0,3975 \times 0,1351 = 0,0537$$

$$T = 20 + 0,0537 \times (850 - 20) = 64,6^\circ\text{C}$$

III.25.-Se desea hacer un tratamiento térmico de unas bolas de acero al níquel-cromo 15%Cr, 10%Ni, y para ello se calientan a una temperatura de 875°C. A continuación se templen en aceite que se encuentra a la temperatura de 120°C, sometiéndolas a un movimiento de agitación que se puede considerar dotado de una velocidad media $u=1$ m/seg. Las bolas tienen un diámetro $d=3$ cm.

Con estos datos, determinar,

- El coeficiente de transferencia de calor por convección entre las bolas y el aceite cuando $T_{pF} = 200^\circ\text{C}$**
- El tiempo necesario para que las bolas alcancen en su superficie la temperatura de 200 °C**
- La cantidad de calor eliminada, en cada bola, en el intervalo de tiempo del apartado anterior.**

RESOLUCION

a) Coeficiente de transferencia de calor por convección entre las bolas y el aceite

Flujo en convección forzada sobre esferas

$$Nu = 2 + (0,4 \sqrt{Re} + 0,06 Re^{2/3}) Pr^{0,4} \sqrt[4]{\frac{F}{p_F}} ; \left| \begin{array}{l} 3,5 < Re < 80000 ; 0,7 < Pr < 380 \\ 1 < \frac{F}{p_F} < 3,2 ; \text{Parámetros a } T_F \end{array} \right|$$

Aceite de motor sin usar a 120°C,

$$c_{p(120^\circ\text{C})} = 2307 \frac{\text{J}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ; k_{(120^\circ\text{C})} = 0,135 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} ; \alpha_{(120^\circ\text{C})} = 7,1 \times 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

$$\nu_{(120^\circ\text{C})} = 12,4 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \beta_{(120^\circ\text{C})} = 10,3 \times 10^{-3} \frac{\text{N} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} ; Pr_{(120^\circ\text{C})} = 175$$

La temperatura de referencia, para hallar p_F será la media de la pared durante el tratamiento, es decir,

$$\frac{875 + 200}{2} = 537^\circ\text{C}$$

Tomaremos p_F a la máxima temperatura disponible: $4,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2}$

Acero a 20°C y composición (15% Cr; 10% Ni) (A 120°C no dispongo de datos)

$$k = 19 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} ; \rho = 7865 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; c_p = 460 \frac{\text{J}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ; \alpha = 0,526 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

$$Re = \frac{d u}{\nu} = \frac{0,03 \text{ m} \times 1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{12,4 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 2500$$

$$Nu = 2 + \{0,4 \sqrt{Re} + 0,06 (Re)^{2/3}\} Pr^{0,4} \sqrt[4]{\frac{F}{pF}} = 2 + \{0,4 \times \sqrt{2500} + 0,06 \times 2500^{2/3}\} \times 175^{0,4} \sqrt[4]{\frac{10,3}{4,5}} = 298$$

$$h_{cF} = \frac{k Nu}{d} = \frac{0,135 \times 298}{0,03} = 1340 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

b) Tiempo necesario para que las bolas alcancen en su superficie la temperatura de 200 °C

Cuando las bolas alcanzan en la superficie la temperatura de 200°C, la temperatura en el centro es:

$$\frac{T - T_F}{T_C - T_F} = \frac{200 - 120}{T_C - 120} = \left| \begin{array}{l} Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{1340 \frac{0,03}{2}}{19} = 1,0579 \\ Bi^{-1} = 0,945 ; \frac{r}{R} = 1 \end{array} \right| = 0,63 \quad \text{Heysler} \quad T_C = 247^\circ\text{C}$$

y el tiempo necesario para lograrlo:

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,526 \cdot 10^{-5} t}{0,015^2} = 0,0233 t = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{247 - 120}{875 - 120} = 0,1682 = 0,8 \quad t = \frac{0,8}{0,0233} = 34,4 \text{ seg}$$

$$Bi^{-1} = 0,945$$

c) Calor eliminado en cada bola en el intervalo de tiempo del apartado anterior.

$$Q_0 = \frac{4}{3} R^3 c_p (T_0 - T_F) = \frac{4}{3} \left(\frac{0,03}{2}\right)^3 \text{ m}^3 \times 7865 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0,46 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} \times (875 - 120)^\circ\text{C} = 38,61 \text{ kJ}$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \left| \begin{array}{l} \text{Grossmann} \\ Bi^2 Fo = 0,8954 \\ Bi = 1,058 \end{array} \right| = 0,90 ; Q = 0,90 \times 38,61 \text{ kJ} = 34,75 \text{ kJ}$$

III.26.- Un cilindro de acero de $k = 25 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$, y difusividad térmica $= 0,05 \text{ m}^2/\text{hora}$, tiene 50 mm de diámetro y 65 mm de longitud, y está inicialmente a una temperatura de 650°C.

A continuación se enfría en un fluido que se encuentra a 90°C.

El coeficiente de película es, $h_{cF} = 150 \text{ Kcal/h.m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

Determinar

a) La temperatura en el centro del cilindro y en la circunferencia de las bases al cabo de 2 minutos

b) El tiempo necesario para que en el centro del cilindro se alcancen 100°C.

RESOLUCION

Veamos en primer lugar la condición de contorno; como no se indica el fluido, que nos podría orientar sobre la condición de contorno, el valor de $h_{cF}/k = 150/25 = 6$ condición de contorno de convección.

a) Temperatura en el centro del cilindro al cabo de 2 minutos

$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{150 \times 0,025}{25} = 0,15 ; Bi^{-1} = 6,67$$

$$Cilindro \quad Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,05 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \times 120 \text{ seg} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ seg}}}{0,025^2 \text{ m}^2} = 2,67$$

$$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,43$$

$$Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{150 \frac{0,065}{2}}{25} = 0,195 \quad ; \quad Bi^{-1} = 5,128$$

Placa

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,05 \frac{m^2}{h} \times 120 \text{ seg} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ seg}}}{\left(\frac{0,065}{2}\right) m^2} = 1,58$$

$$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,75$$

$$\frac{T_{\text{Centro cilindro}} - T_F}{T_0 - T_F} = 0,43 \times 0,75 = 0,3225 \quad ; \quad T_C = 90 + (650 - 90) \times 0,3225 = 270,6^\circ\text{C}$$

Temperatura en la circunferencia de las bases al cabo de 2 minutos

Cilindro

$$Bi^{-1} = 6,67$$

$$\frac{r}{R} = 1$$

$$\frac{(R,t)}{(0,t)} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,94$$

$$C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,94 \times 0,43 = 0,4042$$

Placa

$$Bi^{-1} = 5,128$$

$$\frac{x}{L} = 1$$

$$\frac{(L,t)}{(0,t)} = \frac{T_L - T_F}{T_0 - T_F} = 0,90$$

$$P(L) = \frac{(L,t)}{0} = \frac{(L,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,90 \times 0,75 = 0,675$$

$$\frac{\min}{0} = \frac{T_{\text{circunf. bases}} - T_F}{T_0 - T_F} = P(L) C(R) = 0,675 \times 0,4042 = 0,2728$$

$$T_{\text{circunf. bases}} = 90 + 0,2728 \times (650 - 90) = 242,77^\circ\text{C}$$

b) Tiempo necesario para que en el centro del cilindro se alcancen 100°C.

Hay que seguir un método de iteración,

b) 1ª iteración, Supongamos que esta temperatura se alcanza al cabo de 6 minutos = 360 seg

$$Bi^{-1} = 6,67$$

Cilindro

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,05 \frac{m^2}{h} \times 360 \text{ seg} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ seg}}}{0,025^2 m^2} = 8$$

$$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,09$$

$$Bi^{-1} = 5,128$$

Placa

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,05 \frac{m^2}{h} \times 360 \text{ seg} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ seg}}}{\left(\frac{0,065}{2}\right) m^2} = 4,73$$

$$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,44$$

$$\frac{T_{C_2} - T_F}{T_0 - T_F} = 0,09 \times 0,44 = 0,0396 \quad ; \quad T_{C_2} = 90 + (650 - 90) \times 0,0396 = 112,18^\circ\text{C}$$

b) 2ª iteración, Supongamos que esta temperatura se alcanza al cabo de 8 minutos = 480 seg

$$Bi^{-1} = 6,67$$

Cilindro

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,05 \frac{m^2}{h} \times 480 \text{ seg} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ seg}}}{0,025^2 m^2} = 10,67$$

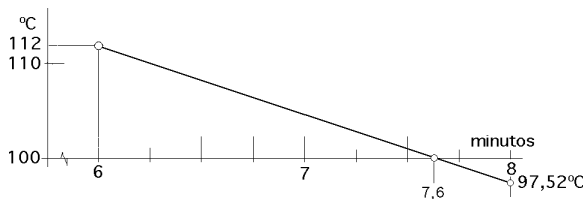
$$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,042$$

$$Bi^{-1} = 5,128$$

$$\text{Placa} \quad Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,05 \frac{m^2}{h} \times 480 \text{ seg} \times \frac{1 h}{3600 \text{ seg}}}{\left(\frac{0,065}{2}\right)^2 m^2} = 6,31$$

$$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,32$$

$$\frac{T_{C_3} - T_F}{T_0 - T_F} = 0,042 \times 0,32 = 0,01344 \quad ; \quad T_{C_3} = 90 + (650 - 90) \times 0,01344 = 97,52^\circ\text{C}$$



Representando estos valores, se obtiene un tiempo próximo a los 7,6 minutos

Mediante programa informático sale:

$$t = 463,7 \text{ seg} = 7,7 \text{ minutos} ;$$

$$Fo_{\text{cilindro}} = 10,31 \quad ; \quad Fo_{\text{placa}} = 6,1$$

III.27.- Una lata cilíndrica de 5 cm de espesor y 30 cm de diámetro contiene un determinado producto a una temperatura uniforme de 15°C, y se calienta mediante una corriente de aire a 160°C.

Sabiendo que: $\alpha = 0,04 \frac{m^2}{\text{hora}} ; k = 4 \frac{\text{Kcal}}{h m^\circ\text{C}} ; h_{C(\text{aire-lata})} = 20 \frac{\text{Kcal}}{h m^2^\circ\text{C}} , \text{ determinar:}$

a) El tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea como mínimo de 138°C

b) La temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

c) El calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento

RESOLUCION

El que la temperatura mínima sea de 138°C implica que sea el c.d.g. quien la tiene que conseguir; los demás puntos estarán a una temperatura mayor.

a) Tiempo necesario para que la temperatura de cualquier punto del producto sea de 138°C

Por ser el diámetro del cilindro muy superior a la altura, la transmisión de calor se realiza principalmente en sentido axial, por lo que sería equivalente al de transmisión de calor por conducción en régimen transitorio en una placa infinita de 5 cm de espesor.

FLUJO UNIDIMENSIONAL

$$Bi = \frac{h_C L}{k} = \frac{20 \times 0,025}{4} = 0,125 \quad (\text{convección}) \quad ; \quad 1/Bi = 8$$

En este supuesto la temperatura de 138°C se conseguiría en el plano medio de la placa.

Haciendo uso de la gráfica de Heysler correspondiente se obtiene,

Temperatura adimensional en el plano medio de la placa:

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{138 - 160}{15 - 160} = 0,1517$$

Tiempo que tardará en alcanzarse la temperatura de 138°C,

$$Fo = 16 = \frac{t}{L^2} \quad ; \quad t = \frac{16 L^2}{0,04 \frac{m^2}{\text{hora}}} = \frac{16 \times 0,025^2 m^2}{0,04 \frac{m^2}{\text{hora}}} = 0,25 \text{ horas} = 15 \text{ minutos}$$

(De haber hecho el ejercicio considerando el cilindro, la temperatura de 138°C en el eje se obtendría al cabo de unos 54 minutos, por lo que los 15 minutos pueden ser una aproximación)

b) Temperatura en el centro de la base de la lata en ese instante

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_C - T_F} = \frac{T(x,t) - 160}{138 - 160} = 0,93 \quad ; \quad T(x,t) = 160 + 0,93 (138 - 160) = 139,5^\circ\text{C}$$

c) Calor absorbido por la lata durante los 36 primeros minutos del calentamiento

$$Q_0 = m c_p \quad T = V \quad c_p \quad T = \left| \quad c_p = \frac{k}{L} \right| = V \frac{k}{L} \quad T = (R^2 L) \frac{k}{L} \quad T =$$

$$= (\quad \times 0,15^2 \times 0,05) \text{ m}^3 \times \frac{4 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}}}{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}}} \times (160 - 15)^\circ\text{C} = 51,24 \text{ Kcal}$$

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times \frac{36}{60} \text{ hora}}{0,025^2 \text{ m}^2} = 38,4 \quad ; \quad Bi^2 \quad Fo = 0,125^2 \times 38,4 = 0,6$$

y entrando en la gráfica de Gröber se obtiene,

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = 0,98 \quad ; \quad Q = 0,98 \times 51,24 \text{ Kcal} = 50,21 \text{ Kcal}$$

Si se considera FLUJO BIDIMENSIONAL, intersección de cilindro infinito y placa infinita, la temperatura en el centro de la base de la lata se obtendría en la forma,

Partiendo del tiempo obtenido en el apartado (a), $t = 0,25$ horas, se tiene:

$$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,1517$$

$$P(L) = \frac{(L,t)}{0} = \frac{(L,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = \left| \frac{(L,t)}{(0,t)} = \frac{T_L - T_F}{T_C - T_F} = \frac{x}{L} = 1 \quad = 0,93 \right| 0,93 \times 0,1517 = 0,1411$$

$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{20 \times 0,25}{4} = 0,75 \quad ; \quad Bi^{-1} = 1,333$$

Cilindro

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,04 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times 0,25 \text{ horas}}{0,15^2 \text{ m}^2} = 0,444$$

$$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,58 \text{ (eje)}$$

$$\frac{(R,t)}{(0,t)} = \frac{(R,t)}{\text{eje}} = 0,62$$

$$C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,62 \times 0,58 = 0,3596$$

Temperatura en el centro de la base,

$$P(L) \times C(0) = 0,1411 \times 0,58 = 0,0818$$

$$\frac{x}{0} = \frac{T_x - T_F}{T_0 - T_F} = 0,0818$$

$$T_x = T_F + 0,0818 (T_0 - T_F) = 160 + 0,0818 (15 - 160) = 148,14^\circ\text{C}$$

que difiere de los $139,5^\circ\text{C}$ obtenidos como problema unidimensional.

La temperatura en el c.d.g. sería,

$$T_{c.d.g.} = 160 + 0,1517 \times 0,58 \times (15 - 160) = 147,24^\circ\text{C}$$

III.28.-Se dispone de una serie de botes de conserva de diámetro $d=12$ cm y longitud $L=10$ cm, que inicialmente están a una temperatura de 20°C ; en un momento determinado se sumerge uno de ellos en un líquido caliente a 100°C . El coeficiente de película es de $200 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$. La difusividad térmica del bote y su contenido es de $0,03 \text{ m}^2/\text{hora}$ y su conductividad térmica de $9 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$.

Determinar

a) El tiempo en minutos que deberá tenerse el bote en el líquido caliente con el fin de garantizar que toda su masa se encuentre por encima de 76°C

b) La temperatura mínima que se registrará en el bote al mantenerlo sumergido 10 minutos. ¿En donde se tendrá la temperatura máxima y valor de ésta?

c) Si ahora se introducen los botes en el líquido caliente en grupos de 20, perfectamente alineados, conformando un cilindro de 12 cm de diámetro y 2 metros de longitud, hallar los supuestos pedidos en el apartado (b).

RESOLUCION

Vamos a determinar el tiempo en minutos que deberá tenerse el bote en el líquido caliente con el fin de garantizar que toda su masa se encuentre por encima de 80°C; para ello calcularemos el tiempo que se tardará en alcanzar el centro del cilindro, como cilindro infinito y como placa infinita; el menor de los resultados nos orientará sobre la magnitud de este tiempo.

a) Tiempo en minutos que deberá tenerse el bote en el líquido caliente con el fin de garantizar que toda su masa se encuentre por encima de 80°C

No se conoce el líquido, pero la relación $h_{cF}/k = 200/9 = 22$, nos indica que la condición de contorno es de convección

$$\text{Cilindro} \quad Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{200 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \cdot 0,06 \text{ m}}{9 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}} = 1,333 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,75$$
$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,03 \frac{m^2}{h} t \text{ (h)}}{0,06^2 m^2} = 8,333 t \text{ (horas)} = 0,1389 t \text{ (min)}$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \left| \begin{array}{l} T_F = 100^\circ C \\ T_0 = 20^\circ C \\ T(0,t) = 76^\circ C \end{array} \right| = \frac{76 - 100}{20 - 100} = 0,3$$

La temperatura en el centro es $T(0,t)$, y como toda la masa tiene que estar por encima de esta temperatura, el centro tendrá la temperatura mínima de todas = 76°C

Con estos resultados entramos en el diagrama de Heysler y encontramos $Fo = 0,6$, por lo que:

$$Fo = 0,6 = 0,1389 t \quad t = 4,32 \text{ minutos}$$

$$\text{Placa} \quad Bi = \frac{h_{cF} L}{k} = \frac{200 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \cdot 0,05 \text{ m}}{9 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}} = 1,111 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,9$$
$$Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,03 \frac{m^2}{h} t \text{ (h)}}{0,05^2 m^2} = 12 t \text{ (horas)} = 0,2 t \text{ (min)}$$

en la que se ha considerado un espesor de placa igual a la altura del cilindro = $2 L = 10 \text{ cm}$ $L = 0,05 \text{ m}$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \left| \begin{array}{l} T_F = 100^\circ C \\ T_0 = 20^\circ C \\ T(0,t) = 76^\circ C \end{array} \right| = \frac{76 - 100}{20 - 100} = 0,3$$

Con estos resultados entramos en el diagrama de Heysler y encontramos que $Fo = 1,55$, por lo que:

$$Fo = 1,55 = 0,2 \text{ t}$$

$$t = 7,75 \text{ minutos}$$

y la referencia es ($t = 4,32 \text{ minutos} = 272 \text{ seg}$).

A partir de esta referencia vamos a determinar la temperatura en el centro para diversos tiempos y a partir de su representación gráfica, y para una temperatura en el centro de 76°C , hallar la solución,

Para $t = 200 \text{ seg}$

$$Bi^{-1} = 0,9$$

$$\text{Placa} \quad Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,03 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \frac{200}{3600} \frac{\text{h}}{\text{seg}}}{0,05^2 \text{ m}^2} = 0,67 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,66$$

$$Bi^{-1} = 0,75$$

$$\text{Cilindro} \quad Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,03 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \frac{200}{3600} \frac{\text{h}}{\text{seg}}}{0,06^2 \text{ m}^2} = 0,463 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,51$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,66 \times 0,51 = 0,3366 \quad T_C = 100 + 0,3366 (20 - 100) = 73,07^\circ\text{C}$$

Para $t = 225 \text{ seg}$

$$Bi^{-1} = 0,9$$

$$\text{Placa} \quad Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,03 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \frac{225}{3600} \frac{\text{h}}{\text{seg}}}{0,05^2 \text{ m}^2} = 0,75 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,62$$

$$Bi^{-1} = 0,75$$

$$\text{Cilindro} \quad Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,03 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \frac{225}{3600} \frac{\text{h}}{\text{seg}}}{0,06^2 \text{ m}^2} = 0,52 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,46$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,62 \times 0,46 = 0,285 \quad T_C = 100 + 0,285 (20 - 100) = 77,18^\circ\text{C}$$

Para $t = 215 \text{ seg}$

$$Bi^{-1} = 0,9$$

$$\text{Placa} \quad Fo = \frac{t}{L^2} = \frac{0,03 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \frac{215}{3600} \frac{\text{h}}{\text{seg}}}{0,05^2 \text{ m}^2} = 0,7167 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,64$$

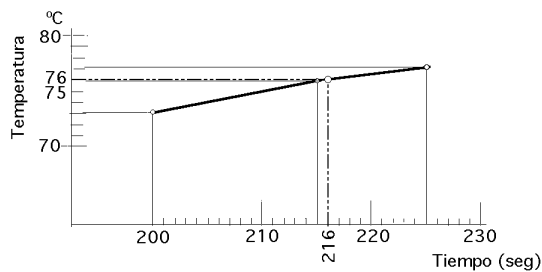
$$Bi^{-1} = 0,75$$

$$\text{Cilindro} \quad Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{0,03 \frac{\text{m}^2}{\text{h}} \frac{215}{3600} \frac{\text{h}}{\text{seg}}}{0,06^2 \text{ m}^2} = 0,498 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,47$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,64 \times 0,47 = 0,3008 \quad T_C = 100 + 0,3008 (20 - 100) = 75,93^\circ\text{C}$$

Haciendo la representación gráfica de los resultados obtenidos se encuentra que el tiempo que debe tenerse el bote en agua para que toda su masa se encuentre por encima de 76°C es de 216 segundos

Con programa informático sale 216,2 seg



b) *Temperatura mínima que se registrará en el bote al mantenerlo sumergido 2 y 10 minutos, respectivamente. ¿En donde se tendrá la temperatura máxima y valor de ésta?*

La temperatura mínima se presenta en el centro del cilindro, mientras que la máxima se presenta en los bordes

Para t = 2 minutos

Placa	$Bi^{-1} = 0,9$	$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,82$
	$Fo = 0,2 \quad t = 0,2 \times 2 = 0,4$	$P(L) = \frac{(L,t)}{0} = \left \frac{x}{L} = 1 \right = \frac{(L,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,515$
Cilindro	$Bi^{-1} = 0,75$	$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,73$
	$Fo = 0,1389 \times 2 = 0,2778$	$C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \left \frac{r}{R} = 1 \right = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,4162$

Temperatura mínima del cilindro al cabo de 2 minutos,

$$\frac{\text{mínima}}{0} = P(0) C(0) = 0,82 \times 0,73 = 0,5986 \quad ; \quad T_{\text{mínima}} = 100 + 0,5986 \times (20 - 100) = 52,11^\circ\text{C}$$

con ordenador sale $50,3^\circ\text{C}$

Temperatura máxima del cilindro al cabo de 2 minutos,

$$\frac{\text{máxima}}{0} = P(L) C(R) = 0,515 \times 0,41,62 = 0,2143 \quad ; \quad T_{\text{máxima}} = 100 + 0,2143 \times (20 - 100) = 82,85^\circ\text{C}$$

con ordenador sale $82,85^\circ\text{C}$

Para t = 10 minutos

Placa	$Bi^{-1} = 0,9$	$P(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,23$
	$Fo = 0,2 \quad t = 0,2 \times 10 = 2$	$P(L) = \frac{(L,t)}{0} = \left \frac{x}{L} = 1 \right = \frac{(L,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,64 \times 0,23 = 0,1432$
Cilindro	$Bi^{-1} = 0,75$	$C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,084$
	$Fo = 0,1389 \times 10 = 1,389$	$C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \left \frac{r}{R} = 1 \right = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,047$

Temperatura mínima del cilindro al cabo de 10 minutos,

$$\frac{\text{mínima}}{0} = P(0) C(0) = 0,23 \times 0,084 = 0,01932 \quad ; \quad T_{\text{mínima}} = 100 + 0,01932 \times (20 - 100) = 98,45^\circ\text{C}$$

con ordenador sale $98,5^\circ\text{C}$

Temperatura máxima del cilindro al cabo de 10 minutos,

$$\frac{\text{máxima}}{0} = P(L) C(R) = 0,1432 \times 0,047 = 0,006739 \quad ; \quad T_{\text{máxima}} = 100 + 0,00673 \times (20 - 100) = 99,46^\circ\text{C}$$

con ordenador sale 99,45°C

c) Si se introducen los botes en el líquido caliente en grupos de 20, perfectamente alineados, conformando un cilindro de 12 cm de diámetro y 2 metros de longitud, hallar los supuestos pedidos en el apartado (b).

En esta situación, el conjunto de los botes se puede considerar como un cilindro infinito al ser la longitud mucho mayor que el diámetro. La temperatura mínima se presenta en el eje del cilindro, mientras que la máxima se presenta en la periferia. Los datos de partida se pueden tomar del apartado (b) para el cilindro infinito.

Para t = 2 minutos

$$\begin{array}{ll} \text{Cilindro} & \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0,75 \\ Fo = 0,1389 \times 2 = 0,2778 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,73 \\ C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \left| \frac{r}{R} = 1 \right| = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,4162 \end{array}$$

Temperatura mínima (en el eje) del cilindro infinito al cabo de 2 minutos,

$$\frac{\text{mínima}}{0} = \frac{T_{\text{eje}} - T_F}{T_0 - T_F} = 0,73 \quad ; \quad T_{\text{eje}} = 100 + 0,73 \times (20 - 100) = 41,6^\circ\text{C}$$

Temperatura máxima (en la periferia) del cilindro al cabo de 2 minutos,

$$\frac{\text{máxima}}{0} = \frac{T_R - T_F}{T_0 - T_F} = 0,4162 \quad ; \quad T_{\text{máxima}} = T_R = 100 + 0,4162 \times (20 - 100) = 66,7^\circ\text{C}$$

Para t = 10 minutos

$$\begin{array}{ll} \text{Cilindro} & \begin{array}{l} Bi^{-1} = 0,75 \\ Fo = 0,1389 \times 10 = 1,389 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} C(0) = \frac{(0,t)}{0} = \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,084 \\ C(R) = \frac{(R,t)}{0} = \left| \frac{r}{R} = 1 \right| = \frac{(R,t)}{(0,t)} \frac{(0,t)}{0} = 0,047 \end{array}$$

Temperatura mínima (en el eje) del cilindro infinito al cabo de 10 minutos,

$$\frac{\text{mínima}}{0} = \frac{T_{\text{eje}} - T_F}{T_0 - T_F} = 0,084 \quad ; \quad T_{\text{eje}} = 100 + 0,084 \times (20 - 100) = 93,28^\circ\text{C}$$

Temperatura máxima (en la periferia) del cilindro al cabo de 10 minutos,

$$\frac{\text{máxima}}{0} = \frac{T_R - T_F}{T_0 - T_F} = 0,047 \quad ; \quad T_{\text{máxima}} = T_R = 100 + 0,047 \times (20 - 100) = 96,24^\circ\text{C}$$

III.29.- Una esfera de hierro, maciza, de 10 cm de diámetro, que inicialmente se encuentra a 780°C, se enfría en aire seco en reposo a 20°C, hasta que en el centro de la esfera se consigue una temperatura de 300°C; en el instante en que se alcanza esa temperatura en el centro de la esfera, ésta se introduce en una bañó de agua en movimiento, a la temperatura de 20°C, de forma que el coeficiente de película es, $h_{cF} = 1950 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}$.

Propiedades físicas de la esfera, $k = 40 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $c_p = 460 \text{ Joules/kg}^\circ\text{C}$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$

Determinar

a) El tiempo (en minutos) que debe transcurrir para que en el enfriamiento en el aire seco a 200°C se alcancen en el centro de la esfera 300°C

b) La temperatura en el centro de la esfera, a una distancia radial de 2,5 cm y en la periferia, al cabo de 2 minutos de ser introducida la esfera en el agua. ¿Qué temperatura en el centro de la esfera se tendrá a los 5 minutos?

c) El calor evacuado al medio exterior en todo el proceso.

RESOLUCION

a) El tiempo (en minutos) que debe transcurrir para que en el enfriamiento en el aire seco a 200°C se alcancen en el centro de la esfera 300°C

Convección natural en esferas,

$$Nu_d = 2 + 0,45 (Gr_d Pr)^{0,25}$$

Propiedades del aire:

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{780 + 20}{2} = 400^\circ\text{C} = 673^\circ\text{K}$$

$$k = 0,0485 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}} \quad ; \quad Pr = 0,72 \quad ; \quad \frac{g}{2} = 0,035 \times 10^8 \frac{1}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{K}}$$

$$Gr = \frac{g}{2} T d^3 = \left| \begin{array}{l} T = 780 - 20 = 760^\circ\text{C} \\ d = 0,1 \text{ m} \end{array} \right| = 0,035 \times 10^8 \times 760 \times 0,1^3 = 2,66 \times 10^6 \text{ (laminar)}$$

$$Gr Pr = 2,66 \times 10^6 \times 0,72 = 1,915 \times 10^6$$

$$Nu_d = 2 + 0,45 (Gr_d Pr)^{0,25} = 2 + 0,45 (1,915 \times 10^6)^{0,25} = 18,74$$

$$h_{cF(\text{aire})} = \frac{18,74 \times 0,0485 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}}}{0,1 \text{ m}} = 9,089 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}$$

Al ser un enfriamiento en aire, es previsible una condición de contorno con resistencia térmica interna despreciable, por lo que $Bi \ll 0,1$. En efecto,

$$Bi = \frac{h_{cF(\text{aire})} \frac{R}{3}}{k} = \frac{9,089 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}} \times \frac{0,05}{3} \text{ m}}{40 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}}} = 0,003787$$

$$Fo = \frac{t}{L^*} = \left| \begin{array}{l} = \frac{k}{c_{pF}} = \frac{40 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}}}{7850 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 460 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}}} = 1,106 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \end{array} \right| = \frac{1,106 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} t}{\left(\frac{0,05}{3}\right)^2} = 0,03987 t$$

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi.Fo}$$

$$\frac{300 - 20}{780 - 20} = e^{-3,78 \cdot 10^{-3} \times 0,03987 t} = e^{-1,5102 \cdot 10^{-4} t} \quad t = 6613 \text{ seg} = 1 \text{ h } 50 \text{ min } 13 \text{ seg}$$

b) La temperatura en el centro de la esfera, a una distancia radial de 2,5 cm y en la periferia, al cabo de 2 minutos de ser introducida la esfera en el agua.

Como el proceso anterior ha sido un enfriamiento en aire, con resistencia térmica interna despreciable, toda la esfera se encuentra a $T_0 = 300^\circ\text{C}$, que será la temperatura de partida para el enfriamiento en agua.

Temperatura en el centro de la esfera al cabo de 2 minutos:

$$\frac{h_{cF}}{k_{\text{acero}}} = \frac{1950 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{40 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 48,7 \text{ (Condición de contorno de convección)}$$

$$Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{1950 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} 0,05 \text{ m}}{40 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}} = 2,435 \quad ; \quad Bi^{-1} = 0,41$$

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \frac{1,106 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} 120 \text{ seg}}{0,05^2 \text{ m}^2} = 0,5308$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,11$$

$$\frac{T(0,t) - 20}{300 - 20} = 0,11$$

$$T(0,t) = 50,8^\circ\text{C}$$

Temperatura en $r = 0,025 \text{ m}$ al cabo de 2 minutos:

$$\frac{r}{R} = 0,5 \quad \frac{T(r,t) - 20}{50,8 - 20} = 0,82 \quad ; \quad T_{(0,025 \text{ m})} = 20 + (50,8 - 20) \times 0,82 = 45,25^\circ\text{C}$$

Temperatura en $r = 0,05 \text{ m}$ al cabo de 2 minutos:

$$\frac{r}{R} = 1 \quad \frac{T(r,t) - 20}{50,8 - 20} = 0,38 \quad ; \quad T_{(0,025 \text{ m})} = 20 + (50,8 - 20) \times 0,38 = 31,71^\circ\text{C}$$

Temperatura en el centro de la esfera al cabo de 5 minutos:

$$\begin{aligned} Bi^{-1} &= 0,41 & \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} &= 0,0035 \\ Fo &= \frac{t}{R^2} = \frac{1,106 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \cdot 300 \text{ seg}}{0,05^2 \text{ m}^2} = 1,3272 & \frac{T(0,t) - 20}{300 - 20} &= 0,0035 \end{aligned} \quad T(0,t) = 21^\circ\text{C}$$

c) Calor evacuado al medio exterior en todo el proceso.

3a) Calor evacuado al aire

$$Q(t) = Q_0 (1 - e^{-Bi \cdot Fo})$$

$$\begin{aligned} Q_0 &= V \cdot c_{pF} (T_0 - T_F) = \frac{4}{3} R^3 \cdot c_{pF} (T_0 - T_F) = \\ &= 7850 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times \frac{4}{3} \times 0,05^3 \text{ m}^3 \times 460 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} \times (780 - 20)^\circ\text{K} = 1,437 \times 10^6 \text{ J} = 343,27 \text{ Kcal} \end{aligned}$$

$$Q(t) = Q_0 (1 - e^{-Bi \cdot Fo}) = 343,27 \text{ Kcal} (1 - 0,3684) = 216,8 \text{ Kcal}$$

Calor evacuado al agua al cabo de 5 minutos:

En la esfera quedan almacenados, $Q_0^* = 343,27 - 216,8 = 126,45 \text{ Kcal}$

$$\left\{ \begin{array}{l} Bi^2 \cdot Fo = 2,435 \times 1,3272 = 7,87 \\ Bi = 2,435 \end{array} \right\} \quad \text{Gráfica de Grober: } \frac{Q(t)}{Q_0^*} = 1$$

luego al agua se va prácticamente toda la energía almacenada.

III.30.- Una esfera de hierro maciza de 10 cm de diámetro se encuentra inicialmente a una temperatura de 780°C y se enfría en dos etapas. En la primera etapa se utiliza un chorro de aire a 5 m/seg y 20°C, hasta que en el centro adquiere una temperatura de 300°C, y a continuación, en la segunda etapa, se introduce en un baño de mercurio a 20°C a una velocidad de 0,1 m/seg.

Determinar

a) El tiempo que debe transcurrir para el enfriamiento en el aire

b) La temperatura en el centro de la esfera, y en la periferia al cabo de los 10 primeros segundos y al cabo de 1 minuto una vez introducida la esfera en el mercurio

Datos: Propiedades térmicas de la esfera, $k = 40 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $c_p = 460 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$; $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$

RESOLUCION

a) Enfriamiento en aire en convección forzada, $u = 5 \text{ m/seg}$

$$\text{Propiedades del aire a } \hat{T} = \frac{T_{\text{inicial}} + T_{\text{final}}}{2} = \left| \begin{array}{l} T_{\text{inicial}} = \frac{T_i + T_F}{2} = \frac{780 + 20}{2} = 400 \\ T_{\text{final}} = \frac{T_f + T_F}{2} = \frac{300 + 20}{2} = 160 \end{array} \right| = \frac{400 + 160}{2} = 280^\circ\text{C}$$

a esta temperatura se tiene:

$$= 0,6423 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; c_p = 1,04 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} ; \mu = 44,34 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,0436 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \rho = 0,6532 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; Pr = 0,68$$

Cálculo del coeficiente de convección para el flujo del aire sobre la esfera:

$$Nu = 0,37 Re^{0,6} = \left| \begin{array}{l} 17 < Re < 70000 \\ Re = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,1 \times 5}{44,34 \cdot 10^{-6}} = 11276 \end{array} \right| = 0,37 \times 11276^{0,6} = 99,88$$

$$h_{C \text{ aire}} = \frac{Nu \cdot k}{d} = \frac{99,88 \times 0,0436}{0,1} = 43,55 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

Con este dato se puede determinar la condición de contorno correspondiente; como se trata del enfriamiento de un metal en aire, parece lógico que la condición de contorno sea de resistencia térmica despreciable, para lo cual $Bi < 0,1$.

$$Bi = \frac{h_{cF} \frac{R}{3}}{k} = \frac{43,55 \times \frac{0,1}{6}}{40} = 0,018 < 0,1 \quad (\text{R.T.I.D.})$$

$$Fo = \frac{t}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} = \frac{k}{c_p} = \frac{40}{7850 \times 460} = 1,106 \times 10^{-5} \frac{m^2}{seg} \\ = \frac{1,106 \times 10^{-5} t}{\left(\frac{0,1}{6}\right)^2} = 0,03987 t \end{array} \right|$$

$$\frac{T(x,t) - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-BiFo} \quad \frac{300 - 20}{780 - 20} = e^{-(0,018 \times 0,03987 t)} = e^{-7,235 \cdot 10^{-4} t} \quad t = 1391 \text{ seg}$$

b) Enfriamiento en mercurio en convección forzada, $u = 0,1 \text{ m/seg}$

Por tratarse de mercurio, en este enfriamiento la condición de contorno es isotérmica que las propiedades del fluido se tomarán a T_F

Propiedades del mercurio a $20^\circ C$

$$= 13579 \frac{kg}{m^3} ; c_p = 139,4 \frac{kJ}{kg^\circ C} ; \nu = 0,114 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{seg} ; k = 8,69 \frac{W}{m^\circ C} ; \alpha = 46,06 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{seg} ; Pr = 0,0249$$

$$Nu = 2 + 0,386 \sqrt{Re Pr} = \left| \begin{array}{l} 30000 < Re < 150000 \\ Re = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,1 \times 0,1}{0,114 \cdot 10^{-6}} = 87720 \end{array} \right| = 2 + 0,386 \sqrt{87720 \times 0,0249} = 20,04$$

$$h_{C \text{ mercurio}} = \frac{Nu \cdot k}{d} = \frac{20,04 \times 8,69}{0,1} = 1741,5 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

Temperatura en el centro de la esfera al cabo de los 10 primeros segundos una vez introducida la esfera en el mercurio

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \left| \begin{array}{l} = \frac{k}{c_p} = \frac{40 \frac{W}{m^\circ C}}{7850 \frac{kg}{m^3} \times 460 \frac{J}{kg^\circ C}} = 1,106 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{seg} \\ = \frac{1,106 \cdot 10^{-5} t}{0,05^2} = 0,00442 t \end{array} \right|$$

Al ser $Fo = 0,00442 < 0,2$, hay que tomar varios sumandos del desarrollo:

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\frac{2}{n} t}}{n} = \left| \begin{array}{l} n=1 ; \quad \frac{1}{1} / 0,05 = 62,83 \\ n=2 ; \quad \frac{2}{2} / 0,05 = 125,61 \\ n=3 ; \quad \frac{3}{3} / 0,05 = 188,5 \\ n=4 ; \quad \frac{4}{4} / 0,05 = 251,32 \end{array} \right| =$$

$$= -2 (-e^{-62,83^2 \times 1,107 \cdot 10^{-5} \times 10} + e^{-125,61^2 \times 1,107 \cdot 10^{-5} \times 10} - e^{-188,5^2 \times 1,107 \cdot 10^{-5} \times 10} + \dots) = 0,98237$$

$$T_C = T_F + (T_0 - T_F) \times 0,98237 = 20 + (300 - 20) \times 0,98237 = 295,06^\circ C$$

Temperatura en el centro al cabo de 1 minuto una vez introducida la esfera en el mercurio

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2 (-e^{-62,83^2 \times 1,107 \cdot 10^{-5} \times 60} + e^{-125,61^2 \times 1,107 \cdot 10^{-5} \times 60} - e^{-188,5^2 \times 1,107 \cdot 10^{-5} \times 60} + \dots) = 0,1452$$

$$T_C = T_F + (T_0 - T_F) \times 0,1452 = 20 + (300 - 20) \times 0,1452 = 60,67^\circ\text{C}$$

La temperatura de la periferia de la esfera, en cualquier instante es la temperatura del fluido = 20°C .

III.31.- Una esfera maciza de acero de diámetro 10 cm se encuentra a una temperatura de 890°C y se introduce en una corriente de aire a 10 m/seg y 10°C .

Las propiedades del acero son, $k = 25 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 0,11 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$

Determinar

a) El coeficiente de convección

b) La temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1 segundo y al cabo de 15 segundos.

c) Tiempo que tardará en coger en el centro 300°C

d) La temperatura de un punto situado a una distancia radial de 2,5 cm al cabo de 15 segundos y el calor evacuado en ese tiempo.

RESOLUCION

a) Coeficiente de convección

Propiedades del aire a: $T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{890 + 10}{2} + 273 = 723^\circ\text{K}$

$$= 0,4882 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad c_{pF} = 1,08 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}}; \quad \mu = 6,964 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}; \quad k = 0,05358 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}; \quad \text{Pr} = 0,6854$$

$$\text{Nu} = 0,37 \text{ Re}^{0,6} = \left| \begin{array}{l} 17 < \text{Re} < 70000 \\ \text{Re} = \frac{d u_F}{\mu} = \frac{0,1 \text{ m} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{6,964 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 14357 \end{array} \right| = 0,37 \times 14357^{0,6} = 115,47$$

$$h_{cF} = \frac{115,47 \times 0,05348}{0,1} = 61,86 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C}}$$

b.1) Temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1 segundo

Al ser un enfriamiento en aire, lo más probable es que sea un caso con resistencia térmica interna despreciable, por lo que si $\text{Bi} < 0,1$ se confirma.

$$\text{Bi} = \frac{h_{cF} \frac{R}{3}}{k} = \frac{61,86 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C}} \frac{0,1 \text{ m}}{6}}{25 \times 1,163 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}} = 0,035 < 0,1 \quad (\text{Se confirma la condición de contorno})$$

Por lo tanto, la temperatura será uniforme en toda la esfera, incluida la superficie, en cada instante

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-\text{Bi} \cdot \text{Fo}}$$

$$\text{Fo}_{1 \text{ seg}} = \frac{t}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} = \frac{k}{c_{pF}} = \frac{25 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \text{ }^\circ\text{K}}}{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,11 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}} = 0,02914 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} = 8,0937 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \\ = \frac{8,0937 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \times 1 \text{ seg}}{\left(\frac{0,05}{3}\right)^2 \text{ m}^2} = 0,0291 \end{array} \right|$$

$$T_{1 \text{ seg}} = 10 + (890 - 10) e^{-0,035 \times 0,0291} = 889^{\circ}\text{C}$$

b.2) La temperatura en el centro de la esfera al cabo de 15 segundos.

$$T_{15 \text{ seg}} = \left| Fo = 0,0291 \times 15 = 0,437 \right| = 10 + (890 - 10) e^{-0,035 \times 0,437} = 876,6^{\circ}\text{C}$$

c) Tiempo que tardará en coger en el centro 300°C (y por la condición de contorno, en cualquier punto de la esfera)

$$Fo = \frac{t}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{8,0937 \cdot 10^{-6} t}{\left(\frac{0,05}{3}\right)^2} = 0,0291 t$$

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi Fo} ; \quad \frac{300 - 10}{890 - 10} = e^{-0,035 \times 0,0291 t} \quad t = 1088 \text{ seg}$$

d) La temperatura de un punto situado a una distancia radial de 2,5 cm al cabo de 15 segundos

$$T_{15 \text{ seg}; 2,5 \text{ cm}} = 876,6^{\circ}\text{C}$$

El calor evacuado en ese tiempo es,

$$Q(t) = h_{cF} A (T_0 - T_F) t \frac{1 - e^{-Bi Fo}}{Bi Fo} = 61,86 \times 4 \times 0,05^2 \times (890 - 10) \times 15 \frac{1 - e^{-0,035 \times 0,4371}}{0,035 \times 0,4371} = 25,46 \text{ kW}$$

III.32.- Una esfera de acero de diámetro 2 cm se encuentra a una temperatura de 800°C , y se deja caer, (con una velocidad de 0,2 m/seg, en un recipiente que contiene mercurio a 20°C .

Las propiedades del acero son, $k = 25 \text{ Kcal/h.m.}^{\circ}\text{C}$; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 0,11 \text{ Kcal/kg}^{\circ}\text{C}$

Determinar

a) Razonando adecuadamente la respuesta, la temperatura a la que hay que tomar las propiedades del mercurio, y calcular el coeficiente de convección correspondiente.

b) La ecuación de la distribución de temperaturas en el centro de la esfera, en función del tiempo.

c) Haciendo uso del apartado (b) la temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1, 2, 10 y 25 segundos.

d) La temperatura de un punto situado a una distancia radial de 0,5 cm al cabo de 2 segundos

e) El calor evacuado al exterior al cabo de 10 segundos

RESOLUCION

a) Temperatura a la que hay que tomar las propiedades del mercurio

Al ser el medio de enfriamiento un metal líquido, con toda seguridad se va a tener una condición de contorno ISOTERMICA, por lo que la temperatura a la que hay que considerar las propiedades del fluido son a T_F , en este caso a 20°C , por lo que,

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{20 + 20}{2} = 20^{\circ}\text{C}$$

por cuanto en el mismo instante de introducir la esfera en el metal líquido, su superficie adquiere la temperatura del medio exterior.

Datos de Mercurio a 20°C ,

$$= 0,114 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 8,69 \frac{\text{W}}{\text{m.}^{\circ}\text{K}} ; Pr = 0,0249$$

$$Re = \frac{u_F d}{\nu} = \frac{0,2 \times 0,02}{0,114 \times 10^{-6}} = 35088$$

Cálculo del coeficiente de convección

$$Nu = 2 + 0,386 (Re Pr)^{0,5} = 2 + 0,386 (35088 \times 0,0249)^{0,5} = 13,41$$

$$h_{CF} = \frac{Nu \cdot k}{d} = \frac{13,4 \times 8,69}{0,02} = 5826 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K} = \frac{5,826}{1,163} \frac{Kcal}{h \cdot m^2 \cdot ^\circ C} = 5010 \frac{Kcal}{h \cdot m^2 \cdot ^\circ C}$$

b) Ecuación de la distribución de temperaturas en el centro de la esfera, en función del tiempo.

$$Fo = \frac{t}{R^2} = \left| \frac{k}{c_p} = \frac{25 \frac{Kcal}{h \cdot m^{\circ}C}}{7800 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,11 \frac{Kcal}{kg \cdot ^\circ C}} = 0,0291 \frac{m^2}{hora} \right| = \frac{0,0291 \frac{m^2}{hora} \cdot t}{0,01^2 m^2} = 0,08 t \quad (\text{con } t \text{ en segundos})$$

por lo que para tiempos de 1 y 2 segundos harán falta varios sumandos del desarrollo

$$n = \frac{n}{R} = \frac{n}{0,01} = 314,16 n$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2}{R^2} t}, \text{ con } \frac{k}{c_p} = \frac{25 \frac{Kcal}{h \cdot m^{\circ}C}}{7800 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,11 \frac{Kcal}{kg \cdot ^\circ C}} = 0,029 \frac{m^2}{hora}$$

$$\frac{T_C - 20}{800 - 20} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(314,16 n)^2 \cdot 0,029 t} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2862 n^2 t}$$

$$T_C = 20 - 2 \times 780 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(314,16 n)^2 \cdot 0,029 t} = 20 - 1560 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2862 n^2 t}$$

c) Haciendo uso del apartado (b) la temperatura en el centro de la esfera al cabo de 1 segundo (Para tiempos de 1 y 2 seg harán falta varios sumandos por ser $Fo < 0,2$)

$$\begin{aligned} T_{C(1 \text{ seg})} &= 20 - 1560 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp[-2862 n^2 t] = \left| t = 1 \text{ seg} = \frac{1}{3600} \text{ horas} \right| = \\ &= 20 - 1560 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[-2862 n^2 \frac{1}{3600}\right] = 20 - 1560 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp[-0,795 n^2] = \\ &= 20 - 1560 \{-e^{-0,795} + e^{-0,795 \times 4} - e^{-0,795 \times 9} + \dots\} = \\ &= 20 - 1560 \{-0,451 + 0,04158 - 0,00078 + \dots\} = 20 + 638 = 658^\circ C \end{aligned}$$

$$T_{C(2 \text{ seg})} = 336^\circ C$$

En la misma forma se obtendría para 2, 10 y 25 segundos, $T_{C(20 \text{ seg})} = 20,55^\circ C$

$$T_{C(25 \text{ seg})} = 20,000003^\circ C$$

d) Temperatura en un punto situado a una distancia radial de 0,5 cm al cabo de 2 segundos

$$\begin{aligned} \frac{T - T_F}{T_0 - T_F} &= -2 \frac{R}{n r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-\frac{n^2}{R^2} t)}{n r} \text{sen}\left(\frac{n r}{R}\right) \\ \frac{T - 20}{800 - 20} &= -2 \frac{0,01}{n \times 0,005} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-2862 n^2 t)}{n \times 0,005} \text{sen}\left(\frac{n \times 0,005}{R}\right) = \left| t = \frac{1}{3600} \text{ horas} \right| = \\ &= -6,366 \times 10^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-1,59 n^2)}{n \times 0,005} \text{sen}\left(\frac{n}{2}\right) = \\ &= -6,366 \times 10^{-3} \left[-\frac{\exp(-1,59)}{0,005} + \frac{\exp(-1,59 \times 3^2)}{0,005 \times 3} - \frac{\exp(-1,59 \times 5^2)}{0,005 \times 5} \dots \right] = \\ &= -6,366 \times 10^{-3} [-40,78 + 0,0000406 - \dots] = 0,2596 \end{aligned}$$

$$T_{r=0,5 \text{ cm}} = 20 + (780 \times 0,2596) = 222,5^\circ\text{C}$$

e) **Calor evacuado al exterior al cabo de 10 segundos**

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= \frac{6}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp\left(-\frac{2}{n^2} t\right)}{n^2} = \frac{6}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360} n^2\right)}{n^2} = \\ &= \frac{6}{2} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360} 1^2\right)}{1^2} + \frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360} 2^2\right)}{2^2} + \frac{1 - \exp\left(-\frac{2862}{360} 3^2\right)}{3^2} + \dots \right] = \\ &= \frac{6}{2} [0,9996 + 0,25 + 0,1111 + 0,0625 + 0,04 + \dots] = 0,90642 \end{aligned}$$

$$Q = 0,90642 Q_0 = \left| \begin{array}{l} Q_0 = m c_p T = V c_p T = \frac{4}{3} R^3 c_p T = \\ = \frac{4}{3} 0,01^3 \text{ m}^3 \times 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0,11 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \times 780^\circ\text{C} = 2,8 \text{ Kcal} \end{array} \right| = 0,9 \times 2,8 = 2,52 \text{ Kcal}$$

III.33.- Se desea hacer un tratamiento térmico de unas bolas de diámetro $d = 3 \text{ cm}$ construidas con acero al Cr-Ni (20/10), $\alpha = 0,415 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$, $k = 15,1 \text{ W/m}^\circ\text{K}$, y para ello se calientan a una temperatura de 975°C . A continuación se enfrían en un baño de mercurio que se encuentra a la temperatura de 20°C , sometiéndolas a un movimiento de agitación dotado de una velocidad media de $0,5 \text{ m/seg}$.

Determinar,

- El coeficiente de transferencia de calor
- El tiempo necesario para que las bolas alcancen la temperatura de 200°C en el centro
- El calor disipado en ese tiempo

RESOLUCION

a) **Coeficiente de transferencia de calor**

Al ser el medio de enfriamiento un metal líquido, casi con toda seguridad se va a tener una condición de contorno ISOTERMICA, por lo que la temperatura a la que hay que considerar las propiedades del fluido son a T_F , en este caso a 20°C , por lo que,

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{20 + 20}{2} = 20^\circ\text{C}$$

por cuanto en el mismo instante de introducir la esfera en el metal líquido, su superficie adquiere la temperatura del medio exterior.

Datos de Mercurio a 20°C :

$$= 13579 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; c_p = 139,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} ; \alpha = 0,114 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 8,69 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \nu = 46,06 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \text{Pr} = 0,0249$$

$$\text{Re} = \frac{u_F d}{\nu} = \frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,03 \text{ m}}{0,114 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 131.578 ; \text{Fo} = \frac{t}{R^2} = \frac{46,06 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} t}{0,015^2 \text{ m}^2} = 0,02 t$$

$$\text{Nu} = 2 + 0,386 (\text{Re} \text{Pr})^{0,5} ; \text{ campo de aplicación : } (3 \times 10^4 < \text{Re} < 1,5 \times 10^5) \text{ (válida)}$$

$$\text{Nu} = 2 + 0,386 (\text{Re} \text{Pr})^{0,5} = 2 + 0,386 (131579 \times 0,0249)^{0,5} = 24,1$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu} k}{d} = \frac{24,1 \times 8,69}{0,03} = 6981 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}$$

b) **Tiempo necesario para que las bolas alcancen la temperatura de 200°C en el centro**

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{2}{n} t\right) = \left| \begin{array}{l} n = \frac{n}{R} \\ = 0,415 \times 10^{-5} \frac{m^2}{hora} \end{array} \right|$$

$$\frac{200 - 20}{875 - 20} = 0,2105 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{2}{n} \times 0,415 \times 10^{-5} \frac{m^2}{hora} \times t\right)$$

$$0,1052 = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{2}{n} \times 0,415 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{hora} t} = \dots = \left| \begin{array}{l} 1 = 1/R = 1/0,015 = 209,44 \\ 2 = 2/R = 2/0,015 = 418,88 \\ 3 = 3/R = 3/0,015 = 628,34 \end{array} \right| =$$

$$= [(-1) \exp(-209,44^2 \times 0,415 \times 10^{-5} \times t) + (1) \exp(-418,88^2 \times 0,415 \times 10^{-5} \times t) + (-1) \exp(-628,34^2 \times 0,415 \times 10^{-5} \times t) + \dots] = e^{-0,182 t} - e^{-4 \times 0,182 t} + e^{-9 \times 0,182 t} - e^{-16 \times 0,182 t} + \dots]$$

observándose que el desarrollo en serie converge muy rápidamente.

Como: $Fo = 0,02 \times 12,37 = 0,253 > 0,2$, resolviendo con sólo el primer sumando se obtiene: $0,1052 = e^{-0,182 t}$
 $t = 12,37 \text{ seg}$

c) *Calor disipado en ese tiempo*

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= \frac{6}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{2}{n} t}}{n^2} = \frac{6}{2} \left(\frac{1 - e^{-\frac{2}{1} t}}{1^2} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{2} t}}{2^2} + \frac{1 - e^{-\frac{2}{3} t}}{3^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{6}{2} \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots - \left(\frac{e^{-\frac{2}{1} t}}{1^2} + \frac{e^{-\frac{2}{2} t}}{2^2} + \frac{e^{-\frac{2}{3} t}}{3^2} + \dots \right) \right\} = \\ &= \frac{6}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{-0,182 \times 12,37}}{1^2} + \frac{e^{-4 \times 0,182 \times 12,37}}{2^2} + \frac{e^{-9 \times 0,182 \times 12,37}}{3^2} + \dots \right) \right\} = \frac{6}{2} \left(\frac{1}{2} - 0,10523 - 0,00003069 \right) = 0,89 \end{aligned}$$

$$Q_0 = m c_p t = V c_p t = \left| c_p = \frac{k_{esf}}{R^3} \right| = \frac{4}{3} \frac{R^3}{k} T =$$

$$\begin{aligned} Q &= 0,89 Q_0 = \\ &= \frac{4}{3} \frac{0,03^3}{m^3} \frac{15,1 \frac{W}{m^2 K} \times 955^\circ K}{0,415 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{seg}} = 349,75 \text{ kJ} \end{aligned}$$

III.34.- Una esfera de hierro macizo de diámetro 4 cm, se encuentra a la temperatura de 390°C y tiene las siguientes constante físicas,

$k = 65 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $c_p = 460 \text{ Joules/kg}^\circ\text{C}$; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Se la somete a un enfriamiento en un medio exterior que se encuentra a 20°C y se desea saber,

a) En el supuesto de que el medio de enfriamiento sea aire en reposo, hallar al cabo de 1 minuto la temperatura en el centro y en la periferia. ¿Qué tiempo tardaría en alcanzar en el centro la temperatura de 100°C?

b) Si se supone que el medio de enfriamiento es una corriente de agua que circula a 1 m/seg, determinar la temperatura en el centro y en la periferia al cabo de 1 minuto

RESOLUCION

a) En el supuesto de que el medio de enfriamiento sea aire en reposo, hallar al cabo de 1 minuto la temperatura en el centro y en la periferia.

Coefficiente de convección para el aire

Propiedades del aire:

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{390 + 20}{2} + 273 = 478^\circ\text{K}$$

$$= 0,744 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; c_{pF} = 1,025 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} ; \frac{g}{2} = 1,693 \cdot 10^{-7} ; k = 0,03872 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; Pr = 0,68$$

$$Gr = \frac{g}{2} T d^3 = \left| \begin{array}{l} T = 390 - 20 = 376^\circ\text{C} \\ d = 0,04 \text{ m} \end{array} \right| = 1,693 \times 10^7 \times 370 \times 0,04^3 = 400886$$

$$Gr Pr = 400886 \times 0,68 = 272600$$

$$Nu_d = 2 + 0,45 (Gr_d Pr)^{0,25} = 2 + 0,45 (272600)^{0,25} = 12,28 ; \quad h_{cF} = 11,89 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

Al ser el medio de enfriamiento el aire, es de prever una condición de contorno de resistencia térmica interna despreciable, si es que $Bi < 0,1$.

$$Bi = \frac{h_{cF} \frac{R}{3}}{k_{hierro}} = \frac{11,89 \times \frac{0,02}{3}}{65} = 0,001219 < 0,1$$

$$\frac{T - T_F}{T_0 - T_F} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

Para $t = 1$ minuto, el n° de Fo vale:

$$Fo_{1 \text{ min}} = \frac{t}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} = \frac{k}{c_{pF}} = \frac{65}{7800 \times 460} = 1,81 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \end{array} \right| = \frac{1,81 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} 60 \text{ seg}}{\left(\frac{0,02}{3}\right)^2} = 24,43$$

$$\frac{T(x,t) - 20}{390 - 20} = e^{-1,219 \cdot 10^{-3} \times 24,43} = 0,9706 \quad T(x,t) = 379,14^\circ\text{C}$$

Tiempo que tardará en alcanzar en el centro la temperatura de 100°C

$$\frac{100 - 20}{390 - 20} = 0,2162 = e^{-\frac{1,81 \cdot 10^{-5} t}{\left(\frac{0,02}{3}\right)^2} \times 0,001219} = e^{-4,96 \cdot 10^{-4} t} \quad t = 3087 \text{ seg}$$

b) Si se supone que el medio de enfriamiento es una corriente de agua que circula a 1 m/seg, determinar la temperatura en el centro y en la periferia al cabo de 1 minuto

Flujo en convección forzada

Propiedades del agua a 20°C , para aplicar la ecuación de Whitaker,

$$= 1,006 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,579 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} ; Pr = 7$$

$$Re = \frac{u_F d}{\nu} = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,04 \text{ m}}{1,006 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 39761$$

$$Nu = 2 + (0,4 \sqrt{Re} + 0,06 Re^{2/3}) Pr^{0,4} \sqrt{\frac{h_F}{h_{pF}}}, \text{ válida en, } \begin{array}{l} 3,5 < Re < 80000 \\ 0,7 < Pr < 380 \end{array}$$

$$p_F \text{ se calcula a la temperatura media de la pared } (390 + 20)/2 = 205^\circ\text{C} \quad p_F = 139 \cdot 10^{-6} \text{ Nseg/m}^2$$

$$F \text{ se calcula a la temperatura media del fluido } 20^\circ\text{C} \quad 993 \cdot 10^{-6} \text{ Nseg/m}^2$$

$$Nu = 2 + (0,4 \sqrt{39761} + 0,06 \times 39761^{2/3}) 7^{0,4} \sqrt[4]{\frac{993}{139}} = 534,9$$

$$h_{cF} = \frac{Nu \cdot k}{d} = \frac{534,9 \times 0,597}{0,04} = 7983 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

$$\frac{h_{cF}}{k} = \frac{7983}{65} = 122,8 \text{ (C.c. isotérmica)} ; Bi = \frac{h_{cF} R}{k} = \frac{7983 \times 0,02}{65} = 2,456$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2}{R} t} = \left[\begin{array}{l} n = \frac{n}{R} = \frac{n}{0,02} \\ 1 = 157,08 ; \quad 2 = 314,16 ; \quad 3 = 471,24 ; \quad 4 = 628,32 \\ = 0,143 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{hora} \end{array} \right]$$

$$\frac{T_C - 20}{390 - 20} = -2 (-e^{-157,08^2 \times 1,81 \cdot 10^{-5} \times 60} + \dots) = 2 (e^{-26,79} - e^{-53,59} - e^{-80,38} - \dots) = 2 (0,023 - 5,32 \cdot 10^{-24}) = 0,0463$$

$T_C = 20^\circ C$, que será también la temperatura en la periferia.

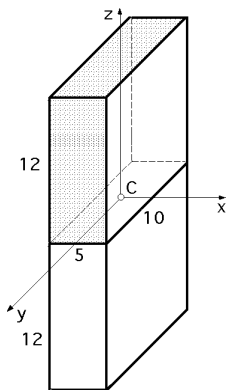
III.35.- Un ladrillo macizo de (5 x 10 x 12) cm se extrae de un horno que se encuentra a 400°C y se coloca en una mesa en posición vertical (apoyado sobre la base menor). El coeficiente de película medio para todo el ladrillo puede suponerse del orden de 25 Kcal/h.m².°C. La temperatura del ambiente es de 20°C.

Datos del material, $\alpha = 0,002 \text{ m}^2/\text{hora}$; $k = 1 \text{ Kcal/h.m.}^\circ C$

Determinar, al cabo de 1 hora,

- La temperatura en el centro de la cara apoyada en la mesa
- La temperatura en el centro del ladrillo
- La temperatura en el centro de la cara del ladrillo opuesta a la apoyada en la mesa
- La temperatura en el centro de la cara del ladrillo de dimensiones (10 x 12) cm

RESOLUCION



a) Temperatura en el centro de la cara apoyada en la mesa

Veamos la condición de contorno: Disipa calor en las tres direcciones, aunque al duplicar la longitud (por el plano apoyado sobre la base menor, que se convierte en un plano adiabático y, por lo tanto, de simetría), parece que podría hacerlo sólo en una, hecho que habrá que comprobar.

$$Bi = \frac{h_{cF} \frac{V}{A}}{k} = \frac{25 \times \frac{0,0012 \text{ m}^3}{0,082 \text{ m}^2}}{1} = 0,366 \text{ (No es condición R.T.I.D.)}$$

Es condición de contorno de CONVECCION, $\frac{h_{cF}}{k} = 25$

Método de superposición

$$\begin{array}{l} \text{Dirección Cx,} \\ Bi = \frac{h_{cF} x}{k} = \frac{25 \times \frac{0,05}{2}}{1} = 0,625 \quad Bi^{-1} = 1,6 \\ Fo = \frac{t}{x^2} = \frac{0,002 \times 1}{(\frac{0,05}{2})^2} = 3,2 \end{array} \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,23$$

Dirección Cy,

$$Bi = \frac{h_{cF} y}{k} = \frac{25 \times \frac{0,1}{2}}{1} = 1,25 \quad Bi^{-1} = 0,8$$

$$Fo = \frac{t}{y^2} = \frac{0,002 \times 1}{\left(\frac{0,1}{2}\right)^2} = 0,8$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,53$$

Dirección Cz,

$$Bi = \frac{h_{cF} z}{k} = \frac{25 \times \frac{0,24}{2}}{1} = 3 \quad Bi^{-1} = 0,333$$

$$Fo = \frac{t}{z^2} = \frac{0,002 \times 1}{\left(\frac{0,24}{2}\right)^2} = 0,1389$$

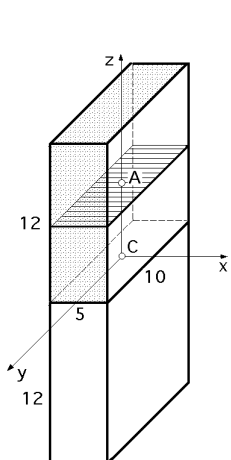
$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,91$$

$$\frac{T_C - T_F}{T_0 - T_F} = 0,23 \times 0,53 \times 0,91 = 0,111 \quad T_C = 20 + 0,111 (400 - 20) = 62,18^\circ\text{C}$$

que es la temperatura en el centro de la base apoyada sobre la mesa.

Obsérvese que el elemento corrector en la dirección Cz es prácticamente la unidad

b) Temperatura en el centro del ladrillo T_A



En la dirección Cx no hay corrección por cuanto el punto A corresponde al plano (y,z)

Parámetro de posición 0 ; Heysler 1

En la dirección Cy no hay corrección por cuanto el punto A corresponde al plano (x,z)

Parámetro de posición 0 ; Heysler 1

En la dirección Cz sí hay corrección, $Bi = 3$; $Fo = 0,1389$

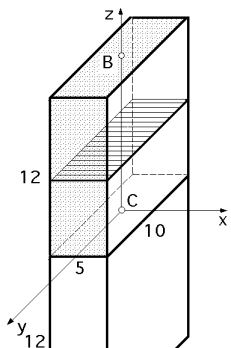
Parámetro de posición: $\left| \begin{array}{l} \frac{z}{L} = 0,5 \\ Bi^{-1} = 0,33 \end{array} \right|$ Heysler 0,83

$$\frac{T_A - T_F}{T_C - T_F} = 1 \times 1 \times 0,83 = 0,83$$

$$T_A = 20 + 0,83 (62,18 - 20) = 55^\circ\text{C}$$

que es la temperatura en el centro del ladrillo

c) La temperatura en el centro de la cara del ladrillo opuesta a la apoyada en la mesa, punto B



En la dirección Cx no hay corrección por cuanto el punto B corresponde al plano (y,z)

Parámetro de posición 0 ; Heysler 1

En la dirección Cy no hay corrección por cuanto el punto B corresponde al plano (x,z)

Parámetro de posición 0 ; Heysler 1

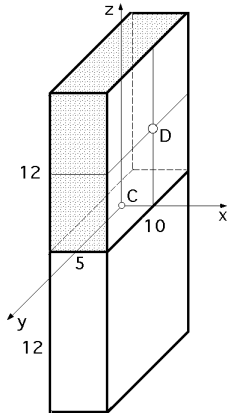
En la dirección Cz sí hay corrección, $Bi = 3$; $Fo = 0,1389$

Parámetro de posición: $\left| \begin{array}{l} \frac{z}{L} = 1 \\ Bi^{-1} = 0,33 \end{array} \right|$ Heysler 0,38

$$\frac{T_B - T_F}{T_C - T_F} = 1 \times 1 \times 0,38 = 0,38 \quad ; \quad T_B = 20 + 0,38 (62,18 - 20) = 36,03^\circ\text{C}$$

que es la temperatura en el centro de la cara B del ladrillo opuesta a la mesa.

d) Temperatura en el centro D de la cara del ladrillo de dimensiones (10 x 12) cm



En la dirección Cx sí hay corrección, $Bi = 0,625$; $Bi^{-1} = 1,6$

Parámetro de posición: $\left| \begin{array}{l} \frac{x}{L} = 1 \\ Bi^{-1} = 1,6 \end{array} \right|$ Heysler 0,73

En la dirección Cy no hay corrección por cuanto el punto D corresponde al plano (x,z)

Parámetro de posición 0 ; Heysler 1

En la dirección Cz sí hay corrección, $Bi = 3$; $Bi^{-1} = 0,33$

Parámetro de posición: $\left| \begin{array}{l} \frac{z}{L} = 0,5 \\ Bi^{-1} = 0,33 \end{array} \right|$ Heysler 0,83

$$\frac{T_D - T_F}{T_C - T_F} = 0,73 \times 1 \times 0,83 = 0,6059 ; T_D = 20 + 0,6059 (62,18 - 20) = 45,56^\circ\text{C}$$

que es la temperatura en el centro D de la cara del ladrillo vertical a la mesa.

III.36.- Un ladrillo macizo de dimensiones (10 x 12 x 5) cm, se extrae de un horno que se encuentra a 400°C, y se coloca encima de una mesa, en un ambiente tal que el coeficiente de película vale $h_c = 40 \text{ Kcal/h.m}^2.\text{°C}$, siendo la temperatura de dicho ambiente de 20°C. El ladrillo se ha apoyado en la mesa sobre la cara de (10x12) cm y se supone que la cantidad de calor transmitida a la mesa es despreciable.

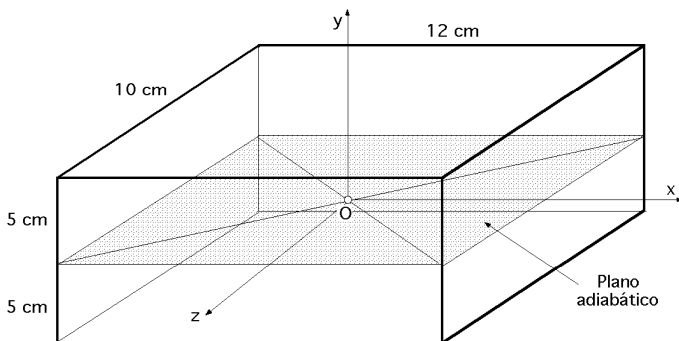
Determinar al cabo de 1 hora

a) La temperatura superficial en el centro de la cara de (5 x 10) cm.

b) La temperatura de uno de los vértices en contacto con la mesa

Datos del material, $\rho = 0,002 \text{ m}^2/\text{hora}$; $k = 0,6 \text{ Kcal/h.m.°C}$

RESOLUCION



Como a través de la mesa el flujo de calor es cero, se puede considerar a la superficie del ladrillo en contacto con la mesa como un plano adiabático, por lo que se puede suponer a la pieza de espesor doble (2×5) cm, es decir, se somete una pieza de espesor doble a la acción del medio exterior, con lo que el ladrillo ficticio será de (10 x 12 x 10) cm, disipando calor por todas las caras laterales.

a) Temperatura superficial en el centro de la cara de (5 x 10) cm.

Aplicando el método de superposición,
Temperatura en el centro O

$$\begin{aligned} \text{Dirección Ox,} \quad Bi &= \frac{h_c L_x}{k} = \frac{40 \times \frac{0,12}{2}}{0,6} = 4 & Bi^{-1} &= 0,25 \\ Fo &= \frac{t}{L_x^2} = \frac{0,002 \times 1}{\left(\frac{0,12}{2}\right)^2} = 0,555 & \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} &= 0,42 \end{aligned}$$

$$\text{Dirección Oy,} \quad Bi = \frac{h_C L_y}{k} = \frac{40 \times \frac{0,1}{2}}{6} = 3,33 \quad Bi^{-1} = 0,3 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,35$$

$$Fo = \frac{t}{L_y^2} = \frac{0,002 \times 1}{\left(\frac{0,1}{2}\right)^2} = 0,8$$

$$\text{Dirección Oz,} \quad Bi = \frac{h_C L_z}{k} = \frac{40 \times \frac{0,1}{2}}{6} = 3,33 \quad Bi^{-1} = 0,3 \quad \frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = 0,35$$

$$Fo = \frac{t}{L_z^2} = \frac{0,002 \times 1}{\left(\frac{0,1}{2}\right)^2} = 0,8$$

Luego: $\frac{T(0,t) - 20}{400 - 20} = 0,42 \times 0,35 \times 0,35 = 0,05145$; $T(0,t) = 39,55^\circ\text{C}$

TEMPERATURA EN EL PUNTO A

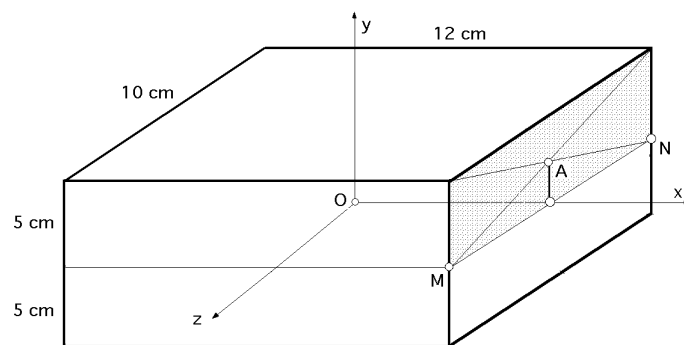
$$\text{Dirección Ox,} \quad Bi = 4 \quad Bi^{-1} = 0,25$$

$$\text{Parámetro de posición, } \frac{x}{L_x} = \frac{\text{Distancia al centro}}{\text{Semiespesor}} = \frac{0,06}{0,06} = 1 \quad \frac{T(x,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,3$$

$$\text{Dirección Oy,} \quad Bi = 3,33 \quad Bi^{-1} = 0,3$$

$$\text{Parámetro de posición, } \frac{y}{L_y} = \frac{0,025}{0,05} = 0,5 \quad \frac{T(y,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,82$$

Dirección (Oz).- Respecto a esta dirección no hay corrección por cuanto el punto A pertenece al plano (x,y). (Parámetro de posición 0)



Luego: $\frac{T_A - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T_A - 20}{39,55 - 20} = 0,3 \times 0,82 \times 1 = 0,246$; $T_A = 24,80^\circ\text{C}$

De otra forma,

$$\frac{T_A - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_A - 20}{400 - 20} = (0,42 \times 0,3) (0,35 \times 0,82) (0,35 \times 1) = 0,0126567 \quad ; \quad T_A = 24,8^\circ\text{C}$$

b) Temperatura de cada uno de los vértices en contacto con la mesa

$$\text{Dirección Ox,} \quad Bi = 4 \quad Bi^{-1} = 0,25$$

$$\text{Parámetro de posición, } \frac{x}{L_x} = \frac{\text{Distancia al centro}}{\text{Semiespesor}} = \frac{0,06}{0,06} = 1 \quad \frac{T(x,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,3$$

Dirección (Oy).- Respecto a esta dirección no hay corrección por cuanto el punto M pertenece al plano (x,z). (Parámetro de posición $y/L = 0$)

$$\text{Dirección Oz,} \quad \text{Parámetro de posición, } \frac{z}{L_z} = \frac{0,05}{0,05} = 1 \quad \frac{T(z,t) - T_F}{T(0,t) - T_F} = 0,35$$

$$\text{Luego: } \frac{T_M - T_F}{T(0,t) - T_F} = \frac{T_M - 20}{39,55 - 20} = 0,3 \times 1 \times 0,35 = 0,105 \quad ; \quad T_M = 22,05^\circ\text{C}$$

De otra forma,

$$\frac{T_M - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{T_M - 20}{400 - 20} = (0,42 \times 0,3) (0,35 \times 1) (0,35 \times 0,35) = 0,007717 \quad ; \quad T_M = 22,05^\circ\text{C}$$

III.37.- Se tiene una chapa de palastro de 40 mm de espesor, en contacto con un muro de material relativamente aislante de espesor 30 cm. Las propiedades físicas del palastro son,

$$k = 43 \text{ W/m}^\circ\text{C} ; \quad \alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$$

Las propiedades físicas del material del muro son,

$$k^* = 3 \text{ W/m}^\circ\text{C} ; \quad \alpha^* = 0,75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg}$$

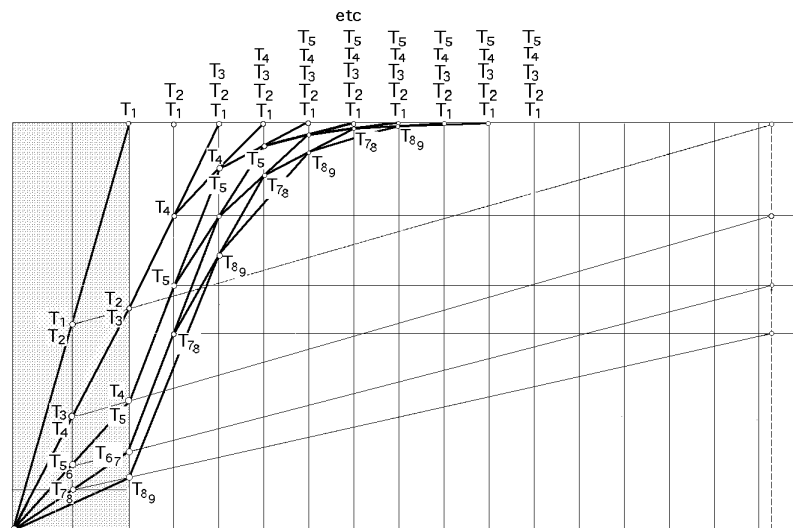
La temperatura inicial del conjunto es de 400°C

Se refrigera la chapa de palastro en forma instantánea de modo que su temperatura superficial desciende a 40°C

Determinar analítica y gráficamente la temperatura que se tiene en la superficie de contacto y a una distancia de 9,5 cm de dicha zona (en el muro), al cabo de 2 minutos 13 segundos.

Representar el proceso en papel milimetrado

RESOLUCION



El intervalo que tomamos en el palastro es: $x_1 = 2 \text{ cm}$

Aplicando Binder-Schmidt se obtiene el tiempo correspondiente a cada intervalo,

$$Fo = 0,5 = \frac{t}{x_1^2} \quad t = \frac{x_1^2}{2} = \frac{0,02^2}{2 \times 1,2 \cdot 10^{-5}} = 16,66 \text{ seg}$$

por lo que el intervalo x_2 del muro de material aislante es,

$$x_2 = \sqrt{2 \cdot t} = \sqrt{2 \times 0,75 \cdot 10^{-5} \times 16,66} = 0,0158 \text{ m}$$

Para determinar la temperatura en la superficie de contacto se hace una reubicación de los nodos inmediatos a la misma, en el palastro o en el material del muro, de forma que el intervalo para estos nodos es,

$$\frac{T_0^{t+} - T_1^t}{x_1} = \frac{T_2^t - T_0^{t+}}{\frac{k_1}{k_2} x_2} \quad ; \quad \frac{k_1}{k_2} x_2 = \frac{43}{3} \times 15,8 = 226,58 \text{ mm} \quad (\text{En el muro})$$

Como: 2 min 13 seg = 133 seg $\frac{133}{16,66} = 7,98 = 8$ incrementos de tiempo

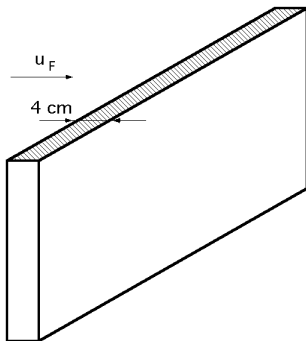
III.38.- Calcular el tiempo necesario para alcanzar la temperatura de -1°C , punto de congelación, en el núcleo de un paquete paralelepípedo de pescado, de 4 cm de espesor, siendo su temperatura inicial de $+20^\circ\text{C}$.

El enfriamiento se verificará por inmersión del paquete en salmuera a -20°C .

Se considerará la transmisión de calor unidireccional.

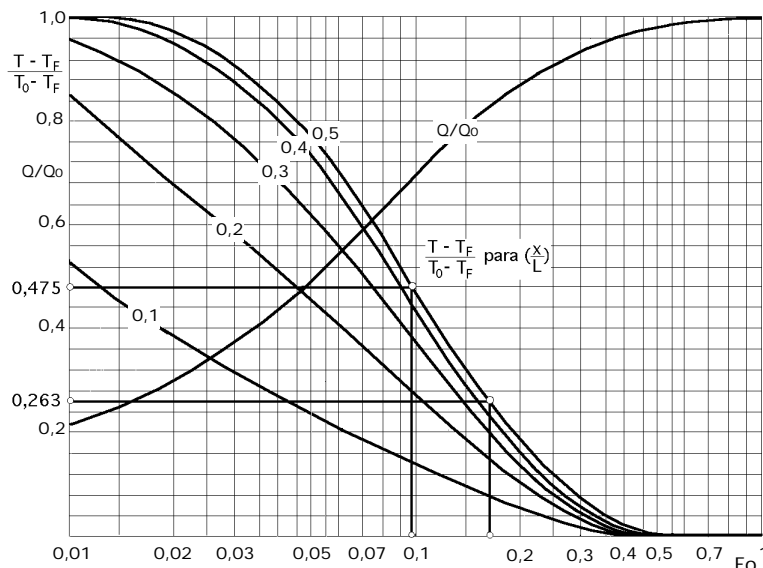
Datos, salmuera, $c_p = 0,671 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$; $\rho = 1260 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 0,0119 \text{ kg/m} \cdot \text{seg}$; $k = 0,457 \text{ Kcal/h} \cdot \text{m}^\circ\text{C}$; $u = 0,1 \text{ m/seg}$ Datos pescado sin congelar, $c_p^* = 0,85 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$; $\rho^* = 1060 \text{ kg/m}^3$; $k^* = 0,445 \text{ Kcal/h} \cdot \text{m}^\circ\text{C}$

RESOLUCION



$$Re = \frac{L u_F}{\mu} = \frac{0,04 \text{ m} \times 0,1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{0,0119 \frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{seg}}} = 423,5 \quad (\text{Laminar})$$

$$Pr = \frac{c_p}{k} = \frac{0,0119 \frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{seg}} \times 0,671 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}}{0,457 \frac{\text{Kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^\circ\text{C}}} \times 3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}} = 62,9$$



Para placa plana

$$h_{cF} = \frac{0,664 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} = \frac{0,664 \times 0,457 \frac{\text{Kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^\circ\text{C}} \times \sqrt{435,5} \times (62,9)^{1/3}}{0,04 \text{ m}} = 620 \frac{\text{Kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$\frac{h_{cF}}{k^*} = \frac{620}{0,457} = 1356,67 \quad (\text{C.c.ISOTERMICA})$$

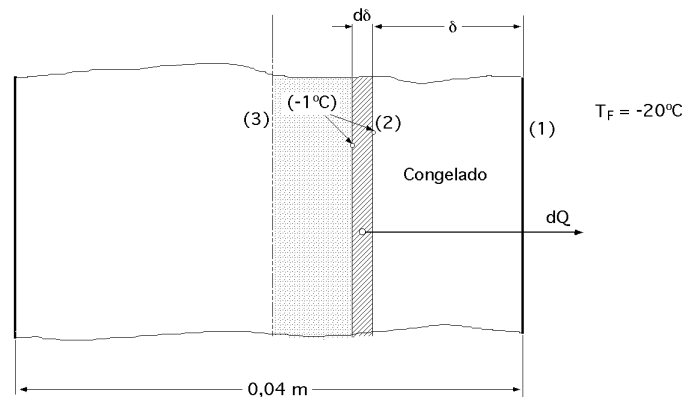
$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{(-1) - (-20)}{20 - (-20)} = \frac{19}{40} = 0,475 \quad \boxed{Fo = 0,098}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \left| \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0,445 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}}}{1060 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0,85 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg.}^\circ\text{C}}} = 0,000494 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \right| =$$

$$= \frac{0,000494 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \times t}{0,04^2 \text{ m}^2} = \boxed{0,30875 t} = 0,098 ; \quad \boxed{t = 0,3174 \text{ horas} = 19 \text{ min } 26 \text{ seg}}$$

Si en el paquete de pescado se desea continuar el enfriamiento hasta alcanzar la temperatura de -15°C en el centro del paquete, determinar:

a) El tiempo que tardará en congelarse el pescado



Una vez se ha logrado -1°C en el núcleo del paquete, se procede de la siguiente forma. En un instante determinado de la congelación supondremos un plano (2) a la distancia d que se encuentra a la temperatura -1°C y que además está en contacto con el pescado no congelado.

La pared exterior está en contacto con la salmuera a -20°C . El resto del paquete hasta el plano central (3) de simetría se encuentra a la temperatura -1°C pero no ha congelado.

Supondremos que en un tiempo dt , el calor dQ disipado a través del plano exterior (1) es capaz de congelar un espesor d del paquete; así se tendrá,

$$dQ = U A (T_{\text{cong}} - T_F) dt = \left| \frac{1}{U} = \frac{1}{h_{cF}} + \frac{1}{k} \right| = \frac{A}{\frac{1}{h_{cF}} + \frac{1}{k}} (T_{\text{cong}} - T_F) dt$$

por cuanto se ha considerado que entre los planos (2) y (3), $(L - d)$, no hay diferencia de temperaturas y, en consecuencia, no puede haber conducción de calor entre dichos planos.

Por otro lado, la cantidad de calor dQ a extraer, y necesaria para producir la congelación del espesor d del paquete, se puede poner en la forma,

$$dQ = r_{\text{líq-sól}} dG = r_{\text{líq-sól}} \times (A d)$$

en la que,

$dG = x (A d)$, es la masa a congelar en el tiempo dt

x , es el % d agua contenida en el pescado, que es la que hay que congelar, ya que el resto es sólido y no experimentará cambio de estado

$r_{\text{líq-sól}}$ es el calor latente de la congelación del agua 80 Kcal/Kg

$$dQ = r_{\text{líq-sól}} \times (A \, d) = \frac{A}{\frac{1}{h_{cF}} + \frac{1}{k}} (T_{\text{cong}} - T_F) \, dt$$

$$dt = \frac{r_{\text{líq-sól}} \times (A \, d)}{\frac{A}{\frac{1}{h_{cF}} + \frac{1}{k}} (T_{\text{cong}} - T_F)} = \frac{r_{\text{líq-sól}} \times (d)}{(T_{\text{cong}} - T_F)} \left(\frac{1}{h_{cF}} + \frac{1}{k} \right)$$

$$t = \frac{r_{\text{líq-sól}} \times}{T_{\text{cong}} - T_F} \int_0^{L/2} \left(\frac{1}{h_{cF}} + \frac{1}{k} \right) d = \frac{r_{\text{líq-sól}}}{T_{\text{cong}} - T_F} \left(\frac{1}{h_{cF}} + \frac{1}{2k} \right) \frac{L}{2} = \frac{r_{\text{líq-sól}}}{T_{\text{cong}} - T_F} \left(\frac{\frac{L}{2}}{h_{cF}} + \frac{(\frac{L}{2})^2}{2k} \right) =$$

$$= \frac{80 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}} \times 0,75 \times 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}}{(-1) - (-20)} \left\{ \frac{0,02 \, \text{m}}{620 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}} + \frac{0,02^2 \, \text{m}^2}{2 \times 1,15 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}} \right\} = 0,651 \, \text{horas} = \boxed{39 \, \text{min} \, 36 \, \text{seg}}$$

b) El tiempo que se tardará en alcanzar los -15°C en el núcleo, después de congelado el pescado

Datos, Pescado congelado, $c_p = 0,475 \, \text{Kcal/kg} \cdot \text{°C}$; $\rho = 1000 \, \text{kg/m}^3$; $k = 1,15 \, \text{Kcal/h.m} \cdot \text{°C}$

Composición, agua=75% , materia sólida=25% . Se considerará que la transmisión de calor es unidireccional

$$h_{cF} (\text{pescado-salmuera}) = 620 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

$$\frac{h_{cF}}{k} = \frac{620}{1,15} = 539,13 \, (\text{C.c.ISOTERMICA})$$

$$\frac{T(0,t) - T_F}{T_0 - T_F} = \frac{(-15) - (-20)}{(-1) - (-20)} = \frac{5}{19} = 0,26316 \quad \boxed{Fo = 0,168}$$

$$Fo = \frac{t}{L^2} = \left| \frac{k}{c_p \rho} = \frac{1,15 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m} \cdot \text{°C}}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 0,475 \frac{\text{Kcal}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}} = 0,00242 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} \right| = \frac{0,00242 \frac{\text{m}^2}{\text{hora}} t}{0,04^2 \, \text{m}^2} = 1,513 \, t = 0,168$$

$$t = 0,111 \, \text{horas} = 6 \, \text{min} \, 40 \, \text{seg}$$

V.1.- Se bombea aceite de motor sin usar a 60°C, a través de 80 tubos que tienen un diámetro de 2,5 cm, y una longitud de 10 m, a una velocidad media de 0,6 m/s.

Calcular:

a) La caída de presión a lo largo de los tubos y potencia de bombeo

b) Si cada tubo se calienta eléctricamente a razón de $q/A=1000 \text{ W/m}^2$, hallar la temperatura media de la pared en contacto con el fluido.

Propiedades térmicas del aceite de motor sin usar a 60°C:

$$= 864 \text{ kg/m}^3; c_{pF} = 2,047 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}; k = 0,14 \text{ W/m}^\circ\text{K}; \nu = 84 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}; Pr = 1050$$

RESOLUCION

$$Re = \frac{u d}{\nu} = \frac{0,6 \times 0,025}{84 \times 10^{-6}} = 178,58 \text{ (Laminar)}; \quad \frac{64}{Re} = \frac{64}{178,58} = 0,3584$$

a) Caída de presión a lo largo de los tubos.

$$P = \frac{\rho u_F^2}{d} L = \frac{0,3584}{0,025 \text{ m}} \times \frac{0,6^2 \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}}{2} \times 864 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 10 \text{ m} = 22295 \frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{seg}^2} = 2275 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

Potencia de bombeo total en CV

$$N = G P = \left| G = \frac{d^2}{4} u_F n = \frac{0,025^2}{4} \times 0,6 \times 80 = 0,02356 \frac{\text{m}^3}{\text{seg}} \right| = 0,02356 \frac{\text{m}^3}{\text{seg}} \times 2275 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} = 53,56 \frac{\text{Kgm}}{\text{seg}} = 0,7147 \text{ CV}$$

o también, considerando que la resistencia al avance para 1 tubo es:

$$F_{\text{avance}} = P \frac{d^2}{4} = 2275 \times \frac{0,025^2}{4} = 1,116 \text{ Kg}$$

$$N = F_a n u_F = 1,116 \times 80 \times 0,6 = 53,56 \frac{\text{Kgm}}{\text{seg}}$$

Coefficiente de resistencia al avance del aceite:

$$F_a = 1,116 \text{ Kg} = \frac{1}{2} C_w u_F^2 A_L = \frac{1}{2} C_w \times 864 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0,6^2 \frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2} (d \quad L) \text{ m}^2 \frac{1}{g \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}} = 12,46 C_w$$

$$C_w = \frac{1,116}{12,46} = 0,08946$$

$$\text{También se podía obtener sabiendo que: } \left| \frac{2}{8} \frac{d^2}{L} = C_w \right| = 4 C_w; \quad C_w = \frac{0,3584}{4} = 0,0896$$

b) Cada tubo se calienta eléctricamente a razón de $q/A=1000 \text{ W/m}^2$; la temperatura media de la pared en contacto con el fluido se determina en la siguiente forma:

Para flujo completamente desarrollado en tubo circular $L \gg \frac{L}{d}$, con flujo de calor constante desde la pared:

$$\frac{L}{d} = \frac{10}{0,025} = 400 \gg$$

Para Q/A uniforme y distribución de velocidades parabólica (régimen laminar):

$$Nu = 4,3636 = \frac{h_c d}{k}; \quad h_c = \frac{4,3636 \times 0,14}{0,025} = 24,43 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$T_{pi} = T_F + \frac{q}{h_c} = 60 + \frac{1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{24,43 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}} = 100,9 ^\circ\text{C}$$

V.2.- Agua, a una temperatura media de 20°C, se utiliza para refrigerar un flujo de vapor. Si el agua circula a 2 m/seg por el interior de los tubos de 3/4" de diámetro, determinar el coeficiente de transmisión de calor
 $= 998,2 \text{ kg/m}^3$; $c_{pF} = 4,182 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$; $k = 0,597 \text{ W/m}^\circ\text{K}$; $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$; $Pr = 7$

RESOLUCION

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,01905 \text{ m}}{1,006 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 37872$$

$$h_C = 0,023 \left(\frac{u^{0,8}}{d^{0,2}} \right) f_1(T) = | f_1(T) = f_1(20^\circ\text{C}) = 74191 | = 0,023 \left(\frac{2^{0,8}}{0,01905^{0,2}} \right) \times 74191 = 6560,32 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

ó también, Dittus-Boelter:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} = 0,023 \times 37872^{0,8} \times 7^{0,4} = 230,36$$

$$h_C = \frac{230,36 \times 0,597}{0,01905} = 7220 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

V.3.- Aire atmosférico a la temperatura $T_F=285^\circ\text{K}$ y velocidad $u_F=20 \text{ m/seg}$, fluye sobre una placa plana horizontal de longitud $L=1,5 \text{ m}$, que se encuentra a una temperatura $T_{pF}=341^\circ\text{K}$.

Calcular:

- Las propiedades físicas del aire**
- El coeficiente medio de transmisión de calor en la zona en que la capa límite es laminar.**
- El coeficiente medio de transmisión de calor para toda la placa.**
- La transferencia de calor por metro de anchura de la placa.**

RESOLUCION

a) Propiedades físicas del aire, en el supuesto de que la formulación a utilizar requiera propiedades a la temperatura media de película

$$\text{Propiedades físicas del aire a : } \frac{T_F + T_{pF}}{2} = \frac{285 + 341}{2} = 313^\circ\text{K}$$

$$= 1,092 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; c_{pF} = 1,014 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} ; \nu = 17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,0265 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; Pr = 0,71$$

b) Coeficiente medio de transmisión de calor en la zona en que la capa límite es laminar

$$x_C = \frac{Re_C}{u_F} = \frac{17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \cdot 5 \cdot 10^5}{20 \frac{\text{m}}{\text{seg}}} = 0,44 \text{ m}$$

$$Nu_{\text{medio}} = \frac{h_C \cdot x_C}{k} = 0,664 \sqrt{Re_C} Pr^{1/3} = 0,664 \sqrt{5 \cdot 10^5} \times 0,71^{1/3} = 418,86$$

$$h_C = \frac{418,86 \times 0,0265 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}}{0,44 \text{ m}} = 25,23 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \quad (\text{para: } 0 < x < 0,44)$$

c) Coeficiente medio de transmisión de calor para toda la placa.

$$Re_L = \frac{u_F L}{\nu} = \frac{20 \text{ (m/seg)} \times 1,5 \text{ m}}{17,6 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{seg)}} = 1,7045 \cdot 10^6$$

Al ser la turbulencia desarrollada, se puede prescindir del sumando 9200 en la ecuación:

$$h_{cF} = 0,036 \text{ Pr}^{0,43} \frac{k}{L} (\text{Re}_L^{0,8} - 9200) \left(\frac{F}{pF}\right)^{0,25}$$

Para el aire: $\frac{F}{pF} = 1$

$$h_{cF} = 0,036 \text{ Pr}^{0,43} \frac{k}{L} \text{Re}_L^{0,8} = 0,036 \times 0,71^{0,43} \times \frac{0,0265}{1,5} \times (1,7045 \cdot 10^6)^{0,8} = 52,95 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}$$

d) Transferencia de calor por metro de anchura de placa

$$q = h_{cF} A (T_{pF} - T_F) = 52,95 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}} \times (1,5 \times 1) \text{ m}^2 \times (341 - 285)^\circ\text{K} = 4450 \text{ W}$$

V.4.- Aire atmosférico a $T_F = 400^\circ\text{K}$ fluye con una velocidad $u_F = 4 \text{ m/seg}$ a lo largo de una placa de longitud $L = 1 \text{ m}$. La temperatura de la pared se mantiene constante a $T_{pF} = 300^\circ\text{K}$.

El coeficiente medio de transferencia de calor es $h_{cF} = 7,75 \text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$

Estimar mediante la analogía de Reynolds-Colburn la fuerza de resistencia por 1 metro de anchura de placa plana.

RESOLUCION

$$T = \frac{400 + 300}{2} = 350^\circ\text{K}$$

$$= 0,998 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; \quad c_{pF} = 1,009 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ; \quad \text{Pr} = 0,697$$

$$\frac{C_W}{2} = \frac{h_{cF}}{c_{pF} u_F} \text{Pr}^{2/3} = \frac{7,75 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{0,998 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 1,009 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times 4 \frac{\text{m}}{\text{seg}}} \times 0,697^{2/3} = 1,51 \times 10^{-3}$$

$$F_a = \frac{1}{2} C_W u_F^2 (L \times a) = 0,998 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 4^2 \frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2} \times 1,51 \times 10^{-3} \times (1 \times 1) \text{ m}^2 = 0,024 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{seg}^2} = 0,024 \text{ N}$$

V.5.- El cárter de un automóvil tiene las siguientes dimensiones: Longitud, 0,6 m; anchura, 0,2 m; profundidad, 0,1 m

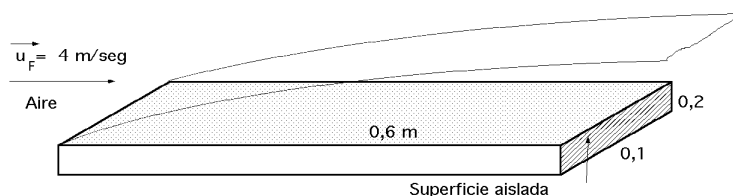
Suponiendo que el cárter tiene una temperatura superficial de 350°K , determinar la pérdida de calor a la atmósfera, por unidad de tiempo, sabiendo que ésta se encuentra a 3°C para una velocidad del vehículo de 30 m/seg .

Se supondrá que la capa límite es turbulenta en toda la superficie; el coeficiente de transferencia de calor h_C se supondrá constante para cualquier dirección.

RESOLUCION

Propiedades físicas del aire

$$T = \frac{350 + 276}{2} = 313^\circ\text{K} \quad = 1,092 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \quad = 17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \quad k = 0,0265 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \quad \text{Pr} = 0,71$$



$$Re_L = \frac{u_F L}{\nu} = \frac{30 \frac{m}{seg} \cdot 0,6 m}{17,6 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{seg}} = 1,0227 \cdot 10^6 \text{ (Turbulencia desarrollada)}$$

Al ser la turbulencia desarrollada, se puede prescindir del sumando 9200 en la ecuación:

$$h_{cF} = 0,036 Pr^{0,43} \frac{k}{L} (Re_L^{0,8} - 9200)$$

por lo que:

$$h_{cF} = 0,036 \cdot Pr^{0,43} \frac{k}{L} Re_L^{0,8} = 0,036 \times 0,71^{0,43} \times \frac{0,0265}{0,6} \times (1,0227 \times 10^6)^{0,8} = 88,15 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

$$q = h_{cF} A (T_{pF} - T_F) = |A = 2 [(0,6 \times 0,2) + (0,6 \times 0,1)] = 0,36 m^2| =$$

$$= 88,15 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K} \times 0,36 m^2 \times (350 - 276)^\circ K = 2348,4 W$$

V.6.- Se utiliza una tubería horizontal de cobre, de diámetro 16 mm, para calentar una habitación por convección natural. Por su interior circula agua muy caliente de forma que la temperatura exterior de la tubería sea de 100°C, mientras que se desea que la habitación permanezca a 20°C.

Determinar la cantidad de calor que se disipará por metro lineal de tubería.

RESOLUCION

Temperatura media de la película de aire en la habitación: $T = \frac{100 + 20}{2} = 60^\circ C$

$$= 1,025 \frac{kg}{m^3} ; c_{pF} = 1,017 \frac{kJ}{kg^\circ C} ; \nu = 19,4 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{seg} ; k = 0,0279 \frac{W}{m^\circ C} ; \frac{g}{2} = 0,782 \cdot 10^{-8} ; Pr = 0,71$$

$$Gr = \frac{g}{2} T L^3 = \left| \begin{array}{l} T = 100 - 20 = 80^\circ C \\ L = d = 0,016 m \end{array} \right| = 0,782 \cdot 10^{-8} \times 80 \times 0,016^3 = 25625$$

$$Gr Pr = 25625 \times 0,71 = 18193 \text{ (Convección natural laminar)}$$

$$\sqrt{Nu} = 0,60 + 0,387 \left[\frac{Gr_d Pr}{1 + \left(\frac{0,56}{Pr} \right)^{9/16}} \right]^{1/6}, \text{ válida en el intervalo: } \left\{ \begin{array}{l} 10^{-5} < (Gr_d Pr) < 10^{12} \\ (Pr) > 0,5 \end{array} \right\}$$

$$\sqrt{Nu} = 0,60 + 0,387 \left[\frac{18193}{1 + \left(\frac{0,56}{0,71} \right)^{9/16}} \right]^{1/6} = 25,5025 ; Nu = 5,05$$

$$h_{cF} = \frac{k Nu}{d} = \frac{0,0279 \times 5,05}{0,016} = 8,8 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

$$q = h_{cF} A (T_{pF} - T_F) = |A = d L = 0,016 \times 1 = 0,05026 m^2| = 8,80 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \times 0,05026 m^2 \times 80^\circ C = 35,39 W$$

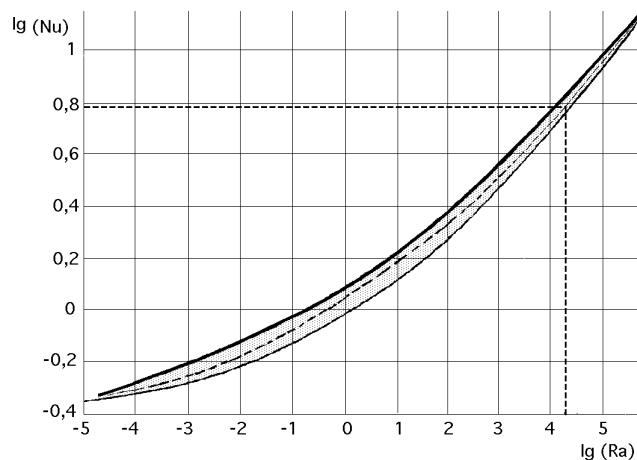
Cálculo de h_{cF} por otros métodos:

a) Para convección natural flujo laminar: $h_C = 1,18 \left(\frac{T}{d} \right)^{0,25} = 1,18 \left(\frac{80}{0,016} \right)^{0,25} = 9,92 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$

b) Gráficamente:

$$\lg Ra = \lg (18193) = 4,26 \quad \lg Nu = 0,78 ; Nu = 6,026$$

$$h_{cF} = \frac{Nu k}{d} = \frac{6,026 \times 0,0279}{0,016} = 10,51 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

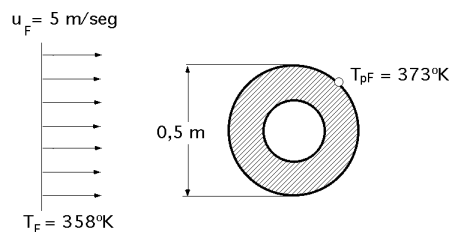


V.7.- Determinar la velocidad de transferencia térmica correspondiente al aire atmosférico a 358°K, fluyendo a una velocidad de 5 m/seg, perpendicularmente a un conducto de 0,5 m de diámetro y 10 m de longitud, cuya temperatura superficial es de 373°K

RESOLUCION

Propiedades físicas del aire:

$$T = \frac{373 + 358}{2} = 365,5^\circ\text{K} \quad \rho = 0,936 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \quad \mu = 21,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{seg}} ; \quad k = 0,0302 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \quad \text{Pr} = 0,71$$



$$\text{FLUJOS CRUZADOS: } \text{Re} = \frac{u_F d}{\mu} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \cdot 0,5 \text{ m}}{21,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 109860 \text{ (Turbulento)}$$

$$\text{Nu} = 1,11 C \text{Re}^n \text{Pr}^{0,42} \left(0,785 \frac{T_{pF}}{T_F}\right)^{n/4} = \left| \begin{array}{l} \text{Para: } 40000 < \text{Re} < 400000 \\ C = 0,02666 ; n = 0,805 \end{array} \right| =$$

$$= 1,11 \times 0,02666 \times 109860^{0,805} \times 0,71^{0,42} \left(0,785 \frac{373}{358}\right)^{0,805/4} = 280,6$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu} \cdot k}{d} = \frac{280,6 \times 0,0302}{0,5} = 16,95 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = h_{cF} A (T_{pF} - T_F) = \left| A = d L = \pi \times 0,5 \times 10 = 15,71 \text{ m}^2 \right| =$$

$$= 16,95 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times 15,71 \text{ m}^2 \times (373 - 358)^\circ\text{C} = 3994 \text{ W}$$

V.8.- A través de un tubo capilar de 0,3 m de largo y $2,54 \cdot 10^{-3}$ metros de diámetro interior, fluye agua a una velocidad de 0,2 m/seg. La temperatura de entrada del agua es de 40°C. Suponiendo que la temperatura media del tubo es de 80°C, calcular la temperatura de salida del agua

RESOLUCION

Es un ejercicio en el que hay que iterar, por cuanto no se conoce la temperatura media del agua, y sí la de entrada.

Por lo tanto podemos partir de una temperatura dada por: $T_F = \frac{T_{pF} + T_{entrada}}{2} = \frac{80 + 40}{2} = 60^\circ\text{C}$

$$= 983,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; c_{pF} = 4,181 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} ; \mu = 0,478 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,658 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; Pr = 3 ; \frac{g}{2} = 22,45 \cdot 10^9$$

Régimen del flujo a la temperatura de 60°C :

$$Re = \frac{u_F d}{\mu} = \frac{0,2 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 2,54 \times 10^{-3} \text{ m}}{0,478 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 1063 \text{ (Laminar)}$$

a) Para convección en tubos en régimen laminar (sólo para el agua)

$$h_C = 1,62 \left(\frac{u}{L d} \right)^{1/3} f_2(T) = \left| f_2(T) = f_2(60^\circ\text{C}) = 113,67 \right| = 1,62 \left(\frac{0,2}{0,3 \times 2,54 \cdot 10^{-3}} \right)^{1/3} \times 113,67 = 1179 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

$$q = G c_{pF} (T_{sal} - T_{ent}) = h_{CF} A_L (T_{pF} - T_F) \quad \text{con: } T_F = \frac{T_{sal} + T_{ent}}{2}$$

$$\text{Velocidad de flujo másico: } G = \frac{d^2}{4} u_F = 983,2 \frac{(2,54 \times 10^{-3})^2}{4} \times 0,2 = 9,96 \times 10^{-4} \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}$$

luego:

$$9,96 \times 10^{-4} \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 4,181 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{K}} (T_{F(sal)} - 313)^\circ\text{K} = 1179 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} (2,5 \times 10^{-3} \times 0,3) \text{ m}^2 (353 - T_F)$$

$$4,1659 (T_{F(sal)} - 313)^\circ\text{K} = 2,841 (353 - \frac{T_{F(sal)} + 313}{2}) \quad T_{F(sal)} = 333,3^\circ\text{K} = 60,3^\circ\text{C}$$

$$\text{Con este resultado habría que volver a iterar con: } T_F = \frac{40 + 60,3}{2} = 50,15^\circ\text{C}, \text{ por lo que: } T = \frac{50,15 + 80}{2} = 65,08^\circ\text{C}$$

Nota: También se podía haber calculado el coeficiente de convección h_C considerando flujo laminar desarrollado por el interior de tuberías con temperatura de pared uniforme, en la forma:

$$Nu = 3,656 = \frac{h_C d}{k} = \frac{h_C \times 2,54 \cdot 10^{-3}}{0,658} \quad h_C = 945 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

V.9.- Se hace circular aire a la presión de 1 atm y temperatura 490°K , por un tubo de 2 cm de diámetro interior, a una velocidad de 10 m/seg. Calcular h_C si la temperatura del tubo es de 510°K , y estimar la velocidad de transferencia de calor por unidad de longitud si se mantiene un flujo de calor uniforme.

RESOLUCION

$$\text{Las propiedades del aire se toman a: } T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{510 + 490}{2} = 500^\circ\text{K}$$

$$= 0,7048 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; c_{pF} = 1,0295 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} ; \mu = 2,671 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{seg}} ; k = 0,04038 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; Pr = 0,68$$

$$Re = \frac{d u_F}{\mu} = \frac{0,02 \text{ m} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,7048 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}}{2,671 \times 10^{-5} \frac{\text{Kg}}{\text{m seg}}} = 5277,4 \text{ (Turbulento)}$$

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \exp [-3,796 - 0,205 \ln(Re) - 0,505 \ln(Pr) - 0,0225 \{\ln(Pr)\}^2]$$

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} = \frac{Nu}{5277,4 \times 0,68} = 2,786 \times 10^{-4} Nu$$

$$St = \exp [-3,796 - 0,205 \ln(5277,4) - 0,505 \ln(0,68) - 0,0225 \{\ln(0,68)\}^2] = 4,693 \times 10^{-3}$$

$$4,693 \times 10^{-3} = 2,786 \times 10^{-4} \text{ Nu}$$

$$\text{Nu} = 16,84 ;$$

$$h_c = \frac{\text{Nu } k}{d} = \frac{16,84 \times 0,04038}{0,02} = 34 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}$$

$$Q = h_{cF} A_e (T_{pF} - T_F) = h_{cF} (d_e L) (T_{pF} - T_F) = 34 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} (0,02 \times 1) \text{ m}^2 \times (510 - 490)^\circ\text{C} = 42,72 \text{ W}$$

V.10.- Se calienta agua con una placa vertical plana, cuadrada, de lado 0,5 metros, que se mantiene a una temperatura de 60°C; la placa se introduce en el agua de forma que disipa calor por las dos caras. Determinar el calor transferido al agua cuando ésta se encuentra a 20°C.

RESOLUCION

Temperatura de pared constante

$$\text{Temperatura media de la película: } T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{60 + 20}{2} = 40^\circ\text{C}$$

$$= 992,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; c_{pF} = 4,175 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} ; \mu = 0,658 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,673 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \text{Pr} = 4,5$$

$$\text{Gr} = \frac{g}{2} T L^3 = \left| \begin{array}{l} T = 60 - 20 = 40^\circ\text{C} \\ L = h = 0,5 \text{ m} \end{array} \right| = 8,833 \times 10^9 \times 40 \times 0,5^3 = 4,41 \times 10^{10}$$

$$\text{Gr Pr} = (4,41 \times 10^{10}) \times 4,5 = 1,984 \times 10^{11}$$

(Se trata de un calentamiento con turbulencia muy desarrollada ($10^9 < \text{Ra} < 10^{12}$))

$$\text{Nu} = 0,021 \text{ Ra}_L^{0,4} = 0,021 (1,984 \times 10^{11})^{0,4} = 694,2$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu } k}{L} = \frac{694,2 \times 0,673}{0,5} = 934,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = h_{cF} A T = 934,4 \times (2 \times 0,5^2) \times (60 - 20) = 18.688 \text{ W}$$

V.11.- Calcular la disipación de calor desde una pared vertical expuesta al medio ambiente compuesto por Nitrógeno a 5°C y presión 1 atm abs. La pared tiene 2 m de altura y 3 m de ancho, siendo su temperatura de 49°C.

RESOLUCION

Temperatura de pared constante

$$\text{Temperatura media de la película: } T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{49 + 5}{2} = 27^\circ\text{C}$$

$$= 1,1421 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \mu = 15,63 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,0262 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \text{Pr} = 0,713 ; \frac{g}{2} = 133,7 \cdot 10^6 \frac{1}{^\circ\text{K m}^3}$$

$$\text{Gr} = \frac{g}{2} T L^3 = \left| \begin{array}{l} T = 49 - 5 = 44^\circ\text{C} \\ L = h = 2 \text{ m} \end{array} \right| = 133,7 \cdot 10^6 \times 44 \times 2^3 = 4,7 \cdot 10^{10}$$

$$\text{Gr Pr} = 4,7 \cdot 10^{10} \times 0,713 = 3,355 \cdot 10^{10} \text{ (Turbulencia muy desarrollada)}$$

$$\text{Nu} = 0,021 \text{ Ra}_L^{0,4} = 0,021 (3,355 \cdot 10^{10})^{0,4} = 340,8$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu } k}{L} = \frac{340,8 \times 0,0262}{2} = 4,464 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = h_{cF} A T = 4,464 \times (2 \times 3) \times (49 - 5) = 1178,6 \text{ W}$$

V.12.- Determinar el calor generado en la parrilla de asar de un restaurante, cuyas dimensiones son (1,00 x

0,80 m²), que se mantiene a una temperatura media de 140°C, sabiendo que la temperatura media del restaurante es de 20°C

RESOLUCION

Convección natural

Temperatura media de la película: $T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{140 + 20}{2} = 80^\circ\text{C}$

$$= 0,968 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \quad = 21,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \quad k = 0,0293 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \quad \text{Pr} = 0,71 ; \quad \frac{g}{2} = 0,6 \cdot 10^8 \frac{1}{^\circ\text{K} \cdot \text{m}^3}$$

$$\text{Gr} = \frac{g}{2} T L^3 = \left| \begin{array}{l} T = 140 - 20 = 120^\circ\text{C} \\ L = \frac{1 + 0,8}{2} = 0,9 \text{ m} \end{array} \right| = 0,6 \times 10^8 \times 120 \times 0,9^3 = 5,25 \times 10^9$$

$$\text{Gr Pr} = (5,25 \times 10^9) \times 0,71 = 3,7275 \times 10^9 \text{ (Turbulento)}$$

$$\text{Nu} = C \text{ Ra}_L^n = \left| \begin{array}{l} 10^7 < \text{Ra} < 10^{10} \\ C = 0,14 \\ n = 0,33 \end{array} \right| = 0,14 \times (3,7275 \times 10^9)^{0,33} = 201,7$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu } k}{L} = \frac{201,54 \times 0,0293}{0,9} = 6,56 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = h_{cF} A T = 6,56 \times (1 \times 0,8) \times (140 - 20) = 630 \text{ W}$$

V.13.- Determinar el calor generado en la parrilla de asar de un restaurante, cuyas dimensiones son (1,00 x 0,80 m²), que se mantiene a una temperatura media de 140°C, sabiendo que la temperatura media del restaurante es de 20°C y existe una corriente de aire de 1 m/seg

RESOLUCION

Convección forzada

Temperatura media de la película: $T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{140 + 20}{2} = 80^\circ\text{C}$

$$= 0,968 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \quad = 21,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \quad k = 0,0293 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \quad \text{Pr} = 0,71$$

$$\text{Nu} = 0,664 \sqrt{\text{Re}} \text{ Pr}^{1/3} = \left| \text{Re} = \frac{u_F L}{\nu} = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,9 \text{ m}}{21,5 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 41860 < 5 \times 10^5 \text{ (laminar)} \right| =$$

$$= 0,664 \sqrt{41860} \times 0,71^{1/3} = 121,2$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu } k}{L} = \frac{121,2 \times 0,0293}{0,9} = 3,944 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = h_{cF} A T = 3,944 \times (1 \times 0,8) \times (140 - 20) = 378,8 \text{ W}$$

V.14.- Agua a la temperatura media de 15°C se eleva a la velocidad media u= 0,10 m/seg por un tubo de diámetro interior d_i= 0,015 metros. La longitud del tubo es L= 0,5 metros. La temperatura de la pared del tubo es de 45°C.

Determinar el coeficiente h_c de transmisión de calor.

RESOLUCION

$$\frac{L}{d} = \frac{0,5}{0,015} = 33,33 \text{ (Flujo no desarrollado)}$$

que puede ser laminar o turbulento.

En ambas situaciones la formulación a utilizar dice que las propiedades del fluido hay que tomarlas a T_F por lo que las propiedades del agua se toman a la temperatura de 15°C

$$= 998,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \quad = 1,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,587 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \text{Pr} = 8,675 ; \quad = 1193,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{seg}}$$

$$\text{Re} = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,015 \text{ m} \times 0,10 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{1,2 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 1248 \text{ (laminar)}$$

$$\text{Nu} = 1,86 (\text{Re Pr})^{0,33} \left(\frac{d}{L}\right)^{0,33} \left(\frac{T_F}{T_{pf}}\right)^{0,14} ; \quad (\text{Pr}) > 0,5 ; \quad \left(\frac{d}{L} \text{Re Pr}\right) > 10$$

$$45^\circ\text{C} = 611,5 \times 10^{-6} \frac{\text{Kg}}{\text{m seg}}$$

$$\text{Nu} = 1,86 \times (1248 \times 8,675)^{0,33} \times \left(\frac{0,015}{0,5}\right)^{0,33} \times \left(\frac{1193,25 \times 10^{-6}}{611,5 \times 10^{-6}}\right)^{0,14} = 13,77$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu } k}{d} = \frac{13,77 \times 0,587}{0,015} = 539 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

V.15.- Aire atmosférico a la temperatura $T_F=20^\circ\text{C}$ y velocidad $u_F=30 \text{ m/seg}$, incide sobre una esfera de diámetro $2,5 \text{ cm}$ y temperatura constante igual a $T_{\text{esfera}}=135^\circ\text{C}$

Determinar:

a) El calor evacuado por la esfera

b) La fuerza que opone la esfera al flujo del aire

RESOLUCION

- Si se utiliza la ecuación exclusiva para gases, las propiedades del aire hay que tomarlas a la temperatura media de la película.

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{135 + 20}{2} = 77,5^\circ\text{C} \quad 77,5^\circ\text{C} = 350,5^\circ\text{K} = 20,76 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \quad k = 0,03 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}}$$

$$\text{Re} = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,025 \text{ m} \times 30 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{20,76 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 36127$$

$$\text{Nu} = 0,37 \text{Re}^{0,6} ; \quad 17 < \text{Re} < 70000$$

$$\text{Nu} = 0,37 \times (36127)^{0,6} = 200,86$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu } k}{d} = \frac{200,86 \times 0,03}{0,025} = 241,36 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

- Si se utiliza la ecuación general de Whitaker, las propiedades del aire hay que tomarlas a la temperatura media del fluido $T_F = 20^\circ\text{C}$.

$$20^\circ\text{C} = 15,95 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \quad k_{20^\circ\text{C}} = 0,02568 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}} ; \quad \text{Pr} = 0,71$$

$$\text{Re} = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,025 \text{ m} \times 30 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{15,95 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 47021$$

$$\text{Nu} = 2 + [0,4 \text{Re}^{1/2} + 0,06 \text{Re}^{2/3}] \text{Pr}^{0,4} = 2 + [0,4 \times (47021)^{1/2} + 0,06 \times (47021)^{2/3}] 0,71^{0,4} = 145,75$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu } k}{d} = \frac{145,75 \times 0,0256}{0,025} = 149,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

a) Calor evacuado por la esfera

Se observa una fuerte discrepancia entre ambos resultados, por lo que tomaremos el correspondiente a la ecuación exclusiva para gases

$$q = h_{cF} A \quad T = 241,36 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \times (4 \times 0,0125^2) m^2 \times (135 - 20) ^\circ K = 54,5 W$$

b) Fuerza que opone la esfera al flujo del aire

$$F_a = C_w \frac{u_F^2}{2} = \left| \begin{array}{l} C_w = 0,47 \text{ para: } 10^3 < Re < 3 \times 10^5 \\ \text{Sección frontal: } \frac{d^2}{4} = \frac{0,025^2}{4} = 4,91 \times 10^{-4} m^2 \end{array} \right| =$$

$$= 0,47 \times 4,91 \times 10^{-4} m^2 \times 1,21 \frac{Kg}{m^3} \times \frac{30^2}{2} \left(\frac{m}{seg} \right)^2 = 0,1256 N$$

V.16.- Un tubo vertical de 3,6 cm de diámetro exterior y 0,4 metros de longitud está a la temperatura $T_F=405^\circ K$ e inmerso en aire atmosférico a la temperatura $T_F=28^\circ C$.

Determinar el coeficiente de transmisión de calor y el calor evacuado al exterior

RESOLUCION

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{400 + (28 + 273)}{2} = 350,5^\circ K$$

$$= 0,998 \frac{kg}{m^3} ; \quad = 20,76 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{seg} ; \quad k = 0,03 \frac{W}{m^\circ C} ; \quad Pr = 0,697 ; \quad \frac{g}{2} = 0,758 \cdot 10^8 \frac{1}{^\circ K \cdot m^3}$$

$$Gr = \frac{g}{2} T L^3 = \left| \begin{array}{l} T = 400 - 301 = 99^\circ C \\ L = 0,4 m \end{array} \right| = 0,758 \times 10^8 \times 99 \times 0,4^3 = 4,8 \times 10^8$$

$$Gr Pr = (4,8 \times 10^8) \times 0,697 = 3,3474 \times 10^8 < 10^9 \text{ (Laminar)}$$

Para el caso particular del aire:

$$h_{cF} = 1,18 \left(\frac{T}{d} \right)^{0,25} = 1,18 \times \left(\frac{99}{0,036} \right)^{0,25} = 8,545 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

$$q = h_{cF} (d L) T = 8,545 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K} (0,036 \times 0,4) m^2 \times 99^\circ C = 38,27 W$$

V.17.- Bolas esféricas de 0,6 cm de diámetro caen a una velocidad de 2 m/seg en un depósito de agua. Calcular el coeficiente de película si las bolas se encuentran a $100^\circ C$ y el agua a $20^\circ C$.

RESOLUCION

$$\text{Whitaker: } Nu = 2 + (0,4 Re^{1/2} + 0,06 Re^{2/3}) Pr^{0,4} \left(\frac{F}{p_F} \right)^{0,25} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} 3,5 < Re < 80000 \\ 0,7 < Pr < 380 \\ 1 < \frac{F}{p_F} < 3,21 \end{array} \right\}$$

Propiedades del agua a $20^\circ C$:

$$= 998,2 \frac{kg}{m^3} ; \quad = 1,006 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{seg} ; \quad k = 0,597 \frac{W}{m^\circ C} ; \quad Pr = 7,02 ; \quad = 993 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m \cdot seg}$$

$$\text{Viscosidad dinámica del agua a } 100^\circ C: \quad = 278 \times 10^{-6} \frac{Kg}{m \cdot seg}$$

$$Re = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,006 m \times 2 \frac{m}{seg}}{1,006 \times 10^{-6} \frac{m^2}{seg}} = 11928,4$$

$$Nu = 2 + [0,4 (11928,4)^{1/2} + 0,06 (11928,4)^{2/3}] (7,02)^{0,4} \sqrt[4]{\frac{993}{278}} = 227$$

$$h_{cF} = \frac{Nu \cdot k}{d} = \frac{227 \times 0,597}{0,006} = 21568 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

V.18.- El muro posterior de una caldera tiene en su cara exterior una temperatura media de 80°C, siendo sus dimensiones:

anchura = 6,5 metros; altura = 3,2 metros

La temperatura media del ambiente es de 26°C.

Determinar

a) El coeficiente de transmisión de calor por convección pared-aire exterior

b) El coeficiente de transmisión de calor por radiación pared-aire exterior $_{pared} = _{aire} = 0,8$

c) El n° de Kcal/hora que se pierden al exterior a través de la pared.

RESOLUCION

a) Coeficiente de transmisión de calor por convección pared-aire exterior

$$T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{80 + 26}{2} = 53^\circ C = 326^\circ K$$

$$= 1,0877 \frac{kg}{m^3} ; \quad = 18,8 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{seg} ; \quad k = 0,02213 \frac{W}{m^\circ C} ; \quad Pr = 0,7025$$

$$Gr = \frac{g}{2} T L^3 = \left| \begin{array}{l} T = 80 - 26 = 54^\circ C \\ L = 3,2 \text{ m (Pared vertical)} \\ = \frac{1}{299^\circ K} \end{array} \right| = \frac{9,8 \times \frac{1}{299} \times 54 \times 3,2^3}{(18,8 \times 10^{-6})^2} = 1,64 \times 10^{11} \text{ (Turb)}$$

$$Gr \cdot Pr = 1,64 \times 10^{11} \times 0,7025 = 1,152 \times 10^{11}$$

$$Nu = 0,021 Ra^{0,4} = 0,021 \times (1,152 \times 10^{11})^{0,4} = 558,21$$

$$h_{cF} = \frac{Nu \cdot k}{L} = \frac{558,21 \times 0,02213}{3,2} = 3,86 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

b) Coeficiente de transmisión de calor por radiación pared-aire exterior

Se puede suponer que la pared emite radiación que es captada por el medio ambiente, y que éste a su vez está en equilibrio térmico con el medio que le rodea; es decir, podría equipararse a un proceso de radiación entre placas paralelas, suponiendo al aire como una placa ficticia situada a la distancia que marque la capa límite térmica, paralela a la pared que irradia. La pared y el aire se comportan como cuerpos grises.

Placas paralelas infinitas de igual área: $A_1 = A_2$; $F_{12} = 1$

$$q_{l(neta)} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 1} A_1 = h_{rF} A_1 (T_{pF} - T_F)$$

$$h_{rF} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 1) (T_{pF} - T_F)} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} (353^4 - 299^4) ^\circ K^4}{(\frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,8} - 1) (353 - 299) ^\circ K} = 5,274 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

$$h_{Total} = h_{cF} + h_{rF} = 3,86 + 5,274 = 9,134 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

Calor evacuado al exterior

$$Q = h_{Total} A_1 (T_{pF} - T_F) = 9,134 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K} \times (6,5 \times 3,2) m^2 \times (80 - 26) ^\circ K = 10.260 W$$

V.19.- Aceite de motores de $= 0,8 \times 10^{-4} m^2/seg$ y $k = 0,14 W/m \cdot ^\circ C$, fluye con una velocidad media $u_F = 0,2$

m/seg por el interior de un tubo de 1,25 cm de diámetro, que está calentado eléctricamente a razón de $q = 2454 \text{ W/m}^2$. Calcular la diferencia de temperatura entre la pared del tubo T_{pF} y la temperatura media del fluido T_F .

RESOLUCION

$$Re = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,0125 \text{ m} \times 0,2 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{0,8 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 31,25 \text{ (Laminar)}$$

Para flujo laminar, el coeficiente de transmisión de calor por convección es:

$$h_{cF} = \frac{48}{11} \frac{k}{d} = \frac{48}{11} \frac{0,14}{0,0125} = 48,87 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$q = h_{cF} (T_{pF} - T_F) \quad T_{pF} - T_F = \frac{q}{h_{cF}} = \frac{2450 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{48,87 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}} = 50,1^\circ\text{C}$$

V.20.- Se bombea aceite de motor con una velocidad media de 0,6 m/seg a través de 80 tubos de diámetro 2,5 cm y longitud 10 m. Las propiedades físicas del aceite son, $\nu = 0,75 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{seg}$ y $\rho = 868 \text{ kg/m}^3$.

Determinar,

- La caída de presión a lo largo de los tubos
- La potencia de bombeo total en CV

RESOLUCION

$$Re = \frac{d u_F}{\nu} = \frac{0,025 \text{ m} \times 0,6 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{0,75 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 200 \text{ (Laminar)}$$

$$\text{Flujo laminar: } \quad = \frac{64}{Re} = \frac{64}{200} = 0,32$$

$$\begin{aligned} \text{Caída de presión a lo largo de los tubos: } p &= \frac{1}{D} \frac{u_F^2}{2} L = \\ &= 0,32 \times \frac{1}{0,025 \text{ m}} \times 868 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times \frac{0,6^2}{2} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2} \times 10 \text{ m} \times \frac{1}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}} = 2040 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

$$\text{Potencia de bombeo: } G \quad p = \left| \begin{array}{l} G = \text{Gasto másico} = n \left(\frac{D^2}{4} \right) u_F = \\ = 80 \times \left(\frac{0,025^2}{4} \right) \times 0,6 = 0,02356 \frac{\text{m}^3}{\text{seg}} \end{array} \right| = 48,068 \frac{\text{Kgm}}{\text{seg}} = \boxed{0,64 \text{ CV}}$$

V.21.- Aire atmosférico a 300°K , a la velocidad $u_F = 5 \text{ m/seg}$ fluye a lo largo de una placa plana de 1 m de longitud y anchura 0,5 m. La fuerza de arrastre total que actúa sobre la placa plana es $F = 0,018 \text{ N}$. Utilizando la analogía de Reynolds-Colburn estimar el coeficiente de convección medio entre la placa y el fluido.

RESOLUCION

$$\text{Por la analogía de Reynolds-Colburn: } \frac{C_m}{2} = (St) (Pr)^{2/3} = \frac{h_{cF}}{c_{pF} u_F} Pr^{2/3}$$

$$\text{Propiedades físicas del aire a } 300^\circ\text{K: } \quad = 1,177 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \quad ; \quad c_{pF} = 1,006 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} \quad ; \quad Pr = 0,71$$

$$F = \frac{1}{2} S C_m u_F^2 = \frac{1}{2} (L \times a) C_m u_F^2 = (L \times a) \frac{h_{cF}}{c_{pF} u_F} Pr^{2/3} u_F^2 = (L \times a) \frac{h_{cF}}{c_{pF}} Pr^{2/3} u_F$$

$$C_m = \frac{2 F}{(L \times a) u_F^2} = \frac{2 \times 18 \times 10^{-3}}{1,177 \times (1 \times 0,5) \times 5^2} = 2,447 \times 10^{-3}$$

$$h_{cF} = \frac{F c_{pF}}{(L \times a) Pr^{2/3} u_F} = \frac{0,018 \times 1,006 \times 10^3}{(1 \times 0,5) \times 5 \times 0,71^{2/3}} = 9,101 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

V.22.- Una placa cuadrada de 0,16 m² está suspendida verticalmente. Su temperatura es de 400°K estando el aire que la rodea a 300°K.

Determinar

a) El espesor (x) de la capa límite en el borde

b) El coeficiente de transmisión de calor

RESOLUCION

a) Espesor (x) de la capa límite en el borde

$$\bar{x}_x = 3,93 \sqrt[4]{\frac{0,952 + Pr}{Gr_x Pr^2}}$$

$$\text{Propiedades físicas del aire a: } \frac{300^\circ K + 400^\circ K}{2} = 350^\circ K$$

$$= 20,75 \times 10^{-6} \frac{m^2}{seg} ; k = 0,03 \frac{W}{m \cdot ^\circ C} ; Pr = 0,697$$

$$Gr_x = Gr_{0,4} = \frac{g}{2} T L^3 = \frac{9,8 \times \frac{1}{273}}{(20,76 \times 10^{-6})^2} \times (400 - 300) \times 0,4^3 = 4,16 \times 10^8$$

$$Gr_x Pr = 4,16 \times 10^8 \times 0,697 = 2,9 \times 10^8 < 10^9$$

$$\bar{x}_{0,4} = 3,93 \sqrt[4]{\frac{0,952 + 0,697}{4,16 \times 10^8 \times 0,697^2}} = 0,03735 ; x_{0,4} = 0,03735 \times 0,4 = 0,0149 m$$

b) Coeficiente de transmisión de calor

$$Nu = 0,68 + \frac{0,67 Ra_x^{1/4}}{\{1 + (\frac{0,492}{Pr})^{9/16}\}^{4/9}} ; 10^{-1} < Ra_x < 10^9$$

$$Nu = 0,68 + \frac{0,67 (2,9 \times 10^8)^{1/4}}{\{1 + (\frac{0,492}{0,697})^{9/16}\}^{4/9}} = 67,64 ; h_{cF} = \frac{Nu \cdot k}{x} = \frac{67,64 \times 0,03}{0,4} = 5,073 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

De otra forma:

$$Nu = 0,59 (Gr_x Pr)^{0,25} = 0,59 \times (2,9 \times 10^8)^{0,25} = 77 \quad h_{cF} = 5,77 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

V.23.- Aire atmosférico a la temperatura de 285°K y velocidad 20 m/seg, fluye sobre una placa plana horizontal de longitud 1,5 m, que está a su vez conformada por un material aislante de longitud igual a la de la capa límite laminar y temperatura la del aire, seguida de un material conductor del calor que se encuentra a la temperatura de 341°K, con una longitud de 0,7 m y a continuación material aislante a 285°K, hasta completar los 1,5 m de longitud.

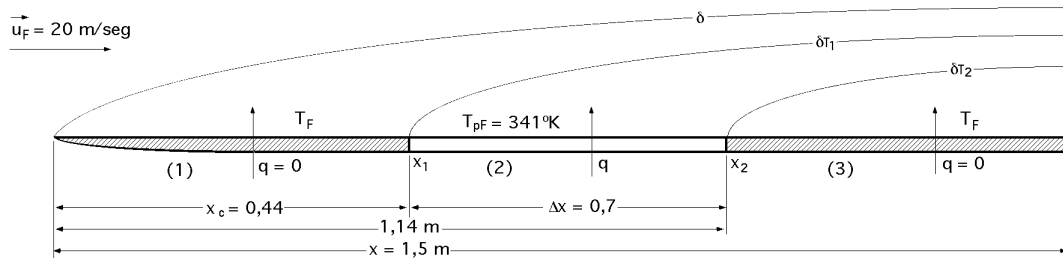
Determinar:

a) La cantidad de calor disipada por la placa compuesta, por unidad de anchura.

b) Calor disipado por la placa si toda ella fuera metálica a 341°K.

Datos del aire a 313°K: $\rho = 1,092 \text{ kg/m}^3$; $c_{pF} = 1014 \text{ J/kg.}^\circ\text{K}$; $k = 0,0265 \text{ W/m.}^\circ\text{K}$;
 $\nu = 24,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$; $\alpha = 17,6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$; $Pr = 0,71$

RESOLUCION



Propiedades del aire: $T = \frac{T_{pF} + T_F}{2} = \frac{341 + 285}{2} = 313^\circ\text{K}$

$$\rho = 1,092 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad \nu = 24,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}; \quad k = 0,0265 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}; \quad Pr = 0,71$$

$$x_c = \frac{Re_c}{u_F} = \frac{17,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \cdot 5 \cdot 10^5}{20 \frac{\text{m}}{\text{seg}}} = 0,44 \text{ m}$$

luego la placa se puede dividir en 3 partes: $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Aislante (1)} & \text{longitud} = 0,44 \text{ m} \\ \text{No aislante (2)} & \text{longitud} = 0,70 \text{ m} \\ \text{Aislante (3)} & \text{longitud} = 0,36 \text{ m} \end{array} \right\}$

a) Cantidad de calor disipada por la placa compuesta, por unidad de anchura. ($x > x_2$) ($x = 1,5 \text{ m}$)

La cantidad de calor disipada lo será entre: $0,44 < x < 0,7$

$$q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \left[\frac{T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} - \frac{T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_2}{x})^{3/4}}} \right] = \left| \begin{array}{l} Re_x = \frac{u_F x}{\nu} = \frac{20 \times 1,5}{17,6 \times 10^{-6}} = 1,7045 \times 10^6 \\ T = T_{pF} - T_F = 341 - 285 = 56^\circ\text{C} \end{array} \right| =$$

$$= 0,323 \times \frac{0,0265}{1,5} \times 0,71^{0,71} \times \sqrt{1,7045 \times 10^6} \times \left[\frac{56}{\sqrt[3]{1 - (\frac{0,44}{1,5})^{3/4}}} - \frac{56}{\sqrt[3]{1 - (\frac{1,14}{1,5})^{3/4}}} \right] = \boxed{-211,05 \text{ W}}$$

observándose que el flujo de calor es (-) para $x_2 > x_1$ en la región (3), lo cual significa que en la sección de pared considerada, ésta reabsorbe parte del calor desarrollado en la región (2).

b) Calor disipado por la placa si toda ella fuera metálica a 341°K.

$$Re_L = \frac{20 \times 1,5}{17,6 \times 10^{-6}} = 1,7045 \times 10^6$$

$$Nu = 0,036 (Re_L)^{0,8} Pr^{0,43} \left(\frac{F}{p_F}\right)^{0,14} = 0,036 \times (1,7045 \times 10^6)^{0,8} \times 0,71^{0,43} \times 1 = 3003,5$$

$$h_{cF} = \frac{Nu_L k}{L} = \frac{3003,5 \times 0,0265}{1,5} = 53,06 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}$$

$$q = h_{cF} A (T_{pF} - T_F) = 53,06 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}} (1,5 \times 1) \text{ m}^2 \times (341 - 285)^\circ\text{K} = 4457,1 \text{ W}$$

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA
ELECTRICA Y ENERGETICA**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

**PROBLEMAS
DE
INGENIERIA TERMICA**

**Pedro Fernández Díez
Carlos Renedo Estébanez**

1.- Una caldera quema 8 Tm/hora de petróleo con una dosificación de 1 Kg de combustible por 20 Kg de aire; los gases salen de la chimenea a una velocidad de 4,5 m/seg; el coeficiente global de pérdidas térmicas debido al paso de los gases a través de la chimenea es de 14 Kcal/h.m².°C. La temperatura del medio exterior es de 20°C. El coeficiente de gasto es, $\alpha = 0,32$

El peso específico de los gases es, $\rho_{\text{gases}} = 1,315 \text{ Kg/m}^3$

El peso específico del aire es, $\rho_{\text{aire}} = 1,288 \text{ Kg/m}^3$

Determinar, en condiciones de gasto máximo,

- La altura H de la chimenea y la depresión existente en la misma si se supone circulación natural
- La sección transversal S de la chimenea
- El volumen de los gases evacuados

RESOLUCION

a) Altura de la chimenea y depresión existente en la misma, si se supone circulación natural

$$v_{\text{salida}} = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha}} \sqrt{2 g H \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{T_{\text{ext}}}}$$

Como se supone gasto máximo $T_{\text{int}} = 2 T_{\text{ext}} = 2 \times (20 + 273) = 586^\circ\text{K}$

$$4,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,32}} \sqrt{2 g H \frac{586 - 293}{293}} = 0,2582 \sqrt{2 g H} \quad \boxed{H = 15,5 \text{ m}}$$

Depresión existente en la chimenea si se supone circulación natural

$$\text{Depresión natural: } p = H (\rho_{\text{gases}} - \rho_{\text{aire}}) = 15,5 \times (1,315 - 1,288) \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 0,4185 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}$$

b) Sección transversal S de la chimenea

$$\frac{G_{\text{comb}} (1 + \frac{G_{\text{aire}}}{G_{\text{comb}}} - \frac{G_{\text{cenizas}}}{G_{\text{comb}}})}{3600} = 94 \alpha S \frac{\sqrt{H (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})}}{T_{\text{int}}}$$

$$\frac{8000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} (1 + 20 - 0)}{3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}}} = 94 \times 0,32 \times S \frac{\sqrt{15,5 (586 - 293)}}{586} \quad S = 13,49 \text{ m}^2 ; d = 4,144 \text{ m}$$

c) Volumen de los gases evacuados

$$V_{\text{humos}} = S \times v = 13,49 \text{ m}^2 \times 4,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 60 \frac{\text{seg}}{\text{min}} = 3.645 \frac{\text{m}^3}{\text{minuto}}$$

2.- Una caldera debe producir 10.000 Kg/hora de vapor saturado a la presión de 20 Kg/cm² y temperatura de saturación $T_s = 211,4^\circ\text{C}$, tomando el agua de alimentación a 15°C , y quemando hulla de potencia calorífica 7800 Kcal/Kg, de composición,

$C = 0,78$; $H_2 = 0,055$; $O_2 = 0,07$; cenizas = 0,07 ; humedad = 0,03

El coeficiente de transmisión de calor para el agua es, $h_{C \text{ agua}} = 5000 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$

El coeficiente de transmisión de calor para los humos es, $h_{C \text{ humos}} = 40 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$

El coeficiente de conductividad del hierro es, $k = 50 \text{ Kcal/m.h.}^\circ\text{C}$

Espesor de la caldera, $e = 10 \text{ mm}$

Coeficiente de exceso de aire, $\alpha = 1,4$

Calor específico medio de los humos, $c_{p(\text{humos})} = 0,27 \text{ Kcal/Kg}^\circ\text{C}$

Temperatura de la sala de calderas, 20°C

Pérdidas por radiación al exterior, $\alpha_r = 0,1$

Determinar

- El peso de los gases producidos por cada Kg de carbón

- b) La temperatura media de los gases de la cámara de combustión
 c) La temperatura de los humos al principio de la superficie de calefacción
 d) La cantidad de combustible quemado por hora
 e) El coeficiente complejo U de transmisión del calor
 f) La temperatura de los gases al final de la superficie de calefacción.
 g) La superficie de calefacción

RESOLUCION

a) Peso de los gases producidos por cada Kg de carbón

$$G_{\text{gases}} = 1 + 4,34 (2,67 \text{ C} + 8 \text{ H} + \text{S} - \text{O}) - G_{\text{cenizas}} = 1 + G_{\text{aire}} - G_{\text{cenizas}} \frac{\text{Kg gases}}{1 \text{ Kg combustible}}$$

$$G_{\text{aire}} = 4,34 (2,67 \text{ C} + 8 \text{ H} + \text{S} - \text{O}) \frac{\text{Kg aire}}{1 \text{ Kg combustible}} =$$

$$= 4,34 \times \{(2,67 \times 0,78) + (8 \times 0,05) + 0 - 0,07\} = 10,47 \frac{\text{Kg aire}}{1 \text{ Kg combustible}}$$

$$G_{\text{gases}} = 1 + (1,4 \times 10,47) - 0,07 = 15,59 \text{ Kg}$$

b) Temperatura media de los gases de la cámara de combustión

$$(1 -) P_{\text{ci}} = (1 + G_{\text{aire}} - G_{\text{cen}}) c_{\text{p(humos)}} (T_{\text{caldera}} - T_{\text{ext}})$$

T_{ext} es la temperatura del medio exterior = 20°C

es el tanto por uno de las pérdidas por radiación al exterior

$$T_{\text{caldera}} = \frac{(1 -) P_{\text{ci}}}{(1 + G_{\text{aire}} - G_{\text{cenizas}}) c_{\text{p(humos)}}} + T_{\text{ext}} = \frac{(1 - 0,1) \times 7800 \frac{\text{Kcal}}{1 \text{ Kg comb}}}{15,59 \frac{\text{Kg gases}}{1 \text{ Kg comb}} \times 0,27 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg gases } ^\circ\text{C}}} + 20^\circ\text{C} = 1687^\circ\text{C}$$

c) Temperatura de los humos al principio de la superficie de calefacción

En esta situación no hay pérdidas por radiación,

$$T_{\text{humos}} = \frac{P_{\text{ci}}}{(1 + G_{\text{aire}} - G_{\text{cenizas}}) c_{\text{p(humos)}}} + T_{\text{ext}} = \frac{7800 \frac{\text{Kcal}}{1 \text{ Kg comb}}}{15,59 \frac{\text{Kg gases}}{1 \text{ Kg comb}} \times 0,27 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg gases } ^\circ\text{C}}} + 20^\circ\text{C} = 1873^\circ\text{C}$$

d) La cantidad de combustible quemado por hora

$$10000 \frac{\text{Kg vapor}}{\text{hora}} (i_{\text{vapor sat}} - i_{\text{agua alimentación}}) = 7800 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg comb}} G_{\text{comb}} = 7800 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg comb}} G_{\text{comb}} (1 -)$$

$$10000 \frac{\text{Kg vapor}}{\text{hora}} (668,5 - 15) \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg vapor}} = 7800 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg comb}} G_{\text{comb}} \times 0,9 \quad G_{\text{comb}} = 931 \frac{\text{Kg comb}}{\text{hora}}$$

e) Coeficiente complejo U de transmisión del calor

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_{\text{C(humos)}}} + \frac{e}{k} + \frac{1}{h_{\text{C(agua)}}}} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{0,01}{50} + \frac{1}{5000}} = 39,37 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{ } ^\circ\text{C}}$$

f) Temperatura de los gases al final de la superficie de calefacción.

$$T_{\text{final}} = T_{\text{sat}} + (T_{\text{inicial}} - T_{\text{sat}}) \exp \left(- \frac{U A}{G_{\text{aire}} c_{\text{p(humos)}} G_{\text{comb}}} \right) =$$

$$= 211,4^\circ\text{C} + (1873 - 211,4)^\circ\text{C} \times \exp \left(- \frac{39,37 \times \text{S}}{15,59 \times 0,27 \times 931} \right) = 211,4 + 1161,6 \exp (-0,01 \text{ S})$$

en la que A es la superficie de calefacción.

g) Superficie A de calefacción

$$Q = 10000 \frac{\text{Kg vapor}}{\text{hora}} (i_{\text{vapor}} - i_{\text{agua alim.}}) = 10000 \frac{\text{Kg vapor}}{\text{hora}} (668,5 - 15) \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg vapor}} = 6.535.000 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$Q = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \left| \begin{array}{l} T_2 = 1873 - 211,4 = 1661,6 \\ T_1 = T_{\text{final}} - 15 \end{array} \right| = 39,37 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}} \text{ S } \frac{1661,6 - T_{\text{final}} + 15}{\ln \frac{1661,6}{T_{\text{final}} - 15}} =$$

$$= 6.535.000 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

esta ecuación junto con la obtenida en el apartado (f) forman un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, cuyas soluciones responden a lo pedido en estos apartados.

Para su resolución se puede iterar, suponiendo diversas temperaturas de salida de los humos.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Suponiendo } T_{\text{final}} = 350^\circ\text{C} \quad A = 200,5 \text{ m}^2 ; \\ \text{comprobando en } T_{\text{final}} = 211,4 + 1161,6 \exp(-0,01 S) = 435,15^\circ\text{C, que no coinciden} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Suponiendo } T_{\text{final}} = 400^\circ\text{C} \quad A = 190,13 \text{ m}^2 ; \\ \text{comprobando en } T_{\text{final}} = 211,4 + 1161,6 \exp(-0,01 S) = 459,6^\circ\text{C, que no coinciden} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Suponiendo } T_{\text{final}} = 500^\circ\text{C} \quad A = 173,72 \text{ m}^2 ; \\ \text{comprobando en } T_{\text{final}} = 211,4 + 1161,6 \exp(-0,01 S) = 503,72^\circ\text{C, que es buena aproximación} \end{array} \right]$$

Luego: $T_{\text{final}} = 500^\circ\text{C}$ $A = 173,72 \text{ m}^2$

3.- En una instalación térmica se han de quemar 1,8 Tm/hora de un combustible líquido, de composición química, $C_{12}H_{23}$, en exceso de aire, $\lambda = 1,5$.

Determinar

- La potencia calorífica superior e inferior de este combustible
- El aire necesario para la combustión, teniendo en cuenta el exceso de aire.
- La sección transversal y la altura de la chimenea que ha de evacuar los gases de la combustión, siendo la relación, diámetro/altura = 1/20, en condiciones de tiro máximo, sabiendo que la temperatura y presión de la atmósfera son 15°C , y 760 mm de Hg respectivamente. El coeficiente de velocidad es, $\lambda = 0,25$.

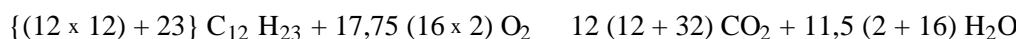
RESOLUCION

a) Potencia calorífica superior e inferior de este combustible

$$\text{Potencia calorífica superior del combustible} = \left| \begin{array}{l} 0,862 \times 8.000 = 6.896 \\ 0,138 \times 32.000 = 4.416 \end{array} \right| = 11.312 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$

$$\text{Potencia calorífica inferior del combustible, } P_{\text{ci}} = 11.312 - 850 = 10.462 \text{ Kcal/Kg}$$

b) Aire necesario para la combustión, teniendo en cuenta el exceso de aire



$$\text{Aire: } 21\% O_2 ; 79\% N_2 ; \text{ Nitrogeno} = \frac{79 \times 568}{21} = 2136,7 \text{ (unidades en peso de } N_2)$$

$$\text{Nº de Kg de } O_2 \text{ por 1 Kg de combustible: } \left\{ \begin{array}{l} 167 \text{ --- } 568 \\ 1 \text{ ----- } G_{O_2} \end{array} \right\} \quad G_{O_2} = 3,4011 \frac{\text{Kg } O_2}{\text{Kg combustible}}$$

$$\text{luego: } \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Kg aire} \text{-----} 0,21 \text{ Kg O}_2 \\ \text{G}_{\text{aire}} \text{-----} 3,4011 \end{array} \right\} \quad \text{G}_{\text{aire}} = 16,196 \frac{\text{Kg aire}}{\text{Kg combustible}}$$

Como hay un exceso de aire (1,5) serán necesarios, $16,196 \times 1,5 = 24,3$ Kg de aire por 1 Kg de combustible.

c) La sección transversal y la altura de la chimenea que ha de evacuar los gases de la combustión, siendo la relación, diámetro/altura = 1/20, en condiciones de tiro máximo, sabiendo que la temperatura y presión de la atmósfera son 15°C, y 760 mm de Hg respectivamente.

El coeficiente de velocidad es, = 0,25.

$$\frac{G_{\text{comb}} (1 + \frac{G_{\text{aire}} - G_{\text{cenizas}}}{3600})}{3600} = 94 \quad S \frac{\sqrt{H (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})}}{T_{\text{int}}}$$

$$T_{\text{int}} = 2 T_{\text{ext}} = 2 \times (273 + 15) = 576^\circ\text{K} \quad ; \quad T_{\text{ext}} = 273 + 15 = 288^\circ\text{K}$$

$$\frac{1800 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} (1 + 24,3 - 0)}{3600} = 94 \times 0,25 \quad S \frac{\sqrt{H (576 - 288)}}{576} \quad ; \quad 12,65 = 0,6924 S \sqrt{H} \quad ; \quad S \sqrt{H} = 18,27$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D^2}{4} H = 18,27 \\ \frac{D}{H} = \frac{1}{20} \quad ; \quad H = 20 D \end{array} \right\} \quad \frac{D^2}{4} \sqrt{20 D} = 18,27 \quad \boxed{D = 1,934 \text{ m}} \quad ; \quad \boxed{H = 20 D = 38,7 \text{ m}}$$

4.- Un hidrocarburo líquido tiene la siguiente composición química en masa, C= 84,7% ; H= 15,5%, y se le hace arder, inyectándole en un hogar de una caldera, con un 50% de exceso de aire.

Determinar

a) La composición química de los humos producidos

b) La potencia calorífica superior e inferior de este combustible

c) ¿Cómo variará el poder calorífico superior, si la humedad del combustible aumenta hasta el 12%?

d) Si los humos producidos tienen una temperatura de 280°C cuando se les introduce en la chimenea, y se sabe que el coeficiente de gasto de la misma es, = 0,2, ¿cuál será la relación que deberá existir entre la sección transversal S de la chimenea, y su altura H, sabiendo que la temperatura del medio ambiente es de 20°C?

RESOLUCION

a) Composición química de los humos producido

100 gramos de hidrocarburo se componen de,

$$\frac{84,7}{12} = 7,05 \text{ moles de C} \quad ; \quad \frac{15,3}{2} = 7,65 \text{ moles de H}_2$$

$$\text{Ecuaciones de la combustión: } \left\{ \begin{array}{l} \text{C} + \text{O}_2 \quad \text{CO}_2 \\ \text{H}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2 \quad \text{H}_2\text{O} \end{array} \right\}$$

La combustión teórica de 100 gramos de hidrocarburo necesita,

Para el C: 7,05 moles de O₂, y produce 7,05 moles de CO₂

Para el H₂: $\frac{7,65}{2}$ moles de O₂, y produce 7,65 moles de H₂O

Es necesario utilizar. $7,05 + 3,825 = 10,875$ moles de O₂, lo cual supone que en los humos habrá un contenido de N₂ dado por,

$$10,875 \times \frac{79}{21} = 40,91 \text{ moles de N}_2$$

Como la combustión se realiza con un 50% de exceso de aire, resulta que,

$$\text{Aire} \left\{ \begin{array}{l} \text{Oxígeno: } 10,875 \times 0,5 = 5,437 \text{ moles que pasan a los humos} \\ \text{Nitrógeno: } 40,91 \times 0,5 = 20,455 \text{ que habrá que sumar a los } 40,91 \quad 61,36 \text{ moles} \end{array} \right\}$$

Luego los **humos húmedos** de la combustión real de 100 gramos de hidrocarburo serán,

$$\text{N}^{\circ} \text{ de moles: } \text{CO}_2 \quad 7,05 \text{ moles} \quad ; \quad \text{Composición en volumen de los humos: } \text{CO}_2 = \frac{7,05}{81,505} \times 100 = 8,65\%$$

$$\text{O}_2 \quad (10,875 \times 0,5) = 5,44 \text{ moles} \quad ; \quad \text{Composición en volumen de los humos: } \text{O}_2 = \frac{5,44}{81,505} \times 100 = 6,67\%$$

$$\text{H}_2\text{O} \quad 7,65 \text{ moles} \quad ; \quad \text{Composición en volumen de los humos: } \text{H}_2\text{O} = \frac{7,65}{81,505} \times 100 = 9,38\%$$

$$\text{N}_2 \quad 61,365 \text{ moles} \quad ; \quad \text{Composición en volumen de los humos: } \text{N}_2 = \frac{61,35}{81,505} \times 100 = 75,3\%$$

De otra forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_x}{H_y} = \frac{84,7}{15,3} \\ C_x + H_y = 100 \end{array} \right\} \quad 12x + y = 100 \quad ; \quad x = 7,058 \quad ; \quad y = 15,3$$

Fórmula aproximada, $(C_{7,05} H_{15,3})_n$ ó $C_{12} H_{26}$

$$\text{CO}_2 = 1,87 \text{ C} = 1,583 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg comb}} \quad ; \quad \% \text{ CO}_2 = \frac{1,583}{18,276} \times 100 = 8,65\%$$

$$\text{H}_2\text{O} = 11,2 \text{ H} = 1,713 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg comb}} \quad ; \quad \% \text{ H}_2\text{O} = \frac{1,713}{18,276} \times 100 = 9,38\%$$

$$\text{O}_{\text{mínimo}} = 1,87 \text{ C} + 5,6 \text{ H} = 2,44 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg comb}}$$

$$\text{O}_{\text{en exceso}} = (- 1) \text{ O}_{\text{mínimo}} = 0,5 \times 2,44 = 1,22 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg comb}} \quad ; \quad \% \text{ O}_2 = \frac{1,22}{18,276} \times 100 = 6,67\%$$

$$\text{N}_2 = \frac{79}{21} \text{ O}_2 = 13,76 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg comb}} \quad ; \quad \% \text{ N}_2 = \frac{13,76}{18,276} \times 100 = 75,3\%$$

$$\text{Humos} = 18,276 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg comb}}$$

b) Potencia calorífica superior e inferior de este combustible

$$P_{\text{c sup}} = 8080 \text{ C} + 34450 \text{ H} + 2500 \text{ S}$$

Como la fórmula aproximada es, $C_{12} H_{26}$, tendremos, para 1 mol lo siguiente,

$$\text{C} = 12 \times 12 = 144 \text{ gramos/mol} \quad ; \quad \text{H}_2 = 26 \text{ gramos/mol} \quad ; \quad \text{Total, } 170 \text{ gramos/mol}$$

$$\text{por lo que: } C_x = \frac{144}{170} = 0,847 \quad ; \quad H_{2x} = \frac{170 - 144}{170} = 0,153$$

$$P_{\text{c sup}} = (8.080 \times 0,847) + (34.450 \times 0,153) = 12.115 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$

$$P_{\text{c inf}} = P_{\text{c sup}} - \{(9 \times H_{2x}) + w\} \times 597 = 12.115 - (9 \times 0,153 + 0) \times 597 = 12.115 - 822 = 11.293 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$

c) Variación del poder calorífico superior, si la humedad del combustible aumenta hasta el 12%

Composición química con 12% de humedad,

$$\left(\begin{array}{l} C = 84,7\% \times 0,88 = 74,536\% \\ H_2 = 15,37\% \times 0,88 = 13,464\% \\ Humedad = 12\% \\ Total = 100\% \end{array} \right)$$

$$\text{Potencia calorífica superior: } 12.115 \times \frac{1 - 0,12}{1} = 10.661 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$

$$\text{Potencia calorífica inferior: } 11.293 \times 0,88 = 9.937 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$

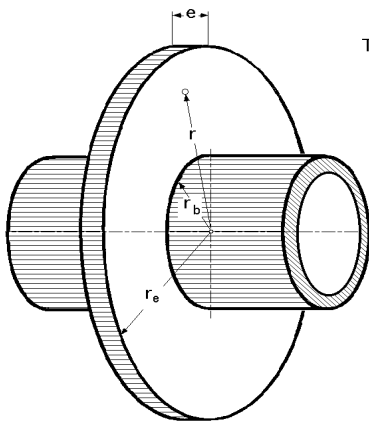
d) Si los humos producidos tienen una temperatura de 280°C cuando se les introduce en la chimenea, y se sabe que el coeficiente de gasto de la misma es, $\alpha = 0,2$, ¿cuál será la relación que deberá existir entre la sección transversal S de la chimenea, y su altura H , sabiendo que la temperatura del medio ambiente es de 20°C?

$$G_{\text{aire}} = 4,3 \{ (2,67 \times 0,847) + (8 \times 0,153) \} \times 1,5 = 22,69 \frac{\text{Kg de aire}}{\text{Kg combustible}}$$

$$G_{\text{comb}} \frac{(1 + G_{\text{aire}} - G_{\text{cenizas}})}{3600} = 944 S \frac{\sqrt{H (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})}}{T_{\text{int}}}$$

$$G_{\text{comb}} \frac{(1 + 22,69 - 0)}{3600} = 94 \times 0,2 \times S \frac{\sqrt{H (280 - 20)}}{553} ; \quad \boxed{0,012 G_{\text{comb}} = S \sqrt{H}}$$

siendo G_{comb} el nº de Kg/hora de combustible a quemar.



IV.1.- Al realizar un estudio de calefacción se llegó a la conclusión de que era necesario utilizar aletas anulares de radio en la base $r_b = 30 \text{ cm}$ y temperatura en la base $T_b = 120^\circ\text{C}$, para mantener un fluido exterior a 20°C , de forma que cada aleta disipe $225,2 \text{ Kcal/hora}$, con un rendimiento de aleta del 40% . El material de las aletas tiene una conductividad térmica, $k = 50 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$. Determinar el radio exterior de la aleta y su espesor, sabiendo que el coeficiente de película es $h_{cF} = 5,6 \text{ Kcal/h.m}^2\text{C}$

RESOLUCION

Flujo de calor disipado por la aleta anular

$$Q = (1 - \mu_{an}) k e \frac{2}{r_b} G_2\left(\frac{r_b}{r_e}, \mu_{an}\right) = \left| \begin{array}{l} \mu_{an} = \frac{r_b}{r_e} \\ \mu_{an} = \sqrt{\frac{2 r_e^2 h_{cF}}{k e}} \\ r_b = T_b - T_F = 120 - 20 = 100^\circ\text{C} \end{array} \right| =$$

$$= \left(1 - \frac{r_b^2}{r_e^2}\right) k e \frac{2}{r_b} \frac{r_e^2 h_{cF}}{k e} G_2\left(\frac{r_b}{r_e}, \mu_{an}\right) = (r_e^2 - r_b^2) \frac{2 h_{cF}}{r_b} G_2\left(\frac{r_b}{r_e}, \mu_{an}\right)$$

Despejando r_e ,

$$r_e^2 = r_b^2 + \frac{Q}{2 \frac{h_{cF}}{r_b} G_2\left(\frac{r_b}{r_e}, \mu_{an}\right)} = 0,3^2 + \frac{225,4 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}}{2 \times 100 \times 5,6 \times 0,4} = 0,25 \quad ; \quad \boxed{r_e = 0,5 \text{ m}}$$

A partir de la ecuación: $\mu_{an} = \sqrt{\frac{2 r_e^2 h_{cF}}{k e}}$, se obtiene el espesor de la aleta:

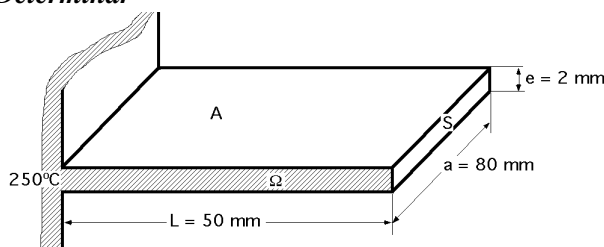
$$e = \frac{2 r_e^2 h_{cF}}{k \mu_{an}^2} = \frac{2 \times 0,5^2 \times 5,6}{50 \times 0,6^2} = \frac{0,056}{0,36} = 0,156 \text{ m}$$

Como: $\mu = G_2\left(\frac{r_b}{r_e}, \mu_{an}\right)$, es el rendimiento de la aleta anular, mediante la gráfica de G_2 se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{an} = \frac{r_b}{r_e} = \frac{0,30}{0,50} = 0,6 \\ G_2\left(\frac{r_b}{r_e}, \mu_{an}\right) = 0,4 \text{ (dato del enunciado)} \end{array} \right\} \quad \mu_{an} = 5,4 \quad e = \frac{0,056}{5,4^2} = 0,00192 \text{ m}$$

IV.2.- Una varilla de aluminio de sección transversal rectangular de 2 mm de espesor y 80 mm de anchura, (aleta de la culata de un motor, extremo libre aislado), tiene en su base de contacto con la culata una temperatura de 250°C .

Determinar



a) La temperatura en su extremo libre situado a 5 cm de la base, si se supone que la temperatura T_F del medio ambiente es de 15°C .

b) La cantidad de calor disipada al exterior y la eficiencia de la aleta

Otros datos,

Coeficiente k de transmisión de calor por conducción = $200 \text{ Kcal/m h}^\circ\text{C}$

Coeficiente h_c de transmisión de calor por convección = $40 \text{ Kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

RESOLUCION

a) Temperatura en su extremo libre situado a 5 cm de la base, si se supone que la temperatura T_F del medio ambiente es de 15°C .

Protuberancia paralelepípedica con su extremo libre térmicamente aislado $= 1$

$$T(1) = T_L = T_F + \frac{T_b - T_F}{\text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}} = \left| \text{Bi} = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \frac{40 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}} \times \{2(80 + 2) \times 10^{-3}\} \text{m} \times 0,05^2 \text{m}^2}{200 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}} \times (2 \times 80) \times 10^{-6} \text{m}} = 0,5125 \right| =$$

$$= 15 + \frac{250 - 15}{\text{Ch} \sqrt{0,5125}} = 200^\circ\text{C}$$

b) Calor disipado al exterior

$$Q = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{\text{Bi}} \text{Th} \sqrt{\text{Bi}} =$$

$$= 200 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}} \times (2 \times 80) \times 10^{-6} \text{m}^2 \times \frac{(250 - 15)^\circ\text{C}}{0,05 \text{m}} \times \sqrt{0,5125} \text{Th} \sqrt{0,5125} = 66,14 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

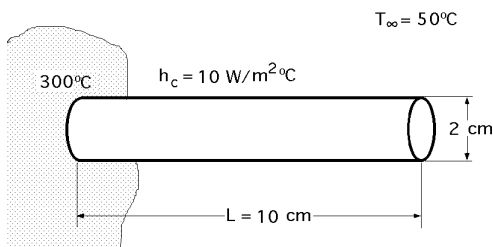
Eficiencia de la aleta

$$\mu = \frac{\text{Th} \sqrt{\text{Bi}}}{\sqrt{\text{Bi}}} = \frac{\text{Th} \sqrt{0,5125}}{\sqrt{0,5125}} = 0,858 \text{ (muy elevada)}$$

IV.3.- Una protuberancia de acero inoxidable $k=20 \text{ W/m.K}$ tiene una sección recta circular con un diámetro de 2 cm y una longitud de 10 cm. La protuberancia está unida a una pared que tiene una temperatura de 300°C . El fluido que la rodea tiene una temperatura ambiente de 50°C y el coeficiente de película es de $10 \text{ W/m}^2.\text{°C}$.

El extremo de la protuberancia está aislado térmicamente.

Determinar



a) El calor disipado por unidad de tiempo desde la protuberancia

b) La temperatura en el extremo de la protuberancia

c) La transferencia térmica por unidad de tiempo desde el área de la pared cubierta por la protuberancia si ésta no se utilizase

d) La transferencia de calor por unidad de tiempo desde una protuberancia con la misma geometría si el acero inoxidable de ésta se sustituyese por un material ficticio de conductividad térmica infinita.

RESOLUCION

a) Calor disipado por unidad de tiempo desde la protuberancia con su extremo libre térmicamente aislado

$$Q = \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \sqrt{\text{Bi}} \text{Th} \sqrt{\text{Bi}} =$$

$$= \left| \begin{aligned} S &= \frac{d^2}{4} = \frac{0,02^2}{4} = 1 \times 10^{-4} \text{m}^2 \\ \text{Bi} &= \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \frac{10 \times (0,02) \times 0,1^2}{20 \times 1 \times 10^{-4}} = 1 \end{aligned} \right| = \frac{20 \times 1 \times 10^{-4}}{0,1} \times (300 - 50) \times \sqrt{1} \times \text{Th} \sqrt{1} = 11,96 \text{ W}$$

b) Temperatura en el extremo de la protuberancia $= 1$

$$\left(\right) = \frac{\text{Ch}\{\sqrt{\text{Bi}} (1 -)\}}{\text{Ch}\sqrt{\text{Bi}}}$$

$$(1) = \frac{\text{Ch}\{\sqrt{1} (1 - 1)\}}{\text{Ch}\sqrt{1}} = \frac{1}{1,543} = 0,648 = \frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = \frac{T_L - 50}{300 - 50} \quad \boxed{T_L = 212^\circ\text{C}}$$

c) Transferencia térmica por unidad de tiempo desde el área de la pared cubierta por la protuberancia si ésta no se utilizase

El coeficiente de transmisión de calor en la superficie de la pared, cuando la protuberancia está en su sitio, le podemos suponer igual al de la protuberancia, por lo que,

$$Q = h_{cF} S (T_b - T_F) = h_{cF} R^2 (T_b - T_F) = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times (\times 10^{-4} \text{ m}^2) \times (300 - 50)^\circ\text{C} = 0,785 \text{ W}$$

La presencia de la protuberancia aumenta la disipación de calor procedente del área de la superficie cubierta por la misma, siendo la mejora,

$$\text{Mejora} = \frac{11,96 - 0,785}{0,785} \times 100 = 1423,5 \%$$

d) Transferencia de calor por unidad de tiempo desde una protuberancia con la misma geometría, si el acero inoxidable de ésta se sustituye por un material ficticio de conductividad térmica infinita.

Para un material con $k = \infty$, $\text{Bi} = 0$, por lo que la protuberancia sería isoterma a T_b .

La transferencia de calor por unidad de longitud desde la protuberancia ideal es,

$$\begin{aligned} Q_{q_{\text{ideal}}} &= h_{cF} A (T_b - T_F) = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times (\text{ d L}) \text{ m}^2 (300 - 50)^\circ\text{C} = \\ &= 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times (\times 0,02 \times 0,1) \text{ m}^2 \times (300 - 50)^\circ\text{C} = 15,71 \text{ W} \end{aligned}$$

que es la cantidad de calos máxima posible que se podría disipar en la unidad de tiempo por la protuberancia ideal.

$$\text{La protuberancia de acero inoxidable disipa: } \frac{15,71 - 11,96}{15,71} \times 100 = 24\%$$

que es la cuarta parte de lo que disipa la protuberancia ideal

$$\text{La eficiencia de la protuberancia es: } \mu = \frac{q_{\text{real}}}{q_{\text{ideal}}} = \frac{11,96 \times 100}{15,71} = 76,13\%$$

IV.4.- Se desea construir un radiador de tubo con aletas y para ello se utiliza una tubería de cobre puro de diámetro exterior 14 mm y diámetro interior 10 mm con aletas de aluminio puro de espesor 0,2 mm y radio exterior 28 mm. Las aletas están separadas entre planos medios una distancia de 5 mm. El radiador tiene que disipar una carga térmica de 750 Kcal/hora cuando trabaja con agua a presión a la temperatura de 120°C, encontrándose el aire del medio ambiente a 20°C.

El valor del coeficiente de película h_{ce} (aleta-aire) es 25 Kcal/h.m²·°C, mientras que el valor del coeficiente de película h_{ci} para el fluido que circula por el interior del tubo es de 1000 Kcal/h.m²·°C.

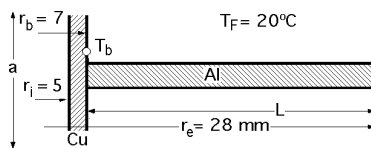
Se sabe que la conductividad térmica del cobre es $k_{\text{cobre}}=326$ Kcal/h.m·°C y la del aluminio $k_{\text{aluminio}}=197$ Kcal/h.m·°C.

Determinar

a) La temperatura en la base de la aleta

b) El n° de aletas necesario y la longitud del radiador necesaria para conseguir la mencionada disipación de calor

RESOLUCION



$$Q = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{A_i h_{ci}}} = \frac{T_{pi} - T_b}{\frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k_{Cu} a}} = \frac{T_b - T_F}{R_{aletas} + R_{tubo}} = \frac{T_b - T_F}{h_{ce} (\mu A_{aletas} + A_{tubo})}$$

a) Temperatura en la base de la aleta

Llamaremos N al n° total de aletas, y "a" a la longitud total del tubo + aletas

Area de intercambio térmico (aletas + tubo) = Area aletas + Area tubo sin aletas :

$$= 2 (r_e^2 - r_b^2) N + 2 r_b (a - N e)$$

Calor disipado el exterior:

$$Q = (\mu A_{aletas} + A_{tubo}) h_{ce} (T_b - T_F) = [2 (r_e^2 - r_b^2) N + 2 r_b (a - N e)] h_{ce} (T_b - T_F)$$

A su vez entre el fluido interior a 120°C y la base de la aleta se tiene,

$$Q = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{A_i h_{ci}}} = \frac{T_{pi} - T_b}{\frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k_{Cu} a}} = \frac{T_i - T_b}{\frac{1}{A_i h_{ci}} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k_{Cu} a}}$$

$$T_i - T_b = \frac{Q}{A_i h_{ci}} + Q \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k_{Cu} a} = \frac{Q}{2 a r_i h_{ci}} + Q \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k_{Cu} a} =$$

$$= \frac{Q}{2 a} \left(\frac{1}{r_i h_{ci}} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{k_{Cu}} \right) = \frac{750}{2 a} \left(\frac{1}{0,005 \times 1000} + \frac{\ln \frac{7}{5}}{326} \right) = \frac{24}{a} = 120 - T_b$$

$$Q_{aletas} = 2 (r_e^2 - r_b^2) N h_{ce} \quad a_n = 2 (r_e^2 - r_b^2) N h_{cF} G_2(a_n) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} a_n = \frac{r_b}{r_e} = \frac{7}{28} = 0,25 \\ a_n = \sqrt{\frac{2 r_e^2 h_{cF}}{k_{Al} e}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,028^2 \times 25}{197 \times 0,2 \times 10^{-3}}} = 0,9974 \end{array} \right] \quad G_2(a_n) = 0,74$$

$$= \left[\begin{array}{l} T_b = 120 - \frac{24}{a} ; \quad b = T_b - T_F = 120 - \frac{24}{a} - 20 = 100 - \frac{24}{a} \\ N \times 0,005 = a ; \quad N = 200 a \end{array} \right] =$$

$$= 2 (0,028^2 - 0,007^2) (100 - \frac{24}{a}) \times 200 a \times 25 \times 0,74 = 1708,1 a - 410,1$$

$$Q_{tubo \text{ sin aletas}} = 2 r_b (a - N e) h_{ce} (T_b - T_F) = 2 r_b (a - 200 a e) h_{ce} (T_b - T_F) =$$

$$= 2 \times 0,007 \times a \{1 - (200 \times 0,0002)\} \times 25 \times (100 - \frac{24}{a}) = 1,0555 a (100 - \frac{24}{a})$$

Longitud "a" del radiador,

$$Q = 750 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} = \{1708,1 a - 410,1\} + 1,0555 a (100 - \frac{24}{a}) = 1834,25 a - 435,4$$

$$a = 0,646 \text{ m}$$

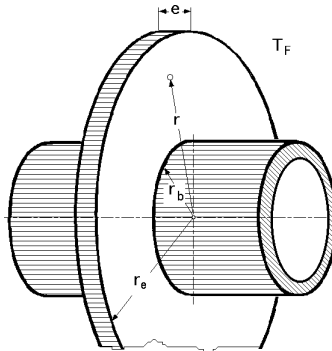
$$T_b = 120 - \frac{24}{0,646} = 82,84^\circ\text{C}$$

$$N = 200 \times 0,646 = 129 \text{ aletas}$$

IV.5.- Una aleta anular de perfil rectangular, de acero $k = 44 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$ y dimensiones $e = 0,5 \text{ mm}$ y $L = 15 \text{ mm}$, se coloca en un tubo de 20 mm de diámetro exterior. La temperatura en la base de la aleta es $T_b = 90^\circ\text{C}$., la temperatura del fluido es $T_F = 20^\circ\text{C}$ y el coeficiente de película $h_{cF} = 100 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$

Determinar

- La temperatura en el extremo de la aleta
- La eficacia de la aleta
- El calor transmitido al fluido desde la aleta
- El calor transmitido al fluido desde la aleta por unidad de superficie



RESOLUCION

a) Temperatura en el extremo de la aleta
$$\theta_e = \frac{K_1(n r_e) I_0(n r_e) + K_0(n r_e) I_1(n r_e)}{K_1(n r_e) I_0(n r_b) + K_0(n r_b) I_1(n r_e)} =$$

$$n = \sqrt{\frac{2 h_{cF}}{k e}} = \sqrt{\frac{2 \times 100}{44 \times 0,5 \times 10^{-3}}} = 95,34$$

$$r_e = (10 + 15) \times 10^{-3} = 25 \times 10^{-3} \text{ m} ; \left\{ \begin{array}{l} n r_e = 95,34 \times 25 \times 10^{-3} = 2,3836 \\ n r_b = 95,34 \times 10 \times 10^{-3} = 0,9534 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{K_1(2,3836) I_0(2,3836) + K_0(2,3836) I_1(2,3836)}{K_1(2,3836) I_0(0,9534) + K_0(0,9534) I_1(2,3836)} = \left\{ \begin{array}{l} K_1(2,3836) = 0,05456 \frac{1}{2} = 0,08570 \\ K_0(2,3836) = 0,04569 \frac{1}{2} = 0,07177 \\ K_0(0,9534) = 0,4545 \\ I_0(0,9534) = 1,2429 \\ I_0(2,3836) = 3,0148 \\ I_1(2,3836) = 2,2666 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(0,0857 \times 3,0148) + (2,2666 \times 0,07177)}{(0,0857 \times 1,2429) + (2,2666 \times 0,4545)} = 0,3704 = \frac{T_{\text{ext}} - 20}{90 - 20} ; \quad T_{\text{ext}} = 45,9^\circ\text{C}$$

Gráficamente

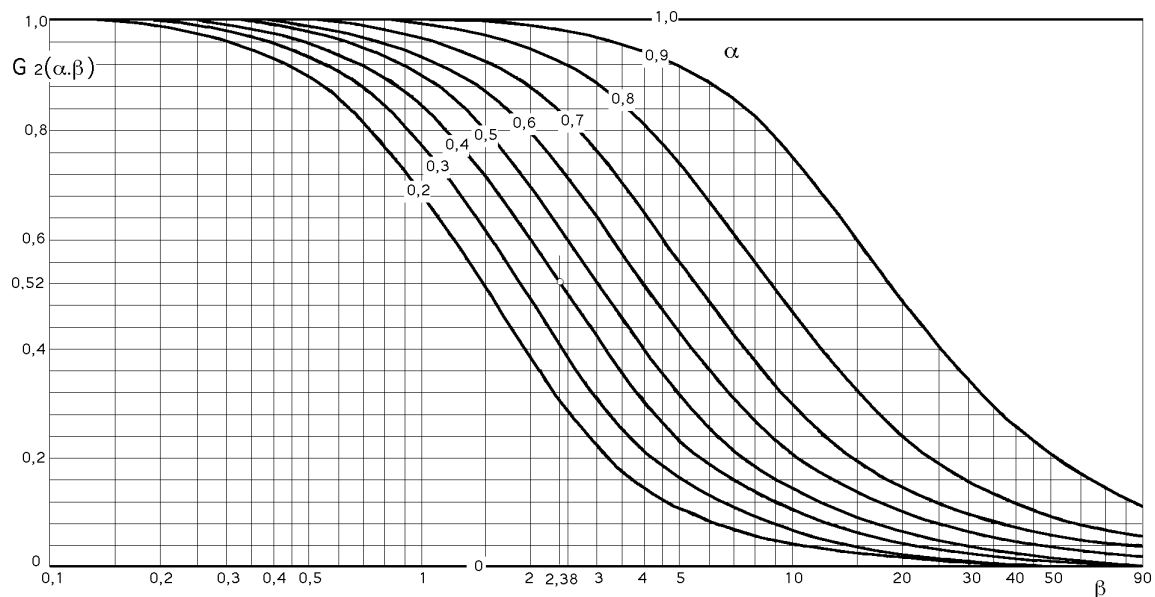
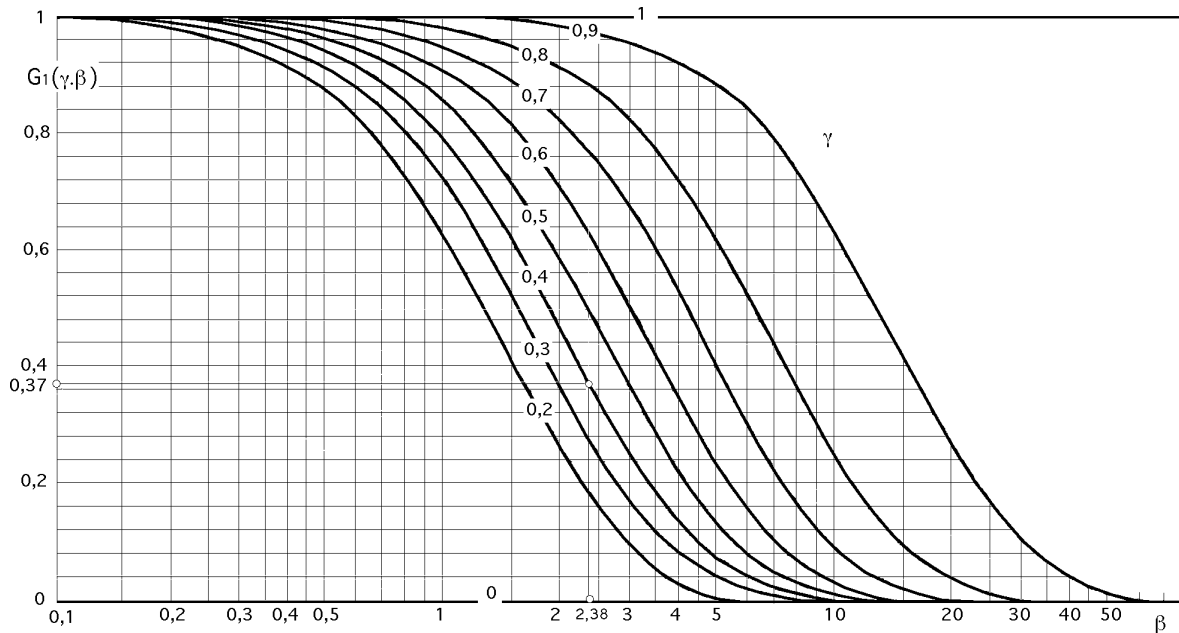
$$G_1(\quad) = \frac{K_1(\quad) I_0(\quad) + K_0(\quad) I_1(\quad)}{K_1(\quad) I_0(\quad) + K_0(\quad) I_1(\quad)} = \frac{e}{b} = \frac{T_e - T_F}{T_b - T_F}$$

Para $\left\{ \begin{array}{l} n r_e = 2,3836 \\ n r_b = 0,9534 \end{array} \right\}$ se tiene: $G_1(\quad) = 0,37$; $T_e = 20 + (0,37 \times 70) = 45,9^\circ\text{C}$

b) Eficiencia de la aleta

$$\mu = \frac{k e \frac{2}{a_n} G_2(\quad) + K_0(\quad) I_1(\quad)}{k e \frac{2}{a_n}} = G_2(\quad) = \left\{ \begin{array}{l} n r_e = 2,3836 \\ n r_b = 0,9534 \end{array} \right\} = 0,51$$

De otra forma :
$$\left\{ \begin{array}{l} L \sqrt{\frac{2 h_{cF}}{k e}} = 0,015 \sqrt{\frac{2 \times 100}{44 \times 0,5 \times 10^{-3}}} = 0,015 \times 95,34 = 1,43 \\ \frac{r_e}{r_b} = \frac{25}{10} = 2,5 \end{array} \right\} \quad \mu = 0,52$$



c) El calor transmitido al fluido desde la aleta

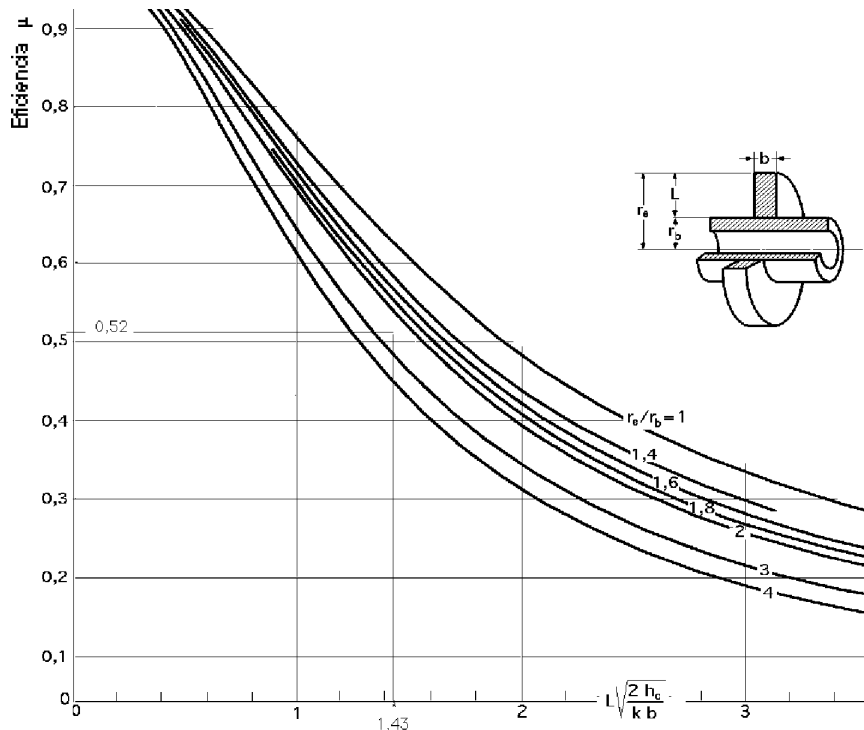
$$Q = (1 - \frac{2}{\alpha_n}) k e_b \frac{2}{\alpha_n} G_2(\alpha_n, \beta_n) = (1 - 0,4^2) \times 44 \times 0,5 \times 10^{-3} (90 - 20) \times 2,3836^2 \times 0,52 = 12 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Comprobación,

$$Q = \mu Q_i = 0,52 h_{cF} 2 A (T_b - T_F) = 0,52 \times 100 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}} \times 2 (25^2 - 10^2) \times 10^{-6} \text{ m}^2 \times 70^\circ\text{C} = 12 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

d) El calor transmitido al fluido desde la aleta por unidad de superficie, es el flujo térmico, de valor,

$$\frac{Q}{A} = \frac{Q}{2 (25^2 - 10^2) \times 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{12 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}}{0,003298 \text{ m}^2} = 3.568 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora m}^2}$$



IV.6.- Sobre un tubo de una determinada aleación, de 30 mm de diámetro exterior, se desea colocar aletas longitudinales de perfil triangular. La base de estas aletas tiene un espesor de 1,5 mm siendo el espacio vacío entre las bases de dos aletas consecutivas de aproximadamente 4 mm. El coeficiente de película para el tubo y las aletas es de 25 W/m²°C y la conductividad térmica del material de 75 W/m°C.

Determinar

- La altura óptima de la aleta**
- El calor disipado al exterior por metro de longitud de tubería (en Kcal) si la temperatura exterior del tubo es de 100°C y la del aire de 25°C, en condiciones de diseño óptimo de la aleta. Mejora obtenida.**
- La temperatura en el centro de gravedad de la aleta y en su vértice.**

RESOLUCION

a) Altura óptima de la aleta (Se entiende que es la altura del perfil triangular)

$$b_{\text{ópt}} = 1,6718 \left(\frac{2 h_{cF}}{k} \right)^{1/3}$$

$$L_{\text{ópt}} = 1,196 \left(\frac{k}{h_{cF}} \right)^{1/3} = \frac{2}{b_{\text{óp}}} = 1,196 \left(\frac{b L_{\text{ópt}} k}{2 h_{cF}} \right)^{1/3} = 1,196 \left(\frac{b k}{2 h_{cF}} \right)^{1/3} L_{\text{ópt}}^{1/3}$$

$$L_{\text{ópt}}^{2/3} = 1,196 \left(\frac{b k}{2 h_{cF}} \right)^{1/3} = 1,196 \left(\frac{0,0015 \times 75}{2 \times 25} \right)^{1/3} = 0,1567 \quad ; \quad L_{\text{ópt}} = 0,062 \text{ m}$$

b) Calor disipado al exterior por metro de longitud de tubería (en Kcal) si la temperatura exterior del tubo es de 100°C y la del aire de 25°C, en condiciones de diseño óptimo de la aleta. Mejora obtenida.

$$Q_{\text{aleta}} = -b k b \frac{t}{2L} G_4(t) = \left| \begin{array}{l} b = 100 - 25 = 75^\circ\text{C} \\ t = \sqrt{\frac{8 f h_{cF} L^2}{k b}} = |f = 1| = \sqrt{\frac{8 \times 25 \times 0,062^2}{75 \times 0,0015}} = 2,614 \\ G_4(t) = G_4(2,614) = 0,77 \end{array} \right| =$$

$$= -75 \times 75 \times 0,0015 \times \frac{2,614}{2 \times 0,062} \times 0,77 = -136,95 \frac{\text{W}}{\text{m}} \text{ (calor cedido)}$$

Nº de aletas: $d_b = (1,5 + 4) N$; $N = \frac{30}{5,5} = 17,13$ 17 aletas

$$Q_{N \text{ aletas}} = 17 \times 136,95 \frac{\text{W}}{\text{metro}} = 2328,15 \frac{\text{W}}{\text{metro}}$$

Calor disipado por el tubo limpio (sin aletas):

$$Q_{\text{tubo limpio}} = 2 r_b a h_{cF} (T_b - T_F) = 2 \times \frac{0,03}{2} \times 1 \times 25 \times 75 = 176,71 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

Fracción de calor disipado por el tubo, cuando lleva aletas,

$$Q_{\text{tubo}} = a h_{cF} (T_b - T_F) (d_b - N b) = 1 \times 25 \times 75 \times \{(1 \times 0,03) - (17 \times 0,0015)\} = 128,9 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$\text{Calor total disipado al exterior } Q = 128,9 + 2328,15 = 2457 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$\text{Mejora} = \frac{2457 - 176,7}{176,7} \times 100 = 1290\%$$

c) La temperatura en el centro de gravedad de la aleta

$$\frac{(c.d.g.)}{b} = \frac{T_{(c.d.g.)} - T_F}{T_b - T_F} = \frac{I_0(2 n \sqrt{x})}{I_0(2 n \sqrt{L})} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Centro de gravedad } x = \frac{2L}{3} = \frac{2 \times 0,062}{3} \text{ m} = 0,0413 \text{ m} \\ n = \sqrt{\frac{2 f h_{cF} L}{k b}} = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 25 \times 0,062}{75 \times 0,0015}} = 5,25 \\ 2 n \sqrt{L} = 2 \times 5,25 \sqrt{0,062} = 2,6144 \quad ; \quad I_0(2 n \sqrt{L}) = I_0(2,6144) = 3,5968 \\ 2 n \sqrt{x} = 2 \times 5,25 \sqrt{0,0413} = 2,1338 \quad ; \quad I_0(2 n \sqrt{x}) = I_0(2,1338) = 2,5134 \end{array} \right| = 75 \times \frac{2,5134}{3,5968} = 52,40$$

$T_{(c.d.g.)} = 25 + 52,40 = 77,40^\circ\text{C}$

De otra forma

$$\frac{(c.d.g.)}{b} = G_3(t \cdot t) = \left| \begin{array}{l} t = 2,614 \\ t = \sqrt{\frac{x}{L}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8185 \\ t \cdot t = 2,614 \times 0,8185 = 2,1343 \end{array} \right| = G_3(2,1343) = 0,70$$

$$T_{(c.d.g.)} = 25 + (75 \times 0,7) = 77,5^\circ\text{C}$$

Temperatura en el vértice de la aleta

$$\frac{\text{vértice}}{b} = \frac{T_{\text{vértice}} - T_F}{T_b - T_F} = \frac{I_0(2 n \sqrt{x})}{I_0(2 n \sqrt{L})} = \left| \begin{array}{l} \text{Vértice } x = 0 \quad ; \quad I_0(0) = 1 \\ I_0(2 n \sqrt{L}) = I_0(2,6144) = 3,5968 \end{array} \right| = \frac{1}{3,5968} = 0,278$$

$$T_{\text{vértice}} = T_F + 0,278 (T_b - T_F) = 25 + 0,278 \times 75 = 45,86^\circ\text{C}$$

IV.7.- Un determinado fluido de propiedades, $\rho = 0,75 \text{ gramos/cm}^3$; $c_p = 0,35 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$, se calienta desde 80°C hasta 120°C , a razón de 50.000 kg/hora . Para mejorar el proceso térmico se utilizan tubos de acero de 20 mm de diámetro exterior, de conductividad térmica $k = 60 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$, con aletas longitudinales triangu-

lares del mismo material que el tubo, de base 1,5 mm, siendo la distancia entre los centros de sus bases de 4 mm.

La temperatura media de la base de las aletas se estima en 150°C en toda la longitud del tubo.

El coeficiente medio de película es, $h_{CF} = 500 \text{ Kcal/h.m}^2.\text{°C}$

Determinar,

a) La longitud óptima de las aletas (Se entiende que es la altura del perfil triangular)

b) El rendimiento de las aletas

c) La temperatura en el vértice de las aletas

d) El número de tubos, si se utilizan tubos de 3 metros de longitud

e) El número de tubos a utilizar, si se sustituyen las aletas longitudinales triangulares, por otras aletas transversales triangulares de rendimiento 60%, base 1,5 mm, y distancia entre los centros de sus bases 10 mm, sobre tubos de 3 metros de longitud, manteniendo la longitud óptima del apartado (a)

RESOLUCION

a) Longitud óptima de las aletas

$$b_{\text{ópt}} = 1,6718 \left(\frac{h_{CF}}{k} \right)^{1/3}$$

$$L_{\text{ópt}} = 1,196 \left(\frac{k}{h_{CF}} \right)^{1/3} = \frac{2}{b_{\text{ópt}}} = 1,196 \left(\frac{b L_{\text{ópt}} k}{2 h_{CF}} \right)^{1/3} = 1,196 \left(\frac{b k}{2 h_{CF}} \right)^{1/3} L_{\text{ópt}}^{1/3}$$

$$L_{\text{ópt}}^{2/3} = 1,196 \left(\frac{b k}{2 h_{CF}} \right)^{1/3} = 1,196 \left(\frac{0,0015 \times 60}{2 \times 500} \right)^{1/3} = 0,0536 \quad ; \quad L_{\text{ópt}} = 0,0124 \text{ m} = 12,4 \text{ mm}$$

b) Rendimiento de las aletas

$$\text{Rendimiento de la aleta: } \mu = \frac{2 G_4(t)}{t} = \left| \begin{array}{l} n = \sqrt{\frac{2 f h_{CF} L}{k b}} = \frac{2 \times 1 \times 500 \times 12,41 \times 10^{-3}}{60 \times 1,5 \times 10^{-3}} = 11,7426 \\ t = 2 n \sqrt{L} = 2 \times 11,7426 \times \sqrt{12,41 \times 10^{-3}} = 2,616 \\ G_4(t) = \frac{I_1(t)}{I_0(t)} = \frac{I_1(2,616)}{I_0(2,616)} = \frac{2,79905}{3,60162} = 0,775 \end{array} \right| = \frac{2 \times 0,775}{2,616} = 0,594 = 59,4\%$$

que es un resultado lógico puesto que está construida con dimensiones óptimas y en estas condiciones el rendimiento óptimo sabemos es del orden del 60%

c) Temperatura en el vértice de las aletas

$$\frac{\text{vértice}}{b} = \frac{T_{\text{vértice}} - T_F}{T_b - T_F} = \frac{I_0(2 n \sqrt{x})}{I_0(2 n \sqrt{L})} = \left| \begin{array}{l} \text{Vértice} \quad x = 0 \quad ; \quad I_0(0) = 1 \\ I_0(2 n \sqrt{L}) = I_0(2,616) = 3,6016 \end{array} \right| = \frac{1}{3,6016} = 0,2776$$

$$T_F = \frac{80 + 120}{2} = 100^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{vértice}} = T_F + 0,2776 (T_b - T_F) = 100 + 0,2776 \times (150 - 100) = 113,88^\circ\text{C}$$

d) Número de tubos, si se utilizan tubos de 3 metros de longitud

Calor evacuado por una aleta longitudinal por metro lineal de tubería,

$$q_{1 \text{ aleta}} = \mu h_{CF} A (T_b - T_F) = | A = 2 \times 0,0124 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 0,0248 \text{ m}^2 | =$$

$$= 0,594 \times 500 \times 0,0248 \times (150 - 100) = 368,95 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}}$$

$$\text{En 3 m de tubo el calor disipado por una aleta longitudinal es: } q_{3 \text{ m aletas}} = 368,95 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}} \times 3 \text{ m} = 1107 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de aletas longitudinales: } \frac{d_e}{(1,5 + 2,5) \times 10^{-3}} = \frac{x \cdot 0,02}{0,004} = 15,7 \quad 16 \text{ aletas}$$

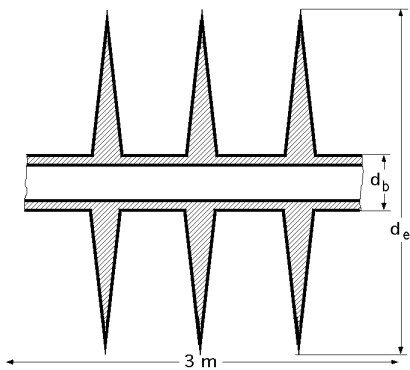
Calor evacuado por las aletas en cada tubo de 3 m de longitud: $q_{3m \text{ aletas}} \times n = 1107 \times 16 = 17712 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$

Calor evacuado por el tubo de 3 m sin aletas: $[d_e - (16 \times 0,0015)] \times 3 \text{ m} \times h_{cF} \times (150 - 100) = 2912,4 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$

Calor total evacuado por el tubo de 3 m con aletas = $2912,4 + 17712 = 20624,4 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$

Calor total a disipar = $m \times c_p \times (T_1 - T_2) = 50000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 0,35 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times (120 - 80)^\circ\text{C} = 700.000 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$

Número de tubos de 3 metros de longitud = $\frac{700.000}{20624,4} = 33,9$ 34 tubos



e) Número de tubos a utilizar, si se sustituyen las aletas longitudinales triangulares, por otras aletas transversales triangulares de rendimiento 60%, base 1,5 mm, y distancia entre los centros de sus bases 10 mm, sobre tubos de 3 metros de longitud, manteniendo la longitud óptima del apartado (a)

$$d_e = d_b + 2 L_{\text{ópt}} = 20 + (2 \times 12,4) = 44,8 \text{ mm}$$

$$A = 2 \left(\frac{d_e^2}{4} - \frac{d_b^2}{4} \right) = \frac{1}{2} (d_e^2 - d_b^2) = \frac{1}{2} (44,8^2 - 20^2) \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 0,00252 \text{ m}^2$$

$$A = 2 \left(\frac{d_e^2}{4} - \frac{d_b^2}{4} \right) = \frac{1}{2} (d_e^2 - d_b^2) = \frac{1}{2} (44,8^2 - 20^2) \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 0,00252 \text{ m}^2$$

$$q_{1 \text{ aleta}} = \mu h_{cF} A (T_b - T_F) = 0,6 \times 500 \times 0,00252 \times (150 - 100) = 37,86 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de aletas en cada tubo de 3 m de longitud} = \frac{3}{0,01} = 300$$

$$\text{Calor evacuado por las aletas en cada tubo: } 300 \times 37,86 = 11358 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Calor evacuado por el tubo por la parte que no lleva aletas:

$$= (d_b \times 0,0085 \times 300) \times h_{cF} \times (150 - 100) = \left\{ \begin{array}{l} d_b = 0,02 \text{ m} \\ h_{cF} = 500 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}} \end{array} \right\} = 4005 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\text{Calor total evacuado por el tubo de 3 m con aletas} = 4005 + 11358 = 15363 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\text{Número de tubos de 3 metros de longitud} = \frac{700.000}{15363} = 45,56$$
 46 tubos

IV.8.- Una aguja de 25 cm de longitud y 3 cm de diámetro sobresale de un objeto. La temperatura en la base $T_b=150^\circ\text{C}$, mientras que el medio exterior se encuentra a $T = 30^\circ\text{C}$. Suponiendo un coeficiente de película constante $h_C = 10 \text{ Kcal/h.m}^2\text{C}$, calcular para los siguientes casos,

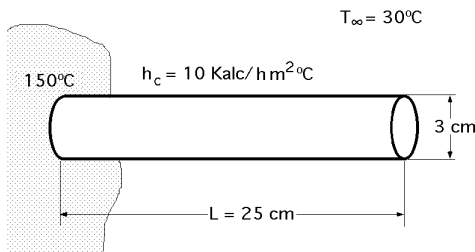
a) Varilla de Cu, $k = 332 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$

b) Varilla de acero de 0,5%C, $k = 46 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$

c) Vidrio, $k = 0,94 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$

lo siguiente,

1) Temperatura en los puntos situados a 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 y 5/5 de la distancia entre la base y el extremo, suponiendo despreciable el flujo de calor en el extremo



2) Calcular el flujo calorífico por hora cedido por la varilla en los siguientes casos,

2a) Con flujo de calor en el extremo (Coeficiente de película en el extremo 10 Kcal/h.m².°C

2b) Despreciando el flujo de calor en el extremo

2c) Considerando aletas muy largas

RESOLUCION

1) Temperatura en los puntos situados a 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 y 5/5 de la distancia entre la base y el extremo, suponiendo despreciable el flujo de calor en el extremo.

Para el supuesto de flujo de calor despreciable en el extremo, la distribución de temperaturas es,

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{\text{Bi}} (1 - x/L) \}}{\text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}}$$

$$= \frac{x}{L} ; p = \text{perímetro} = 2 r ; S = \text{sección transversal} = r^2$$

$$\text{Bi} = \frac{h_c L^*}{k} = \frac{h_c p L^2}{k S} = \frac{10 \times 2 r \times 0,25^2}{k \times r^2} = \frac{10 \times 2 \times 0,25^2}{k r} = \frac{83,33}{k}$$

$$\text{Bi} = \begin{cases} \text{Cu} & k = 332 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}} ; \text{Bi} = 0,25 \\ \text{Acero 0,5\% C} & k = 46 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}} ; \text{Bi} = 1,81 \\ \text{Vidrio} & k = 0,94 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}} ; \text{Bi} = 88,65 \end{cases}$$

$$T(x) = T_{\infty} + (T_b - T_{\infty}) \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{\text{Bi}} (1 - x/L) \}}{\text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}} = | T_b - T_{\infty} = 150 - 30 = 120^\circ\text{C} | = 30 + 120 \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{\text{Bi}} (1 - x/L) \}}{\text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}}$$

Para el Cu se tiene, **Bi = 0,25**, se tiene,

$$x/L = \frac{1}{5} ; T_1 = 30 + 120 \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{0,25} (1 - \frac{1}{5}) \}}{\text{Ch} \sqrt{0,25}} = 145,05^\circ\text{C} ; \begin{cases} x/L = \frac{2}{5} ; T_2 = 141,24^\circ\text{C} \\ x/L = \frac{3}{5} ; T_3 = 138,45^\circ\text{C} \\ x/L = \frac{4}{5} ; T_4 = 136,95^\circ\text{C} \\ x/L = 1 ; T_5 = 136,42^\circ\text{C} \end{cases}$$

Para el Acero 0,5% C; **Bi = 1,81**, se tiene,

$$x/L = \frac{1}{5} ; T_1 = 30 + 120 \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{1,81} (1 - \frac{1}{5}) \}}{\text{Ch} \sqrt{1,81}} = 125,84^\circ\text{C} ; \begin{cases} x/L = \frac{2}{5} ; T_2 = 108,66^\circ\text{C} \\ x/L = \frac{3}{5} ; T_3 = 96,94^\circ\text{C} \\ x/L = \frac{4}{5} ; T_4 = 90,42^\circ\text{C} \\ x/L = 1 ; T_5 = 88,3^\circ\text{C} \end{cases}$$

Para el Vidrio; **Bi = 88,65**, se tiene,

$$x/L = \frac{1}{5} ; T_1 = 30 + 120 \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{88,65} (1 - \frac{1}{5}) \}}{\text{Ch} \sqrt{88,65}} = 48,25^\circ\text{C} ; \begin{cases} x/L = \frac{2}{5} ; T_2 = 32,77^\circ\text{C} \\ x/L = \frac{3}{5} ; T_3 = 30,42^\circ\text{C} \\ x/L = \frac{4}{5} ; T_4 = 30,066^\circ\text{C} \\ x/L = 1 ; T_5 = 30,02^\circ\text{C} \end{cases}$$

2) Flujo calorífico por hora cedido por la varilla en los siguientes casos,

2a) Con flujo de calor en el extremo (Coeficiente de película en el extremo 10 Kcal/h.m².°C

$$q = \frac{k S (T_b - T_F) \sqrt{Bi}}{L} \frac{Sh\sqrt{Bi} + \frac{S}{pL} \sqrt{Bi} Ch\sqrt{Bi}}{\frac{S}{pL} \sqrt{Bi} Sh\sqrt{Bi} + Ch\sqrt{Bi}} = \left| \begin{array}{l} \frac{S}{pL} = \frac{r^2}{2 r L} = \frac{r}{2 L} = \frac{0,015}{2 \times 0,25} = 0,03 \\ \frac{S}{L} = \frac{r^2}{L} = \frac{0,015^2}{0,25} = 2,827 \times 10^{-3} \\ \frac{S}{L} (T_b - T) = 0,34 \end{array} \right| =$$

$$= 0,34 k \sqrt{Bi} \frac{Sh\sqrt{Bi} + 0,03 \sqrt{Bi} Ch\sqrt{Bi}}{0,03 \sqrt{Bi} Sh\sqrt{Bi} + Ch\sqrt{Bi}}$$

Para el Cu

$$q = 0,34 \times 332 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{0,25} \frac{Sh\sqrt{0,25} + 0,03 \sqrt{0,25} Ch\sqrt{0,25}}{0,03 \sqrt{0,25} Sh\sqrt{0,25} + Ch\sqrt{0,25}} = 26,84 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}}$$

Para el acero

$$q = 0,34 \times 46 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{1,81} \frac{Sh\sqrt{1,81} + 0,03 \sqrt{1,81} Ch\sqrt{1,81}}{0,03 \sqrt{1,81} Sh\sqrt{1,81} + Ch\sqrt{1,81}} = 18,56 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}}$$

Para el vidrio

$$q = 0,34 \times 0,94 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{88,65} \frac{Sh\sqrt{88,65} + 0,03 \sqrt{88,65} Ch\sqrt{88,65}}{0,03 \sqrt{88,65} Sh\sqrt{88,65} + Ch\sqrt{88,65}} = 3,009 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}}$$

2b) Despreciando el flujo de calor en el extremo

$$q = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{Bi} Th\sqrt{Bi} = 0,34 k \sqrt{Bi} Th\sqrt{Bi}$$

Para el Cu

$$q = 0,34 \times 332 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{0,25} Th\sqrt{0,25} = 26,028 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Para el acero

$$q = 0,34 \times 46 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{1,81} Th\sqrt{1,81} = 18,33 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Para el vidrio

$$q = 0,34 \times 0,94 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{88,65} Th\sqrt{88,65} = 3,003 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

2c) Considerando aletas muy largas

$$q = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{Bi} = 0,34 k \sqrt{Bi}$$

Para el Cu

$$q = 0,34 \times 332 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{0,25} = 56,32 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Para el acero

$$q = 0,34 \times 46 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{1,81} = 21 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Para el vidrio

$$q = 0,34 \times 0,94 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}} \sqrt{88,65} = 3,003 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

A la vista de los resultados, y por lo que respecta a los calores desprendidos, se observa que cuando las conductividades son bajas, el hecho de considerar aletas muy largas es perfectamente válido.

En casi todos los casos se puede considerar el flujo de calor en el extremo despreciable.

IV.9.- Se desea incrementar el paso de calor desde una pared plana al medio ambiente que la rodea, instalando para ello aletas de diferentes tipos sobre dicha superficie, de tal forma que sobresalgan de la superficie de la pared una longitud de 20 cm, siendo el material utilizado un conductor de $k=40 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$ y suponiendo en cualquier caso un coeficiente de transmisión de calor sólido-fluido de $17 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$.

Bajo estas condiciones se desea saber,

a) La configuración que será la más eficaz de entre las siguientes,

a.1) Aleta recta de perfil rectangular constante, de espesor $e=1,25 \text{ cm}$ y anchura unidad

a.2) Aleta triangular de similar base de apoyo a la anterior

b) Material con el que se debe construir la aleta triangular, tomando como referencia su conductividad térmica, para que en las condiciones anteriores tenga la misma efectividad que la encontrada para la aleta rectangular.

RESOLUCION

a.1) Aleta recta de perfil rectangular constante, de espesor $e=1,25 \text{ cm}$ y anchura unidad

ALETA RECTA AISLADA TERMICAMENTE EN SU EXTREMO LIBRE

$$\mu = \frac{Th \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{Th \sqrt{2,754}}{\sqrt{2,754}} = 0,56$$

en la que se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones,

$$Bi = \frac{p \ h_{cF} \ L^2}{k \ S} = \left\{ \begin{array}{l} p = 2 (e + a) = 2 (0,0125 + 1) = 2,025 \text{ m} \\ S = e a = 0,0125 \times 1 = 0,0125 \text{ m}^2 \end{array} \right\} = \frac{2,025 \times 17 \times 0,20^2}{40 \times 0,0125} = 2,754$$

ALETA RECTA CON CONVECCION EN SU EXTREMO LIBRE

$$\mu = \frac{\frac{k \ S \ (T_b - T_F) \ \sqrt{Bi}}{L} \frac{Sh \sqrt{Bi} + \frac{S \ \sqrt{Bi}}{p \ L} \ Ch \ \sqrt{Bi}}{Ch \ \sqrt{Bi} + \frac{S \ \sqrt{Bi}}{p \ L} \ Sh \ \sqrt{Bi}}}{h_{cF} \ A \ (T_b - T_F)} = \left| A = 2 \ L \ a \right| = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \frac{Sh \ \sqrt{Bi} + \frac{S \ \sqrt{Bi}}{p \ L} \ Ch \ \sqrt{Bi}}{Ch \ \sqrt{Bi} + \frac{S \ \sqrt{Bi}}{p \ L} \ Sh \ \sqrt{Bi}} =$$

$$= \left| \frac{S \ \sqrt{Bi}}{p \ L} = \frac{0,0125 \times \sqrt{2,754}}{2,025 \times 0,2} = 0,05122 \right| = \frac{1}{\sqrt{2,754}} \frac{Sh \ \sqrt{2,754} + (0,05122 \times Ch \ \sqrt{2,754})}{Ch \ \sqrt{2,754} + 0,05122 \times Sh \ \sqrt{2,754}} = 0,547$$

ALETA TRIANGULAR

$$\mu = \frac{1}{n \ \sqrt{L}} \frac{I_1(2 \ n \ \sqrt{L})}{I_0(2 \ n \ \sqrt{L})} = \frac{2 \ G_4(t)}{t}$$

$$b = 0,0125 \text{ m}$$

$$f = \sqrt{1 + \left(\frac{e_{base}}{2 \ L}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{0,0125}{2 \times 0,2}\right)^2} = 1,00048 \text{ (conducción monodimensional)}$$

$$n = \sqrt{\frac{2 \ f \ h_{cF} \ L}{k \ b}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,00048 \times 17 \times 0,2}{40 \times 0,0125}} = 3,6887$$

$$\mu = \frac{1}{n \ \sqrt{L}} \frac{I_1(2 \ n \ \sqrt{L})}{I_0(2 \ n \ \sqrt{L})} = \left| \begin{array}{l} 2 \ n \ \sqrt{L} = 2 \times 3,6887 \ \sqrt{0,2} = 3,2993 \\ n \ \sqrt{L} = 3,6887 \ \sqrt{0,2} = 1,64924 \\ I_1(2 \ n \ \sqrt{L}) = I_1(3,29848) = 5,195 \\ I_0(2 \ n \ \sqrt{L}) = I_0(3,29848) = 6,258 \end{array} \right| = \frac{1}{1,64924} \frac{5,195}{6,258} = 0,5033$$

Se observa que el rendimiento de las aletas rectangulares es superior al de la aleta triangular.

b) Material con el que se debe construir la aleta triangular, tomando como referencia su conductividad térmica,

mica, para que en las condiciones anteriores tenga la misma efectividad que la encontrada para la aleta rectangular.

Hay que determinar la conductividad térmica del material

$$0,58 = \frac{1}{n \sqrt{L}} \frac{I_1(2n \sqrt{L})}{I_0(2n \sqrt{L})} = \left| n \sqrt{L} = N \right| = \frac{1}{N} \frac{I_1(2N)}{I_0(2N)}, \text{ que es la ecuación a resolver}$$

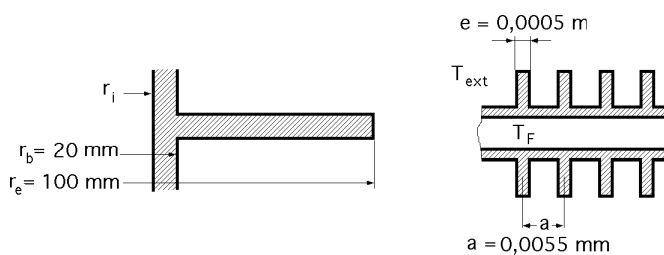
N	0,58 N	$I_0(2N)$	$I_1(2N)$	$\frac{I_1(2N)}{I_0(2N)}$	
1	0,58	2,2796	1,5906	0,6967	$0,58 < 0,6967$
1,5	0,87	4,8808	3,9534	0,8099	$0,87 > 0,8099$
1,4	0,812	4,1573	3,3011	0,7941	$0,812 > 0,794$
1,3	0,754	3,5533	2,7554	0,7754	$0,754 < 0,7754$
1,35	0,783	3,8553	3,0282	0,7854	$0,783 < 0,785$

Un valor muy aceptable es, $N = 1,35$, luego,

$$n = \sqrt{\frac{2 h_{cF} L}{k b}} = \frac{N}{\sqrt{L}} ; N = \sqrt{\frac{2 h_{cF} L}{k b}} ; k = \frac{2 h_{cF} L^2}{b N^2} = \frac{2 \times 17 \times 0,2^2}{0,0125 \times 1,35^2} = 59,7 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \text{C}}$$

IV.10.- A un tubo de 40 mm de diámetro exterior se le adosan aletas anulares de aluminio $k=197 \text{ Kcal/h m}^2 \text{C}$, de 0,5 mm de espesor y 100 mm de radio exterior separadas entre si una distancia de 5 mm.

La presencia de un fluido exterior implica la existencia de un coeficiente de película de $60 \text{ Kcal/h.m}^2 \text{C}$.



En estas condiciones,

- Determinar el aumento en % del calor disipado, por el hecho de colocar las aletas**
- Si existe una diferencia de temperaturas de 50°C entre la superficie del tubo y el medio exterior, determinar el calor disipado por cada metro de longitud de tubería con aletas.**

RESOLUCION

a) Aumento en % del calor disipa por el hecho de colocar las aletas

Calor disipado por una aleta,

$$q_{1 \text{ aleta}} = (1 - \frac{2}{a_n}) k e_b \frac{2}{a_n} G_2(a_n, a_n) =$$

$$= \left[\begin{aligned} a_n &= \frac{r_b}{r_e} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2 \\ a_n &= \sqrt{\frac{2 r_e^2 h_{c \text{ ext}}}{k e}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,1^2 \times 60}{197 \times 0,0005}} = 3,4903 \end{aligned} \right] \quad G_2(a_n, a_n) = 0,18 =$$

$$= (1 - 0,2^2) \times 197 \times 0,0005 \times 3,4903^2 \times 0,18 = 0,6513 \quad b$$

Calor disipado a lo largo de la fracción de tubo sin aletas correspondiente a la longitud $a = 0,0055 \text{ m}$

$$q_{a=0,0055} = (d_b a) h_{c \text{ ext}} \quad b = (\times 0,04 \times 0,0055) \times 60 \quad b = 0,04147 \quad b$$

Calor disipado a lo largo de la fracción de tubo sin aletas correspondiente a la longitud 0,0050 m, (sin la aleta)

$$q_{\text{tubo}} = (d_b \times 0,0050) h_{c \text{ ext}} \quad b = (\times 0,04 \times 0,0050) \times 60 \quad b = 0,0377 \quad b$$

Calor disipado por una aleta más el tubo correspondiente,

$$q_{\text{tubo}} + q_{1 \text{ aleta}} = 0,0377 \quad b + 0,6513 \quad b = 0,689 \quad b$$

$$\text{Mejora} = \frac{0,689 - 0,04147}{0,04147} = 15,60$$

1560%

b) Si existe una diferencia de temperaturas de 50°C entre la superficie del tubo y el medio exterior, determinar el calor disipado por cada metro de longitud de tubería con aletas.

$$N^{\circ} \text{ de aletas por 1 m de longitud de tubería : } \frac{1}{a} = \frac{1}{0,0055} = 182$$

$$Q_{\text{real}} = 0,689 \times 50 \times 182 = 6270 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}}$$

De otra forma,

$$\text{Rendimiento de la aleta anular : } \mu = G_2(\eta_{\text{an}}) = 0,18$$

$$q_{\text{aleta real}} = \mu q_{\text{aleta ideal}} = \mu h_{\text{c ext}} A (T_b - T_{\text{ext}}) = \left| \begin{array}{l} A = 2 (r_e^2 - r_b^2) = \\ = 2 (0,1^2 - 0,02^2) = 0,0603 \text{ m}^2 \end{array} \right| =$$

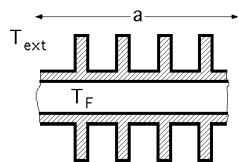
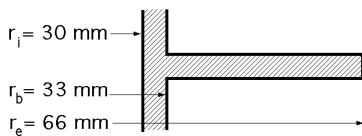
$$= 0,18 \times 60 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}} \times 0,0603 \text{ m}^2 \times 50^{\circ}\text{C} = 32,56 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$q_{\text{tubo}} = (d_b \times 0,0050) h_{\text{c ext}} T_b = (0,04 \times 0,0050) \times 60 \times 50 = 1,8848 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$Q_{\text{tubo + aletas}} = (1,8848 + 32,56) \times 182 = 6270,7 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}}$$

IV.11.- Al realizar un estudio para instalar calefacción en una factoría en la que se dispone de agua caliente a 85°C, se llegó a la conclusión de que había que aportar 460 Kcal/h.m para mantener la temperatura ambiente en +24°C.

Dado que en la factoría se dispone de hierro fundido $k = 50 \text{ Kcal/h.m}^{\circ}\text{C}$, del calibre 60/66 y de aletas anulares del mismo material y de radio exterior 66 mm, con un espesor de 3 mm y considerando que los coeficientes de película son 1000 y 8 Kcal/h.m²°C, determinar el número de aletas necesario para disipar el calor indicado.



RESOLUCION

Veamos si son necesarias las aletas,

$$\frac{q}{a = 1 \text{ metro}} = \frac{2 (T_F - T_{\text{ext}})}{\frac{1}{r_i h_{\text{cF}}} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{k} + \frac{1}{r_b h_{\text{c ext}}}} = \frac{2 (85 - 24)}{\frac{1}{0,06 \times 1000} + \frac{\ln \frac{33}{30}}{50} + \frac{1}{0,033 \times 8}} = 100,25 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}} < 460 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}}$$

luego SI son necesarias, ya que el tubo limpio no puede aportar las calorías necesarias

Cálculo de T_b ,

$$Q = \frac{T_F - T_{\text{pF}}}{\frac{1}{2 a r_i h_{\text{cF}}}} = \frac{T_{\text{pF}} - T_b}{\frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k a}} = \frac{T_F - T_b}{\frac{1}{2 a r_i h_{\text{cF}}} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k a}}$$

$$T_F - T_b = \frac{Q}{2 a} \left(\frac{1}{r_i h_{\text{cF}}} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{k} \right) = \frac{460 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}}}{2 \times 1} \left(\frac{1}{0,03 \times 1000} + \frac{\ln \frac{33}{30}}{50} \right) = 2,58$$

$$T_b = T_F - 2,58 = 85 - 2,58 = 82,42^{\circ}\text{C}$$

Calor disipado por una aleta,

$$q_{\text{1 aleta}} = (1 - \frac{2}{\eta_{\text{an}}}) k e b \frac{2}{\eta_{\text{an}}} G_2(\eta_{\text{an}}) =$$

$$= \left[\begin{aligned} a_n &= \frac{r_b}{r_e} = \frac{0,033}{0,066} = 0,5 \\ a_n &= \sqrt{\frac{2 r_e^2 h_{c \text{ ext}}}{k e}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,066^2 \times 8}{50 \times 0,03}} = 0,682 \end{aligned} \right] \quad G_2(a_n, a_n) = 0,95 =$$

$$= (1 - 0,5^2) \times 50 \times 0,003 \times (82,42 - 24) \times 0,682^2 \times 0,95 = 9,11 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

ó también,

$$q_{1 \text{ aleta}} = \mu h_{c \text{ ext}} A (T_b - T_{\text{ext}}) = G_2(a_n, a_n) h_{c \text{ ext}} 2 \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_b^2) (T_b - T_{\text{ext}}) =$$

$$= 0,95 \times 8 \times \frac{2}{4} (0,132^2 - 0,066^2) \times (82,42 - 24) = 9,11 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

Calor total disipado,

$$Q = q_{\text{aletas}} + q_{\text{tubo entre aletas}}$$

Para $a = 1 \text{ m}$ habrá N aletas de espesor “e” que ocupan $(N e)$ metros, por lo que quedan $(1 - N e)$ metros de tubo sin aletas

Calor disipado por la tubería entre aletas: $(\frac{q}{a})_{\text{tub}} (1 - N e)$

Calor disipado por las aletas: $q_{1 \text{ aleta}} N$

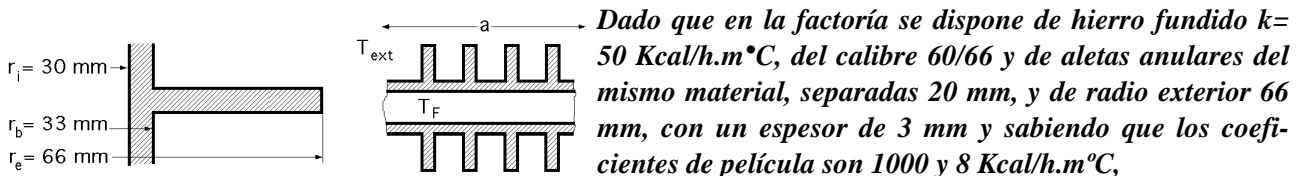
Calor total a disipar por el tubo más las aletas: $Q = (\frac{q}{a = 1 \text{ metro}})_{\text{total}} = 460 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}} =$

$$= (\frac{q}{a})_{\text{tub}} (1 - N e) + q_{1 \text{ aleta}} N = 100,25 (1 - N \times 0,003) + 9,11 N$$

$N = 40,83 \quad 41 \text{ aletas}$

$$\text{Separación entre aletas: } \frac{1 - (41 \times 0,03)}{41} = 0,0219 \text{ m}$$

IV.12.- Al realizar un estudio para instalar calefacción en una factoría en la que se dispone de agua caliente a 85°C , se llegó a la conclusión de que había que aportar 5000 Kcal/hora para mantener la temperatura ambiente en $+24^\circ\text{C}$.



determinar el número de aletas necesario para disipar el calor indicado.

RESOLUCION

$$Q = \frac{T_F - T_{pF}}{\frac{1}{2 a r_i h_{cF}}} = \frac{T_{pF} - T_b}{\frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k a}} = \frac{T_F - T_b}{\frac{1}{2 a r_i h_{cF}} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{2 k a}}$$

$$T_F - T_b = \frac{Q}{2 a} \left(\frac{1}{r_i h_{cF}} + \frac{\ln \frac{r_b}{r_i}}{k} \right) = \frac{5000 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}}{2 a} \left(\frac{1}{0,03 \times 1000} + \frac{\ln \frac{33}{30}}{50} \right) = \frac{28,042}{a}$$

$T_b = T_F - \frac{28,042}{a}$

$$T_b = T_b - T_{\text{ext}} = T_F - \frac{28,042}{a} - T_{\text{ext}} = 85 - \frac{28,042}{a} - 24 = 61 - \frac{28,042}{a}$$

Calor total disipado,

$$Q = q_{N \text{ aletas}} + q_{\text{tubo entre aletas}}$$

$$q_{N \text{ aletas}} = (1 - \frac{r_b}{r_e}) k_e \frac{2}{a_n} G_2(\frac{r_b}{r_e}, \frac{a_n}{a}) N$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{r_b}{r_e} = \frac{0,033}{0,066} = 0,5 \\ a_n = \sqrt{\frac{2 r_e^2 h_{c \text{ ext}}}{k_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,066^2 \times 8}{50 \times 0,03}} = 0,682 \end{array} \right| \quad G_2(\frac{r_b}{r_e}, \frac{a_n}{a}) = 0,95$$

$$\begin{aligned} \text{Calor disipado por el tubo entre aletas: } (2 \frac{r_b}{a} - N e 2 \frac{r_b}{a}) h_{c \text{ ext}} = 2 \frac{r_b}{a} (1 - \frac{N e}{a}) h_{c \text{ ext}} \\ Q = (1 - \frac{r_b}{r_e}) k_e \frac{2}{a_n} G_2(\frac{r_b}{r_e}, \frac{a_n}{a}) N + 2 \frac{r_b}{a} (1 - \frac{N e}{a}) h_{c \text{ ext}} = \left| \frac{r_b}{a} = 61 - \frac{28,042}{a} \right| = \\ = [(1 - 0,5^2) \times 50 \times 0,003 \times (61 - \frac{28,042}{a}) \times 0,682^2 \times 0,95 N] + \\ + [2 \times 0,033 \frac{a}{a} (1 - \frac{N \times 0,003}{a}) \times 8 \times (61 - \frac{28,042}{a})] = \\ = \left| \begin{array}{l} N (0,020 + 0,003) = a \\ N = \frac{a}{0,023} = 43,48 \frac{a}{a} \end{array} \right| = [(1 - 0,5^2) \times 50 \times 0,003 \times (61 - \frac{28,042}{a}) \times 0,682^2 \times 0,95 N] + \\ + [2 \times 0,033 \frac{a}{a} \{ 1 - (43,48 \times 0,003) \} \times 8 \times (61 - \frac{28,042}{a})] = 501,73 \frac{a}{a} - 230,65 = 5000 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} \\ a = \frac{5000 + 230,65}{501,73} = 10,42 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{Temperatura en la base: } T_b = 24 + 61 - \frac{28,042}{10,42} = 82,3^\circ\text{C}$$

IV.13.- Sobre un tubo de una aleación de aluminio de 20 mm de diámetro exterior se desea colocar aletas longitudinales de perfil triangular. La base de las aletas tiene un espesor de 1 mm y la distancia entre los centros de las bases de las aletas es de 3,5 mm lo que permite mantener un coeficiente de película $h_{cF} = 50 \text{ Kcal/hm}^2\cdot^\circ\text{C}$. La conductividad térmica del material es, $k = 100 \text{ Kcal/hm}\cdot^\circ\text{C}$.

Determinar

- Las dimensiones del perfil óptimo de las aletas triangulares longitudinales (su longitud)
- El calor transmitido al exterior por metro de longitud de tubo si la temperatura de la base es de 125°C y la del fluido exterior de 20°C
- La temperatura en el centro de gravedad de la aleta y en el vértice
- El calor evacuado por una aleta

RESOLUCION

a) Dimensiones del perfil óptimo de las aletas triangulares longitudinales

$$L_{\text{ópt}} = 1,196 \left(\frac{k}{h_{cF}} \right)^{1/3} = \left| \frac{b L}{2} \right| = 1,196 \left(\frac{b L_{\text{ópt}} k}{2 h_{cF}} \right)^{1/3} = 1,196 \left(\frac{b k}{2 h_{cF}} \right)^{1/3} L_{\text{ópt}}^{1/3}$$

$$L_{\text{ópt}}^{2/3} = 1,196 \left(\frac{b k}{2 h_{cF}} \right)^{1/3} = 1,196 \left(\frac{0,001 \times 100}{2 \times 50} \right)^{1/3} = 0,1196 \quad ; \quad L_{\text{ópt}} = 0,04136 \text{ m} = 41,36 \text{ mm} \quad ; \quad \text{Base} = 1 \text{ mm}$$

b) Calor transmitido al exterior por metro de longitud de tubo, si la temperatura de la base es de 125°C y la del fluido exterior de 20°C

$$\text{Para 1 aleta: } q_{l \text{ aleta}} = - \frac{b}{2 L} k b \frac{t}{L} G_4(t)$$

$$b = T_b - T_F = 125 - 20 = 105^\circ$$

$$t = \sqrt{\frac{8 f h_{cF} L^2}{k b}} = \left| f = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2 L} \right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \times 41,36} \right)^2} = 1,00007 \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{8 \times 1 \times 50 \times 0,04136^2}{100 \times 0,001}} = 2,616 \quad G_4(t) = 0,77 \text{ (Gráfica)}$$

$$\text{ó también: } G_4(t) = \frac{I_1(t)}{I_0(t)} = \frac{I_1(2,616)}{I_0(2,616)} = 0,775$$

$$\text{Para 1 aleta: } q_{1 \text{ aleta}} = - b k b \frac{t}{2L} G_4(t) = - 105 \times 100 \times 0,001 \times \frac{2,616}{2 \times 0,04136} \times 0,775 = 257,35 \frac{\text{Kcal}}{\text{m lineal}}$$

ó también a partir de $L_{\text{óptima}}$, en la forma,

$$L_{\text{ópt}} = \frac{0,842}{h_{cF}} \frac{q_{1 \text{ aleta}}}{T_b - T_F} ; \quad 0,00413 = \frac{0,842}{50} \frac{q_{1 \text{ aleta}}}{105} ; \quad q_{1 \text{ aleta}} = 257,5 \text{ Kcal}$$

Para N aletas,

$$N^{\circ} \text{ N de aletas} = d_e = 3,5 \text{ N} ; \quad N = \frac{20}{3,5} = 17,97 \quad 18 \text{ aletas}$$

$$q_{N \text{ aletas}} = 257,35 \frac{\text{Kcal}}{\text{m lineal}} \times 18 \text{ aletas} = 4632,23 \frac{\text{Kcal}}{\text{m lineal}}$$

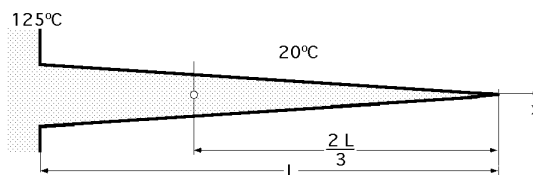
$$\begin{aligned} \text{Calor disipado por la fracción de tubo sin aletas: } q_{\text{tubo}} &= (2 r_e - N b) L h_{cF} (T_b - T_F) = \\ &= [(2 \times 0,01) - (18 \times 0,001)] \times 1 \text{ m} \times 50 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^2\text{C}} \times 105^{\circ}\text{C} = 235,4 \frac{\text{Kcal}}{\text{m lineal}} \end{aligned}$$

$$q_{\text{Total (1 m lineal)}} = 4632,23 + 235,4 = 4867,63 \frac{\text{Kcal}}{\text{m lineal}}$$

$$\text{Rendimiento de la aleta: } = \frac{2 G_4(t)}{t} = \frac{2 \times 0,775}{2,616} = 0,5925 = 59,25\% \text{ (Del orden del 60\%)}$$

c) Temperatura en el centro de gravedad de la aleta,

$$\frac{---}{b} = G_3(t, t) = \left| \begin{array}{l} t = 2,616 ; \quad t = \sqrt{\frac{x}{L}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165 \\ t \quad t = 2,616 \times 0,8165 = 2,1388 ; \quad G_3(2,1388) = 0,69 \end{array} \right| = 0,69$$



$$\frac{T_{\text{centro gravedad}} - T_F}{T_b - T_F} = 0,69 ; \quad \frac{T_{\text{centro gravedad}} - 20}{125 - 20} = 0,69 ; \quad T_{\text{centro gravedad}} = 92,45^{\circ}\text{C}$$

De otra forma

$$\frac{---}{b} = \frac{I_0(2 n \sqrt{x})}{I_0(2 n \sqrt{L})} = \frac{T - 20}{125 - 20}$$

$$L = 0,04136 \text{ m} ; \quad x = \frac{2L}{3} = 0,02757 \text{ m}$$

$$n = \sqrt{\frac{2 f h_{cF} L}{k b}} = \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 50 \times 0,04136}{100 \times 0,001}} = 6,431$$

$$2 n \sqrt{x} = 2 \times 6,431 \times \sqrt{0,02757} = 2,1356 ; \quad I_0(2 n \sqrt{x}) = I_0(2,1356) = 2,522$$

$$2 n \sqrt{L} = 2 \times 6,431 \times \sqrt{0,04136} = 2,6153 ; \quad I_0(2 n \sqrt{L}) = I_0(2,6153) = 3,60$$

$$= b \frac{I_0(2 n \sqrt{x})}{I_0(2 n \sqrt{L})} = (125 - 20) \frac{2,522}{3,6} = 73,55 ; \quad T_{\text{centro gravedad}} = 20 + 73,55 = 93,55^{\circ}\text{C}$$

Temperatura en el vértice de la aleta

$$= \frac{I_0(2n\sqrt{0})}{I_0(2n\sqrt{L})} = (125 - 20) \frac{1}{3,6} = 29,16^\circ\text{C} \quad ; \quad T_{\text{vértice}} = 20 + 29,16 = 49,16^\circ\text{C}$$

IV.14.- Un tubo de una determinada aleación $k = 80 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ tiene un diámetro interior de 25 mm y un diámetro exterior de 30 mm, y sobre el mismo se han dispuesto 20 aletas rectas longitudinales, del mismo material que el tubo, uniformemente distribuidas, con su extremo libre aislado térmicamente, de espesor $e = 3 \text{ mm}$ y longitud transversal $L = 30 \text{ mm}$.

El medio exterior (aire), se encuentra en reposo a la temperatura de 20°C , siendo de 100°C la temperatura de la superficie exterior del tubo.

Suponiendo el mismo coeficiente de película en el tubo y en las aletas, determinar,

- El aumento en % que supone la disipación de calor con aletas, frente al tubo sin aletas
- Temperatura en el centro de gravedad de cada aleta y en su extremo libre.

RESOLUCION

Propiedades del aire exterior,

$$\hat{T}_{\text{pared-fluido}} = \frac{100 + 20}{2} = 60^\circ\text{C} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{aire} = 1,025 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; c_{pF} \text{ aire} = 1017 \frac{\text{J}}{\text{Kg}\cdot^\circ\text{K}} ; k_{\text{aire}} = 0,0279 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot^\circ\text{K}} \\ \text{aire} = 19,4 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \text{Pr} = 0,71 ; \frac{g}{2} = 0,782 \times 10^8 \end{array} \right\}$$

El coeficiente de película se puede calcular a partir de la fórmula,

$$\sqrt{\text{Nu}} = 0,6 + 0,387 \sqrt[6]{\frac{\text{Gr Pr}}{\{1 + (\frac{0,56}{\text{Pr}})^{9/16}\}^{16/9}}}, \text{ válida en: } 10^5 < \text{Gr.Pr} < 10^{12} \quad ; \quad \text{Pr} > 0,5$$

$$\text{Gr} = \frac{g}{2} \frac{T L^3}{\nu^2} = \left| \begin{array}{l} T = 100 - 20 = 80^\circ\text{C} \\ L = d = 0,03 \text{ m} \end{array} \right| = 0,782 \times 10 \times 80 \times 0,03^3 = 168.912$$

$$\text{Gr} \cdot \text{Pr} = 168.912 \times 0,71 = 119927,5$$

por lo tanto,

$$\sqrt{\text{Nu}} = 0,6 + 0,387 \sqrt[6]{\frac{119927,5}{\{1 + (\frac{0,56}{0,71})^{9/16}\}^{16/9}}} = 2,8558 \quad ; \quad \text{Nu} = 8,1557$$

$$h_{cF} = \frac{\text{Nu} \cdot k}{d} = \frac{8,1557 \times 0,0279}{0,03} = 7,585 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}}$$

a) Aumento en % que supone la disipación de calor con aletas, frente al tubo sin aletas

Calor desprendido por metro lineal de tubo sin aletas:

$$q = h_{cF} A_L T = 7,585 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot^\circ\text{C}} \times 0,03 \text{ (m}^2) \times (100 - 20)^\circ\text{C} = 57,19 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$\text{Espacio de tubo no ocupado por las aletas} = 0,03 - (20 \times 0,003) = 0,03425 \text{ m}$$

$$\text{Calor desprendido por metro lineal a través del tubo no ocupado por las aletas} = \frac{0,03425 \times 57,19}{0,03} = 20,78 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

ALETA con su extremo libre térmicamente aislado

$$q_{N \text{ aletas}} = -k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{\text{Bi}} \text{Th} \sqrt{\text{Bi}} N = \left| \begin{array}{l} S = 0,003 \times 1 = 0,003 \text{ m}^2 \\ p = (1 + 0,003) \times 2 = 2,006 \text{ m} \\ \text{Bi} = \frac{p h_{cF} L^2}{k S} = \frac{2,006 \times 7,585 \times 0,03^2}{80 \times 0,003} = 0,0571 \end{array} \right| =$$

$$= 80 \times 0,003 \times 80 \times 0,2388 \times 0,2344 \times 20 = 716,5 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$\text{Calor disipado total} = 20,78 + 716,5 = 737,28 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$\text{Aumento en \%} = \frac{737,28 - 57,19}{57,19} \times 100 = 1189\%$$

b) Temperatura en el centro de gravedad de cada aleta y en su extremo libre

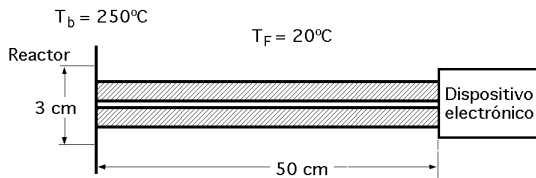
$$\left(\frac{x}{L} \right) = \frac{T(x) - T_F}{T_b - T_F} = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{\text{Bi}} (1 - \frac{x}{L}) \}}{\text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}}$$

$$\text{Temperatura en el (c.d.g) de la aleta: } \left(\frac{x}{L} = 0,5 \right); \quad \frac{T(0,5) - 20}{100 - 20} = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{0,0571} (1 - 0,5) \}}{\text{Ch} \sqrt{0,0571}} = 0,9791$$

$$T_{(\text{c.d.g})} = 98,32^\circ\text{C}$$

$$\text{Temperatura en el extremo libre: } \left(\frac{x}{L} = 1 \right); \quad \frac{T(1) - 20}{100 - 20} = \frac{1}{\text{Ch} \sqrt{0,0571}}; \quad \boxed{T(1) = T_L = 97,77^\circ\text{C}}$$

IV.15.- Para realizar el control del calentamiento de un determinado reactor, que no debe sobrepasar los 250°C , se hace uso de un tubo especial de acero $k = 45 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, en cuyo interior se ha hecho el vacío, que conecta el interior del reactor con un dispositivo electrónico exterior acoplado en su otro extremo y que no debe sobrepasar los 60°C . Si el tubo se asimila a un cilindro de 50 cm de longitud y 3 cm de diámetro, y el medio exterior se encuentra a 20°C , determinar,



- El coeficiente de película existente entre el cilindro y el medio exterior
- Sistema de refrigeración que habrá que utilizar en el cilindro
- La temperatura en la mitad del cilindro

RESOLUCION

El tubo de acero, cuyo diámetro interior no se da, y en cuyo interior se ha hecho el vacío (no existe convección en el interior), se puede asimilar a una protuberancia cilíndrica de 3 cm de diámetro, con uno de sus extremos a 250°C y el otro extremo, sobre el que va el dispositivo electrónico que no permite intercambio térmico por el extremo, que consideraremos térmicamente aislado a 60°C .

a) Coeficiente de película existente entre el cilindro y el medio exterior

$$\frac{T_b - T_F}{T(1) - T_F} = \text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}; \quad \frac{250 - 20}{60 - 20} = 5,75 = \text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}; \quad \text{Bi} = 5,9277$$

$$\text{Bi} = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \frac{h_{cF} \left(\frac{\pi d}{4} \right) L^2}{k \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 h_{cF} L^2}{k d} = \frac{4 h_{cF} \times 0,5^2}{45 \times 0,03} = 5,9277; \quad \boxed{h_{cF} = 8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}}}$$

b) Sistema de refrigeración que habrá que utilizar en el cilindro

Con este valor de h_{cF} la convección es natural y, por lo tanto, no es necesario ningún otro tipo o medio de refrigeración

c) Temperatura en la mitad del cilindro

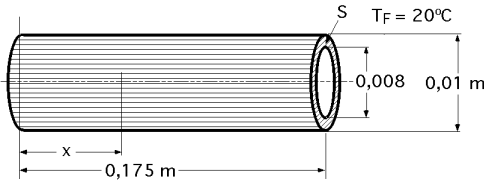
$$\left(\frac{x}{L} \right) = \frac{T(x) - T_F}{T_b - T_F} = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{\text{Bi}} (1 - \frac{x}{L}) \}}{\text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}}$$

$$\text{Temperatura en la mitad del cilindro: } \left(\frac{x}{L} = 0,5 \right); \quad \frac{T(0,5) - 20}{250 - 20} = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{5,9277} (1 - 0,5) \}}{\text{Ch} \sqrt{5,9277}}; \quad \boxed{T(0,5) = 93,5^\circ\text{C}}$$

IV.16.- Un cazo metálico contiene agua hirviendo a 100°C . El mango metálico del mismo, es un tubo cilíndrico.

drico, de diámetro exterior $d_e = 0,01$ m, longitud $L = 0,175$ m, espesor 1 mm y conductividad térmica $k = 40$ W/m²K, y lleva en su extremo libre un aislamiento térmico. La temperatura del aire del medio exterior y del hueco del tubo es de 20°C y el coeficiente de película correspondiente $h_c = 10$ W/m²°C.

a) Determinar a partir de qué distancia en el tubo del mango la temperatura es inferior a 50°C . Calor evacuado a través del mango y rendimiento.



b) Suponiendo que el flujo térmico en la parte interior del tubo del mango es despreciable, determinar a partir de qué posición en el mango la temperatura es inferior a 50°C . Calor evacuado a través del mango y rendimiento.

c) Si se considera el mango macizo, calcular a partir de qué posición la temperatura sería inferior a 50°C .

d) El tipo de diseño del mango más favorable

RESOLUCION

a) A partir de qué distancia en el tubo del mango la temperatura es inferior a 50°C .

$$\text{Distribución de temperaturas: } () = \frac{T() - T_F}{T_b - T_F} = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{\text{Bi}} (1 -) \}}{\text{Ch} \sqrt{\text{Bi}}}$$

$$\text{Bi} = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \left| \begin{array}{l} p = (d_e + d_i) = (0,01 + 0,008) = 0,05655 \text{ m} \\ S = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2) = \\ = \frac{\pi}{4} (0,01^2 - 0,008^2) = 2,827 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \end{array} \right| = \frac{10 \times 0,05655 \times 0,175^2}{40 \times 2,827 \times 10^{-5}} = 15,31$$

La temperatura en la base de la protuberancia, entronque con el cazo, es de 100°C , ya que el coeficiente de película del agua en ebullición es muy elevado, por lo que la temperatura del agua y la del cazo será prácticamente la misma.

Si llamamos “x” a la distancia a partir de la cual la temperatura del mango es inferior a 50°C , se tiene,

$$\frac{50 - 20}{100 - 20} = 0,375 = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{15,31} (1 - \frac{x}{0,175}) \}}{\text{Ch} \sqrt{15,31}} \quad \boxed{x = 0,0439 \text{ m}}$$

Calor evacuado a través del mango y rendimiento

$$q = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{\text{Bi}} \text{Th} \sqrt{\text{Bi}} = 40 \times 2,827 \times 10^{-5} \times \frac{80}{0,175} \times \sqrt{15,31} \text{Th} \sqrt{15,31} = 2,02 \text{ W}$$

$$\mu = \frac{\text{Th} \sqrt{\text{Bi}}}{\sqrt{\text{Bi}}} = \frac{\text{Th} \sqrt{15,31}}{\sqrt{15,31}} = 0,2523 = 25,23\%$$

b) Suponiendo que el flujo térmico en la parte interior del tubo del mango es despreciable, determinar a partir de qué posición en el mango la temperatura es inferior a 50°C .

$$\text{Bi} = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \left| \begin{array}{l} p = d_e = 0,01 \text{ m} \\ S = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} (0,01^2 - 0,008^2) = \\ = 2,827 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \end{array} \right| = \frac{10 \times 0,0314 \times 0,175^2}{40 \times 2,827 \times 10^{-5}} = 8,5$$

$$\frac{50 - 20}{100 - 20} = 0,375 = \frac{\text{Ch} \{ \sqrt{8,5} (1 - \frac{x}{0,175}) \}}{\text{Ch} \sqrt{8,5}} \quad \boxed{x = 0,06 \text{ m}}$$

Calor evacuado a través del mango y rendimiento

$$q = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{\text{Bi}} \text{Th} \sqrt{\text{Bi}} = 40 \times 2,827 \times 10^{-5} \times \frac{80}{0,175} \times \sqrt{8,5} \text{Th} \sqrt{8,5} = 1,4985 \text{ W}$$

$$\mu = \frac{T_h \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{T_h \sqrt{8,5}}{\sqrt{8,5}} = 0,3409 = 34,1\%$$

c) Si se considera el mango macizo, calcular a partir de qué posición la temperatura sería inferior a 50°C.

$$Bi = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \left| \begin{array}{l} p = d_e = x \cdot 0,01 = 0,0314 \text{ m} \\ S = \frac{d_e^2}{4} = \frac{x \cdot 0,01^2}{4} = 7,85 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \end{array} \right| = \frac{10 \times 0,0314 \times 0,175^2}{40 \times 7,85 \times 10^{-5}} = 3,06$$

$$\frac{50 - 20}{100 - 20} = 0,375 = \frac{Ch \{ \sqrt{3,06} (1 - \frac{x}{0,175}) \}}{Ch \sqrt{3,06}} \quad \boxed{x = 0,128 \text{ m}}$$

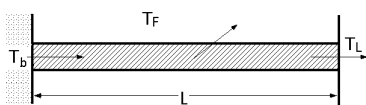
Calor evacuado a través del mango y rendimiento

$$q = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{Bi} T_h \sqrt{Bi} = 40 \times 2,827 \times 10^{-5} \times \frac{80}{0,175} \times \sqrt{3,06} T_h \sqrt{3,06} = 2,366 \text{ W}$$

$$\mu = \frac{T_h \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{T_h \sqrt{3,06}}{\sqrt{3,06}} = 0,538 = 53,8\%$$

d) El tipo de diseño del mango más favorable, será aquel que menos “queme”, o menos calor disipe; en nuestro caso es el mango (b)

IV.17.- Se tiene un cilindro de espesor uniforme $k = 10 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$, de 120 mm de longitud y 20 mm de diámetro, entre dos paredes, que se encuentra a 300°C y 100°C respectivamente. .



Se supondrá que el fluido exterior (aire) está a una temperatura de 10°C, y que el coeficiente de película es $h_C = 15 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$.

Determinar

a) El calor evacuado al exterior

b) La temperatura en la mitad de la aguja

RESOLUCION

Aleta con sus extremos a temperaturas T_b y T_L

a) Calor evacuado al exterior

El calor evacuado al exterior es la diferencia de los calores que pasan por las bases.

$$q = q_{=0} - q_{=1} = - \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} \frac{(1 - Ch \sqrt{Bi}) \{ (1) + 1 \}}{Sh \sqrt{Bi}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} S = \frac{d^2}{4} = \frac{x \cdot 0,02^2}{4} = 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ Bi = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \frac{15 \times (x \cdot 0,02) \times 0,12^2}{10 \times 3,14 \times 10^{-4}} = 4,32 \quad ; \quad (1) = \frac{100 - 10}{300 - 10} = 0,31 \end{array} \right| =$$

$$= - \frac{10 \frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^2.^\circ\text{C}} \times 3,14 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{0,12 \text{ m}} (300 - 10) \sqrt{4,32} \frac{(1 - Ch \sqrt{4,32}) \{0,31 + 1\}}{Sh \sqrt{4,32}} = 16 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

b) Temperatura en la mitad de la aguja

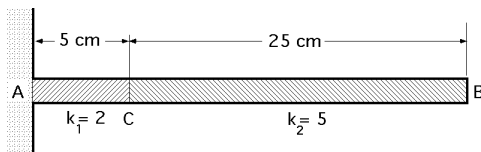
$$() = \frac{Sh \{ \sqrt{Bi} (1 -) \} + (1) Sh(\sqrt{Bi})}{Sh \sqrt{Bi}}$$

$$(0,5) = \frac{Sh \{ \sqrt{4,32} (1 - 0,5) \} + 0,31 \times Sh(\sqrt{4,32} \times 0,5)}{Sh \sqrt{4,32}} = 0,4119$$

$$\frac{T_{=0,5} - T_F}{T_b - T_F} = \frac{T_{=0,5} - 10}{300 - 10} ; \quad T_{=0,5} = 129,5^\circ\text{C}$$

IV.18.- Se tiene un cilindro de espesor uniforme, de 30 cm de longitud y 2 cm de diámetro, que sobresale de una superficie plana A que se encuentra a 400°C . El cilindro está conformado por dos tipos de material, de forma que los 5 primeros cm más cercanos a la pared tienen una conductividad térmica $k_1 = 2 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$, y el resto una conductividad térmica, $k_2 = 5 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$.

Se supondrá que el fluido exterior (aire) está a una temperatura de 20°C , y que el coeficiente de película lateral y en el extremo libre B es $h_C = 10 \text{ Kcal/h.m}^2.^\circ\text{C}$.



Determinar

- La temperatura T_C de unión de los materiales que conforman el cilindro
- El calor evacuado al exterior
- La temperatura en el extremo libre B

RESOLUCION

El cilindro se puede considerar, con conducción unidimensional, conformado por una aleta (AC) entre 2 temperaturas y una aleta (CB) con convección por el extremo libre.

Aleta con convección en el extremo libre, Base a T_C

El calor disipado q_2 es el que entra por la base C

$$q_2 = \frac{k_2 S (T_C - T_F) \sqrt{Bi_2}}{L_2} \frac{Th\sqrt{Bi_2} + \frac{S \sqrt{Bi_2}}{p L_2}}{1 + \frac{S \sqrt{Bi_2}}{p L_2} Th\sqrt{Bi_2}} = \left| \begin{array}{l} p = d = 0,02 \text{ m} ; L_2 = 0,25 \text{ m} \\ S = \frac{d^2}{4} = \frac{0,02^2}{4} = 0,000314 \text{ m}^2 \\ Bi_2 = \frac{h_C p L_2^2}{k_2 S} = \frac{10 \times 0,06283 \times 0,25^2}{5 \times 0,000314} = 25 \\ T_C - T_F = C \\ Th = 5 + \frac{0,000314 \times 5}{0,06283 \times 0,25} = 0,0314 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{5 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}} \times 0,000314 \text{ m}^2 \times C^\circ\text{C} \times 5}{0,25 \text{ m}} \frac{Th + \frac{0,000314 \times 5}{0,06283 \times 0,25}}{1 + \frac{0,000314 \times 5}{0,06283 \times 0,25} Th} = 0,0314 \text{ C}$$

Aleta con sus extremos a temperaturas T_A y T_C

El calor que atraviesa la base C es,

$$q_1 = - \frac{k_1 S}{L_1} (T_A - T_F) \sqrt{Bi_1} \frac{- \text{Ch}\{\sqrt{Bi_1} (1 -)\} + (1) \text{Ch}\{\sqrt{Bi_1} \}}{Sh\sqrt{Bi_1}} = \left| \begin{array}{l} L_1 = 0,05 \text{ m} ; \quad = 1 \\ (1) = \frac{T_C - T_F}{T_A - T_F} = \frac{400 - 20}{380} \end{array} \right| =$$

$$= - \frac{k_1 S}{L_1} (T_A - T_F) \sqrt{Bi_1} \frac{- \text{Ch}\{0\} + (1) \text{Ch}\sqrt{Bi_1}}{Sh\sqrt{Bi_1}} = \left| \begin{array}{l} Bi_1 = \frac{p L_1^2 h_C}{k_1 S} = \frac{0,06283 \times 0,05^2 \times 10}{2 \times 0,000314} = 2,5 \\ \sqrt{Bi_1} = 1,581 \end{array} \right| =$$

$$= - \frac{2 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}} \times 0,000314 \text{ m}^2}{0,05 \text{ m}} (400 - 20)^\circ\text{C} \times 1,581 \times \frac{- 1 + \frac{\text{Ch } 1,581}{380}}{Sh 1,581} = 3,2445 - 0,02162$$

Igualando los dos calores en C se obtiene,

$$0,0314 = 3,2445 - 0,02162 = 61,2^{\circ}\text{C} = T_C - 20 ; \quad T_C = 81,2^{\circ}\text{C}$$

b) Calor evacuado al exterior

El calor evacuado al exterior por el cilindro, es el mismo que penetra por la base A; por lo tanto,

$$q_A = -\frac{k_1 S}{L_1} (T_A - T_F) \sqrt{Bi_1} \frac{-\text{Ch}\{\sqrt{Bi_1} (1 - x)\} + (1) \text{Ch}\{\sqrt{Bi_1} x\}}{\text{Sh}\sqrt{Bi_1}} = \left| \begin{array}{l} x = 0 ; \quad = 0 \\ (1) = \frac{T_C - T_F}{T_A - T_F} = \frac{61,2}{400 - 20} = 0,161 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^{\circ}\text{C}} \times 0,000314 \text{ m}^2}{0,05 \text{ m}} (400 - 20)^{\circ}\text{C} \times 1,581 \times \frac{-\text{Ch } 1,581 + 0,161}{\text{Sh } 1,581} = 7,69 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

c) Temperatura en el extremo libre B = 1 (Aleta con convección en el extremo libre)

$$(1) = \frac{\text{Ch } 0 + 0}{\text{Ch } \sqrt{Bi_2} + \frac{S}{p L_2} \sqrt{Bi_2} \text{Sh } \sqrt{Bi_2}} = \frac{T_B - T_F}{T_C - T_F}$$

$$\frac{1}{\text{Ch } 5 + \frac{0,000314 \times 5}{0,06283 \times 0,25} \text{Sh } 5} = 0,006739 = \frac{T_B - 20}{81,2 - 20} \quad T_B = 20,41^{\circ}\text{C}$$

IV.19.- Un soldador consiste, (a efectos térmicos), en una varilla cilíndrica metálica que se calienta eléctricamente por un extremo B alcanzándose en el otro extremo A (punta del soldador) una cierta temperatura. La temperatura del medio exterior es de 20°C.

Las dimensiones del soldador son, Longitud L= 80 mm; Diámetro d= 5 mm

Determinar, considerando sólo efectos convectivos,

a) La temperatura en el extremo B cuando la temperatura en el extremo A sea de 400°C (en régimen estacionario), y la potencia eléctrica a aplicar en B en estas condiciones

b) Si se supone que al soldador se le aplica por el extremo B la potencia calculada en el apartado (a) y que el calentamiento se realiza uniformemente, hallar el tiempo que se tardará en conseguir en el mismo una temperatura de 300°C, supuesto el medio exterior a 20°C. ¿Qué temperatura máxima se podría conseguir en estas circunstancias?

Datos del material del soldador, k = 80 W/m°C ; h_C = 20 W/m²°C ; α = 1,93 x 10⁻⁴ m²/seg

RESOLUCION

a) Temperatura en el extremo B cuando la temperatura en el extremo A sea de 400°C (en régimen estacionario)

Se trata de una aguja cilíndrica (protuberancia) que intercambia calor con el medio exterior, con convección por el extremo libre,

Se conoce, T_A = 277°C ; α = 1

$$\frac{T(x) - T_F}{T_B - T_F} = \frac{\sqrt{Bi} \text{Ch}[(1-x)\sqrt{Bi}] + \frac{h_C L}{k} \text{Sh}[(1-x)\sqrt{Bi}]}{\sqrt{Bi} \text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k} \text{Sh}\sqrt{Bi}} ; \quad \frac{400 - 20}{T_B - 20} = \frac{\sqrt{Bi} \text{Ch}(0) + 0}{\sqrt{Bi} \text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C L}{k} \text{Sh}\sqrt{Bi}}$$

$$Bi = \frac{h_C p L^2}{k S} = \left| \begin{array}{l} p = d = 0,005 = 0,0157 \text{ m} \\ S = \frac{d^2}{4} = 1,96 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \end{array} \right| = \frac{20 \times 0,0157 \times 0,08^2}{80 \times 1,96 \times 10^{-5}} = 1,2816$$

$$\frac{400 - 20}{T_B - 20} = \frac{\sqrt{1,28}}{\sqrt{1,28} \text{Ch}\sqrt{1,28} + \frac{20 \times 0,08}{80} \text{Sh}\sqrt{1,28}} = 0,576 ; \quad T_B = 679,6^{\circ}\text{C}$$

Potencia eléctrica a aplicar en B en estas condiciones

Hay que determinar una cantidad de calor igual a la que se desprende a través de toda la varilla

$$q_{\text{conv}} = \frac{k S (T_b - T_F) \sqrt{Bi}}{L} \frac{Th\sqrt{Bi} + \frac{S\sqrt{Bi}}{pL}}{1 + \frac{S\sqrt{Bi}}{pL} Th\sqrt{Bi}} =$$

$$= \frac{80 \times 1,96 \times 10^{-5} (679,6 - 20) \sqrt{1,28}}{0,08} \frac{Th\sqrt{1,28} + \frac{1,96 \times 10^{-5} \sqrt{1,28}}{0,0157 \times 0,08}}{1 + \frac{1,96 \times 10^{-5} \sqrt{1,28}}{0,0157 \times 0,08} Th\sqrt{1,28}} = 12 \text{ W}$$

De otra forma

A partir de la eficiencia de la aleta se tiene,

$$q_{\text{conv}} = h_C A (T_B - T_A) \quad aleta = \left| \begin{array}{l} aleta = \frac{Th \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{Th \sqrt{1,28}}{\sqrt{1,28}} = 0,7172 \\ A = 1,276 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{array} \right| =$$

$$= 20 \times 1,276 \times 10^{-3} \times (679,6 - 20) \times 0,7172 = 12 \text{ W}$$

b) Si se supone que al soldador se le aplica por el extremo B la potencia calculada en el apartado (a) y que el calentamiento se realiza uniformemente, hallar el tiempo que se tardará en conseguir en el mismo una temperatura de 300°C, supuesto el medio exterior a 20°C.

Al realizarse el calentamiento uniformemente, se trata de un caso con condición de contorno con RESISTENCIA TERMICA INTERNA DESPRECIABLE, por lo que,

$$t = \frac{L c_p}{h_{CF}} \ln \left(\frac{q}{q - h_{CF} A (T - T_F)} \right) = \frac{V k}{A h_{CF}} \ln \left(\frac{q}{q - h_{CF} A (T - T_F)} \right)$$

en la que q/A es la potencia eléctrica a aplicar en B

$$q = 12 \text{ W}$$

$$\frac{V}{A} = \frac{\frac{d^2}{4} L}{d L + \frac{d^2}{4}} = \frac{d L}{4 L + d} = \frac{0,005 \times 0,08}{(4 \times 0,08) + 0,005} = 1,23 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$Bi = \frac{h_C \frac{V}{A}}{k} = \frac{20 \times 1,23 \times 10^{-3}}{80} = 3,07 \times 10^{-4} \ll 1 \text{ (que confirma el enunciado)}$$

$$A = d L + \frac{d^2}{4} = (4 \times 0,005 \times 0,08) + \frac{0,005^2}{4} = 1,276 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$t = \frac{1,23 \times 10^{-3} \text{ m} \times 80 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times 1,93 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} \ln \left(\frac{12 \text{ W}}{12 \text{ W} - 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times 20 \text{ m}^2 (300 - 20)^\circ\text{C}} \right) = 23,07 \text{ seg}$$

Temperatura máxima que se podrá conseguir en estas circunstancias

$$\text{Para: } t \quad ; \quad q = h_C A (T_{\text{máx}} - T_F) \quad ; \quad T_{\text{máx}} = T_F + \frac{q}{A h_C} = 20 + \frac{12}{1,276 \times 10^{-3} \times 20} = 490,2^\circ\text{C}$$

IV.20.- En una sala de maquinaria se desea mantener una temperatura uniforme de 20°C y para ello se dispone de un sistema de calefacción, por agua caliente a presión, a una temperatura media de 100°C, que consiste en un tubo de acero, $k = 42 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, de diámetro interior $d_i = 4 \text{ cm}$, diámetro exterior $d_b = 5 \text{ cm}$, y aletas longitudinales triangulares, de altura 4 cm y espesor en la base sobre el tubo de 0,785 cm, colocadas a una distancia entre centros de 15,7 mm, del mismo material que el tubo

La velocidad del agua caliente es de 1,5 m/seg

La longitud del tubo con aletas es de 300 metros. El tubo se encuentra en posición horizontal y la nave tiene 100 m de longitud.

Determinar

a) El calor disipado por una aleta

b) El calor cedido a la sala por la instalación de calefacción

c) La caída de temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo, y temperatura de la misma a la entrada del tubo

d) La eficiencia de este sistema de calefacción, como intercambiador de calor

e) La temperatura en el extremo de la aleta, y en su centro de gravedad, en el punto medio de la tubería.

Datos del agua caliente,

$\rho = 958,4 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 4,211 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$; $k = 0,682 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $\alpha = 0,294 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$; $Pr = 1,75$; $\beta = 85,09 (1/^\circ\text{K} \cdot \text{m}^3)$

Datos del aire,

$\rho = 1 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 1,01 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$; $k = 0,03 \text{ W/m}^\circ\text{C}$; $\alpha = 20,76 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$; $Pr = 0,7$; $\beta = 0,3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{seg}$

RESOLUCION

El problema se puede plantear como un intercambiador de calor compuesto por (tubo + aletas), por lo que se puede aplicar el concepto de (LMTD) una vez conocido el valor de (UA).

Para hallar (UA) hay que conocer el n° de aletas: $N = \frac{d_b}{1} = \frac{50 \text{ mm}}{15,7} = 10$

Cálculo de $h_{c \text{ ext}}$ (aire en reposo), En primera aproximación se puede suponer una temperatura de pared de $99,5^\circ\text{C}$, que habrá que comprobar a posteriori.

$$Gr = \frac{g}{2} \frac{T}{d_{\text{base}}^3} = \left| \begin{array}{l} T = 99,5 - 20 = 79,5^\circ\text{C} \quad ; \quad d_{\text{base}} = 0,05 \text{ m} \\ \frac{g}{2} = \frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \times \frac{1}{(273 + 20)^\circ\text{K}}}{(20,76 \times 10^{-6})^2 \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 7,76 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{K}} \end{array} \right| =$$

$$= 7,76 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{K}} \times 79,5 \times 0,05^3 = 771.150$$

$$Gr.Pr = 771.150 \times 0,7 = 539.805 < 10^7 \text{ (laminar)}$$

$$h_{c \text{ ext}} = 1,18 \sqrt[4]{\frac{T}{d_b}} = 1,18 \sqrt[4]{\frac{79,5}{0,05}} = 7,45 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

a) Calor disipado por una aleta triangular

No se conoce la temperatura en la base T_b , pero en primera aproximación podemos suponer vale $99,5^\circ\text{C}$, que es un poco inferior a la temperatura media del agua caliente, ya que el material de la tubería tiene una $k = 42 \text{ W/m}^\circ\text{C}$.

$$q_{1 \text{ aleta long.}} = \mu h_{c \text{ ext}} A_{\text{lateral aleta}} (T_b - T_{\text{ext}})$$

$$A_{\text{lateral aleta}} = 2 (L^* \times 300 \text{ m}) = 2 (0,04 \times 300) = 24 \text{ m}^2$$

$$T_b = T_{\text{b}} - T_{\text{F}} = 99,5 - 20 = 79,5^\circ$$

$$t = \sqrt{\frac{8 f h_{cF} L^2}{k b}} = |f = 1| = \sqrt{\frac{8 h_{cF} L^2}{k b}} = \sqrt{\frac{8 \times 7,45 \times 0,04^2}{42 \times 0,785 \times 10^{-2}}} = 0,5378 \quad ; \quad G_4(t) = 0,241$$

$$\mu = \frac{2 G_4(t)}{t} = \frac{2 \times 0,241}{0,5378} = 0,8925$$

$$q_{1 \text{ aleta long.}} = 0,8925 \times 7,45 \times 24,1 \times (99,5 - 20) = 12.750 \text{ W}$$

Calor disipado por todas las aletas triangulares,

$$q_{N \text{ aletas long.}} = 12.750 \times 10 = 127.503 \text{ W}$$

b) Calor cedido a la sala por la instalación de calefacción

$$q_{\text{tubo}} = h_{\text{c ext}} A_{\text{tubo}} (T_b - T_{\text{ext}}) = \left| \frac{A_{\text{tubo}} = (d_b - 10 \times 0,00783) \times a_{\text{tubo}} =}{\{ (\times 0,05) - (10 \times 0,00783) \} \times 300 = 23,57 \text{ m}^2} \right| =$$

$$= 7,45 \times 23,57 \times (99,5 - 20) = 13.962 \text{ W}$$

$$Q_{\text{total}} = q_{\text{tubo}} + q_{\text{aletas}} = 13.962 + 127.503 = 141.465 \text{ W} = \{ A_{\text{tubo}} + \mu A_{\text{aletas}} \} h_{\text{c ext}} (T_b - T_{\text{ext}})$$

De otra forma,

$$Q = \frac{T_F - T_{\text{ext}}}{\frac{1}{A_i h_{ci}} + \frac{1}{2 \frac{k}{a} \ln \frac{r_b}{r_i}} + \frac{1}{(\mu A_{\text{aletas}} + A_{\text{tubo}}) h_{\text{c ext}}}} = \left| \frac{\mu = 0,8925}{A_{\text{aletas}} = 24 \text{ m} \times 10 = 240 \text{ m}^2}{A_{\text{tubo}} = 23,57 \text{ m}^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{\text{Coeficiente de convección del fluido interior}}{\text{Re}_{\text{di}} = \frac{u_F d_i}{\nu_{\text{agua}}} = \frac{1,5 \times 0,04}{0,294 \times 10^{-6}} = 204.080}{\text{Nu} = 0,023 \text{ Re}^{0,8} \text{ Pr}^{0,3} = 0,023 \times 204.080^{0,8} \times 1,75^{0,3} = 481,4 ; h_{ci} = \frac{481,4 \times 0,682}{0,04} = 8.207 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}}} \right| =$$

$$= \frac{100 - 20}{\frac{1}{(2 \times 0,04 \times 300) \times 8207} + \frac{1}{2 \times 42 \times 300) \ln \frac{0,5}{0,4}} + \frac{1}{\{(0,8925 \times 240) + 23,57\} \times 7,45}} = 140.608 \text{ W}$$

De aquí se puede obtener la temperatura de la pared exterior T_b del tubo,

$$Q_{\text{total}} = \frac{T_F - T_b}{\frac{1}{A_i h_{ci}} + \frac{1}{2 \frac{k}{a} \ln \frac{r_b}{r_i}}} = \frac{100 - T_b}{\frac{1}{(2 \times 0,04 \times 300) \times 8207} + \frac{1}{2 \times 42 \times 300) \ln \frac{0,5}{0,4}}}$$

$$= \frac{100 - T_b}{1,616 \times 10^{-6} + 2,819 \times 10^{-6}} = 140.608 \text{ W} ; \boxed{T_b = 99,38^\circ\text{C}}$$

que es una aproximación más que suficiente el haber considerado la temperatura de $99,5^\circ\text{C}$.

c) Caída de la temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo

$$Q_{\text{total}} = 141.465 \text{ W} = G_{\text{agua}} c_p \text{ agua} (T_{\text{entrada}} - T_{\text{salida}}) = (i u_F i) c_p \text{ agua} T^* =$$

$$= \left| i = \frac{d_i^2}{4} = \frac{\times 0,04^2}{4} = 0,001257 \text{ m}^2 \right| =$$

$$= 0,001257 \text{ m}^2 \times 1,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 958,4 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 4211 \frac{\text{J}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times T^*^\circ\text{C} = 7607,3 T^*$$

Temperatura del agua a la entrada y salida del tubo

$$T^* = \frac{141.465}{7607,3} = 18,6^\circ\text{C} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{\text{entrada}} = 100 + \frac{18,6}{2} = 109,3^\circ\text{C} \\ T_{\text{salida}} = 100 - \frac{18,6}{2} = 90,7^\circ\text{C} \end{array} \right\}$$

d) La eficiencia de este sistema de calefacción, como intercambiador de calor

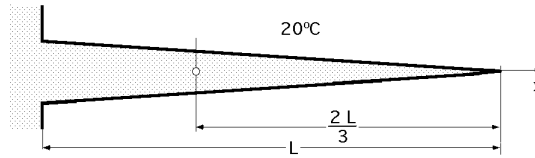
$$\text{NTU} = \frac{U A}{C_{\text{mín}}} = \left| \frac{U A (T_F - T_{\text{ext}}) = 141.465 \text{ W} = U A (100 - 20)}{U A = 1768,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}}{C_{\text{mín}} = G_{\text{agua}} c_p \text{ agua} = 7607,3 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}} \right| = \frac{1768,3}{7607,3} = 0,2324$$

$$= 1 - e^{-(\text{NTU})} = 1 - e^{-0,2324} = 0,2074 = 20,74\%$$

$$\text{Comprobación: } Q_{\text{total}} = C_{\text{mín}} (T_{\text{Cl}} - T_{\text{Fl}}) =$$

$$= C_{\min} (T_{\text{entrada agua}} - T_{\text{ext}}) = 0,2474 \times 7607,3 \times (109,3 - 20) = 140.900 \text{ W}$$

e) Temperatura en el extremo de la aleta (su vértice), para la situada en el centro de la tubería



$$\text{vértice} = \frac{I_0(t - t_b)}{I_0(t)} = (99,5 - 20) \frac{I_0(0)}{I_0(0,5378)} = 79,5^\circ\text{C} \frac{1}{1,076} = 0,93$$

$$T_{\text{vértice}} = 20 + (0,93 \times 79,5) = 93,9^\circ\text{C}$$

Temperatura en el centro de gravedad de la aleta,

$$\frac{I_0(t - t_b)}{I_0(t)} = \left| \begin{array}{l} t = 0,5378 \quad ; \quad t = \sqrt{\frac{x}{L}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,812 \\ t - t_b = 0,5378 \times 0,812 = 0,4367 \end{array} \right| = \frac{I_0(0,4367)}{I_0(0,5378)} = \frac{1,04986}{1,076} = 0,9757$$

$$\frac{T_{\text{centro gravedad}} - T_F}{T_b - T_F} = 0,9757 \quad ; \quad \frac{T_{\text{centro gravedad}} - 20}{99,5 - 20} = 0,9757 \quad ; \quad T_{\text{centro gravedad}} = 97,6^\circ\text{C}$$

IV.21.- En una sala de maquinaria se desea mantener una temperatura uniforme de 20°C y para ello se dispone de un sistema de calefacción, por agua caliente a presión, a una temperatura media de 100°C, que consiste en un tubo de acero, $k = 42 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, de diámetro interior $d_i = 4 \text{ cm}$, diámetro exterior $d_b = 5 \text{ cm}$, y aletas anulares del mismo material que el tubo, de diámetro exterior $d_e = 15 \text{ cm}$ y espesor en la base sobre el tubo de 0,3 cm, colocadas a una distancia entre centros de 4 cm.

La velocidad del agua caliente es de 0,5 m/seg

La longitud del tubo con aletas, horizontal, es de 50 metros.

Las aletas están aisladas térmicamente en su extremo libre

Se puede suponer una temperatura en la base de 99,5°C

Determinar

a) El calor disipado por una aleta

b) El calor cedido a la sala por la instalación de calefacción

c) La caída de temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo, y temperatura de la misma a la entrada del tubo

d) La eficiencia de este sistema de calefacción, como intercambiador de calor

e) La temperatura en el extremo aislado de las aletas

Datos del agua caliente,

$$= 958,4 \text{ kg/m}^3 \quad ; \quad c_p = 4,211 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C} \quad ; \quad k = 0,682 \text{ W/m}^\circ\text{C} \quad ; \quad \alpha = 0,294 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg} \quad ; \quad Pr = 7,51 \quad ; \quad g / \alpha^2 = 85,09 \text{ 1/}^\circ\text{K.m}^3$$

Datos del aire,

$$= 1 \text{ kg/m}^3 \quad ; \quad c_p = 1,01 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C} \quad ; \quad k = 0,03 \text{ W/m}^\circ\text{C} \quad ; \quad \alpha = 20,76 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg} \quad ; \quad Pr = 0,7 \quad ; \quad g / \alpha^2 = 0,3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{seg}$$

RESOLUCION

El problema se puede plantear como un intercambiador de calor compuesto por (tubo + aletas), por lo que se puede aplicar el concepto de (LMTD) una vez conocido el valor de (UA).

Para hallar (UA) hay que conocer el n° de aletas en el tubo: $N = \frac{50 \text{ m}}{0,04 \text{ m}} = 1250 \text{ aletas}$

Cálculo de $h_{c \text{ ext}}$ (aire en reposo)

$$Gr = \frac{g}{2} \frac{T d_{base}^3}{\left(\frac{g}{2} = \frac{9,8 \frac{m}{seg^2} \times \frac{1}{(273+20)^{\circ}K}}{(20,76 \times 10^{-6})^2 \frac{m^2}{seg}} = 7,76 \times 10^7 \frac{1}{m^3 \text{ }^{\circ}K} \right)} =$$

$$= 7,76 \times 10^7 \frac{1}{m^3 \text{ }^{\circ}K} \times 79,5 \times 0,05^3 = 771.150$$

$$Gr.Pr = 394830 \times 0,7 = 539805 < 10^7 \text{ (laminar)}$$

$$h_{c \text{ ext}} = 1,18 \sqrt[4]{\frac{T}{d_b}} = 1,18 \sqrt[4]{\frac{79,5}{0,05}} = 7,45 \frac{W}{m^2 \text{ }^{\circ}C}$$

De otra forma,

El coeficiente de convección se puede calcular con la fórmula,

$$\sqrt{Nu} = 0,6 \times 0,387 \times \sqrt[6]{\frac{Gr.Pr}{\{1 + (\frac{0,56}{Pr})^{9/16}\}^{16/9}}}, \text{ válida en: } 10^5 < Gr.Pr < 10^{12} ; Pr > 0,5$$

$$\sqrt{Nu} = 0,6 \times 0,387 \times \sqrt[6]{\frac{539805}{\{1 + (\frac{0,56}{0,7})^{9/16}\}^{16/9}}} = 3,495 ; Nu = 12,22$$

$$h_{cF} = \frac{Nu \cdot k}{d} = \frac{12,22 \times 0,03}{0,05} = 7,332 \frac{W}{m^2 \text{ }^{\circ}C}$$

a) Calor disipado por una aleta con su extremo libre térmicamente aislado

$$q_{l \text{ aleta}} = \mu h_{c \text{ ext}} A_{lateral \text{ aleta}} (T_b - T_{ext})$$

$$A_{lateral \text{ aleta}} = 2 (r_e^2 - r_b^2) = \left| \frac{r_e = 7,5 \text{ cm}}{r_b = 2,5 \text{ cm}} \right| = 2 (0,075^2 - 0,025^2) = 0,031416 \text{ m}^2$$

$$T_b = T_b - T_F = 99,5 - 20 = 79,5^{\circ}C$$

$$\left| \begin{array}{l} \mu = \frac{r_b}{r_e} = \frac{0,025}{0,075} = 0,333 \\ \mu = \sqrt{\frac{2 h_{cF} r_e^2}{k e}} = \sqrt{\frac{2 \times 7,45 \times 0,075^2}{42 \times 0,003}} = 0,809 \end{array} \right| \quad \boxed{\mu = G_2(\mu_{an} \cdot \mu_{an}) = 0,86}$$

$$q_{l \text{ aleta}} = 0,86 \times 7,45 \frac{W}{m^2 \text{ }^{\circ}C} \times 0,031416 \text{ m}^2 \times (99,5 - 20) = 16 \text{ W}$$

Calor disipado por todas las aletas,

$$q_{N \text{ aletas}} = 16 \text{ W} \times 1250 = 20.000 \text{ W}$$

b) Calor cedido a la sala por la instalación de calefacción

$$q_{tubo} = h_{c \text{ ext}} A_{tubo} (T_b - T_{ext}) = \left| A_{tubo} = d_b (0,04 - 0,003) = 5,812 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \right| =$$

$$= 5,812 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \times 7,45 \frac{W}{m^2 \text{ }^{\circ}C} (99,5 - 20)^{\circ}C = 3,442 \text{ W}$$

$$q_{tubo \text{ total}} = 1250 \times 3,442 = 4.302,8 \text{ W}$$

$$Q_{total} = q_{tubo} + q_{aletas} = 20.000 + 4302,8 = 24.302,8 \text{ W}$$

$$\text{ó } Q_{total} = \{ A_{tubo} + \mu A_{aletas} \} h_{c \text{ ext}} (T_b - T_{ext})$$

De otra forma,

$$Q = \frac{T_F - T_{ext}}{\frac{1}{A_i h_{ci}} + \frac{1}{2} \frac{1}{k a} \ln \frac{r_b}{r_i} + \frac{1}{N (\mu A_{aletas} + A_{tubo}) h_{c ext}}} = \left| \begin{array}{l} \mu = 0,86 \\ A_{aletas} = 0,031416 \text{ m}^2 \\ A_{tubo} = 0,005812 \text{ m}^2 \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Coeficiente de convección del fluido interior} \\ Re_{di} = \frac{u_F d_i}{\nu_{agua}} = \frac{0,5 \times 0,04}{0,294 \times 10^{-6}} = 68027 \\ Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,3} = 0,023 \times 68027^{0,8} \times 1,75^{0,3} = 200 ; h_{ci} = \frac{200 \times 0,682}{0,04} = 3410 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{100 - 20}{\frac{1}{(2 \times 0,04 \times 50) \times 3410} + \frac{1}{2 \times 42 \times 50} \ln \frac{0,5}{0,4} + \frac{1}{1250 \times \{(0,86 \times 0,031416) + 0,005812\} \times 7,45}} = 24010 \text{ W}$$

c) Caída de la temperatura del agua calefactora que circula por el interior del tubo

$$Q_{total} = 24302,8 \text{ W} = G_{agua} c_p \text{ agua} (T_{entrada} - T_{salida}) = (i u_F i) c_p \text{ agua} T^* =$$

$$= \left| i = \frac{d_i^2}{4} = \frac{0,04^2}{4} = 0,001257 \text{ m}^2 \right| =$$

$$= 0,001257 \text{ m}^2 \times 0,5 \frac{m}{seg} \times 958,4 \frac{Kg}{m^3} \times 4211 \frac{J}{Kg \cdot ^\circ C} \times T^* \cdot ^\circ C = 2535,8 T^*$$

Temperatura del agua a la entrada y salida del tubo

$$T^* = \frac{24302,8}{2535,8} = 9,58^\circ C \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{entrada} = 100 + \frac{9,6}{2} = 104,8^\circ C \\ T_{salida} = 100 - \frac{9,6}{2} = 95,2^\circ C \end{array} \right\}$$

d) La eficiencia de este sistema de calefacción, como intercambiador de calor

$$= 1 - e^{-(NTU)}$$

$$NTU = \frac{U A}{C_{mín}} = \left| \begin{array}{l} U A (T_F - T_{ext}) \\ 24302,8 \text{ W} = U A (100 - 20) ; U A = 303,785 \frac{W}{m \cdot ^\circ C} \\ C_{mín} = G_{agua} c_p \text{ agua} = 2535,8 \frac{W}{^\circ C} \end{array} \right| = \frac{303,785}{2535,8} = 0,1198$$

$$= 1 - e^{-(NTU)} = 1 - e^{-0,1198} = 0,113 = 11,3\%$$

Comprobación: $Q_{total} = C_{mín} (T_{C1} - T_{F1}) =$

$$= C_{mín} (T_{entrada \text{ agua}} - T_{ext}) = 0,113 \times 2535,8 \times (104,8 - 20) = 24.277 \text{ W}$$

e) Temperatura en el extremo aislado de la aleta central

$$e = b G_1 (a_n - a_n) = \left| \left\{ \begin{array}{l} a_n = 0,333 \\ a_n = 0,809 \end{array} \right\} G_1 (a_n - a_n) = 0,83 \right| = 0,83 b$$

$$T_e = 20 + (0,83 \times 79,5) = 86^\circ C \text{ (aleta central)} ; \left\{ \begin{array}{l} T_e \text{ primera aleta} = 20 + 0,83 \times \{(104,8 - 0,5) - 20\} = 89,55^\circ C \\ T_e \text{ última aleta} = 20 + 0,83 \times \{(95,2 - 0,5) - 20\} = 82,00^\circ C \end{array} \right\}$$

IV.22.- En una habitación se dispone de un sistema de calefacción por agua caliente que consiste en un tubo de acero de diámetro interior $d_i = 4 \text{ cm}$ y diámetro exterior $d_b = 4,4 \text{ cm}$, y aletas anulares de diámetro exterior $d_e = 10 \text{ cm}$ y espesor $0,1 \text{ cm}$, colocadas a una distancia entre centros de 5 cm . El coeficiente $k = 42 \text{ Kcal/hm}^\circ C$

La longitud del tubo es de 12 metros

El coeficiente de película al exterior es, $h_{c ext} = 5 \text{ Kcal/hm}^2 \cdot ^\circ C$

El coeficiente de película por el interior del tubo correspondiente al {agua caliente-pared interior del tubo} es $h_{ci} = 1000 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$

Las aletas están aisladas térmicamente en su extremo

Se puede suponer que la temperatura exterior del tubo es igual a la temperatura en la base de la aleta T_b

Temperatura del aire, $T_{ext} = 20\text{°C}$

Determinar

a) El valor de $U A$

b) La temperatura de salida del agua calefactora que circula por el interior del tubo y el calor cedido a la habitación, si circulan 10 litros/minuto de agua, que entra en la tubería a 60°C

c) La temperatura en el extremo aislado de la primera aleta

Datos del agua, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $c_p = 1 \text{ Kcal/kg°C}$

RESOLUCION

El problema se puede plantear como un intercambiador de calor compuesto por (tubo + aletas), por lo que se puede aplicar el concepto de (LMTD) una vez conocido el valor de (UA).

Para hallar (UA) hay que conocer el n° de aletas: $N = \frac{12 \text{ m}}{0,05} = 240$

Calor disipado por una aleta

$$q_{1 \text{ aleta anular}} = \mu h_{c \text{ ext}} A_{\text{lateral aleta}} (T_b - T_{\text{ext}})$$

No se conoce la temperatura en la base T_b

$$A_{\text{lateral aleta}} = 2 (r_e^2 - r_b^2) = \left| \begin{array}{l} r_e = 5 \text{ cm} \\ r_b = 2,2 \text{ cm} \end{array} \right| = 2 (0,05^2 - 0,022^2) = 0,0127 \text{ m}^2$$

Eficiencia de la aleta,

$$\left| \begin{array}{l} a_n = \frac{r_b}{r_e} = \frac{0,022}{0,05} = 0,44 \\ a_n = \sqrt{\frac{2 h_{cF} r_e^2}{k e}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times 0,05^2}{42 \times 0,001}} = 0,77 \end{array} \right| \quad \mu = G_2(a_n \cdot a_n) = 0,92$$

$$q_{1 \text{ aleta}} = 0,92 \times 5 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2\text{°C}} \times 0,01276 \text{ m}^2 \times (T_b - 20)\text{°C} = 0,05842 (T_b - 20) \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$q_{\text{tubo (para 1 aleta)}} = h_{c \text{ ext}} A_{\text{tubo}} (T_b - T_{\text{ext}}) = \left| A_{\text{tubo}} = \pi \times 0,044 \times 0,049 = 0,0068 \text{ m}^2 \right| = 5 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2\text{°C}} \times 0,0068 \text{ m}^2 \times (T_b - 20)\text{°C} = 0,034 (T_b - 20) \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

a) Valor de (UA)

$$Q_{\text{total}} = N (q_{\text{tubo}} + q_{\text{aletas}}) = 240 \times \{0,05842 (T_b - 20) + 0,034 \times (T_b - 20)\} = \frac{T_b - 20}{0,04508} \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{total}} &= \frac{T_F - T_i}{\frac{1}{2 r_i a h_{ci}}} = \frac{T_i - T_b}{\frac{1}{2 k a \ln \frac{r_b}{r_i}}} = \frac{T_b - 20}{0,04508} = \\ &= \frac{T_F - 20}{\frac{1}{2 r_i a h_{ci}} + \frac{1}{2 k a \ln \frac{r_b}{r_i}} + 0,04508} = \frac{T_F - 20}{\frac{1}{2 \times 0,02 \times 12 \times 1000} + \frac{1}{2 \times 42 \times 12 \ln \frac{0,022}{0,020}} + 0,04508} = \\ &= \frac{T_F - 20}{0,0006631 + 0,00003009 + 0,04508} = \frac{T_F - 20}{0,045773} = U A (T_F - 20) \end{aligned}$$

$$U A = \frac{1}{0,045773} = 21,847 \frac{\text{Kcal}}{\text{h °C}}$$

b) Temperatura de salida del agua calefactora que circula por el interior del tubo (que entra en la tubería a 60°C si circulan 10 litros/minuto de agua)

$$Q_{\text{total}} = G_{\text{agua}} c_p \text{ agua} (T_{\text{entrada}} - T_{\text{salida}}) = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}}$$

$$T_2 = T_{\text{ent}} - T_{\text{ext}} = 60 - 20 = 40$$

$$T_1 = T_{\text{sal}} - T_{\text{ext}} = T_{\text{sal}} - 20$$

$$G_{\text{agua}} = V = 10 \times 60 \frac{\text{lit}}{\text{hora}} \times 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 600 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}}$$

$$Q_{\text{total}} = G_{\text{agua}} c_p \text{ agua} (T_{\text{entrada}} - T_{\text{salida}}) = 600 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times (60 - T_{\text{sal}})^\circ\text{C}$$

$$Q_{\text{total}} = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = 21,847 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}^\circ\text{C}} \times \frac{40 - (T_{\text{sal}} - 20)}{\ln \frac{40}{T_{\text{sal}} - 20}} = 21,847 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}^\circ\text{C}} \times \frac{60 - T_{\text{sal}}}{\ln \frac{40}{T_{\text{sal}} - 20}}$$

Igualando las anteriores se obtiene,

$$600 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}^\circ\text{C}} \times (60 - T_{\text{sal}})^\circ\text{C} = 21,847 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}^\circ\text{C}} \times \frac{60 - T_{\text{sal}}}{\ln \frac{40}{T_{\text{sal}} - 20}} \quad ; \quad 600 = \frac{21,847 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}^\circ\text{C}}}{\ln \frac{40}{T_{\text{sal}} - 20}} \quad ; \quad \boxed{T_{\text{sal}} = 58,56^\circ\text{C}}$$

Calor cedido a la habitación

$$Q_{\text{total}} = G_{\text{agua}} c_p \text{ agua} (T_{\text{entrada}} - T_{\text{salida}}) = 600 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times (60 - 58,56)^\circ\text{C} = 858,2 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

De otra forma,

$$= 1 - e^{-(NTU)}$$

$$NTU = \frac{U A}{C_{\text{mín}}} = \left| \begin{array}{l} U A = 21,847 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}^\circ\text{C}} \\ C_{\text{mín}} = G_{\text{agua}} c_p \text{ agua} = 600 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} = 600 \frac{\text{Kcal}}{\text{h}^\circ\text{C}} \end{array} \right| = \frac{21,847}{600} = 0,03641$$

$$= 1 - e^{-(NTU)} = 1 - e^{-0,03641} = 0,035756 = 3,57\%$$

$$Q_{\text{total}} = C_{\text{mín}} (T_{\text{C1}} - T_{\text{F1}}) = C_{\text{mín}} (T_{\text{entrada agua}} - T_{\text{ext}}) = 0,035756 \times 600 \times (60 - 20) = 858,16 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

c) Temperatura en el extremo aislado de la primera aleta

$$e = \frac{G_1(T_{\text{an}} - T_{\text{ext}})}{G_1(T_{\text{an}} - T_{\text{ext}})} = \left| \begin{array}{l} G_1(T_{\text{an}} - T_{\text{ext}}) = \\ G_1(0,44 \cdot 0,77) = 0,90 \end{array} \right| = 0,90 \quad ; \quad T_e - T_{\text{ext}} = 0,90 \times (T_b - T_{\text{ext}})$$

$$1^{\text{a}} \text{ Aleta } (T_F = 60^\circ\text{C}) \quad ; \quad \frac{T_b - 20}{0,04508} = \frac{T_F - 20}{0,045773} = \frac{60 - 20}{0,045773} = 873,877 \quad ; \quad T_b = 59,4^\circ\text{C}$$

$$T_e = T_{\text{ext}} + 0,90 \times (T_b - T_{\text{ext}}) = 20 + 0,90 \times (59,4 - 20) = 55,45^\circ\text{C}$$

IV.23.- En un tubo de acero que tiene una conductividad térmica de 40 Kcal/hm°C y diámetro exterior $d_e=30$ mm, se han dispuesto 20 aletas rectas uniformes a lo largo del mismo, de dimensiones, espesor 2 mm; longitud 20 mm

Las aletas se considerarán con su extremo libre aislado térmicamente.

Se supondrá que el fluido que envuelve al conjunto se encuentra a una temperatura de 20°C, que la superficie exterior del tubo está a 90°C y que el coeficiente de película asociado toma un valor $h_c=30$ Kcal/h.m².°C.

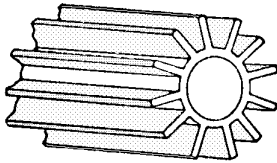
Si las aletas se encuentran uniformemente distribuidas sobre la superficie exterior del tubo, determinar,

a) El calor disipado y el aumento en % que supone esta disipación mediante aletas, frente al tubo sin aletas.

b) Valor del coeficiente máximo de película que debería existir entre el tubo y el fluido, para que dejase de ser interesante el uso de superficies adicionales.

c) El calor disipado, cuando en otro tubo de las mismas características se colocan 100 aletas anulares por metro lineal de tubo, de espesor constante igual a 2 mm, y radio exterior de 35 mm; el diámetro del tubo es de 30 mm. Las condiciones térmicas son las del enunciado.

RESOLUCION



a) Calor disipado y el aumento en % que supone esta disipación mediante aletas, frente al tubo sin aletas.

Para el caso de no existir aletas, el calor desprendido por el tubo limpio, por metro lineal es,

$$q = h_{cF} A \quad T = 30 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}} \times 0,03 \text{ m}^2 \times (90 - 20) \text{°C} = 197,92 \frac{\text{Kcal}}{\text{h. m lineal tubería}}$$

Calor disipado a través del espacio de tubo no ocupado por las aletas,

$$q_1 = \frac{197,92 \frac{\text{Kcal}}{\text{h. m lineal tubería}} \times \text{Fracción de tubo}}{0,03} = \left| \begin{array}{l} \text{Fracción de tubo} = \\ (0,03) - (20 \times 0,002) = 0,054247 \end{array} \right| = \frac{197,92 \times 0,054247}{0,03} = 113,92 \frac{\text{Kcal}}{\text{h. m lineal}}$$

Las aletas son longitudinales con el extremo térmicamente aislado; el calor disipado por las mismas es,

$$q_2 = k S \frac{T_b - T_F}{L} \sqrt{\text{Bi}} \text{Th} \sqrt{\text{Bi}} n = \left| \begin{array}{l} k = 40 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.°C}} ; S = 0,002 \times 1 = 0,002 \text{ m}^2 ; L = 0,2 \text{ m} \\ T_b - T_0 = 90 - 20 = 70 \text{°C} ; p = (1 + 0,002) \times 2 = 2,004 \text{ m} \\ n = \text{nº de aletas} = 20 ; \text{Bi} = \frac{h_c p L^2}{k S} = \frac{30 \times 2,004 \times 0,02^2}{40 \times 0,002} = 0,3006 \end{array} \right| =$$

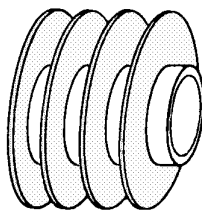
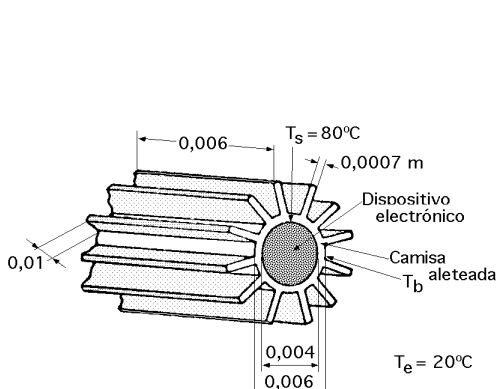
$$= 40 \times 0,002 \frac{70}{0,02} \sqrt{0,3006} \text{Th} \sqrt{0,3006} \times 20 = 1533 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m lineal}}$$

$$q_{\text{disipado}} = q_1 + q_2 = 113,92 + 1533 = 1646,92 \frac{\text{Kcal}}{\text{h. m lineal}}$$

$$\text{Aumento en \%} = \frac{1646,92 - 197,92}{197,92} \times 100 = 732,1\%$$

b) Valor del coeficiente máximo de película que debería existir entre el tubo y el fluido, para que dejase de ser interesante el uso de superficies adicionales.

$$\frac{h_{cF} e}{2 k} < 1 ; h_{cF} < \frac{2 k}{e} ; h_{cF} < \frac{2 \times 40}{0,002} ; h_{cF} < 40.000 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$



luego se justifica el uso de aletas cuando h_{cF} sea menor de $40000 \text{ Kcal/hm}^2\text{°C}$

c) *El calor disipado, cuando en otro tubo de las mismas características se colocan 100 aletas anulares por metro lineal de tubo, de espesor constante igual a 2 mm, y radio exterior de 35 mm; el diámetro del tubo es de 30 mm. Las condiciones térmicas son las del enunciado.*

$$q_1 = \text{calor disipado a través del tubo} = \{1 - (100 \times 0,002)\} q = 0,8 \times 197,92 = 158,3 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}}$$

$$q_2 = \text{calor disipado a través de las 100 aletas por metro} = (1 - \frac{2}{a_n}) k e \frac{2}{a_n} G_2(\frac{2}{a_n}, \frac{2}{a_n}) n =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a_n = \sqrt{\frac{2 h_{cF} r_e^2}{k e}} = \sqrt{\frac{2 \times 30 \times 0,035^2}{40 \times 0,002}} = 0,9585 \\ a_n = \frac{r_b}{r_e} = \frac{15}{35} = 0,4286 \quad ; \quad b = 90 - 20 = 70^\circ\text{C} \\ G_2(\frac{2}{a_n}, \frac{2}{a_n}) = G_2(0,428, 0,952) = 0,87 \quad ; \quad n = 100 \text{ aletas} \end{array} \right| =$$

$$= (1 - 0,4286^2) \times 40 \times 0,002 \times 70 \times 0,9585^2 \times 0,87 \times 100 = 1147,86 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}}$$

$$q_{\text{disipado}} = q_1 + q_2 = 158,3 + 1147,86 = 1306,2 \frac{\text{Kcal}}{\text{h. m lineal}}$$

IV.24.- *Un pequeño dispositivo electrónico que genera calor por efecto Joule, lo disipa durante su funcionamiento al exterior. Este dispositivo se puede considerar como un cilindro de dimensiones, radio $R_i = 0,002 \text{ m}$ y altura, $a = 0,006 \text{ m}$.*

Para que su funcionamiento sea lo más correcto posible se le inserta una camisa aleteada de aluminio $k = 200 \text{ W/m}^2\text{°K}$ con 12 aletas longitudinales en su superficie exterior, que tienen su extremo libre térmicamente aislado. Los datos de la camisa aleteada son, diámetro exterior $D_e = 0,006 \text{ m}$, espesor de las aletas, $e = 0,0007 \text{ m}$, y longitud de las aletas, $L = 0,01 \text{ m}$.

La resistencia de contacto (dispositivo electrónico-camisa aleteada) es muy importante, y vale, $10^{-3} \text{ m}^2\text{°K/W}$. El coeficiente de película al exterior es, $h_{cF} = 25 \text{ W/m}^2\text{°K}$. La temperatura exterior es $T_e = 20^\circ\text{C}$

La camisa aleteada se ha diseñado para que la superficie del dispositivo electrónico no supere los 80°C .

Determinar,

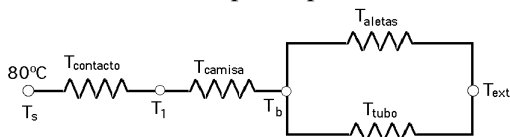
a) El calor disipado al exterior

b) La temperatura que adquiriría la superficie del dispositivo electrónico si no se utilizase la camisa aleteada.

c) La temperatura de los diámetros interior y exterior de la camisa aleteada y en el extremo de la aleta

RESOLUCION

El circuito térmico puede ponerse en la forma,



El calor evacuado es,

$$q = \frac{T_s - T_{\text{ext}}}{R_{\text{contacto}}(\text{dispositivo-camisa}) + R_{\text{camisa}} + R_{\text{aletas + tubo}}}$$

a) Calor disipado al exterior

$$\text{Calor disipado por la (aleta + tubo)} = h_{cF} (A_{\text{tubo}} + \mu A_{\text{aletas}}) (T_b - T_{\text{ext}}) = \frac{T_b - T_{\text{ext}}}{\frac{1}{h_{cF} (A_{\text{tubo}} + \mu A_{\text{aletas}})}}$$

$$Bi = \frac{h_{cF} p L^2}{k S} = \left| \begin{array}{l} h_{cF} = 25 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K} \\ p = 2(a + e) = 2(0,006 + 0,0007) = 0,0134 \text{ m} \\ L = 0,01 \text{ m} ; k = 200 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{K} \\ S = a \cdot e = 0,006 \times 0,0007 = 4,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{array} \right| = \frac{25 \times 0,0134 \times 0,01^2}{200 \times 4,2 \times 10^{-6}} = 0,03988$$

$$\mu_{aleta} = \frac{Th \sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}} = \frac{Th \sqrt{0,03988}}{\sqrt{0,03988}} = 0,9869$$

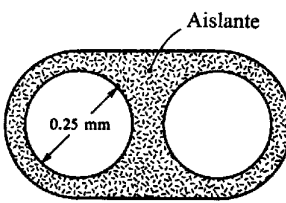
$$A_{tubo} = (D_e - 12e) \times 0,006 = [0,006 - (12 \times 0,0007)] \times 0,006 = 6,27 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$A_{aletas} = 2(L \times a) \times 12 = 2(0,01 \times 0,006) \times 12 = 1,44 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\text{Resistencia asociada a las aletas} = \frac{1}{25 [(6,27 \times 10^5) + 0,9869 (1,44 \times 10^{-3})]} = 26,96 \frac{^\circ\text{K}}{\text{W}}$$

$$\text{Resistencia contacto dispositivo-camisa} = 10^{-3} \frac{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}{\text{W}} = \frac{10^{-3} \frac{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}{\text{W}}}{2 R_a (\text{m}^2)} = \frac{10^{-3} \frac{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}}{\text{W}}}{2 \times 0,002 \times 0,006 (\text{m}^2)} = 13,26 \frac{^\circ\text{K}}{\text{W}}$$

$$\text{Resistencia conductiva de la camisa} = \frac{\ln \frac{R_e}{R_i}}{2 k a} = \frac{\ln \frac{0,003}{0,002}}{2 \times 200 \times 0,006} = 0,05377 \frac{^\circ\text{K}}{\text{W}}$$



$$q = \frac{80 - 20}{13,26 + 0,05377 + 26,96} = 1,49 \text{ W}$$

b) Temperatura que adquiere la superficie del dispositivo electrónico si no se utiliza la camisa aleteada.

En estas circunstancias el dispositivo tiene que eliminar la misma energía (1,49 W) generada por efecto Joule, por lo que,

$$q = \frac{T_s - T_{ext}}{\frac{1}{2 R_i h_{cF} a}} = \frac{T_s - 20}{\frac{1}{2 \times 0,002 \times 25 \times 0,006}} = 1,49 \quad \boxed{T_s = 810,5^\circ\text{C}}$$

De otra forma,

$$T - T_F = \frac{E R_0}{2 h_C} \left(1 + \frac{R_0 h_C}{2 k} - \frac{r^2 h_C}{2 k R_0} \right)_{r=R_0} = \left| \begin{array}{l} E = \frac{q}{V} = \frac{1,49 \text{ W}}{0,002^2 \times 0,006} = 1,976 \times 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \\ E = \frac{q}{V} = \frac{1,49 \text{ W}}{0,002^2 \times 0,006} = 1,976 \times 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{E R_0}{2 h_C} = \frac{1,976 \times 10^7 \times 0,002}{2 \times 25} = 790,4^\circ\text{C} \quad \boxed{T = 20 + 790,4^\circ = 810,4^\circ\text{C}}$$

c) Temperatura de los diámetros interior T_i y exterior T_e de la camisa aleteada

$$q = \frac{T_s - T_i}{R_{\text{contacto}}} \quad T_i = T_s - q R_{\text{cont}} = 80 - (1,49 \text{ W} \times 13,26 \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}) = 60,24^\circ\text{C}$$

$$q = \frac{T_i - T_b}{R_{\text{camisa}}} \quad T_b = T_i - q R_{\text{camisa}} = 60,24 - (1,49 \text{ W} \times 0,05377 \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}) = 60,16^\circ\text{C}$$

Temperatura en el extremo de la aleta

$$\frac{T(0) - T_F}{T_b - T_F} = \frac{\text{Ch}\{\sqrt{Bi} (1 -)\}}{\text{Ch}\sqrt{Bi}} = 1 = \frac{1}{\text{Ch}\sqrt{Bi}}$$

$$T(1) = T_F + \frac{T_b - T_F}{\text{Ch}\sqrt{Bi}} = \frac{20 + (60,16 - 20)}{\text{Ch}\sqrt{0,03988}} = 59,37^\circ\text{C}$$

IV.25.- El par de conductores de un termopar tiene ambos hilos de cobre de ($k = 385 \text{ W/m}^\circ\text{K}$) de 0,25 mm de diámetro, embutidos en una capa aislante de polivinilo de $k = 0,1 \text{ W/m}^\circ\text{K}$ de perímetro exterior 1,5 mm y sección 10^{-7} m^2 ; la configuración de este tipo de hilo viene dada en la figura. La temperatura de los gases calientes es de 350°K y la temperatura de la pared es de 300°K .

Determinar

a) La longitud que deberá tener el hilo inmerso en la corriente de gases calientes para que el error de lectura en el termopar sea de $0,1^\circ\text{K}$, sabiendo que el coeficiente de transferencia de calor hilos-gases calientes es de $30 \text{ W/m}^2\text{K}$

RESOLUCION

Se puede suponer que la variación de temperatura en cada sección transversal a los hilos es pequeña comparada con la variación de temperatura a lo largo de los mismos, 50°K . Por lo tanto este problema se puede equiparar al de una protuberancia de sección transversal uniforme.

Paría la distribución de temperaturas podemos tomar la correspondiente a una protuberancia con su extremo libre térmicamente aislado, de forma que, considerando toda la longitud del hilo L se tenga,

$$\frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = \frac{-0,1^\circ\text{K}}{300 - 350} = \frac{1}{\text{Ch}\sqrt{\text{Bi}}} \quad ; \quad \text{Bi} = 47,7 = \frac{h_c p L^2}{k S}$$

El valor de kS hay que evaluarlo para las resistencias térmicas de ambos hilos y del aislante, en paralelo.

$$\text{Para cada hilo: } S_{\text{hilo}} = \frac{d^2}{4} = \frac{(0,25 \times 10^{-3})^2}{4} = 4,9 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

$$\text{Para el aislante: } S_{\text{aisl}} = 10^{-7} \text{ m}^2$$

$$k S_{\text{hilo}} = 385 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} \times 4,91 \times 10^{-8} \text{ m}^2 = 1,9 \times 10^{-5} \frac{\text{Wm}}{^\circ\text{K}}$$

$$k S_{\text{aisl}} = 0,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} \times 10^{-7} \text{ m}^2 = 10^{-8} \frac{\text{Wm}}{^\circ\text{K}}$$

Se observa que la contribución del aislante, kS , es insignificante, por lo que su forma precisa o su composición son irrelevantes.

$$\text{Bi} = 47,7 = \frac{h_c p L^2}{k S} = \frac{30 (\text{W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}) \times 0,0125 \text{ m} \times L^2}{1,9 \cdot 10^{-5} (\text{Wm}^\circ\text{K})} \quad L = 0,155 \text{ m}$$

VI.1.- Un intercambiador de calor de flujos cruzados, con ambos fluidos sin mezcla, tiene una superficie de intercambio A igual a 8,4 m²; los fluidos que se utilizan son los siguientes,

Aire, de calor específico 1005 Joules/kg°C

Agua, de calor específico 4180 Joules/kg°C

El aire entra en el intercambiador a 15°C, a razón de 2 kg/seg

El agua entra a 90°C a razón de 0,25 kg/seg

El coeficiente global de transmisión de calor vale 250 W/m²°C.

Determinar

a) Las temperaturas de salida de ambos fluidos

b) El calor intercambiado

RESOLUCION

a) Temperaturas de salida de ambos fluidos

$$C_{\text{aire}} = 2 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 1005 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 2010 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \quad (C_{\text{máx}})$$

$$C_{\text{agua}} = 0,25 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 4180 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 1045 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \quad (C_{\text{mín}})$$

$$\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{1045}{2010} = 0,52$$

$$NTU = \frac{A U}{C_{\text{mín}}} = \frac{8,4 \text{ m}^2 \times 250 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{1045 \frac{\text{kJ}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}}} = 2$$

$$\text{Flujos cruzados sin mezcla:} = \frac{(NTU)}{\frac{(NTU)}{1 - e^{-(NTU)}} + \frac{(NTU) \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}}}{1 - \exp\{-(NTU) \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}}\}} - 1} = \frac{2}{\frac{2}{1 - e^{-2}} + \frac{2 \times 0,52}{1 - e^{-(2 \times 0,52)}} - 1} = 0,684$$

$$= 0,684 = \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{C1} - T_{F1}} \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{90 - T_{C2}}{90 - 15} \quad T_{C2} = 38,7^\circ\text{C}$$

$$= 0,684 = \frac{T_{F2} - T_{F1}}{T_{C1} - T_{F1}} \frac{C_{\text{máx}}}{C_{\text{mín}}} = \frac{T_{F2} - 15}{90 - 15} \frac{1}{0,52} \quad T_{F2} = 41,68^\circ\text{C}$$

b) Calor intercambiado

$$Q = C_{\text{aire}} (T_{F2} - T_{F1}) = 2010 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \times (41,68 - 15)^\circ\text{C} = 53,63 \text{ kW}$$

VI.2.- Determinar el área de intercambio térmico que se necesita para que un intercambiador de calor construido con un tubo de 25,4 mm de diámetro exterior, enfríe 6,93 kg/seg de una solución de alcohol etílico al 95 por %, $c_p=3.810 \text{ Joules/kg} \cdot \text{K}$, desde 65,6°C hasta 39,4°C, utilizando 6,3 kg de agua por segundo a 10°C.

Se supondrá que el coeficiente global de transferencia térmica basado en el área exterior del tubo es de 568 W/m°C. El problema se realizará en los siguientes supuestos

a) Carcasa y tubo con flujos en equicorriente

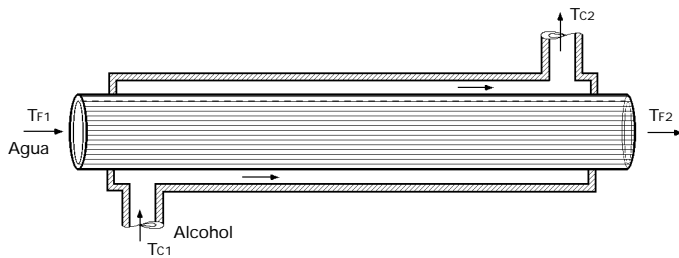
b) Carcasa y tubo con flujos en contracorriente

c) Intercambiador en contracorriente con dos pasos en carcasa y 4 pasos de tubos de 72 tubos en cada paso, circulando el alcohol por la carcasa y el agua por los tubos

d) Flujo cruzado, con un paso de tubos y otro de carcasa, siendo con mezcla de fluido en la carcasa.

RESOLUCION

a) Tubo y carcasa con flujos en equicorriente



$$T_2 = T_{C1} - T_{F1} = 65,6 - 10 = 55,6^{\circ}\text{C}$$

$$T_1 = T_{C2} - T_{F2} = 39,4 - T_{F2}$$

Transferencia de calor (no hay pérdidas),

$$q = q_C = q_F = m_C c_{pC} (T_{C1} - T_{C2}) = m_F c_{pF} (T_{F2} - T_{F1})$$

$$q = 6,93 \text{ (Kg/seg)} \times 3810 \text{ (J/Kg.}^{\circ}\text{C)} \times (65,6 - 39,4)^{\circ}\text{C} =$$

$$= 6,3 \text{ (Kg/seg)} \times 4186 \text{ (J/Kg.}^{\circ}\text{C)} \times (T_{F2} - 10)^{\circ}\text{C} = 691.766 \frac{\text{J}}{\text{seg}} = 691,766 \text{ kW}$$

en la que T_{F2} es la temperatura de salida del agua; despejando se obtiene,

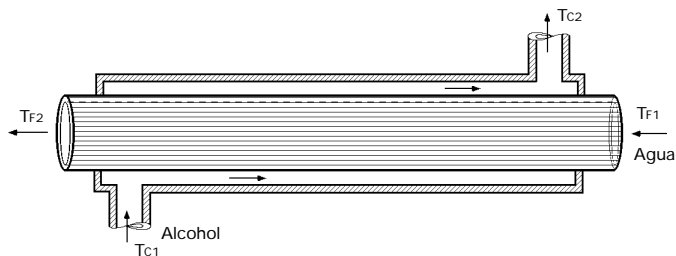
$$T_{F2} = 36,23^{\circ}\text{C} ; \quad T_1 = 39,4 - 36,23 = 3,17^{\circ}\text{C}$$

$$(\text{LMTD}) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \frac{55,6 - 3,17}{\ln \frac{55,6}{3,17}} = 18,3^{\circ}\text{C}$$

$$691766 \text{ W} = 568 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}} A_e \text{ m}^2 \times 18,3^{\circ}\text{C} ; A_e = 66,55 \text{ m}^2$$

$$\text{Longitud del tubo: } L = \frac{A_e}{d_e} = \frac{66,55 \text{ m}^2}{\pi \times 0,0254 \text{ m}} = 834 \text{ m}$$

b) Carcasa y tubo con flujos en contracorriente



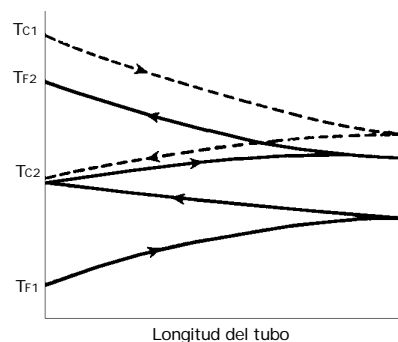
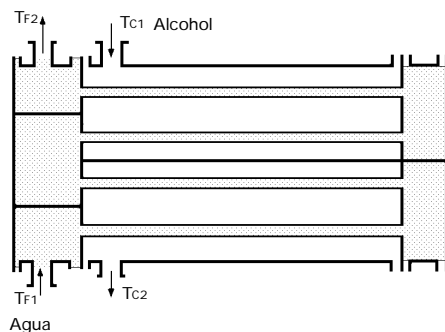
$$T_2 = T_{C1} - T_{F2} = 65,6 - 36,23 = 29,37^{\circ}\text{C}$$

$$T_1 = T_{C2} - T_{F1} = 39,4 - 10 = 29,4^{\circ}\text{C}$$

$$(\text{LMTD}) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \frac{29,37 - 29,4}{\ln \frac{29,37}{29,4}} = \frac{0}{0} = \left| \frac{T_2}{T_1} = x ; \quad T_2 = x \quad T_1 \right| =$$

$$= \frac{T_1 (x - 1)}{\ln x} = |L' \text{ H\^opital}| = x \quad T_1 = T_2 = T_{C1} - T_{F2} = 65,6 - 36,23 = 29,37^{\circ}\text{C}$$

$$691766 \text{ W} = 568 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ }^{\circ}\text{C}} A_e \text{ m}^2 \times 29,37^{\circ}\text{C} ; A_e = 41,47 \text{ m}^2 \text{ (un 40\% menos que en equicorriente)}$$



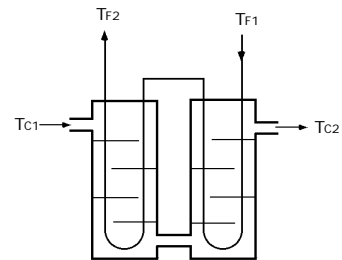
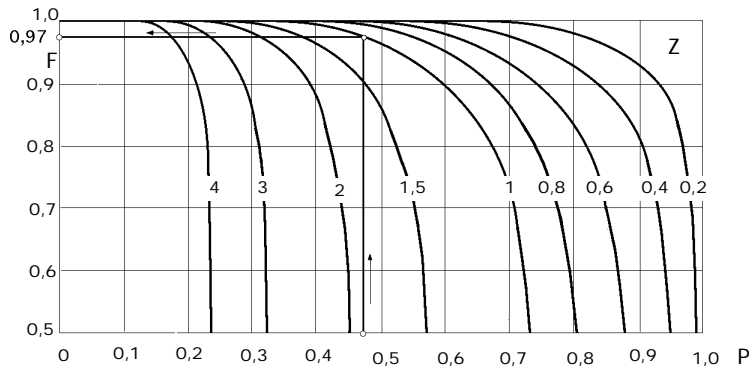
c) Intercambiador en contracorriente con dos pasos en carcasa y 4 pasos de tubos de 72 tubos en cada

paso, circulando el alcohol por la carcasa y el agua por los tubos

Temperatura media del flujo en contracorriente (LMTD) = 29,37°C

Factor F de corrección del (LMTD):

$$\left(\begin{array}{l} P = \frac{T_{F2} - T_{F1}}{T_{C1} - T_{F1}} = \frac{36,23 - 10}{65,6 - 10} = 0,47 \\ Z = \frac{C_F}{C_C} = \frac{m_F c_{pF}}{m_C c_{pC}} = \frac{6,3 \times 4186}{6,93 \times 3810} = 0,9988 \end{array} \right) \quad F = 0,97$$



Factor de corrección para la LMTD en el caso de un intercambiador en contracorriente, con dos pasos por la carcasa y un múltiplo de dos pasos de tubos

$$A_e = \frac{q}{F(\text{LMTD}) U} = \frac{691766 \text{ W}}{0,97 \times 568 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} A_e \text{ m}^2 \times 29,37^\circ\text{C}} = 42,75 \text{ m}^2$$

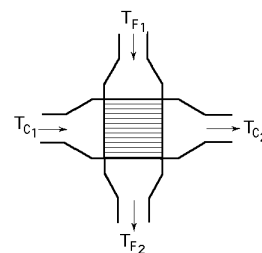
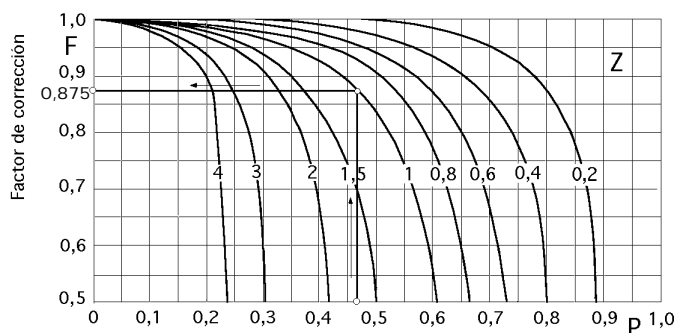
$$L_{\text{tubo}} = \frac{A_e}{4 \times 72 \times (d_e)} = \frac{42,75 \text{ m}^2}{4 \times 72 \times (0,0254)} = 1,86 \text{ m}$$

d) Flujo cruzado, con un paso de tubos y otro de carcasa, siendo con mezcla de fluido en la carcasa.

Temperatura media del flujo en contracorriente (LMTD) = 29,27°C

Factor F de corrección del (LMTD):

$$\left(\begin{array}{l} P = \frac{T_{F2} - T_{F1}}{T_{C1} - T_{F1}} = \frac{36,23 - 10}{65,6 - 10} = 0,47 \\ Z = \frac{C_F}{C_C} = \frac{m_F c_{pF}}{m_C c_{pC}} = \frac{6,3 \times 4186}{6,93 \times 3810} = 0,9988 \end{array} \right) \quad F = 0,875$$



Factor de corrección para la LMTD en el caso de intercambiadores en flujo cruzado, con mezcla de fluido en la parte de la carcasa y sin mezcla en el otro fluido, y un paso de tubos

$$A_e^* = \frac{q}{F(\text{LMTD}) U} = \frac{691766 \text{ W}}{0,875 \times 568 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} A_e^* \text{ m}^2 \times 29,37^\circ\text{C}} = 47,39 \text{ m}^2$$

ó también,

$$A_e = F A_e^* ; \quad A_e^* = \frac{A_e}{F} = \frac{41,47}{0,875} = 47,39 \text{ m}^2$$

VI.3.- En un intercambiador de calor se calienta agua desde una temperatura inicial $T_{F1} = 25^\circ\text{C}$, a la final $T_{F2} = 50^\circ\text{C}$, mediante la condensación de un vapor a 110°C .

Si el flujo de agua permanece constante, pero la temperatura de entrada disminuye a $T_{F1}^* = 15^\circ\text{C}$, ¿Cuál será la nueva temperatura de salida?

RESOLUCION

Temperatura de salida del agua que se calienta en la primera operación

$$T_{F2} = T_{F1} + (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_F} = 25 + (110 - 25) \frac{C_{\min}}{C_F} = 25 + 85 \frac{C_{\min}}{C_F} = 50^\circ\text{C}$$

$$\frac{C_{\min}}{C_F} = \frac{50 - 25}{85} = 0,2941$$

Temperatura de salida del agua que se calienta en la 2ª operación

$$T_{F2}^* = T_{F1}^* + (T_{C1} - T_{F1}^*) \frac{C_{\min}}{C_F} = 15 + (110 - 15) \frac{C_{\min}}{C_F} = 15 + 95 \frac{C_{\min}}{C_F}$$

$$\frac{C_{\min}}{C_F} = \frac{T_{F2}^* - 15}{95} = 0,2941 \quad ; \quad T_{F2}^* = 15 + (95 \times 0,2941) = 42,94^\circ\text{C}$$

De otra forma,

$$Q = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = U A \frac{(T_{C1} - T_{F1}) - (T_{C2} - T_{F2})}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}}} = m c_{pF} (T_{F2} - T_{F1}) = |T_{C1} - T_{C2}| =$$

$$= U A \frac{T_{F2} - T_{F1}}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}}} \quad m c_{pF} = \frac{U A}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}}}$$

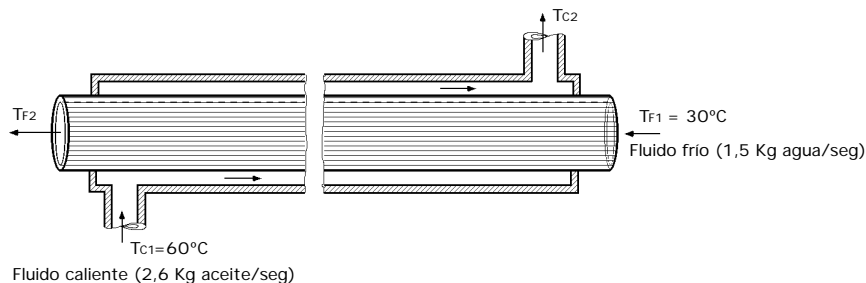
$$NTU = \frac{UA}{m c_{pF}} = \frac{1}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}}} = Cte = \frac{1}{\ln \frac{T_{C1} - T_{F1}^*}{T_{C2} - T_{F2}^*}}$$

$$\frac{T_{C1} - T_{F1}}{T_{C2} - T_{F2}} = \frac{T_{C1} - T_{F1}^*}{T_{C2} - T_{F2}^*} \quad ; \quad \frac{110 - 25}{110 - 50} = \frac{110 - 15}{110 - T_{F2}^*} \quad ; \quad T_{F2}^* = 42,94^\circ\text{C}$$

VI.4.- Cual es el máximo calor intercambiado en un intercambiador en contracorriente, tal como se muestra en la figura, si el agua entra a 30°C y enfría aceite que penetra a 60°C .

Gasto de aceite, $2,6 \text{ kg/seg}$; $c_{p \text{ aceite}} = 2,2 \text{ kJ/kg}^\circ\text{K}$

Gasto de agua, $1,5 \text{ kg/seg}$; $c_{p \text{ agua}} = 4,19 \text{ kJ/kg}^\circ\text{K}$



RESOLUCION

El intercambiador aparece seccionado para indicar que, para llevar a cabo la transferencia de calor máxima, el área de intercambio térmico tendría que ser infinita.

Temperaturas de salida,

Del balance de energía de las dos opciones que se presentan, se obtienen las siguientes consecuencias,

a) Aceite a 30°C

$$q = m_{\text{aceite}} c_{p \text{ aceite}} (T_{C1} - T_{F1}) = 2,6 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 2,2 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}} \times (60 - 30)^\circ\text{C} = 171,6 \text{ kW}$$

El agua saldrá a una temperatura de,

$$T_{F2} = 30^\circ\text{C} + \frac{171,6 \text{ kW}}{1,5 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}}} = 57,3^\circ\text{C}$$

b) Agua a 60°C

$$q = m_{\text{agua}} c_{p \text{ agua}} (T_{C1} - T_{F1}) = 1,5 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}} \times (60 - 30)^\circ\text{C} = 188,6 \text{ kW}$$

El aceite saldrá a una temperatura de,

$$T_{C2} = 60^\circ\text{C} - \frac{188,6 \text{ kW}}{2,6 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 2,2 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}}} = 27^\circ\text{C}$$

Este segundo caso es claramente imposible, porque la temperatura de salida del aceite cae por debajo de la temperatura de entrada del agua, lo que contradice el Segundo Principio de la Termodinámica.

Por lo tanto, $q_{\text{máx}} = 171,6 \text{ kW}$

VI.5.- En un intercambiador de calor con flujos en contracorriente, por el que circulan 5 kg de agua por minuto y 8 kg de aceite por minuto, el agua entra a 20°C y sale a 40°C, mientras que el aceite entra a 90°C.

El calor específico del agua es, $c_p(\text{agua}) = 1 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$

El calor específico del aceite obedece a la siguiente relación,

$c_p(\text{aceite}) = 0,8 + 0,002 T_{(\text{aceite})}$ (con $T_{(\text{aceite})}$ en °C)

Determinar

a) La temperatura de salida del aceite

b) La eficiencia del intercambiador

c) Si el coeficiente global U , para el rango de temperaturas del intercambiador, viene dado por,

$$U \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{min} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) = \frac{10 T_{\text{aceite}}}{T_{\text{aceite}} - T_{\text{agua}}} \quad (T \text{ en } ^\circ\text{C})$$

el valor del área de intercambio térmico.

RESOLUCION

a) Temperatura de salida del aceite

$$m_{\text{aceite}} c_{p(\text{aceite})} dT_{\text{aceite}} = m_{\text{agua}} c_{p(\text{agua})} dT_{\text{agua}} = U dA (T_{\text{aceite}} - T_{\text{agua}})$$

$$m_{\text{aceite}} (0,8 + 0,002 T_{\text{aceite}}) dT_{\text{aceite}} = m_{\text{agua}} c_{p(\text{agua})} dT_{\text{agua}}$$

$$m_{\text{aceite}} \left(0,8 T_{\text{aceite}} + 0,002 \frac{T_{\text{aceite}}^2}{2} \right)_{T_{(C1 \text{ aceite})}}^{T_{(C2 \text{ aceite})}} = m_{\text{agua}} c_{p(\text{agua})} (T_{F2 \text{ agua}} - T_{F1 \text{ agua}})$$

$$m_{\text{aceite}} \left(0,8 T_{(C2 \text{ aceite})} + 0,002 \frac{T_{(C2 \text{ aceite})}^2}{2} - 0,8 T_{(C1 \text{ aceite})} - 0,002 \frac{T_{(C1 \text{ aceite})}^2}{2} \right) = m_{\text{agua}} c_{p(\text{agua})} (T_{F1 \text{ agua}} - T_{F2 \text{ agua}})$$

$$8 \frac{\text{Kg}_{\text{aceite}}}{\text{min}} \left(0,8 T_{(C2 \text{ aceite})} + 0,002 \frac{T_{(C2 \text{ aceite})}^2}{2} - (0,8 \times 90) - 0,002 \frac{90^2}{2} \right) = 5 \frac{\text{Kg}_{\text{agua}}}{\text{min}} (20 - 40)$$

$$0,8 T_{(C2 \text{ aceite})} + 0,001 T_{(C2 \text{ aceite})}^2 - 67,8 = 0 \quad \boxed{T_{(C2 \text{ aceite})} = 77,07^\circ\text{C}}$$

b) Eficiencia del intercambiador

La potencia real intercambiada es la absorbida por el agua,

$$q_{\text{real agua}} = m_{\text{agua}} c_{p(\text{agua})} T_{\text{agua}} = 5 \times 1 \times 20 = 100 \text{ Kcal/min}$$

Velocidad máxima posible de transferencia de calor para el agua $T_{F2} = T_{C1}$,

$$q_{\text{máxima agua}} = m_{\text{agua}} c_{p(\text{agua})} (T_{C1} - T_{F1}) = 5 \times 1 \times (90 - 20) = 350 \text{ Kcal/min}$$

Velocidad máxima posible de transferencia de calor para el aceite $T_{C2} = T_{F1}$,

$$\begin{aligned} q_{\text{máxima aceite}} &= \int_{T_{F1}}^{T_{C1}} m_{\text{aceite}} c_{p(\text{aceite})} dT_{\text{aceite}} = m_{\text{aceite}} \int_{T_{F1}}^{T_{C1}} (0,8 + 0,002 T_{\text{aceite}}) dT_{\text{aceite}} = \\ &= m_{\text{aceite}} (0,8 T_{\text{aceite}} + 0,002 \frac{T_{\text{aceite}}^2}{2})_{T_{F1}}^{T_{C1}} = 8 \frac{\text{Kg}_{\text{aceite}}}{\text{min}} (0,8 T_{C1\text{aceite}} + 0,002 \frac{T_{C1\text{aceite}}^2}{2} - 0,8 T_{F1\text{aceite}} - 0,002 \frac{T_{F1\text{aceite}}^2}{2}) = \\ &= 8 \frac{\text{Kg}_{\text{aceite}}}{\text{min}} [(0,8 \times 90) + 0,002 \frac{90^2}{2} - (0,8 \times 20) - 0,002 \frac{20^2}{2}] = 509,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{min}} \\ &= \frac{q}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \frac{100}{350} = 0,2857 = \boxed{28,57\%} \end{aligned}$$

De otra forma

$$C_{\text{agua}} = m_{\text{agua}} c_{p \text{ agua}} = 5 \frac{\text{Kg}}{\text{min}} \times 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg } ^\circ\text{C}} = 5 \frac{\text{Kcal}}{^\circ\text{C min}}$$

$$C_{\text{aceite}} = m_{\text{aceite}} c_{p \text{ aceite}} = 8 \frac{\text{Kg}}{\text{min}} \times (0,8 + 0,002 \frac{90 + 77,07}{2}) \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg } ^\circ\text{C}} = 7,736 \frac{\text{Kcal}}{^\circ\text{C min}}$$

$$(\text{LMTD}) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \left| \begin{array}{l} T_2 = T_{C1} - T_{F2} = 90 - 40 = 50^\circ \\ T_1 = T_{C2} - T_{F1} = 77,07 - 20 = 57,07^\circ \end{array} \right| = \frac{50 - 57,07}{\ln \frac{50}{57,07}} = 53,45^\circ\text{C}$$

$$q = U A (\text{LMTD}) ; 100 \frac{\text{Kcal}}{\text{min}} = U A \times 53,45^\circ\text{C} ; U A = 1,87 \frac{\text{Kcal}}{\text{min } ^\circ\text{C}}$$

$$\text{NTU} = \frac{U A}{C_{\min}} = \frac{1,87}{5} = 0,374$$

$$= \frac{1 - e^{\text{NTU} (\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1)}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} e^{\text{NTU} (\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1)}} = \frac{1 - e^{0,374 (\frac{5}{7,736} - 1)}}{1 - \frac{5}{7,736} e^{0,374 (\frac{5}{7,736} - 1)}} = 0,2857 = \boxed{28,57\%}$$

De otra forma

Como $C_F = C_{\min}$, resulta que,

$$= \frac{C_F (T_{F2} - T_{F1})}{C_{\min} (T_{C1} - T_{F1})} = \frac{T_{F2} - T_{F1}}{T_{C1} - T_{F1}} = \frac{40 - 20}{90 - 20} = 0,2857 = \boxed{28,57\%}$$

c) Valor del área de intercambio térmico.

$$m_{\text{aceite}} c_{p(\text{aceite})} dT_{\text{aceite}} = U dA (T_{\text{aceite}} - T_{\text{agua}})$$

$$m_{\text{aceite}} (0,8 + 0,002 T_{\text{aceite}}) dT_{\text{aceite}} = U dA (T_{\text{aceite}} - T_{\text{agua}}) = \frac{10 T_{\text{aceite}}}{T_{\text{aceite}} - T_{\text{agua}}} dA (T_{\text{aceite}} - T_{\text{agua}}) = 10 T_{\text{aceite}} dA$$

$$dA = \frac{m_{\text{aceite}} (0,8 + 0,002 T_{\text{aceite}}) dT_{\text{aceite}}}{10 T_{\text{aceite}}}$$

$$\begin{aligned} A &= m_{\text{aceite}} \int_{T_{C2}}^{T_{C1}} \frac{(0,8 + 0,002 T_{\text{aceite}}) dT_{\text{aceite}}}{10 T_{\text{aceite}}} = \frac{m_{\text{aceite}}}{10} \{0,8 \ln \frac{T_{C1}}{T_{C2}} + 0,002 (T_{C1} - T_{C2})\} = \\ &= 0,8 [0,8 \ln \frac{90}{77,07} + 0,002 (90 - 77,07)] = 0,11988 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

De otra forma

$$U = \frac{10 T_{\text{aceite}}}{T_{\text{aceite}} - T_{\text{agua}}} = \frac{10 \times (90 - 77,07)}{(90 - 77,07) - (40 - 20)} = 15,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{min.m}^2.\text{°C}}$$

$$U A = 1,87 \frac{\text{Kcal}}{\text{min } \text{°C}} ; A = \frac{1,87 \frac{\text{Kcal}}{\text{min } \text{°C}}}{15,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2.\text{min } \text{°C}}} = 0,11987 \text{ m}^2$$

VI.6.- Una instalación de vapor recalienta 75 Tm de vapor por hora a la presión de 20 Atm, desde la temperatura de saturación, a la final de 500°C, aprovechando el calor de los humos de la combustión que llegan al calentador con una temperatura de 850°C y salen del mismo a 635°C.

Los tubos que conforman el calentador, están dispuestos en forma regular; el diámetro interior de los tubos es de 50 mm y el diámetro exterior es de 60 mm. Su conductividad térmica es de 60 Kcal/m.h.°C.

La velocidad media de los humos es de 6 m/seg y la velocidad media del vapor recalentado de 10 m/seg.

Las propiedades medias del vapor recalentado son,

$$= 0,5542 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; = 24,2 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; k = 0,0261 \frac{\text{W}}{\text{m.°K}} ; Pr = 1,04$$

Determinar la longitud total de los tubos necesarios para el calentamiento, y la longitud de cada tubo

RESOLUCION

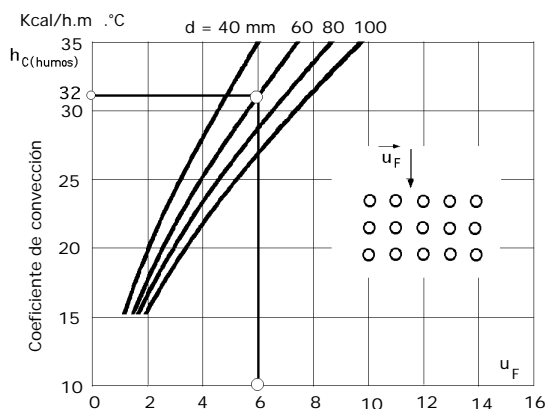
Flujo por el interior de los tubos (Vapor recalentado)

$$Re = \frac{u_F d_i}{\nu} = \frac{10 \text{ m} \times 0,05 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{24,2 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 20661,15$$

$$Nu = 0,023 (Re)^{0,8} (Pr)^{0,4} = 0,023 (20661)^{0,8} (1,04)^{0,4} = 66,17$$

$$h_{Ci} = \frac{Nu k}{d_i} = \frac{66,17 \times 0,0261 \frac{\text{W}}{\text{m.°K}}}{0,05 \text{ m}} = 34,54 \frac{\text{W}}{\text{m}^2.\text{°K}} = \left| 1 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} = 1,163 \frac{\text{J}}{\text{seg}} \right| = \frac{34,54 \text{ Kca}}{1,163 \text{ h.m}^2.\text{°C}} = 29,7 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

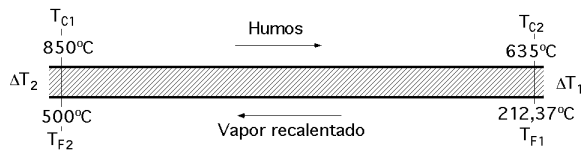
Flujo por el exterior de los tubos (Humos)



$$h_{C(\text{humos})} = 32 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

$$U_e = \frac{1}{\frac{A_e}{h_{Ci} A_i} + \frac{A_e \ln \frac{r_e}{r_i}}{2 k L} + \frac{1}{h_{C(\text{humos})}}} = \left| \begin{array}{l} A_e = d_e L = \quad \times 0,06 L = 0,1885 L \\ A_i = d_i L = \quad \times 0,05 L = 0,1571 L \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\frac{0,1885 L}{29,7 \times 0,1571 L} + \frac{0,1885 L \ln \frac{6}{5}}{2 \times 60 L} + \frac{1}{32}} = \frac{1}{0,0404 + 0,000091163 + 0,03125} = 13,94 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$



$$T_2 = 850^\circ\text{C} - 500^\circ\text{C} = 350^\circ\text{C}$$

$$T_1 = 635^\circ\text{C} - 212,37^\circ\text{C} = 422,63^\circ\text{C}$$

$$(\text{LMTD}) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} \quad F = \left| \begin{array}{l} P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}} = \frac{212,37 - 500}{212,37 - 850} = 0,451 \\ Z = \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{F2} - T_{F1}} = \frac{850 - 635}{500 - 212,37} = 0,7475 \end{array} \right| = \frac{350 - 422,63}{\ln \frac{350}{422,63}} \times 0,96 = 370^\circ\text{C}$$

F = 0,96

$$Q = [(i_2 - i_1) + w \, r_{l-v}] G_{\text{vapor}} = \left| i_2 = 3467 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}} ; i_1 = 2798,9 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}} \right| =$$

$$= (3467 - 2798,9) \times \frac{75000}{3600} \frac{\text{kJ}}{\text{seg}} = 13918,75 \text{ kW} = \frac{13918,75}{1,163 \times 10^{-3} \text{ hora}} \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} = 11,968 \times 10^6 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

No consideramos la posible humedad $w < 5\%$ del vapor saturado seco, que éste podría contener,

$$Q = U_e A_e (\text{LMTD}) F = 13,94 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{C}} \times A_e \text{ m}^2 \times 370^\circ\text{C} = 11,968 \times 10^6 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

A_e = 2319 m²

$$G_{\text{vapor}} = \quad v = \frac{75000}{3600} \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} = 0,5542 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times \frac{x \, 0,05^2}{4} \text{ N} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \quad \text{N} = 1914 \text{ tubos}$$

$$L = \frac{2319 \text{ m}^2}{2 \, r_e \text{ m}} = \frac{2319}{x \, 0,06} = 12300 \text{ m} \quad \text{Longitud por tubo} = \frac{12300}{1914} = 6,42 \text{ m}$$

VI.7.- Para calentar aire con los gases calientes de la combustión de una turbina, se utiliza un calentador del tipo de placa plana. La velocidad del flujo de aire requerido es de 0,75 kg/seg, entrando a 290°K. Los gases calientes están disponibles a una temperatura de 1150°K, y con una velocidad másica de 0,60 kg/seg.

Determinar la temperatura del aire a la salida del intercambiador de calor

Datos,

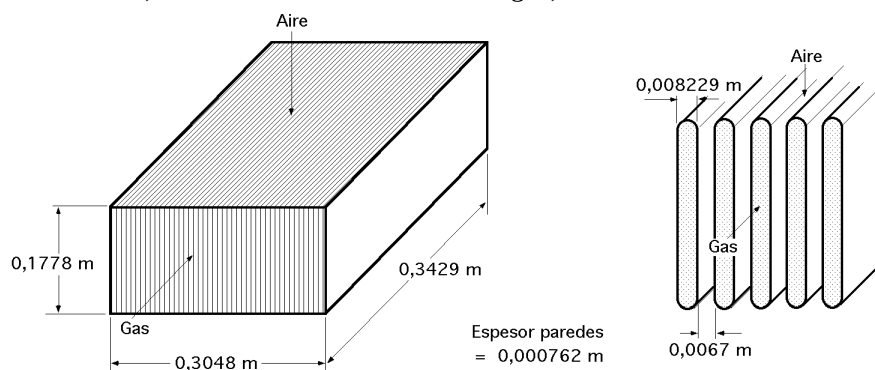
Perímetro bañado en la parte del aire, 0,703 m

Perímetro bañado en la parte del gas, 0,416 m

Area de la sección recta del paso del aire $2,275 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (por cada conducto)

Area de la sección recta del paso del gas $1,600 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (por cada conducto)

Número de conductos de aire, 19. Número de conductos de gas, 18



RESOLUCION

Es un intercambiador compacto de flujos cruzados, con ambos flujos sin mezcla

Se desprecia el efecto en los extremos

Los sistemas correspondientes a las corrientes de aire y de gas son semejantes al del flujo en conductos rectos que poseen las siguientes dimensiones

Longitud del conducto de aire, $L_a = 0,1778 \text{ m}$

Perímetro bañado en cada conducto de aire, $P_a = (0,3429 + 0,0067) \times 2 = 0,7 \text{ m}$

Sección de paso de aire para cada conducto, $(0,3429 \times 0,0067) = 0,002297 \text{ m}^2$

Diámetro hidráulico aire: $\frac{0,002297}{0,7} = 3,28 \times 10^{-3}$; Diámetro equivalente aire: $4d_H = 4 \times 3,28 \times 10^{-3} = 0,013126 \text{ m}$

Perímetro bañado en cada conducto de gas, $P_g = (0,1778 + 0,008229) \times 2 = 0,372 \text{ m}$

Sección de paso de gas para cada conducto, $(0,1778 \times 0,008229) = 0,001463 \text{ m}^2$

Diámetro hidráulico gas: $\frac{0,001463}{0,372} = 3,93 \times 10^{-3}$; Diámetro equivalente gas: $4d_H = 4 \times 3,93 \times 10^{-3} = 0,01573 \text{ m}$

Area de transferencia térmica: $(0,372 \times 18 \times 0,3429) = 2,296 \text{ m}^2$

Las conducciones unitarias se pueden calcular a partir de la expresión,

$$Nu_{dequ} = 0,036 (Re)_{dequ}^{0,8} (Pr)^{0,33} \left(\frac{d_{equ}}{L}\right)^{0,055}, \text{ válida para : } 10 < \frac{L}{d_{equ}} < 400$$

a la temperatura media de película.

$$\left(\frac{L}{d_{equ}}\right)_{aire} = \frac{0,1778}{0,013126} = 13,54$$

$$\left(\frac{L}{d_{equ}}\right)_{gas} = \frac{0,3429}{0,01573} = 21,799$$

Se conocen las temperaturas de entrada de los dos flujos, $T_{aire} = 290^\circ\text{K}$ (0,75 kg/seg)

$T_{gas} = 1150^\circ\text{K}$ (0,6 kg/seg)

Para hallar las propiedades medias de los fluidos a las temperaturas medias de película correspondientes, hay que conocer las temperaturas de salida de los fluidos; como no se conocen, hay que estimar la temperatura media de película del aire y del gas.

En primera aproximación,

Supondremos para el aire una temperatura media de película del orden de: $\frac{1150 + 290}{2} - 150 = 570^\circ\text{K}$ 550°K

$$T_{aire} = 550^\circ\text{K} ; \rho_{aire} = 0,6423 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; c_p = 1,0392 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ; \mu = 44,34 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; Pr = 0,68 ; k = 0,0436 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}$$

Supondremos para el gas una temperatura media de película del orden de: $\frac{1150 + 290}{2} + 150 = 870^\circ\text{K}$ 900°K

$$T_{gas} = 900^\circ\text{K} ; \rho_{gas} = 0,3925 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; c_p = 1,1212 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ; \mu = 99,3 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; Pr = 0,696 ; k = 0,06279 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}$$

$$Re_{(aire \text{ diám. equiv.})} = \frac{u_F d_{equiv}}{\mu_{aire}} = \left| \frac{0,75 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}}{19} = S u_F ; u_F = \frac{0,75 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}}{19 \times 0,6423 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0,002275 \text{ m}^2} = 27,01 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \right| = \frac{27 \times 0,013126}{44,34 \times 10^{-6}} = 7992,8$$

$$Re_{(gas \text{ diám. equiv.})} = \frac{u_F^* d_{equiv}^*}{\mu_{gas}} = \left| \frac{0,60 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}}{18} = S^* u_F^* ; u_F^* = \frac{0,60 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}}{18 \times 0,3925 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0,001463 \text{ m}^2} = 58,05 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \right| = \frac{58,05 \times 0,01573}{99,3 \times 10^{-6}} = 9195,5$$

$$Nu_{dequ} = 0,036 (Re)_{dequ}^{0,33} (Pr)^{0,33} \left(\frac{d_{equ}}{L}\right)^{0,055}, \text{ válida para : } 10 < \frac{L}{d_{equ}} < 400$$

$$\text{AIRE: } Nu_{dequ} = 0,036 (Re)_{dequ}^{0,8} (Pr)^{0,33} \left(\frac{d_{equ}}{L}\right)^{0,055} = 0,036 \times 7992,8^{0,8} \times 0,68^{0,33} \left(\frac{1}{13,54}\right)^{0,055} = 36,39$$

$$h_{c(\text{aire})} = \frac{Nu \cdot k}{d_{\text{equiv}}} = \frac{36,39 \times 0,0436}{0,013126} = 120,87 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

$$GAS: Nu_{\text{dequ}} = 0,036 (Re)_{\text{dequ}}^{0,8} (Pr)^{0,33} \left(\frac{d_{\text{dequ}}}{L}\right)^{0,055} = 0,036 \times 9195,5^{0,8} \times 0,696^{0,33} \left(\frac{1}{21,799}\right)^{0,055} = 39,96$$

$$h_{c(\text{gas})} = \frac{Nu \cdot k}{d_{\text{equiv}}} = \frac{39,96 \times 0,06279}{0,01573} = 159,5 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

EFICIENCIA.- Despreciando la resistencia térmica de la pared,

$$UA = \frac{1}{\frac{1}{h_{c(\text{aire})} A} + \frac{1}{h_{c(\text{gas})} A}} = \frac{2,296 m^2}{\frac{1}{120,87} + \frac{1}{159,5}} = 157,88 \frac{W}{^\circ K}$$

$$(NTU) = \frac{U A}{C_{\text{mín}}} = \left| \begin{array}{l} C_{\text{aire}} = 0,75 \times 1,0392 = 0,7794 \times 10^3 \frac{W}{^\circ K} \\ C_{\text{gas}} = 0,60 \times 1,1212 = 0,6727 \times 10^3 \frac{W}{^\circ K} \end{array} \right| = \frac{157,88}{0,6727 \times 10^3} = 0,2347$$

Para mezcla en ambos fluidos,

$$= 1 - \exp \left[\frac{C_{\text{máx}}}{C_{\text{mín}}} (NTU)^{0,22} \exp \left\{ -\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} (NTU)^{0,78} \right\} - 1 \right] = \left| \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{0,6727}{0,7794} = 0,863 \right| =$$

$$= 1 - \exp \left[\frac{1}{0,863} (0,2347)^{0,22} \exp \left\{ -0,863 \times (0,2347)^{0,78} \right\} - 1 \right] = 0,3041$$

TEMPERATURAS DE SALIDA DE AMBOS FLUIDOS

$$T_{\text{salida gas}} = T_{C2} = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) = 1150 - 0,3041 (1150 - 290) = 888,47^\circ K$$

$$T_{\text{salida aire}} = T_{F2} = T_{F1} - \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} (T_{C1} - T_{F1}) = 290 - 0,863 \times (1150 - 290) \times 0,3441 = 515,7^\circ K$$

valores que discrepan ligeramente de las prefijadas, por lo que procedería una SEGUNDA ITERACION, de forma que la nueva temperatura media del aire fuese,

$$\text{Temperatura media del aire: } \frac{515,7 + 290}{2} = 402,85^\circ K \quad 400^\circ K$$

VI.8.- Se desea construir un intercambiador de calor para producir 5 m³/hora de agua caliente sanitaria a 50°C, partiendo de agua de la red a 20°C, por lo que se emplea agua caliente proveniente de una caldera, que entra en el cambiador a 90°C y experimenta un enfriamiento de 20°C.

Sabiendo que el intercambiador debe ser del tipo de un paso por carcasa y dos pasos de tubos, que los tubos son de cobre puro de 14 mm de diámetro exterior y 10 mm de diámetro interior, y que por su interior circulará agua fría con una velocidad máxima de 0,5 m/seg, que el líquido caliente circula a 0,2 m/seg por la carcasa, que el coeficiente de película exterior de los tubos es de 1920 Kcal/h.m²•C, determinar,

- El número de tubos por paso de tubos del intercambiador
- El diámetro interior de la carcasa
- El coeficiente global de transmisión de calor respecto al diámetro exterior de los tubos
- La longitud del intercambiador

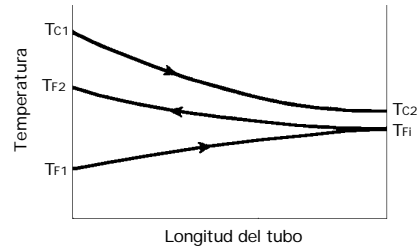
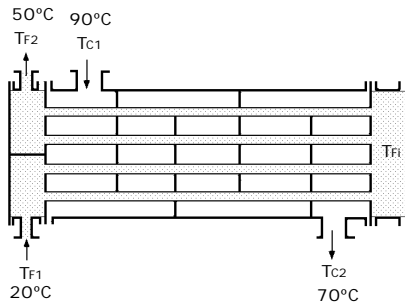
Datos,

$$\text{Agua, } c_p = 0,997 \text{ Kcal/kg} \cdot ^\circ C; \quad \rho = 993,5 \text{ kg/m}^3; \quad \mu = 2,5 \text{ kg/h.m}; \quad k = 0,539 \text{ Kcal/hm} \cdot ^\circ C$$

Conductividad del cobre puro, 330 Kcal/h.m•C

RESOLUCION

Al dar el coeficiente de convección por el exterior de los tubos no se especifica el tipo de disposición



a) Número de tubos por paso de tubos del intercambiador

$G_F = u_F S_F$, siendo S_F la sección transversal total de los tubos, por 1 paso de tubos

$$5 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}} = S_F \times 0,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}} ; S_F = 0,00277 \text{ m}^2$$

$$\text{Para 1 tubo se tiene: } S_1 = \frac{d_1^2}{4} = \frac{\times 0,01^2}{4} = 7,854 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\text{Para "n" tubos se tiene: } S_F = S_1 n = 7,854 \times 10^{-5} n = 2,77 \times 10^{-3}$$

$$n = \frac{2,77 \times 10^{-3}}{7,854 \times 10^{-5}} = 35,26 = 36 \text{ tubos por paso de tubos}$$

b) Diámetro interior de la carcasa

El gasto másico de fluido caliente (que se enfría) G_C , que circula por la carcasa es,

$$q = G_C c_{pC} (T_{C1} - T_{C2}) = G_F c_{pF} (T_{F2} - T_{F1}) ; G_C = \frac{G_F c_{pF} (T_{F2} - T_{F1})}{c_{pC} (T_{C1} - T_{C2})} = \left| \frac{\text{Fluido: agua}}{c_{pC} \quad c_{pF}} \right| =$$

$$= \frac{G_F (T_{F2} - T_{F1})}{(T_{C1} - T_{C2})} = \frac{5 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}} \times (50 - 20)}{(90 - 70)} = 7,5 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}}$$

$$\text{Sección de paso de este líquido por la carcasa: } C = \frac{G_C}{u_C} = \frac{7,5 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}}}{0,2 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}}} = 0,01041 \text{ m}^2$$

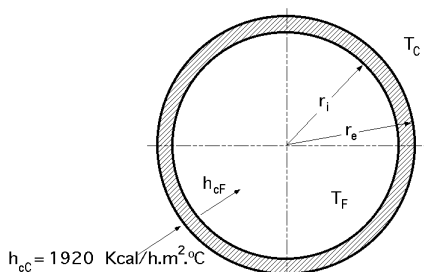
La sección transversal total de la carcasa comprenderá también la sección de paso de los tubos por cuyo interior circula el agua a calentar, por lo que la sección transversal total de la carcasa será,

$$S_T = 1(\text{paso por la carcasa}) \times C + 2(\text{pasos de tubos}) n \frac{d_e^2}{4} = 0,010416 \text{ m}^2 + (2 \times 36 \times \frac{\times 0,014^2}{4}) =$$

$$= \frac{D_i^2}{4} = 0,0215 \text{ m} ; D_i = \sqrt{4 S_T} = \sqrt{4 \times 0,0215} = 0,1654 \text{ m}$$

siendo D_i el diámetro interior de la carcasa

c) Coeficiente global de transmisión de calor respecto al diámetro exterior de los tubos



$$Re = \frac{d_i u_F}{F} = \frac{0,01 \text{ m} \times 0,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}}}{\frac{2,5 \frac{\text{Kg}}{\text{h m}}}{993,5 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}}} = 7153,2$$

$$Pr = \frac{c_p \text{ agua}}{k_F} = \frac{0,997 \times 2,5}{0,539} = 4,62$$

$$U_e = \frac{1}{\frac{r_e}{r_i h_{cF}} + \frac{r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_{cC}}}$$

Cálculo de h_{cF} ,

$$St = \exp[-3,796 - 0,205 \ln(Re) - 0,505 \ln(Pr) - 0,0225 \{\ln(Pr)\}^2] = \frac{Nu}{Re Pr} \quad ; \quad 0,5 < (Pr) < 3.000$$

$$St = \exp[-3,796 - 0,205 \ln(7153,2) - 0,505 \ln(4,62) - 0,0225 \{\ln(4,62)\}^2] = 1,5948 \times 10^{-3}$$

$$Nu = St Re Pr = (1,5948 \times 10^{-3}) (7153,2) (4,62) = 52,75$$

De haber utilizado la ecuación de Dittus-Boelter ($Re > 10000$), se hubiese obtenido $Nu = 51,44$, que es perfectamente válido por cuanto esta ecuación se aplica a un flujo turbulento, como así lo indica el n° de Re .

$$h_{cF} = \frac{Nu k}{d_i} = \frac{52,75 \times 0,539 \frac{Kcal}{h.m.^{\circ}C}}{0,01 m} = 2843,2 \frac{Kcal}{h.m.^2.^{\circ}C}$$

$$U_e = \frac{1}{\frac{0,007}{0,005 \times 2843,2} + \frac{0,007}{330} \ln \frac{0,007}{0,005} + \frac{1}{1920}} = \frac{1}{0,0004924 + 0,000007137 + 0,0005208} = 980 \frac{Kcal}{h.m.^2.^{\circ}C}$$

d) Longitud del intercambiador

$$q = U A F (LMTD) = U A F \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}}$$

$$T_2 = T_{C1} - T_{F2} = 90 - 50 = 40^{\circ}C$$

$$T_1 = T_{C2} - T_{F1} = 70 - 20 = 50^{\circ}C$$

$$T = F (LMTD) = F \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = F \frac{40 - 50}{\ln \frac{40}{50}} = 44,81 F$$

Cálculo de F

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}} = \frac{20 - 50}{20 - 90} = 0,4285 \\ Z = \frac{G_F c_{pF}}{G_C c_{pC}} = \frac{5}{7,5} = 0,666 \end{array} \right\} \quad F = 0,95$$

$$q = 5 \frac{m^3}{hora} \times 993,5 \frac{Kg}{m^3} \times 0,997 \frac{Kcal}{Kg.^{\circ}C} \times (50 - 20)^{\circ}C = 148.578 \frac{Kcal}{hora} = U_e A_e F (LMTD)$$

$$148.580 \frac{Kcal}{hora} = 980 \frac{Kcal}{h.m.^2.^{\circ}C} \times A_e m^2 \times 0,95 \times 44,81^{\circ}C = 41718,8 A_e \quad ; \quad A_e = 3,5615 m^2$$

que es la superficie exterior de intercambio térmico en los tubos.

$$A_e = 3,5615 m^2 = d_e n L 2 = 0,014 \times 36 \times L \times 2 \quad (\text{El 2 aparece por tener 2 pasos de tubos})$$

$$L = 1,125 m$$

VI.9.- Para condensar vapor de agua a la temperatura de saturación $T_{sat} = 349^{\circ}K$ se utiliza un tubo de 1,5 m de longitud y 0,013 m de diámetro exterior. Calcular los valores de h_C para,

a) Tubo horizontal

b) Tubo vertical

en el supuesto de que la temperatura media de la pared del tubo sea de $325^{\circ}K$

¿Cuál será el valor del n° de Reynolds máximo en este proceso? ¿Y la cantidad de condensado

RESOLUCION

a) Condensación en tubo horizontal

Temperatura media del condensado: $T = \frac{349 + 325}{2} = 337^\circ\text{K} = 64^\circ\text{C}$

Propiedades del agua a 64°C

$$k_l = 0,661 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} ; \quad \rho_l = 980,9 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; \quad r_{l-v} = 2,318 \times 10 \frac{\text{J}}{\text{Kg}} ; \quad \mu_l = 4,48 \times 10^{-4} \frac{\text{N}\cdot\text{seg}}{\text{m}^2} ; \quad c_{pl} = 4184 \frac{\text{J}}{\text{Kg}^\circ\text{K}}$$
$$h_c = 0,725 \sqrt[4]{\frac{\frac{2}{l} g r_{l-v} k_l^3}{\rho_l d (T_s - T_{pF})}} = 0,725 \sqrt[4]{\frac{980,9^2 \times 9,8 \times 2,318 \times 10^6 \times 0,661^3}{4,48 \times 10^{-4} \times 0,013 \times (349 - 325)}} = 10.568 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

b) Condensación en tubo vertical

Puede considerarse como una placa vertical de sección (d L)

$$h_c = 1,13 \sqrt[4]{\frac{\frac{2}{l} g r_{l-v} k_l^3}{\rho_l L (T_s - T_{pF})}} = 1,13 \sqrt[4]{\frac{980,9^2 \times 9,8 \times 2,318 \times 10^6 \times 0,661^3}{4,48 \times 10^{-4} \times 1,5 \times (349 - 325)}} = 5.025 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

De otra forma, Condensación en tubo vertical

$$h_c = 1,5 g^{1/3} \rho_l f_6(T) , \quad \text{con: } f_6(T) = \left(\frac{2 k^3}{l} \right)^{1/3} ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tubos horizontales: } \rho_l = \left(\frac{L}{4 G} \right)^{1/3} ; \text{Re} = \frac{4 G}{\rho_l L} \\ \text{Tubos verticales: } \rho_l = \left(\frac{d}{4 G} \right)^{1/3} ; \text{Re} = \frac{4 G}{\rho_l d} \end{array} \right.$$

El n° de Re en la parte inferior del tubo vertical es,

$$\text{Re} = \frac{4}{3} \left(\frac{\frac{4}{l} k_l L (T_s - T_{pF}) g^{1/3}}{\rho_l^{5/3} r_{l-v}} \right)^{3/4} = \frac{4}{3} \left(\frac{4 \times 0,661 \times 1,5 \times 24 \times 9,8^{1/3} \times 980,9^{2/3}}{(4,48 \times 10^{-4})^{5/3} \times 2,318 \times 10^6} \right)^{3/4} = 576,4 < 1800 \text{ (laminar)}$$

Para tubos verticales se tiene,

$$\text{Re} = \frac{4 G}{d \rho_l} \quad G = \frac{d \rho_l \text{Re}}{4} = \frac{\times 0,013 \times 4,48 \times 10^{-4} \times 576,4}{4} = 2,64 \times 10^{-3} \frac{\text{N}\cdot\text{seg}}{\text{m}} = 2,64 \times 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}$$

$f_6(T) = 830$

$$h_c = 1,5 g^{1/3} \rho_l f_6(T) = 1,5 g^{1/3} \left(\frac{d}{4 G} \right)^{1/3} f_6(T) = 1,5 \times 9,8^{1/3} \times \left(\frac{\times 0,013}{4 \times 2,64 \times 10^{-3}} \right)^{1/3} \times 830 = 4.180 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

Como: $\frac{h_c (\text{horizontal})}{h_c (\text{vertical})} = 0,77 \left(\frac{L}{d} \right)^{1/4}$

$$h_c (\text{horizontal}) = 0,77 \left(\frac{L}{d} \right)^{1/4} h_c (\text{vertical}) = 0,77 \left(\frac{1,5}{0,013} \right)^{1/4} \times 4180 = 10586 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

VI.10.- Se quieren recalentar 10 Tm/hora de vapor de agua saturado a la presión de 20 atm hasta los 400°C . Para ello se utilizan los humos procedentes de un hogar, con una velocidad de entrada de 9,5 m/seg, que llegan al recalentador a 700°C y salen del mismo a 500°C .

El recalentador está formado por un haz de tubos horizontales dispuestos en alineación rectangular, con corriente de humos perpendicular a las generatrices de los mismos.

Las características de los tubos son, diámetro interior, 50 mm; diámetro exterior, 60 mm ; longitud de cada tubo, $L = 20$ m; conductividad térmica, $k = 50$ Kcal/h.m. $^\circ\text{C}$

El recuperador tiene 5 hileras de tubos

El coeficiente de película humos-tubos es, $h_{C(\text{humos})} = 40$ Kcal/h.m 2 . $^\circ\text{C}$

El coeficiente de película vapor de agua-tubos es, $h_{C(\text{vapor de agua})} = 1.000$ Kcal/h.m 2 . $^\circ\text{C}$

Determinar

a) El n° de tubos que conforman el recalentador

b) La temperatura media de la superficie exterior de la pared de los tubos

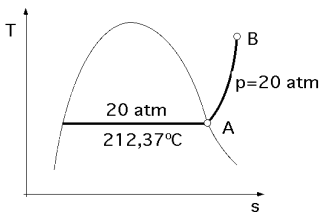
c) La velocidad del vapor de agua en m/seg

RESOLUCION

$$\text{Punto (B): } i_B = 3248 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}} = 776 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$

$$\text{Punto (A): } i_A = 2798,9 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}} = 668,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$

$$r_{l-v} = 1890,4 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}} = 451,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}}$$



a) N° de tubos que conforman el recalentador

$$Q = G_{\text{vapor}} (i_B - i_A) = 10.000 \frac{\text{Kg(vapor)}}{\text{hora}} \times (775,5 - 668,5) \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg(vapor)}} = 1.070.000 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$U_e = \frac{1}{\frac{r_e}{r_i h_{C(\text{vapor})}} + \frac{r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_{C(\text{humos})}}} = \frac{1}{\frac{0,03}{0,025 \times 1000} + \frac{0,03}{50} \ln \frac{0,03}{0,025} + \frac{1}{40}} = 38 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

$$(\text{LMTD}) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \left| \begin{array}{l} T_2 = 700 - 400 = 300 \\ T_1 = 500 - 212,37 = 287,63 \end{array} \right| = \frac{300 - 287,63}{\ln \frac{300}{287,63}} = 293,77^\circ\text{C}$$

Cálculo del factor F de corrección de la (LMTD), Flujos cruzados con mezcla de ambos fluidos

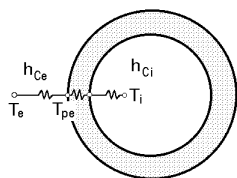
$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}} = \frac{212,37 - 400}{212,37 - 700} = 0,38475 \\ Z = \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{F2} - T_{F1}} = \frac{700 - 500}{400 - 212,37} = 1,066 \end{array} \right\} \quad F = 0,95$$

$$\text{Superficie de intercambio térmico: } A_e = \frac{Q}{U F (\text{LMTD})} = \frac{1.070.000}{38 \times 293,77 \times 0,95} = 100,89 \text{ m}^2$$

$$\text{Número de tubos} = \frac{A_e}{d_e L} = \frac{100,89}{0,06 \times 20} = 26,7 \text{ tubos (25 por las hileras)}$$

$$\text{Calor por tubo: } q_{\text{tubo}} = \frac{1.070.000}{25} = 42.800 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora(tubo)}}$$

b) Temperatura media de la superficie exterior de la pared de los tubos



$$q_{\text{tubo}} = h_{Ce} A_e (T_e - T_{pe})$$

$$T_{pe} = T_e - \frac{q_{\text{tubo}}}{h_{Ce} A_e} = \left| \begin{array}{l} T_e = \frac{700 + 500}{2} = 600^\circ\text{C} \\ h_{Ce} = 40 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}} \end{array} \right| = 600 - \frac{42.800}{40 \times d_e L} =$$

$$= 600 - \frac{42.800}{40 \times 0,06 \times 20} = 316,17^\circ\text{C}$$

De otra forma,

$$q_{\text{tubo}} = \frac{T_{pe} - T_{pi}}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2 k L}} = \frac{T_{pi} - T_i}{\frac{1}{h_{Ci} A_i}} = \frac{T_{pe} - T_i}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2 k L} + \frac{1}{h_{Ci} A_i}}$$

$$T_{pe} = T_i + q_{\text{tubo}} \left\{ \frac{1}{h_{Ci} A_i} - \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2 k L} \right\} = \left| T_i = \frac{212,37 + 400}{2} = 306,18^\circ\text{C} \right| =$$

$$= 306,18 + 42800 \left\{ \frac{1}{1000 \times 0,05 \times 20} - \frac{\ln \frac{0,06}{0,05}}{2 \times 50 \times 20} \right\} = 320,5^\circ\text{C}$$

c) Velocidad del vapor de agua en m/seg

$$\frac{10000 \frac{\text{Kg}}{3600 \text{ seg}}}{25 \text{ tubos}} = u_{\text{vapor}} \frac{\times 0,05^2}{4} ; u_{\text{vapor}} = 56,59 \frac{\text{Kg}}{\text{seg.m}^2}$$

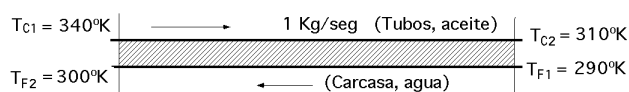
Para el vapor recalentado a 20 Atm y 306,18°C, el volumen específico: $v = 0,1271 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}$

$$\text{Velocidad del vapor: } u_{\text{vapor}} = 56,59 \frac{\text{Kg}}{\text{seg.m}^2} \times 0,1271 \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}} = 7,2 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

VI.11.- Se dispone de los siguientes datos a partir de un ensayo de rendimiento de un intercambiador de calor formado por una carcasa y doble paso de tubos. Por el interior de los tubos circula aceite de $c_{pC}=2100$ Joules/kg•K, que penetra en los mismos a 340°K y velocidad másica G de 1 kg/seg, y sale a 310°K. Por la carcasa circula agua, de forma que cuando entra en la misma, la temperatura correspondiente es de 290°K y sale a 300°K. Una variación en las condiciones de servicio exige el enfriamiento de un aceite semejante desde una temperatura inicial de 370°K, pero con una velocidad de flujo igual a los tres cuartos de la velocidad utilizada en el ensayo previo.

Con estos datos determinar la temperatura de salida del aceite, suponiendo que el agua no modifica sus características.

RESOLUCION



$$T_2 = T_{C1} - T_{F2} = 340 - 300 = 40^\circ\text{C}$$

$$T_1 = T_{C2} - T_{F1} = 310 - 290 = 20^\circ\text{C}$$

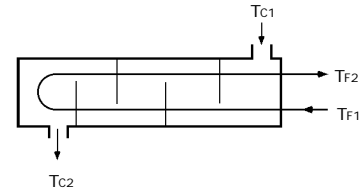
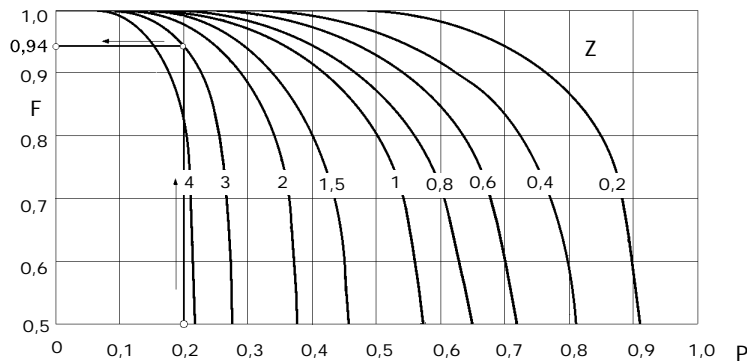
La nueva temperatura de salida del aceite es de la forma,

$$T_{C2}^* = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\text{mín}}}{C_C}$$

Datos del intercambiador

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{C_F}{C_C} = \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{F2} - T_{F1}} = \frac{340 - 310}{300 - 290} = 3 \\ P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}} = \frac{290 - 300}{290 - 340} = 0,2 \end{array} \right\} \quad F = 0,94$$

$$T = F (\text{LMTD}) = F \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = 0,94 \times \frac{40 - 20}{\ln \frac{40}{20}} = 27,12^\circ\text{C}$$



Factor de corrección para la LMTD en contracorriente, para un intercambiador 1-2

Capacidad calorífica del aceite: $C_C = 1 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 2100 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}} = 2100 \frac{\text{W}}{^\circ\text{K}}$

Capacidad calorífica del agua: $C_F = C_C \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{F2} - T_{F1}} = (1 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 2100 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}}) \times \frac{340 - 310}{300 - 290} = 6300 \frac{\text{W}}{^\circ\text{K}}$

$q = U A T = m_C c_{pC} (T_{C1} - T_{C2})$

$U A = \frac{m_C c_{pC} (T_{C1} - T_{C2})}{T} = \frac{1 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 2100 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}} \times (340 - 310)^\circ\text{K}}{27,2} = 2.323 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$

$NTU = \frac{U A}{C_{\min}} = \frac{2323}{2100} = 1,106$

La variación en el servicio exige un enfriamiento del aceite desde una temperatura inicial $T_{C1}^* = 370^\circ\text{K}$, pero con una velocidad de flujo igual a los 3/4 de la velocidad utilizada en el ensayo previo, $u_{\text{aceite}}^* = (3/4) u_{\text{aceite}}$. Esto va a afectar al valor del coeficiente de película del aceite h_{ci} , y por lo tanto al de $(UA)_e$,

$U_e A_e = \frac{1}{\frac{1}{A_i h_{ci}} + \frac{1}{2} \frac{1}{k L} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{A_e h_{ce}}} = \frac{1}{\frac{1}{A_i h_{ci}} + Cte}$

También va a afectar al valor del n° de Nu correspondiente, por cuanto hay una variación de la velocidad del aceite que afecta al n° de Re,

$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,3}$

El nuevo valor de Re^* será proporcional a $\frac{3 Re}{4}$, es decir: $Re^* = \frac{3 Re}{4}$

El nuevo valor de Nu^* será proporcional a $(\frac{3}{4})^{0,8}$, y por lo tanto al $h_c(\text{aceite})$, es decir:

$$\left(\begin{array}{l} Nu_{(\text{aceite})} = \frac{h_c(\text{aceite}) d}{k} \\ Nu_{(\text{aceite})}^* = \frac{h_c^*(\text{aceite}) d}{k} \end{array} \right) \quad \frac{Nu_{(\text{aceite})}}{Nu_{(\text{aceite})}^*} = \frac{\frac{h_c(\text{aceite}) d}{k}}{\frac{h_c^*(\text{aceite}) d}{k}} = \frac{h_c(\text{aceite})}{h_c^*(\text{aceite})} = \frac{Nu_{(\text{aceite})}}{(\frac{3}{4})^{0,8} Nu_{(\text{aceite})}} = \frac{1}{(\frac{3}{4})^{0,8}}$$

$$h_c^*(\text{aceite}) = (\frac{3}{4})^{0,8} h_c(\text{aceite})$$

A su vez, en primera aproximación se puede aceptar que,

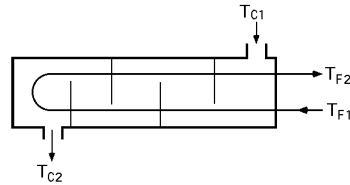
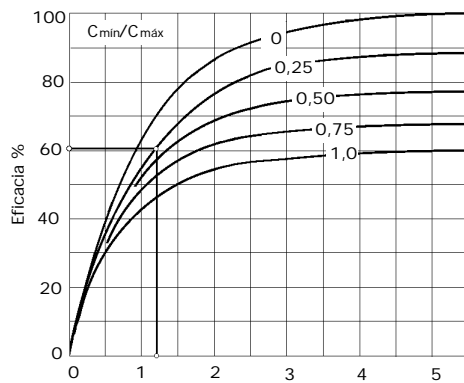
$U_e A_e = \frac{1}{\frac{1}{A_i h_c(\text{aceite})} + Cte} \quad ; \quad Cte = \frac{1}{U_e A_e} - \frac{1}{A_i h_c(\text{aceite})}$

$$U_e^* A_e = \frac{1}{\frac{1}{A_i h_c^* (\text{aceite})} + C_{te}} \quad ; \quad C_{te} = \frac{1}{U_e^* A_e} - \frac{1}{A_i h_c^* (\text{aceite})} = \frac{1}{U_e^* A_e} - \frac{1}{A_i (0,75)^{0,8} h_c (\text{aceite})}$$

Si se considera que la C_{te} es muy pequeña, se tiene,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{U_e A_e} - \frac{1}{A_i h_c (\text{aceite})} \\ 0 = \frac{1}{U_e^* A_e} - \frac{1}{A_i (0,75)^{0,8} h_c (\text{aceite})} \end{array} \right\} \quad \frac{U_e^* A_e}{U_e A_e} = \frac{A_i (0,75)^{0,8} h_c (\text{aceite})}{A_i h_c (\text{aceite})} = (0,75)^{0,8}$$

$$U_e^* A_e = (0,75)^{0,8} U_e A_e = (0,75)^{0,8} \times 2323 = 1845,4 \frac{W}{^\circ K}$$



$$\text{Números de unidades de transferencia de calor } NTU_{\text{máx}} = \frac{A U}{C_{\text{mín}}}$$

Eficiencia para un intercambiador 1-2

$$\left\{ \begin{array}{l} (NTU)^* = \frac{U^* A_e}{C_{\text{mín}}} = \frac{1845,4 \frac{W}{^\circ K}}{(0,75 \times 1 \frac{Kg}{seg}) \times 2100 \frac{J}{Kg^\circ K}} = 1,1717 \\ \frac{C_{\text{mín}}^*}{C_{\text{máx}}} = \frac{(0,75 \times 1 \frac{Kg}{seg}) \times 2100 \frac{J}{Kg^\circ K}}{6300} = 0,25 \end{array} \right\} \quad \text{Eficiencia: } \epsilon^* = 0,61$$

$$T_{C2}^* = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\text{mín}}^*}{C_C} = 370 - \{(370 - 290) \times 0,61 \times 0,25\} = 357,8^\circ K = 84,8^\circ C$$

VI.12.- Se dispone de dos tuberías de acero, concéntricas, de diámetros interiores 50 mm y 100 mm y espesor 5 mm. Por la tubería interior circula amoníaco líquido, que penetra a la temperatura de 20°C y velocidad 3 m/seg, mientras que por el extremo opuesto del espacio anular penetra agua a 80°C y velocidad 1,5 m/seg. La longitud de las tuberías es de 100 metros y la conductividad térmica del acero de 40 W/m°C. Se supondrá no existen pérdidas térmicas.

$$\text{Datos } NH_3: \quad = 580 \frac{Kg}{m^3} \quad ; \quad c_p = 5 \frac{kJ}{Kg^\circ C} \quad ; \quad k = 0,50 \frac{W}{m^\circ K} \quad ; \quad = 0,34 \times 10^{-6} \frac{m^2}{seg} \quad ; \quad Pr = 2$$

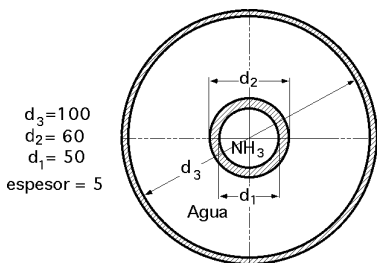
$$\text{Datos } H_2O: \quad = 985 \frac{Kg}{m^3} \quad ; \quad c_p = 4,186 \frac{kJ}{Kg^\circ C} \quad ; \quad k = 0,66 \frac{W}{m^\circ K} \quad ; \quad = 0,48 \times 10^{-6} \frac{m^2}{seg} \quad ; \quad Pr = 3$$

Con estos datos determinar,

- Los coeficientes de convección correspondientes
- El coeficiente global de transmisión de calor referido a la sección exterior del tubo interior
- La temperatura de salida de los dos fluidos
- El calor intercambiado

RESOLUCION

a) Coeficientes de convección



Coeficiente de convección del \$NH_3\$, Tubo de diámetro \$d_1\$ (calentamiento)

$$\begin{aligned} \text{Masa del } NH_3 &= m_{\text{amon}} = V = \frac{d^2}{4} u_F = \\ &= \frac{3 \times 0,05^2}{4} m^3 \times 3 \frac{m}{\text{seg}} \times 580 \frac{Kg}{m^3} = 3,4165 \frac{Kg}{\text{seg}} = 12.300 \frac{Kg}{\text{hora}} \\ Re_{\text{amon}} &= \frac{u_{\text{amon}} d_1}{\mu_{\text{amon}}} = \frac{3 \times 0,05}{0,34 \times 10^{-6}} = 441.176 \end{aligned}$$

$$Nu_{\text{amoníaco}} = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} = 0,023 (441.176)^{0,8} (2)^{0,4} = 995 = \frac{h_c (\text{amon}) d_1}{k_{\text{amon}}}$$

$$h_c (\text{amon}) = \frac{995 \times 0,5}{0,05} = 9950 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ K}$$

Coeficiente de convección del Agua, Tubería anular (enfriamiento)

$$d_{H(\text{agua})} = \frac{4}{4} (d_3^2 - d_2^2) = \frac{d_3 - d_2}{4} = \frac{100 - 60}{4} = 10 \text{ mm}$$

$$Re_{\text{agua}} = \frac{u_{\text{agua}} 4 d_{H(\text{agua})}}{\mu_{\text{agua}}} = \frac{1,5 \times (4 \times 0,01)}{0,48 \times 10^{-6}} = 125.000$$

$$Nu_{\text{agua}} = 0,023 Re_{\text{de}}^{0,8} Pr^{0,3} = 0,023 (125.000)^{0,8} (3)^{0,4} = 382,29 = \frac{h_c (\text{agua}) (4 d_{H(\text{agua})})}{k_{\text{agua}}}$$

$$h_c (\text{agua}) = \frac{Nu_{\text{agua}} k_{\text{agua}}}{4 d_{H(\text{agua})}} = \frac{382,29 \times 0,66}{4 \times 0,01} = 6307,75 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$$

b) Coeficiente global de transmisión de calor referido a la sección exterior (2) del tubo interior

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 h_c(NH_3)} + \frac{r_2}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_c(H_2O)}} = \frac{1}{\frac{30}{25 \times 9950} + \frac{0,03}{40} \ln \frac{30}{25} + \frac{1}{6307,75}} = \\ &= \frac{1}{0,0001206 + 0,00013674 + 0,0001585} = 2400 \frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ K} \end{aligned}$$

c) Temperatura de salida de los dos fluidos

$$\text{Hay que conocer la eficacia del intercambiador: } = \frac{1 - \exp \{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}$$

$$C_{NH_3} = (m c_p)_{NH_3} = 12300 \frac{Kg}{\text{hora}} \times 5 \frac{kJ}{Kg \text{ } ^\circ C} = 61.500 \frac{kJ}{h \text{ } ^\circ C} = 17,08 \frac{kJ}{\text{seg } ^\circ C}$$

$$C_{H_2O} = (m c_p)_{H_2O} =$$

$$\begin{aligned} = \left| m = V = \frac{(d_3^2 - d_2^2)}{4} u_F = \frac{(0,1^2 - 0,06^2)}{4} m^2 \times 1,5 \frac{m}{\text{seg}} \times 985 \frac{Kg}{m^3} = 7,4267 \frac{Kg}{\text{seg}} = 26.736 \frac{Kg}{\text{hora}} \right| = \\ = 26.736 \frac{Kg}{\text{hora}} \times 4,186 \frac{kJ}{Kg \text{ } ^\circ C} = 111.918 \frac{kJ}{h \text{ } ^\circ C} = 31,088 \frac{kJ}{\text{seg } ^\circ C} \end{aligned}$$

$$\text{luego: } \left\{ \begin{array}{l} C_{\min} = 17,08 \frac{kJ}{\text{seg } ^\circ C} (\text{amoníaco}) = C_F \\ C_{\max} = 31,088 \frac{kJ}{\text{seg } ^\circ C} (\text{agua}) = C_C \end{array} \right\}$$

Superficie de intercambio térmico: $A_2 = 2 \quad r_2 \quad L = 2 \quad \times 0,03 \times 100 = 18,85 \text{ m}^2$

$$NTU = \frac{A_2 U_2}{C_{\min}} = \frac{18,85 \text{ m}^2 \times 2400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}}{17,08 \frac{\text{kJ}}{\text{seg } ^\circ\text{C}}} = 2,6486 \quad ; \quad \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{17,03}{31,088} = 0,5494$$

$$= \frac{1 - \exp \left\{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)} = \frac{1 - \exp \{ (2,6486) (0,5494 - 1) \}}{1 - 0,5494 \times \exp (2,6486) (0,5494 - 1)} = 0,8361$$

$$T_{C2} = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_C} = \left| \frac{C_{\min}}{C_C} = 0,5494 \right| =$$

$$= 80 - (80 - 20) \times (0,5494 \times 0,8361) = 52,5^\circ\text{C} \text{ (Salida del agua)}$$

$$T_{F2} = T_{F1} + (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_F} = 20 + (80 - 20) = 70,17^\circ\text{C} \text{ (Salida del amoníaco)}$$

d) Calor intercambiado

$$Q = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1}) = \left| \begin{array}{l} T_2 = 80 - 71,17 = 9,83 \\ T_1 = 52,5 - 20 = 32,5 \end{array} \right| =$$

$$= 2400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}} \times 18,85 \text{ m}^2 \times \frac{9,83 - 32,5}{\ln \frac{9,83}{32,5}} = 857,66 \text{ kW}$$

ó también,

$$Q = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1}) = 0,8361 \times 17,08 \times (80 - 20) = 856,8 \text{ kW}$$

VI.13.- A través del espacio anular formado por dos tuberías de 108 y 159 mm de diámetros exteriores y espesores respectivos 3,5 y 4,5 mm, se inyecta vapor recalentado a 13,6 atm., 280°C y velocidad 1,5 m/seg. Por la tubería interior circula una mezcla de sodio y potasio en proporción de 56% y 44% respectivamente, a la temperatura de 150°C y velocidad 3 m/seg.

Determinar,

a) El calor transmitido a la mezcla por metro lineal de tubería si ésta es de acero inoxidable 18-8, y se mantienen constantes las temperaturas de los fluidos

b) Si las temperaturas de los fluidos son variables, hallar las temperaturas de salida y el calor intercambiado

Datos, Vapor de agua, $\rho = 5,647 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 6,859 \times 10^{-2} \text{ kg/h.m.}$; $k = 3,438 \times 10^{-2} \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$; $c_p = 0,539 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$; $Pr = 1,072$

Datos mezcla de 56% de sodio y 44% de potasio, $\rho^* = 874,24 \text{ kg/m}^3$; $\mu^* = 1,666 \text{ kg/h.m.}$; $k^* = 22,457 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$; $c_p^* = 0,2654 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C}$; $Pr^* = 0,0203$

Acero inoxidable 18-8, $k = 14 \text{ Kcal/h.m}^\circ\text{C}$

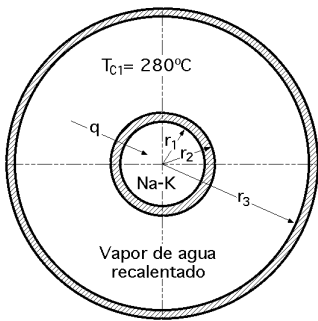
RESOLUCION

$$r_1 = \frac{108 - 7}{2} = 50,5 \text{ mm} \quad ; \quad r_2 = \frac{108}{2} = 54 \text{ mm} \quad ; \quad r_3 = \frac{159 - 9}{2} = 75 \text{ mm}$$

a) Coeficiente de convección h_{c1} correspondiente al metal líquido

El metal líquido se calienta en el tubo de radio r_1 .

El flujo de calor desde la pared interior es uniforme:



$$Nu = 4,82 + 0,185 Pe^{0,827} ; \left\{ \begin{array}{l} L/d > 60 \\ 10 < Pe < 10.000 \\ 3600 < Re < 9,05 \times 10^5 \end{array} \right\}$$

$$Re_1 = \frac{u_1 d_1}{\nu} = \frac{3 \frac{m}{seg} \times 0,101 m}{\frac{1,666 \frac{Kg}{h.m}}{874,24 \frac{Kg}{m^3}}} \times 3600 \frac{seg}{hora} = 572.400$$

$$Pe_1 = Re_1 Pr^* = 572.400 \times 0,0203 = 11620 \text{ (del orden de } 10^4 \text{) (Exceso de velocidad del metal líquido)}$$

$$Nu = 4,82 + 0,0185 Pe^{0,827} = 4,82 + 0,0185 (11620)^{0,827} = 47,4 = \frac{h_{C1} d_1}{k^*}$$

$$h_{C1} = \frac{47,4 \times 22,457 \frac{Kcal}{h.m.^{\circ}C}}{0,101 m} = 10.540 \frac{Kcal}{h.m.^2. ^{\circ}C}$$

a) Coeficiente de convección h_{c2} correspondiente al vapor recalentado

El vapor recalentado se enfría en el tubo anular de radios r_2 y r_3

$$d_{H\text{vapor de agua}} = \frac{4 (d_3^2 - d_2^2)}{(d_3 + d_2)} = \frac{d_3 - d_2}{4} = \frac{150 - 108}{4} = 10,5 \text{ mm}$$

$$Re_{\text{vapor de agua}} = \frac{u_{v. \text{ de agua}} d_{H(v. \text{ de agua})}}{\nu} = \frac{1,5 \frac{m}{seg} \times (4 \times 0,0105) m}{\frac{6,859 \times 10^{-2} \frac{Kg}{h.m}}{5,647 \frac{Kg}{m^3}}} \times 3600 \frac{seg}{hora} = 18.672,4$$

$$Nu_{v. \text{ de agua}} = 0,023 Re_{d.equiv}^{0,8} Pr^{0,3} = 0,023 (18672,4)^{0,8} (1,072)^{0,3} = 61,34 =$$

$$= \frac{h_C (v. \text{ de agua}) (4 d_{H v. \text{ de agua}})}{k} ; h_C (v. \text{ de agua}) = \frac{Nu_{v. \text{ de agua}} k}{4 d_{H (v. \text{ de agua})}} = \frac{61,34 \times 3,438 \times 10^{-2}}{4 \times 0,0105} = 50,21 \frac{Kcal}{h.m.^2.^{\circ}C}$$

Calor intercambiado en el supuesto de que las temperaturas de ambos fluidos permanezcan constantes,

$$q = \frac{2 (280 - 150)}{\frac{1}{r_1 h_{C1}} + \frac{1}{k_{acero} L} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{r_2 h_{C(v. \text{ de agua})}}} = \frac{2 (280 - 150)}{\frac{1}{(50,5 \times 10^{-3}) \times 10540} + \frac{1}{14 \times 1} \ln \frac{54}{50,5} + \frac{1}{(54 \times 10^{-3}) \times 50,21}}$$

$$= \frac{2 (280 - 150)}{0,0018787 + 0,00478 + 0,3688} = 2.175,35 \frac{Kcal}{h.m.}$$

Calor intercambiado en el supuesto de que el vapor de agua recalentado entra a la temperatura $T_{C1} = 280^{\circ}C$, y el metal líquido entra a $T_{F1} = 150^{\circ}C$. No se conocen las temperaturas finales.

Seguiremos el método de la eficiencia

$$U_2 = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 h_{C1}} + \frac{r_2}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_{C(v. \text{ de agua})}}} = \frac{1}{\frac{54}{50,5 \times 10540} + \frac{0,054}{14} \ln \frac{50}{50,5} + \frac{1}{50,21}}$$

$$= \frac{1}{0,000010145 + 0,00025847 + 0,019916} = 48,7 \frac{Kcal}{h.m.^2.^{\circ}C}$$

Temperatura de salida de los dos fluidos

$$\text{Hay que conocer la eficacia del intercambiador: } \epsilon = \frac{1 - \exp \left\{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}$$

$$C_{\text{metal líquido}} = (m \cdot c_p)_{\text{metal l.}} =$$

$$= \left| m_{\text{metal l.}} = \left(\frac{1}{u_1} \right) \cdot \frac{d_1^2}{4} \cdot u_1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \cdot 0,101^2}{4} \cdot m^2 \times 3 \frac{m}{\text{seg}} \times 874,24 \frac{\text{Kg}}{m^3} = 21,01 \frac{\text{kJ}}{\text{seg}} \right| =$$

$$= 21,01 \frac{\text{kJ}}{\text{seg}} \times 0,2654 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 5,5768 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$C_{\text{vapor de agua}} = (m \cdot c_p)_{\text{v. de agua}} =$$

$$= \left| m = V \cdot \rho = \frac{(\frac{d_3^2}{4} - \frac{d_2^2}{4}) \cdot u_{\text{v. agua}}}{4} = \frac{(0,15^2 - 0,108^2) m^2}{4} \times 1,5 \frac{m}{\text{seg}} \times 5,647 \frac{\text{Kg}}{m^3} = 0,07208 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \right| =$$

$$= 0,07208 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 0,539 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 0,03885 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$\text{luego: } \begin{cases} C_{\min} = 0,03885 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}} \text{ (vapor de agua)} = C_{\text{v. de agua}} \\ C_{\max} = 5,5768 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}} \text{ (metal líquido)} = C_{\text{metal l.}} \end{cases}$$

Superficie de intercambio térmico

$$A_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 0,054 \cdot 1 = 0,3393 m^2 \text{ (por 1 m de longitud de tubería)}$$

$$NTU = \frac{A_2 \cdot U_2}{C_{\min}} = \frac{0,3393 m^2 \times 48,7 \frac{\text{Kcal}}{h \cdot m^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{0,03885 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}}} \times \frac{1}{3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}}} = 0,118$$

$$\frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{0,03885}{5,5768} = 0,006966$$

$$\epsilon = \frac{1 - \exp \left\{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)} = \frac{1 - \exp \left\{ (0,118) (0,006966 - 1) \right\}}{1 - 0,00696 \times \exp (0,118) (0,006966 - 1)} = 0,11126$$

$$\text{Salida del vapor de agua: } T_{C2} = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \cdot \frac{C_{\min}}{C_C} = \left| C_{\min} = C_C = C_{\text{v. agua}} \right| =$$

$$= T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \cdot \epsilon = 280 - (280 - 150) \times 0,11126 = 265,5^\circ\text{C}$$

$$\text{Salida del metal líquido: } T_{F2} = T_{F1} + (T_{C1} - T_{F1}) \cdot \frac{C_{\min}}{C_F} =$$

$$= 150 + (280 - 150) \times 0,006966 \times 0,11126 = 150,1^\circ\text{C} \text{ (apenas aumenta su temperatura)}$$

Calor intercambiado

$$q = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1}) = 0,11126 \times 0,03885 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}} \times (280 - 150)^\circ\text{C} =$$

$$= 0,562 \frac{\text{Kcal}}{\text{seg}} = 2022 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}} \text{ (por 1 m lineal)}$$

ó también,

$$Q = U \cdot A \cdot \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \left| \begin{array}{l} T_2 = 280 - 150,1 = 129,9 \\ T_1 = 265,5 - 150 = 115,5 \end{array} \right| = 48,7 \times 0,3393 \times \frac{129,9 - 115,5}{\ln \frac{129,9}{115,5}} = 2025,15 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

VI.14.- En un proceso industrial se desea enfriar un caudal de 5000 m³/hora de gases (velocidad 10 m/seg, desde una temperatura de 300°C hasta 200°C, para lo que se utiliza un caudal volumétrico de aire de 5000 m³/hora, que entra en el dispositivo a una temperatura de 80°C.

Con estos datos se desea realizar el diseño de un recuperador-intercambiador multitubular, para lo cual hay que calcular el número de tubos y la longitud de cada tubo, empleándose tubos normalizados de diámetro exterior $d_e = 30$ mm y espesor $e = 2,5$ mm.

Las configuraciones a diseñar son las siguientes,

a) Un intercambiador con circulación en contracorriente

b.1) Un intercambiador de flujos cruzados con mezcla de fluido en la carcasa (aire) y sin mezcla en el otro fluido que circula por el interior de los tubos (gases), y un paso de tubos.

b.2) Un intercambiador de flujos cruzados con mezcla de ambos flujos a la entrada y a la salida, y un paso de tubos

Los gases circularán en ambas configuraciones por el interior de los tubos.

Datos,

C_p del aire y de los gases, 0,24 Kcal/kg°C

Densidad del aire y de los gases, 0,85 kg/m³

Coefficiente global de transmisión de calor, 40 Kcal/h.m².°C

RESOLUCION

A partir de los datos establecidos e independientemente de la configuración, se puede calcular la T_{salida} del aire considerando no existen pérdidas de calor.

$$C_{\text{gases}} (T_{\text{g(entrada)}} - T_{\text{g(salida)}}) = C_{\text{aire}} (T_{\text{a(salida)}} - T_{\text{a(entrada)}})$$

$$\text{Por el enunciado: } C_{\text{gases}} = C_{\text{aire}} \quad T_{\text{g(entrada)}} - T_{\text{g(salida)}} = T_{\text{a(salida)}} - T_{\text{a(entrada)}}$$

$$T_{\text{a(salida)}} = T_{\text{a(salida)}} + \{T_{\text{g(entrada)}} - T_{\text{g(salida)}}\} = 80 + (300 - 200) = 180^\circ\text{C}$$

Calor transferido,

$$q = C_{\text{gases}} \{T_{\text{g(entrada)}} - T_{\text{g(salida)}}\} = 5000 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}} \times 0,85 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 0,24 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times (300 - 200)^\circ\text{C} = 102.000 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

a) Circulación en contracorriente,

$$T_2 = T_{C1} - T_{F2} = 300 - 180 = 120^\circ\text{C}$$

$$T_1 = T_{C2} - T_{F1} = 200 - 80 = 120^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} (\text{LMTD}) &= \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \frac{120 - 120}{\ln \frac{120}{120}} = \frac{0}{0} = \left| \frac{T_2}{T_1} = x \right| = \frac{T_1 (x - 1)}{\ln x} = |\text{Aplicando L'Hôpital}| = \\ &= \frac{T_1}{\frac{1}{x}} = x \quad T_1 = T_2 = 120^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\text{Superficie total de transmisión: } A = \frac{q}{U (\text{LMTD})} = \frac{102.000}{40 \times 120} = 21,25 \text{ m}^2$$

$$\text{Longitud total de los tubos: } L = \frac{A}{d_e} = \frac{21,25}{0,03} = 225,47 \text{ m}$$

$$\text{Sección de paso total a través de los tubos: } S_{\text{tubos}} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Velocidad}} = \frac{5000 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}}} = 0,139 \text{ m}^2$$

$$\text{Cada tubo tiene una sección transversal igual a: } \text{tubo} = \frac{d_i^2}{4} = \frac{(0,025)^2}{4} = 4,9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{Número de tubos: } \frac{S_{\text{tubos}}}{S_{\text{tubo}}} = \frac{0,139 \text{ m}^2}{4,9 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 283 \text{ Tubos}$$

$$\text{Longitud de cada tubo: } \frac{225,47}{283} = 0,796 \text{ m}$$

b.1) Flujo cruzado con mezcla de un fluido (aire) en la parte de la carcasa y sin mezcla del otro fluido (gases que circulan por el interior de los tubos) y 1 paso de tubos

El (LMTD) se calcula a partir del caso anterior afectado de un factor de corrección F,

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{C_F}{C_C} = 1 \\ P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}} = \frac{80 - 180}{80 - 300} = 0,455 \end{array} \right\} \quad F = 0,89$$

$$T = F (\text{LMTD}) = 0,89 \times 120 = 106,8^\circ\text{C}$$

$$\text{Superficie total de transmisión: } A = \frac{q}{U F (\text{LMTD})} = \frac{102.000}{40 \times 106,8} = 23,87 \text{ m}^2$$

Si se considera un intercambiador de lujos cruzados de un tubo único en forma de serpentín y placas aleteadas,

$$\text{Longitud total del tubo: } L = \frac{A}{d_e} = \frac{23,87}{0,03} = 253,33 \text{ m}$$

Si se consideran un intercambiador de flujos cruzados conformado por 1 paso de 283 tubos, se tiene,

$$\text{Longitud de cada tubo: } \frac{253,33}{283} = 0,895 \text{ m}$$

b.2) Flujo cruzado con mezcla en ambos fluidos a la entrada y a la salida

El (LMTD) se calcula igual que en el caso anterior, afectado de un factor de corrección F

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \frac{C_F}{C_C} = 1 \\ P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}} = \frac{80 - 180}{80 - 300} = 0,455 \end{array} \right\} \quad F = 0,93$$

$$T = F (\text{LMTD}) = 0,93 \times 120 = 111,6^\circ\text{C}$$

$$\text{Superficie total de transmisión: } A = \frac{q}{U F (\text{LMTD})} = \frac{102.000}{40 \times 111,6} = 22,85 \text{ m}^2$$

$$\text{Longitud total de los tubos: } L = \frac{A}{d_e} = \frac{22,85}{0,03} = 242,44 \text{ m}$$

$$\text{Longitud de cada tubo: } \frac{242,44}{283} = 0,8566 \text{ m}$$

VI.15.- Vapor de agua a 150°C condensa en el exterior de los tubos de un intercambiador horizontal, mientras por el interior de los mismos circula agua a 50°C. El condensador contiene 500 tubos, de diámetro exterior 18 mm, circulando por el mismo 1000 Tm/hora de vapor.

Estimar el coeficiente de transmisión de calor del vapor por convección en el exterior de los tubos, sabiendo que estos tienen 2 metros de longitud, y que existen 10 filas de 50 tubos N=10

RESOLUCION

Las propiedades del fluido se calculan a la media entre la temperatura del vapor de agua y la temperatura media del fluido refrigerante que es muy próxima a la T_{pF} .

$$\text{Propiedades del líquido a, } T = \frac{T_s + T_{pF}}{2} = \frac{150 + 50}{2} = 100^\circ\text{C}$$

$$\rho = 958,4 \text{ kg/m}^3$$

$$r_{l-v} = 2114,4 \text{ kJ/kg, (a } T_s = 150^\circ\text{C)}$$

$$k = 0,682 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

$$\mu = 278 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{seg/m}^2$$

$$G = \frac{10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}}}{3600 \frac{\text{seg}}{\text{hora}} \times 500 \text{ tubos}} = 0,556 \frac{\text{Kg de vapor por tubo}}{\text{seg}}$$

$$\text{Re} = \left(\frac{4 G}{L} \right)_1 = \left(\frac{4 \times 0,556 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}}{278 \times 10^{-6} \frac{\text{N} \cdot \text{seg}}{\text{m}^2} \times 2 \text{ m}} \right)_1 = 4000 > 1800 \text{ (turbulento)}$$

$$h_{cF(1 \text{ tubo})} = 0,0077 \text{ Re}^{0,4} g^{1/3} f_5(T) = |f_5(100) = 14017| = 0,0077 \times 4000^{0,4} \times 9,8^{1/3} \times 14017 = 6373,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$h_c = \frac{h_{cF(1 \text{ tubo})}}{\sqrt[4]{N}} = \frac{6373,4}{\sqrt[4]{10}} = 3584 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

De otra forma,

$$h_{c(1 \text{ tubo})} = 0,077 k_l \left(\frac{\frac{2}{1} g}{\frac{2}{1}} \right)^{0,33} \text{Re}^{0,4}, \text{ para: } \text{Re} > 1800$$

$$h_{c(1 \text{ tubo})} = 0,077 \times 0,682 \times \left(\frac{958,4^2 \times 9,8}{(278 \times 10^{-6})^2} \right)^{0,33} \times 4000^{0,4} = 6352 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

De otra forma,

$$h_{cF(1 \text{ tubo})} = 0,0077 g^{1/3} {}_2 f_7(T) = \left| {}_2 = \left(\frac{4 G}{L} \right)^{0,4} = \left(\frac{4 \times 0,556}{2} \right)^{0,4} = 1,043337 \right| =$$

$$= 0,0077 \times 9,8^{1/3} \times 1,043 \times 368040 = 6321 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

VI.16.- Se colocan concéntricamente dos tuberías de acero de diámetros interiores 48 y 80 mm, y espesor 8 mm. Por la tubería interior penetra agua fría a 0°C y 10 Km por hora y por el extremo opuesto del espacio anular penetra agua caliente a 40°C y 5 Km/hora.

Determinar las temperaturas finales de ambas corrientes teniendo en cuenta que,

- No hay pérdidas de calor al exterior
- El coeficiente de película exterior es de 4.100 Kcal/h.m²°C
- Longitud de las tuberías L=112 metros
- Conductividad térmica de la tubería, 37 Kcal/h.m°C

Datos,

Calor específico del agua, 1,002 Kcal/kg°C ;

Densidad del agua, 999,2 kg/m³

Viscosidad dinámica del agua, 4,72 kg/h.m;

Conductividad térmica del agua, 0,504 Kcal/h.m°C

Número de Prandtl del agua, 9,41

RESOLUCION

- Coeficiente de película interior,

$$\text{Re}_1 = \frac{u_1 d_1}{\nu} = \frac{10.000 \frac{\text{m}}{\text{hora}} \times 0,048 \text{ m}}{\frac{4,72 \frac{\text{Kg}}{\text{h} \cdot \text{m}}}{999,2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}}} = 101.613,5$$

$$\text{Nu} = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,4} = 0,023 \times (101,613,5)^{0,8} \times (9,41)^{0,4} = 571,1$$

$$h_{cF} = \frac{k \text{ Nu}}{d_1} = \frac{0,504 \times 571,11}{0,048} = 5996,7 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

- Para conocer las temperaturas finales de ambas corrientes es necesario conocer e

$$= \frac{1 - \exp \left\{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}$$

$$C_F = (m \ c_p)_F =$$

$$= \left| m_F = (\dot{V}_F u_F - \dot{V}_F) = \frac{d_F^2}{4} u_F \dot{V}_F = \frac{\pi \times 0,048^2}{4} \text{ m}^2 \times 10000 \frac{\text{m}}{\text{hora}} \times 999,2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 18081,1 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \right| =$$

$$= 18081,1 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 1,002 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg.°C}} = 18177,25 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.°C}}$$

$$C_C = (m \ c_p)_C =$$

$$= \left| m_C = \dot{V}_C = \frac{(d_3^2 - d_2^2)}{4} u_C \dot{V}_C = \frac{(0,08^2 - 0,004^2)}{4} \text{ m}^2 \times 5000 \frac{\text{m}}{\text{hora}} \times 999,2 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 9040,5 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \right| =$$

$$= 9040,5 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 1,002 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg.°C}} = 9058 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.°C}} = C_{\min}$$

Cálculo de U_2 ,

$$U_2 = \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 h_{cF}} + \frac{r_2}{k} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_{cC}}} = \left| r = \frac{r_1 = 24 \text{ mm}}{48 + 16} = 32 \text{ mm} \right| = \frac{1}{\frac{0,032}{0,024 \times 5996,7} + \frac{0,032}{37} \ln \frac{32}{24} + \frac{1}{4100}} =$$

$$= 1398,75 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}$$

Superficie de intercambio térmico: $A_2 = 2 \pi r_2 L = 2 \pi \times 0,032 \times 112 = 22,52 \text{ m}^2$

$$NTU = \frac{A_2 U_2}{C_{\min}} = \frac{22,52 \text{ m}^2 \times 1398,75 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{°C}}}{9058,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.°C}}} = 3,477$$

$$\frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{9058,6}{18117,25} = 0,5$$

$$= \frac{1 - \exp \left\{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)} = \frac{1 - \exp \{ (3,477) (0,5 - 1) \}}{1 - 0,5 \times \exp (3,477) (0,5 - 1)} = 0,9036$$

$$T_{C2} = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_C} = | C_{\min} = C_C | = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) = 40 - (40 - 0) \times 0,9036 = 3,85\text{°C}$$

$$T_{F2} = T_{F1} + (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_F} = 0 + (40 - 0) \times 0,5 \times 0,9036 = 18,07\text{°C}$$

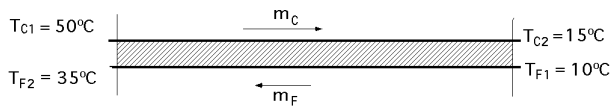
VI.17.- Por una tubería de refrigeración de diámetro interior $d_i = 4 \text{ cm}$. y espesor $e = 3 \text{ mm}$, circula agua a la velocidad de $1,5 \text{ m/seg}$, entrando a la temperatura $T_{c1} = 50\text{°C}$ y saliendo a $T_{c2} = 15\text{°C}$. El agua a calentar circula en contracorriente, a razón de $0,5 \text{ m/seg}$, entrando a 10°C y saliendo a 35°C .

Sabiendo que el coeficiente de conductividad térmica del acero es $k = 40 \text{ W/m.°C}$, determinar,

a) El caudal de agua que se calienta y la longitud del tubo.

b) Su longitud si se sustituye el intercambiador por otro 2/4

RESOLUCION



Fluido que circula por la tubería interior (se enfría),

$$T_C = \frac{50 + 15}{2} = 32,5^\circ\text{C} ; \quad c_{pC} = 4,1776 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} ; \quad c = 994,45 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; \quad v_C = 0,7885 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

$$k_C = 0,6195 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \quad \text{Pr}_C = 6,28$$

$$m_C = S_i u_C = \frac{d_i^2}{4} u_C = \frac{x \cdot 0,04^2 \text{ m}^2}{4} \times 1,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} = 1,885 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{seg}} = 6,7858 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}} =$$

$$= 6,7858 \frac{\text{m}^3}{\text{hora}} \times 994,45 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 6752,12 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}}$$

$$q = m_C c_{pC} (T_{C1} - T_{C2}) = m_C c_{pC} (T_{C1} - T_{C2}) = 6752,12 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 4,1776 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} \times (50 - 15)^\circ\text{C} =$$

$$= 986.685 \frac{\text{kJ}}{\text{hora}} = 274,079 \text{ kW} = 235.710 \frac{\text{Kcal}}{\text{hora}}$$

$$\text{Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,3} = \left| \text{Re} = \frac{1,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,04 \text{ m}}{0,7885 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 76.093,4 \right| = 0,023 \times 76093,4^{0,8} \times 6,28^{0,3} = 320,77$$

$$h_{cC} = \frac{320,77 \times 0,6195 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}}{0,04 \text{ m}} = 4968 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

Fluido que circula por el exterior de la tubería (se calienta),

$$T_F = \frac{10 + 35}{2} = 22,5^\circ\text{C} ; \quad c_{pF} = 4,1811 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} ; \quad F = 997,45 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; \quad v_F = 0,9625 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

$$k_F = 0,6015 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} ; \quad \text{Pr}_F = 6,6875$$

a) Caudal de agua que se calienta

$$Q = m_F c_{pF} (T_{F2} - T_{F1}) ; \quad m_F = \frac{Q}{c_{pF} (T_{F2} - T_{F1})} = \frac{986.685 \frac{\text{kJ}}{\text{hora}}}{4,1811 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} \times 25^\circ\text{C}} = 9,440 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}}$$

$$\text{Nu} = 0,26 \text{Re}_F^{0,6} \text{Pr}_F^{0,3} \quad c ; \quad (10^3 < \text{Re}_F < 10^5)$$

$$\text{Nu} = 0,26 \text{Re}_F^{0,6} \text{Pr}_F^{0,3} \quad c = \left| \text{Re}_F = \frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,046 \text{ m}}{0,9625 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 23.896 \right|$$

$$c = 1 \text{ (por ser muy próximas las temperaturas)} \quad =$$

$$= 0,26 \times 23.896^{0,8} \times 6,6875^{0,3} = 194,78$$

$$h_{cF} = \frac{194,78 \times 0,6015 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}}{0,046 \text{ m}} = 2547 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

Longitud del tubo,

$$U_e = \frac{1}{\frac{r_e}{r_i h_{cF}} + \frac{r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_{cC}}} = \frac{1}{\frac{0,023}{0,02 \times 4968} + \frac{0,023}{40} \ln \frac{0,023}{0,02} + \frac{1}{2547}} = 1419,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

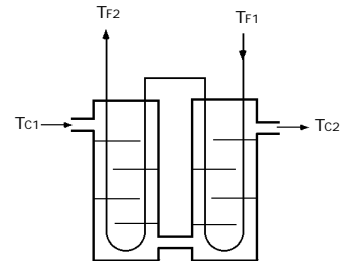
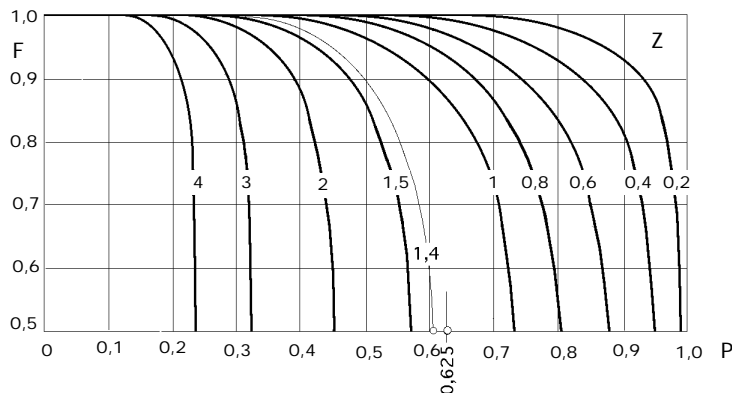
$$Q = U_e A_e \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \left| \begin{array}{l} A_e = d_e L = 0,046 \quad L \\ T_2 = 50 - 35 = 15^\circ\text{C} \\ T_1 = 15 - 10 = 5^\circ\text{C} \end{array} \right| = 1419,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{C}} \times (0,046 \quad L) \text{ m}^2 \times \frac{15 - 5}{\ln \frac{15}{5}} ^\circ\text{C} =$$

$$= 274079 \text{ W} ; \quad \boxed{L = 146,78 \text{ m}}$$

b) ¿Cuál sería su longitud si se sustituye el intercambiador por otro 2/4?

Cálculo de F : $\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{T_{F1} - T_{F2}}{T_{F1} - T_{C1}} = \frac{10 - 35}{10 - 50} = 0,625 \\ Z = \frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{F2} - T_{F1}} = \frac{50 - 15}{35 - 10} = 1,4 \end{array} \right\} \quad F = \text{No se encuentra ningún valor}$

Por lo tanto, NO HAY SOLUCION en estas condiciones.



Factor de corrección para la LMTD en el caso de un intercambiador en contracorriente 2/4

VI.18.- Para calentar 4600 kg/hora de aire desde una temperatura de 14,5°C hasta 30°C, se utiliza vapor de agua a 100°C, en un intercambiador de flujos cruzados, en el que se impulsa aire por el exterior de un haz de tubos de diámetros 10/13 mm, circulando el aire perpendicular a los mismos.

Cada tubo tiene una longitud de 61 cm y están dispuestos según una malla cuadrada, con una separación entre centros de los tubos de 19 mm y formando todo ello un conjunto de 19 tubos en la misma vertical.

Determinar

a) El coeficiente global de transmisión de calor

b) El número de hileras de tubos, necesarias para alcanzar en el aire las temperaturas prefijadas.

Datos de los tubos, $h_{C \text{ interior tubos}} = 5000 \text{ Kcal/h m}^2\text{C} ; k_{\text{tubos}} = 90 \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C}$

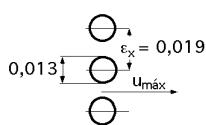
Datos del aire, $\rho = 1,195 \text{ kg/m}^3 ; \mu = 65,79 \times 10^{-3} \text{ kg/h.m} ; k = 22,29 \times 10^{-3} \text{ Kcal/h.m.}^\circ\text{C} ; c_p = 0,24045 \text{ Kcal/kg}^\circ\text{C} ; Pr = 0,71$

Datos del vapor, $r_{L-v} = 540 \text{ Kcal/kg}$

RESOLUCION

a) Coeficiente global de transmisión de calor

Cálculo del coeficiente de película exterior h_{ce}



Hay que calcular la velocidad máxima a través del haz de tubos

$$u_{\text{máx}} = \frac{u_F e_x}{e_x - d} = \left| u_F = \frac{G}{19} = \frac{G}{19 L e_x} \right| = \frac{G}{19 L (e_x - d)} =$$

$$= \frac{4600 \text{ kg/hora}}{1,195 (\text{kg/m}^3) \times 0,61 \text{ m} \times 19 \times (0,019 - 0,013) \text{ m}} = 55.355 \frac{\text{m}}{\text{hora}} = 15,37 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de Reynolds: } Re = \frac{u_{\text{máx}} d}{\nu} = \frac{55.355 \frac{\text{m}}{\text{hora}} \times 0,013 \text{ m}}{\frac{0,006579 \frac{\text{Kg}}{\text{h.m.}}}{1,195 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}}} = 13.071$$

$$Nu = 0,33 (Re)_{\text{máx}}^{0,6} Pr^{0,3} = 0,33 \times (13.071)^{0,6} \times (0,71)^{0,3} = 87,84$$

$$h_{ce} = \frac{87,84 \times 22,29 \times 10^{-3} \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}}}{0,013 \text{ m}} = 150,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{C}}$$

$$U = \frac{1}{\frac{13}{10 \times 5000} + \frac{0,013}{2 \times 90} \ln \frac{0,013}{0,01} + \frac{1}{150,6}} = \frac{1}{(2,6 \times 10^{-4}) + (1,895 \times 10^{-5}) + (6,64 \times 10^{-3})} = 144,53 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{C}}$$

Cálculo de la (LMTD)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 100 - 14,5 = 85,5^\circ\text{C} \\ T_2 = 100 - 30 = 70^\circ\text{C} \end{array} \right\} \quad (LMTD) = \frac{85,5 - 70}{\ln \frac{85,5}{70}} = 77,5^\circ\text{C}$$

Cálculo de la temperatura superficial exterior,

$$q = U A (LMTD) = A h_{ce} (T_{pF} - T_F) = \left| T_F = \frac{14,5 + 30}{2} = 22,25^\circ\text{C} \right| = A h_{ce} (T_{pF} - 22,5)$$

$$U T_m = h_{ce} (T_{pF} - T_F) ; 144,53 \times 77,5 = 150,6 \times (T_{pF} - 22,5) ; T_{pF} = 96,63^\circ\text{C}$$

Superficie A de intercambio térmico,

$$q = U A (LMTD) = m_F c_{pF} (T_{F2} - T_{F1})$$

$$144,3 \times A \times 77,5 = 4600 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 0,24045 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} \times (30 - 14,5)^\circ\text{C}$$

$$A = 1,5305 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{tubos}} = n_{\text{hileras}} N d_e L = n_{\text{hileras}} \times 19 \times 0,013 \times 0,61 = 1,5305 \text{ m}^2 ; n_{\text{hileras}} = 3,23$$

Hay que hacer una corrección del coeficiente de película para 4 hileras,

$$\text{Para 4 hileras Tubos alineados} = 0,90 ; h_{ce}^* = 0,90 \times 150,6 = 135,54 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{C}}$$

$$U^* = \frac{1}{\frac{13}{10 \times 5000} + \frac{0,013}{2 \times 90} \ln \frac{0,013}{0,01} + \frac{1}{135,54}} = 130,6 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.\text{C}}$$

$$\text{Superficie } A^* \text{ de intercambio térmico: } A^* = \frac{4600 \times 0,24045 \times 15,5}{130,6 \times 77,5} = 1,6938 \text{ m}^2$$

$$\text{Número de hileras: } n_{\text{hileras}}^* = \frac{1,6938}{19 d_e L} = 3,5784 , \text{ luego se considerarán 4 hileras}$$

VI.19.- Una chimenea de fundición $k = 50 \text{ W/m}^\circ\text{K}$ tiene 10 m de altura, un diámetro interior de 0,6 m y un espesor de 1 cm. Por su interior circula un flujo de gases de combustión procedentes de un horno, 1 kg/seg, que penetran por la base de la chimenea a 500°C ; las propiedades medias de los gases de combustión en las condiciones del problema son,

$$= 0,5183 \text{ kg/m}^3 ; Pr = 0,7 ; \nu = 6,184 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg} ; c_p = 1,063 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C} ; k = 4,87 \times 10^{-2} \text{ W/m}^\circ\text{C}.$$

Por el exterior circula un viento a 14 m/seg y 20°C , perpendicular a la chimenea; sus propiedades medias respecto a la temperatura media de la pared de la chimenea son,

$$= 0,911 \text{ kg/m}^3 ; Pr = 0,7 ; \nu = 2,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{seg} ; c_p = 1,007 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C} ; k = 3,2 \times 10^{-2} \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

Determinar,

a) Los coeficientes de convección interior y exterior, justificando si los flujos están o no completamente desarrollados

b) El coeficiente global de transmisión de calor respecto a la sección exterior de la chimenea

c) Las pérdidas térmicas al exterior

d) La temperatura de salida de los gases y la temperatura media superficial de la chimenea

RESOLUCION

Se puede considerar a la chimenea como un intercambiador de calor compuesto por 1 tubo (chimenea) y el medio exterior a $T = \text{Cte}$.

a) Coeficientes de convección interior y exterior, justificando si los flujos están o no completamente desarrollados

FLUJO CRUZADO (POR EL EXTERIOR DE LA CHIMENEA)

$$Re_{de} = \frac{u \cdot d_{ext}}{\nu} = \frac{14 \times 0,62}{2,4 \times 10^{-5}} = 361.666$$

$$Nu_{de} = C \cdot Re_{de}^n \cdot Pr^{1/3} = \left| \begin{matrix} C = 0,0266 \\ n = 0,805 \end{matrix} \right| = 0,0266 \times 361666^{0,805} \times 0,7^{1/3} = 704,2$$

$$h_{c \text{ exterior}} = \frac{Nu_{de} \cdot k}{d} = \frac{704,2 \times 3,2 \times 10^{-2}}{0,62} = 36,34 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

FLUJO POR EL INTERIOR DE LA CHIMENEA

$$u_{gases} = \frac{G_{gases}}{A_i} = \frac{1 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}}}{0,5183 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{d_i^2}{4}} = \left| d_i = 0,6 \text{ m} \right| = 6,82 \text{ m/seg}$$

$$Re_{di} = \frac{u \cdot d_{int}}{\nu} = \frac{6,82 \times 0,6}{6,184 \times 10^{-5}} = 66.207$$

$$\text{Relación } \frac{L}{d_i} = \frac{10}{0,6} = 16,6 < 60 \text{ (el flujo de gases está condicionado a la entrada)}$$

$$Nu_{di} = 0,036 \cdot Re_{di}^{0,8} \cdot Pr^{1/3} \cdot \left(\frac{d}{L} \right)^{1/18} = \left| \begin{matrix} \text{Válida para:} \\ 10 < \frac{L}{d} < 100 \end{matrix} \right| = 0,036 \times 66207^{0,8} \times 0,7^{1/3} \times \left(\frac{1}{16,6} \right)^{1/18} = 196,84$$

$$h_{c \text{ interior}} = \frac{Nu_{di} \cdot k}{d_i} = \frac{196,84 \times 4,87 \times 10^{-2}}{0,6} = 15,97 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

b) Coeficiente global de transmisión de calor respecto a la sección exterior de la chimenea

$$U = \frac{1}{\frac{A_e}{h_{ci} A_i} + \frac{A_e \ln \frac{r_e}{r_i}}{2 k L} + \frac{1}{h_{ce} r_e} \left(\frac{1}{h_{ci} r_i} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{k} + \frac{1}{h_{ce} r_e} \right)} = \frac{1}{0,31 \times \left(\frac{1}{15,97 \times 0,3} + \frac{\ln \frac{0,31}{0,3}}{50} + \frac{1}{36,34 \times 0,31} \right)} = \frac{1}{0,31 \times (0,2175 + 0,000656 + 0,088)} = 10,53 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

c) Pérdidas térmicas al exterior

$$C_{\text{máx}} = C_{\text{exterior}}$$

$$C_{\min} = G c_{pi} = 1 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 1,063 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} = 1063 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}$$

$$NTU = \frac{U_e A_e}{C_{\min}} = \left| A_e = d_e L = \right. \times 0,62 \times 10 = 19,47 \text{ m}^2 \left. \right| = \frac{10,53 \times 19,47}{1063} = 0,1929$$

$$= 1 - e^{-NTU} = 1 - e^{-0,1929} = 0,1754$$

$$q = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1}) = 0,1754 \times 1063 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \times (500 - 20)^\circ\text{C} = 89.533 \text{ W}$$

d) Temperatura de salida de los gases

$$\frac{T_{C1} - T_{C2}}{T_{C1} - T_{F1}} = \frac{C_{\min}}{C_e} = \frac{500 - T_{C2}}{500 - 20} = 0,1754 \quad ; \quad T_{C2} = 415,8^\circ\text{C}$$

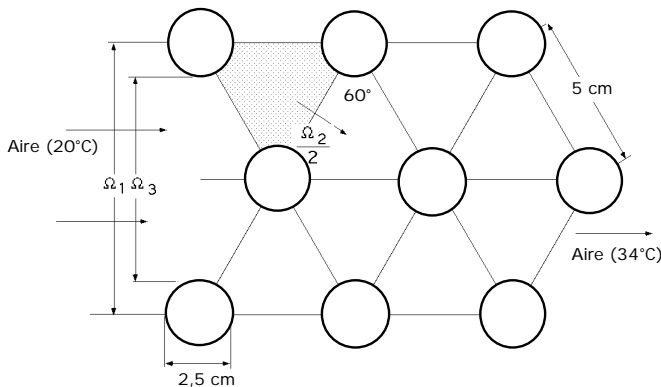
ó también

$$q = G_{\text{gases}} c_{p \text{ gases}} (T_{C1} - T_{C2}) \quad T_{C2} = \frac{-q}{G_{\text{gases}} c_{p \text{ gases}}} + T_{C1} = \frac{-89,533 \text{ kW}}{1 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 1,063 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}} + 500^\circ\text{C} = 415,8^\circ\text{C}$$

Temperatura media superficial de la chimenea

$$q = h_c A_e (T_{p\text{Fext}} - T_{\text{ext}}) \quad T_{p\text{Fext}} = \frac{q}{h_c A_e} + T_{\text{ext}} = \frac{89,533}{36,34 \times 19,47} + 20^\circ\text{C} = 146,5^\circ\text{C}$$

$$q = 2 k L \frac{T_{p \text{ int}} - T_{\text{ext}}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = 2 \times 50 \times 10 \times \frac{T_{p \text{ int}} - 146,5}{\ln \frac{0,31}{0,3}} = 89533 \text{ W} \quad ; \quad T_{p \text{ int}} = 147,4^\circ\text{C}$$



VI.20.- En un recuperador de flujo normal, se desea calcular los coeficientes de película exterior e interior de los tubos. Por el exterior de los tubos circula aire a una velocidad de 5 m/seg, entrando a 20°C y saliendo a 34°C, mientras que por el interior de los tubos fluye un caudal de agua a una velocidad de 1 m/seg, que penetra a 50°C y sale a 40°C.

Los tubos tienen un diámetro interior de 2,1 cm y un diámetro exterior de 2,5 cm.

Dicho recuperador tiene 5 hileras al tresbolillo, viniendo los datos sobre la figura.

RESOLUCION

AIRE POR EL EXTERIOR DE LOS TUBOS

En el exterior de los tubos circula aire en convección forzada sobre 5 hileras de tubos al tresbolillo

$$Nu_d = 0,33 (Re_d)^{0,6} Pr^{0,33}$$

Tubos al tresbolillo, $\phi = 1$

$$(5 \text{ hileras al tresbolillo}) = 0,92$$

$$\text{Propiedades del aire a } \frac{34 + 20}{2} = 27^\circ\text{C} : \left\{ \begin{array}{l} \mu = 16,84 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \\ Pr = 0,708 \\ k = 0,02624 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} \end{array} \right\}$$

$$\text{Ecuación de continuidad: } u_F \quad 1 = u_{\text{máx}} \quad 2 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = 2 \times 5 \sin 60 = 8,66 \text{ cm}^2 \\ 2 = 2 \times (5 - 2,5) = 5 \text{ cm}^2 \\ 3 = 2 \times 5 \sin 60 - d_e = 6,16 \text{ cm}^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{Ecuación de continuidad: } 5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 8,66 \text{ cm}^2 = u_{\text{máx}} \times 5 \text{ cm}^2 \quad ; \quad u_{\text{máx}} = \frac{5 \times 8,66}{5} = 8,66 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$Re_{de} = \frac{u_{\text{máx}} \times d_e}{16,84 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = \frac{8,66 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,025 \text{ m}}{16,84 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 12.856$$

$$Nu_d = 0,33 \quad (Re_d)^{0,6} \quad Pr^{0,33} = 0,33 \times 1 \times (12856)^{0,6} \times 0,708^{0,33} \times 0,92 = 79,119$$

$$h_{C \text{ aire}} = \frac{79,119 \times 0,02624}{0,025} = 83,04 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}}$$

De otra forma,

$$Nu = C (Re)^n (Pr)^{1/3} = \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \times 2 \sin 60 = 8,66 \quad ; \quad \frac{x}{d_e} = 3,46 \\ y = 5 \times \cos 60 = 2,5 \quad ; \quad \frac{y}{d_e} = 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} C = 0,52 \\ n = 0,569 \end{array} \right\}$$

$$Nu = 0,52 \times (12850)^{0,569} \times (0,708)^{1/3} \times 0,92 = 92,84 \quad ; \quad h_{C \text{ aire}} = 97,44 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}}$$

AGUA POR EL INTERIOR DE LOS TUBOS.- No se conoce la temperatura interior de la pared, que estará a más de 34°C, pero las propiedades del agua no van a diferir mucho si se toman a T_F

$$\text{Propiedades del agua a } T_F = \frac{50+40}{2} = 45^\circ\text{C} : \left\{ \begin{array}{l} = 0,613 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} \\ Pr = 4,125 \\ k = 0,63925 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} \end{array} \right\}$$

$$Re_{\text{agua}} = \frac{u \times d_i}{0,613 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,021 \text{ m}}{0,613 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 34.257$$

$$Nu_{\text{agua}} = 0,023 (Re)^{0,8} Pr^{0,3} \text{ (se enfría)} = 0,023 (34257)^{0,8} (4,125)^{0,3} = 149,33$$

$$h_{C \text{ agua}} = \frac{149,33 \times 0,63925}{0,021} = 4545,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}}$$

De otra forma

$$h_{C \text{ agua}} = 0,023 \left(\frac{u^{0,8}}{d_i^{0,2}} \right) f_1(T) = \left| f_1(T) = (5,77 \times 10^4) + 1067,8 T - 2,162 T^2 = 97373 \right| = 4850 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}}$$

VI.21.- Un intercambiador de calor (agua-agua), está formado por 98 tubos paralelos, dispuestos al tresbolillo, en 9 filas, alojados en una carcasa de 15 cm de diámetro.

Los tubos están fabricados con una aleación de Cu cuyo $k=300 \text{ W/m.°C}$

Los tubos tienen un diámetro exterior de 9,5 mm y un espesor de 1,2 mm

La carcasa lleva 11 pantallas perpendiculares a los tubos, mediante las cuales se dirige la corriente de agua que circula por el exterior de las tuberías, separadas 11 cm; la sección mínima de paso entre tubos es de 42 cm².

Se han realizado una serie de ensayos en el intercambiador, y se han encontrado los siguientes valores,

Agua que circula por la carcasa, 11000 kg/hora

Temperatura de entrada=52°C; temperatura de salida=38°C

Agua que circula por el interior de los tubos, 7000 kg/hora

Temperatura de entrada=17°C; temperatura de salida=33°C

Supuesto flujo en contracorriente determinar,

- Los coeficientes de convección en ambos líquidos
- El coeficiente global de transmisión de calor U referido a la superficie exterior
- La eficiencia del intercambiador y pérdidas térmicas
- La superficie de intercambio externa de los tubos y longitud de cada tubo

RESOLUCION

a) Coeficientes de convección en ambos líquidos

Fluido que circula por el interior de los tubos.-

Las propiedades térmicas del agua que circula por el interior de los tubos (se calienta), se calculan a la temperatura media, $(33 + 17)/2 = 25^\circ\text{C}$

$$= 996,7 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; c_p = 4,18025 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K}} ; k = 0,606 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{K}} ; \mu = 0,919 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \text{Pr} = 6,375$$

$$\begin{aligned} d_i &= 9,5 - (1,2 \times 2) = 7,1 \text{ mm} \\ \text{Re} = \frac{u d_i}{\mu} &= u = \frac{Q}{\frac{d_i^2}{4} \times 98 \text{ m}^2} = \frac{7000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}}}{\frac{d_i^2}{4} \times 98 \text{ m}^2} = \frac{7000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times \frac{1}{3600} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}}{\frac{d_i^2}{4} \times 98 \text{ m}^2} = \frac{0,5028 \times 0,0071}{0,919 \times 10^{-6}} = 3885 \\ &= \frac{7000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times \frac{1}{996,7} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}}{\frac{0,0071^2}{4} \times 98 \text{ m}^2} \frac{1}{3600} \frac{\text{hora}}{\text{seg}} = 0,5028 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \end{aligned}$$

$$\text{Polley: } \text{St} = \exp\{-3,796 - 0,205 \ln \text{Re} - 0,505 \ln \text{Pr} - 0,0225 \ln \text{Pr}^2\} = 1,49 \times 10^{-3} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re Pr}} = \frac{h_{cF}}{r c_p u}$$

$$\text{Nu} = 36,89 ; h_{cF} = 3150 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

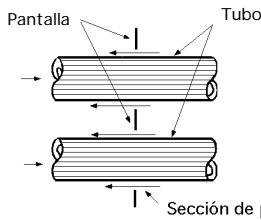
$$\text{Petukhov, } \text{Nu} = \frac{\text{Re}_d \text{Pr}}{X} \left(\frac{F}{8}\right) \left(\frac{F}{\text{Pr}}\right)^n =$$

$$\begin{aligned} &\left| \begin{aligned} \text{Propiedades a } T_F &= \frac{17 + 33}{2} = 25^\circ\text{C} \\ \text{Re} < 2.10^4 ; &= 0,316 \text{Re}^{-0,25} = 0,316 \times 3885^{-0,25} = 0,040025 \\ n &= 0,11 ; \left(\frac{F}{\text{Pr}}\right)^{0,11} = 1 \\ X &= 1,07 + 12,7 (\text{Pr}^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{8}{\text{Re}}} = 1,07 + 12,7 (6,375^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{0,04}{8}} = 3,223 \end{aligned} \right| = \\ &= \frac{3885 \times 6,375}{3,223} \times \frac{0,04}{8} \times 1 = 38,43 \quad h_{cF} = \frac{38,43 \times 0,606}{0,0071} = 3280 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \end{aligned}$$

observándose que los valores obtenidos con diferente formulación son muy aproximados, pudiendo tomar como valor de h_{cF} la media entre los dos.

$$h_{cF} = \frac{3150 + 3280}{2} = 3215 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

Fluido que circula por el exterior de los tubos



$$d_e = 9,5 \text{ mm}$$

$$u_{\text{máx}} = \frac{Q}{\text{mín}} = \frac{11000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times \frac{1}{989,95} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}}}{42 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \frac{1}{3600} \frac{\text{hora}}{\text{seg}} = 0,7348 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$Re_{\text{máx}} = \frac{u_{\text{máx}} d_e}{\nu} = \frac{0,7348 \times 0,0095}{0,613 \times 10^{-6}} = 11390$$

$$Nu = 0,26 Re^{0,6} Pr^{0,3} \quad C = \begin{cases} \text{válida para } 10^3 < Re < 10^5 \end{cases} = 0,26 \times 11390^{0,6} \times 4,125^{0,3} = 108$$

$$C = \left(\frac{F}{pF} \right)^{0,14} = 1$$

$$h_{ce} = \frac{108 \times 0,63925}{0,0095} = 7267 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

b) El coeficiente global de transmisión de calor U referido a la superficie exterior

$$U_e = \frac{1}{\frac{r_e}{r_i} \frac{1}{h_{ci}} + \frac{r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_{ce}}} = \frac{1}{\frac{0,00475}{0,00355 \times 3215} + \frac{0,00475}{300} \ln \frac{0,00475}{0,00355} + \frac{1}{7267}} = 1790,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

c) Eficiencia del intercambiador

$$= \frac{q \text{ (Calor absorbido por el líquido que se calienta)}}{C_{\text{mín}} (T_{C1} - T_{F1})}$$

$$q = 7000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 4,18025 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg } ^\circ\text{C}} \times (33 - 17)^\circ\text{C} = 468.188 \frac{\text{kJ}}{\text{hora}}$$

$$C_F = 7000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 4,18025 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg } ^\circ\text{C}} = 29261,7 \frac{\text{kJ}}{\text{h } ^\circ\text{C}} \quad \dots \quad C_{\text{mín}}$$

$$C_C = 11000 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 4,1765 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg } ^\circ\text{C}} = 45941,5 \frac{\text{kJ}}{\text{h } ^\circ\text{C}} \quad \dots \quad C_{\text{máx}}$$

$$= \frac{468.188}{29261,7 \times (52 - 17)} = 0,4571 = 45,71\%$$

ó también,

$$= \frac{C_C (T_{C1} - T_{C2})}{C_{\text{mín}} (T_{C1} - T_{F1})} = \left| C_C = C_{\text{mín}} \right| = \frac{33 - 17}{52 - 17} = 0,4571 = 45,71\%$$

Pérdidas térmicas = $q_C - q_F$

$$q_C - q_F = \left| \begin{array}{l} q_C = 11000 \times 4,1765 \times (52 - 38) = 643.181 \frac{\text{kJ}}{\text{hora}} \\ q_F = 468.188 \frac{\text{kJ}}{\text{hora}} \end{array} \right| = 643.181 - 468.188 = 174.993 \frac{\text{kJ}}{\text{hora}}$$

d) Superficie de intercambio externa de los tubos y longitud de cada tubo

$$(\text{LMTD}) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \left| \begin{array}{l} T_2 = 52 - 33 = 19^\circ\text{C} \\ T_1 = 38 - 17 = 21^\circ\text{C} \end{array} \right| = \frac{19 - 21}{\ln \frac{19}{21}} = 19,98 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$A_e = \frac{q}{U (\text{LMTD})} = \frac{130.052 \text{ W}}{1790,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \times 19,98^\circ\text{C}} = 3,6347 \text{ m}^2$$

$$\text{Longitud de cada tubo: } L = \frac{3,6347 \text{ m}^2}{d_e N} = \frac{3,6347 \text{ m}^2}{0,0095 \text{ m} \times 92} = 1,242 \text{ m}$$

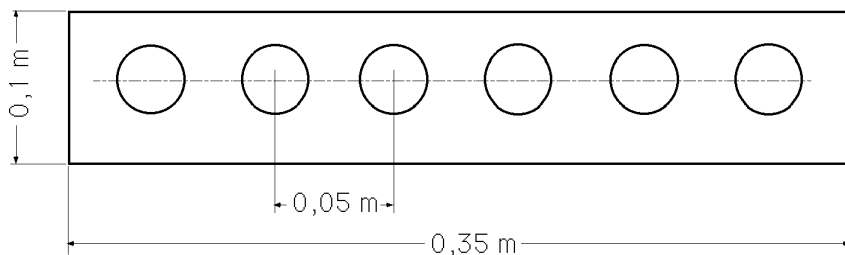
VI.22.- Determinar el calor intercambiado en el intercambiador de calor que se presenta, compuesto por 6 tubos y una carcasa rectangular, tal como se indica en la figura.

Por los tubos de acero (de diámetro interior 22 mm y diámetro exterior 25 mm) circula amoníaco líquido, que penetra a la temperatura de 20°C y velocidad 3 m/seg, mientras que por la carcasa circula en contracorriente agua caliente que penetra a 80°C y velocidad 1,5 m/seg.

La longitud del intercambiador es de 5 metros.

La conductividad térmica del acero es de 40 W/m°C.

Se supondrá no existen pérdidas térmicas.



Datos de los fluidos,

$$\text{Datos NH}_3: = 580 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}; c_p = 5 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}; k = 0,50 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}; = 0,34 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}; \text{Pr} = 2$$

$$\text{Datos H}_2\text{O}: = 985 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}; c_p = 4,186 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}; k = 0,66 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}; = 0,48 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}; \text{Pr} = 3$$

RESOLUCION

- El NH₃ se calienta en el interior de los tubos

Para 1 tubo se tiene:

$$G = V = \frac{d_i^2}{4} u_F = \frac{x \ 0,022^2 \text{ m}^2}{4} \times 3 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 580 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 0,6614 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} = 2381 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}}$$

Coefficiente de película interior del NH₃,

$$\text{Re}_{\text{NH}_3} = \frac{u_F d_i}{\nu} = \frac{3 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,022 \text{ m}}{0,34 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 194.117$$

$$\text{Nu}_{\text{NH}_3} = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,4} = 0,023 \times (194.117)^{0,8} \times (2)^{0,4} = 515,93$$

$$h_{\text{NH}_3} = \frac{k_{\text{NH}_3} \text{Nu}}{d_i} = \frac{0,5 \times 515,93}{0,022} = 11.725 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

- El H₂O se enfría en la carcasa (exterior de los tubos)

$$G = V = u_{\text{agua}} \text{agua} = \{(0,35 \times 0,1) - 6 \times \frac{x \ 0,025^2}{4}\} \text{m}^2 \times 1,5 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 985 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 47,36 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} = 170.500 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}}$$

Coefficiente de película del H₂O,

$$\text{Re}_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{u_{\text{agua}} d_{\text{equiv}}}{\nu_{\text{agua}}} \left| d_{\text{equiv}} = 4 d_H = 4 \times \frac{(0,35 \times 0,1) - (6 \times \frac{x \ 0,025^2}{4})}{\{2 \times (0,35 + 0,1)\} + (6 \times 0,025)} \right| = 0,0935 \left| = \frac{1,5 \times 0,0935}{0,48 \times 10^{-6}} \right| = 292.200$$

$$\text{Nu}_{\text{H}_2\text{O}} = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,3} = 0,023 \times (292.800)^{0,8} \times (3)^{0,3} = 754,07$$

$$h_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{k_{\text{H}_2\text{O}} \text{Nu}_{\text{H}_2\text{O}}}{d_e} = \frac{0,66 \times 754,07}{0,0935} = 5.323 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

Coefficiente global de transmisión de calor,

$$U_e = \frac{1}{\frac{r_e}{r_i h_{\text{NH}_3}} + \frac{r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_{\text{H}_2\text{O}}}} = \frac{1}{\frac{0,025}{0,022 \times 11725} + \frac{0,0125}{40} \ln \frac{0,025}{0,022} + \frac{1}{5323}} = 3080 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}}$$

- Para conocer las temperaturas finales de ambas corrientes es necesario conocer

$$= \frac{1 - \exp \left\{ (\text{NTU}) \left(\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} \exp (\text{NTU}) \left(\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} - 1 \right)}$$

$$C_{\text{NH}_3} = 6 \times (G c_p)_{\text{NH}_3} = 6 \times 2381 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 5 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg.°C}} = 71.430 \frac{\text{kJ}}{\text{h.°C}} = 19,84 \frac{\text{kJ}}{\text{seg.°C}} = C_{\text{mín}}$$

$$C_{\text{H}_2\text{O}} = (G c_p)_{\text{H}_2\text{O}} = 170.500 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \times 4,186 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg.°C}} = 713.713 \frac{\text{kJ}}{\text{h.°C}} = 198,25 \frac{\text{kJ}}{\text{seg.°C}} = C_{\text{máx}}$$

$$\text{Superficie de intercambio térmico: } A_e = 6 \quad d_e \quad L = 6 \quad \times 0,025 \times 5 = 2,356 \text{ m}^2$$

$$\text{NTU} = \frac{A_e U_e}{C_{\text{mín}}} = \frac{2,356 \text{ m}^2 \times 3080 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}}}{19.840 \frac{\text{J}}{\text{seg °C}}} = 0,36575$$

$$\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} = \frac{19,84}{198,25} = 0,10007$$

$$= \frac{1 - \exp \left\{ (\text{NTU}) \left(\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} \exp (\text{NTU}) \left(\frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{máx}}} - 1 \right)} = \frac{1 - \exp \{ (0,365) (0,1 - 1) \}}{1 - 0,1 \times \exp (0,365) (0,1 - 1)} = 0,3017$$

$$T_{\text{C2(agua)}} = T_{\text{C1}} - (T_{\text{C1}} - T_{\text{F1}}) \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{C}}} = | C_{\text{mín}} = C_{\text{NH}_3} | = 80 - (80 - 20) \times \frac{0,3017 \times 19,84}{198,25} = 78,2\text{°C}$$

$$T_{\text{F2(amon)}} = T_{\text{F1}} + (T_{\text{C1}} - T_{\text{F1}}) \frac{C_{\text{mín}}}{C_{\text{F}}} = 20 + (80 - 20) \times 0,3017 = 38,1\text{°C}$$

Calor intercambiado,

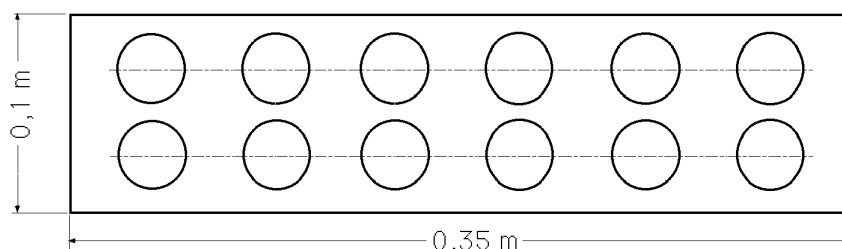
$$Q = U A \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \left| \begin{array}{l} T_2 = 80 - 38,1 = 41,9 \\ T_1 = 78,2 - 20 = 58,2 \end{array} \right| = 3.080 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{°C}} \times 2,356 \text{ m}^2 \times \frac{41,9 - 58,2}{\ln \frac{41,9}{58,2}} \text{°C} = 360 \text{ kW}$$

$$Q = C_{\text{mín}} (T_{\text{C1}} - T_{\text{F1}}) = 0,3017 \times 19,84 \frac{\text{kJ}}{\text{seg °C}} \times (80 - 20)\text{°C} = 360 \text{ kW}$$

VI.23.- Se presenta el intercambiador de la figura, compuesto por 12 tubos y una carcasa rectangular.

Por los tubos de acero (de diámetro interior 20 mm y diámetro exterior 25 mm) circula agua líquida, que penetra a la temperatura de 10°C y velocidad 1 m/seg, mientras que por la carcasa circula en contracorriente sodio líquido que penetra a 100°C y velocidad 0,15 m/seg.

La longitud del intercambiador es de 3 metros.



La conductividad térmica del acero es de 40 W/m°C.

Se supondrá no existen pérdidas térmicas.

Determinar,

a) El calor intercambiado entre los dos fluidos

b) La temperatura de salida de los dos fluidos

Datos de los fluidos,

$$\text{Datos Na: } = 925 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}; c_p = 1,37 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}; k = 86 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}; = 7,25 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

$$\text{Datos H}_2\text{O: } = 985 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}; c_p = 4,186 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}; k = 0,66 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}; = 0,48 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

RESOLUCION

- El agua se calienta en el interior de los tubos . Para 1 tubo se tiene,

$$\text{Re}_{\text{agua}} = \frac{u_{\text{agua}} d_i}{\nu_{\text{agua}}} = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 0,02 \text{ m}}{0,48 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}}} = 41.667$$

$$\text{Pr}_{\text{agua}} = \left(\frac{c_p}{k} \right)_{\text{agua}} = \left(\frac{c_p}{k} \right)_{\text{agua}} = \frac{985 \times 0,48 \times 10^{-6} \times 4186}{0,66} = 3$$

$$\text{Nu}_{\text{agua}} = 0,023 (\text{Re})^{0,8} (\text{Pr})^{0,4} = 0,023 \times (41667)^{0,8} \times (3)^{0,4} = 177,18$$

$$h_{C(\text{agua})} = \frac{k_{\text{agua}} \text{Nu}_{\text{agua}}}{d_i} = \frac{0,66 \times 177,18}{0,02} = 5847 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

- El Na se enfría en la carcasa (exterior de los tubos)

$$\begin{aligned} G_{\text{Na}} = V_{\text{Na}} \rho_{\text{Na}} &= u_{\text{Na}} \rho_{\text{Na}} = \left\{ (0,35 \times 0,1) - 12 \times \frac{0,025^2}{4} \right\} \text{m}^2 \times 0,15 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 925 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = \\ &= 4,037 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} = 14.535,4 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re}_{\text{Na}} = \frac{u_{\text{Na}} d_{\text{equiv}}}{\nu_{\text{Na}}} &= \left| d_{\text{equiv}} = 4 d_H = 4 \times \frac{(0,35 \times 0,1) - (12 \times \frac{0,025^2}{4})}{\{2 \times (0,35 + 0,1)\} + (12 \times 0,025)} = 0,0631 \right| = \\ &= \frac{0,15 \times 0,0631}{7,25 \times 10^{-7}} = 13.067 \end{aligned}$$

$$\text{Pr}_{\text{Na}} = \left(\frac{c_p}{k} \right)_{\text{Na}} = \frac{925 \times 7,25 \times 10^{-7} \times 1370}{86} = 0,01068$$

$$\text{Pe}_{\text{Na}} = (\text{Re Pr})_{\text{Na}} = 13067 \times 0,01068 = 139,6$$

$$\text{Nu}_{\text{Na}} = 4,82 + 0,0185 \times (\text{Pe})^{0,827}, \text{ válida en el campo: } \left\{ \begin{array}{l} 10^2 < \text{Pe} < 10^4 \\ 3,6 \times 10^3 < \text{Re} < 9,05 \times 10^5 \end{array} \right\}$$

$$\text{Nu}_{\text{Na}} = 4,82 + 0,0185 \times (\text{Pe})^{0,827} = 4,82 + 0,0185 \times (139,6)^{0,827} = 5,92$$

$$h_{C(\text{Na})} = \frac{k_{\text{Na}} \text{Nu}_{\text{Na}}}{d_e} = \frac{86 \times 5,92}{0,06316} = 8.059,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

Coficiente global de transmisión de calor,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{\frac{r_e}{r_i h_{C(\text{agua})}} + \frac{r_e}{k} \ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h_{C(\text{Na})}}} = \frac{1}{\frac{0,025}{0,02 \times 5847} + \frac{0,0125}{40} \ln \frac{0,025}{0,02} + \frac{1}{8059,4}} = \\ &= \frac{10^4}{2,138 + 0,697 + 1,24} = 2.184 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \end{aligned}$$

- Para conocer las temperaturas finales de ambas corrientes es necesario conocer

$$= \frac{1 - \exp \left\{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)}$$

$$C_{\text{agua}} = 12 \times (G \ c_p)_{\text{agua}} = \left| \begin{array}{l} G_{\text{agua}} = u_F = \frac{d_1^2}{4} u_F = \\ = \frac{0,02^2 \text{ m}^2}{4} \times 1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \times 985 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 0,3094 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} = 1,114 \frac{\text{Kg}}{\text{hora}} \end{array} \right| =$$

$$= 12 \times 0,3094 \times 4,186 = 15,541 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} = C_{\max}$$

$$C_{\text{Na}} = (G \ c_p)_{\text{Na}} = 4,037 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 1,370 \frac{\text{J}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} = 5,530,7 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} = C_{\min}$$

$$\text{Superficie de intercambio térmico: } A_e = 12 \ d_e \ L = 12 \times 0,025 \times 3 = 2,827 \text{ m}^2$$

$$NTU = \frac{A_e U_e}{C_{\min}} = \frac{2,827 \text{ m}^2 \times 2184 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}}{5,530,7 \frac{\text{J}}{\text{seg} \cdot ^\circ\text{C}}} = 1,1163$$

$$\frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{5,530,7}{15,541} = 0,356$$

$$= \frac{1 - \exp \left\{ (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right) \right\}}{1 - \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \exp (NTU) \left(\frac{C_{\min}}{C_{\max}} - 1 \right)} = \frac{1 - \exp \left\{ (1,116) (0,356 - 1) \right\}}{1 - 0,356 \times \exp (1,116) (0,356 - 1)} = 0,62$$

$$T_{F2(\text{agua})} = T_{F1} + (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_F} = 10 + (100 - 10) \times 0,62 \times 0,356 = 29,86^\circ\text{C}$$

$$T_{C2(\text{Na})} = T_{C1} - (T_{C1} - T_{F1}) \frac{C_{\min}}{C_C} = | C_{\min} = C_{\text{Na}} | = 100 - (100 - 10) \times 0,62 = 44,2^\circ\text{C}$$

Calor intercambiado,

$$Q = C_{\min} (T_{C1} - T_{F1}) = 0,62 \times 5,530,7 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \times (100 - 10)^\circ\text{C} = 308,6 \text{ kW}$$

VI.24.- Por un tubo de acero de 0,1 m de diámetro interior y 10 mm de espesor, circula vapor de agua recalentado, a la presión de 10 atm abs, y se desea incrementar su temperatura desde 200°C hasta 400°C. En este intervalo de temperaturas tiene una velocidad media de 10 m/seg.

Para proceder al recalentamiento se hace uso del calor cedido por los humos procedentes de un hogar, a la temperatura de entrada de 1000°C, siendo la temperatura de evacuación a la chimenea de 500°C. La velocidad media de los humos es de 5 m/seg, y el gasto de humos de 10 kg/seg.

La composición química media de los tubos de acero es la siguiente,

C = 0,50 ; Si = 0,45 ; Mn = 0,45 ; Ni = 10 ; Cr = 5 ; Co = 1,25

Determinar la longitud del tubo necesaria para este recalentamiento y el n° de kg de vapor de agua recalentados por kg de humos.

RESOLUCION

La formulación que se propone para los humos sólo sirve para el aire y chapas planas. Equiparando los humos a aire caliente, y los tubos a chapas se tiene,

$$h_{C(\text{humos})} (\text{Schack}) = 6,122 u_{\text{humos}}^{0,775} + 4,41 e^{-0,6 u(\text{humos})} = 6,122 \times 5^{0,775} + 4,41 \times e^{-0,6 \times 5} = 21,53 \frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

$$h_{C(\text{vapor recalentado})} (\text{Schack}) = \left\{ 3,62 + 0,30 \frac{t}{100} \right\} \frac{u_0^{0,75}}{d^{0,25}} = \left| \begin{array}{l} u_0 = u_{\text{vapor}} \frac{264 p}{273 + t} = \\ = 10 \times \frac{264 \times 10}{273 + 300} = 46,07 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \end{array} \right| =$$

$$= \left\{ 3,62 + 0,30 \times \frac{300}{100} \right\} \times \frac{46,07^{0,75}}{0,1^{0,25}} = 142,14 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Como flujos cruzados se tendría,

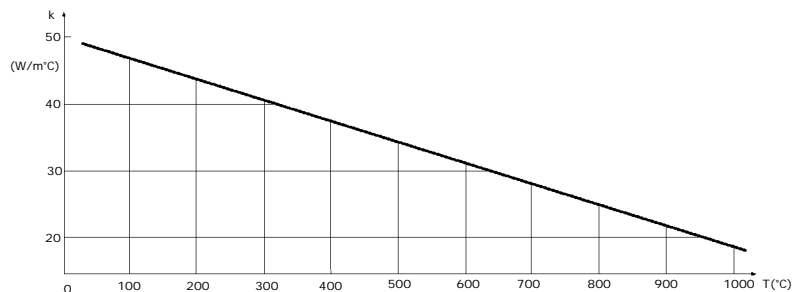
Propiedades de los humos a 750°C (Se equiparán al aire a 750°C)

$$= 0,3524 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} ; c_p = 1,1417 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}^\circ\text{C}} ; k = 0,06752 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}} ; \mu = 117,8 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{seg}} ; \text{Pr} = 0,7$$

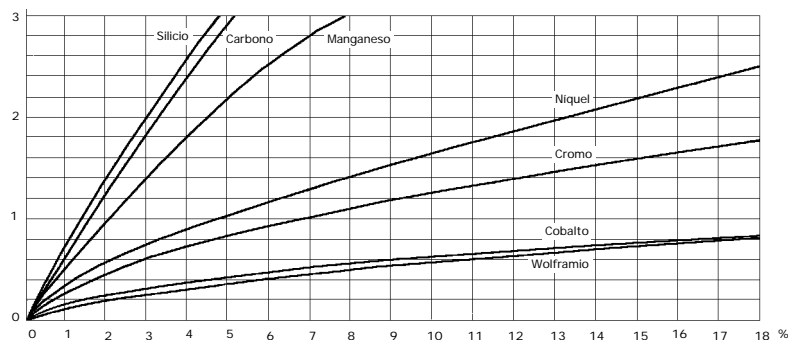
$$\text{Nu} = C (\text{Re})^n (\text{Pr})^{1/3} = \left| \begin{array}{l} \text{Re} = \frac{u d}{\mu} = \frac{5 \times 0,12}{117,8 \times 10^{-6}} = 5093,4 \\ C = 0,193 ; n = 0,618 \end{array} \right| = 0,193 \times 5093,4^{0,618} \times 0,7^{1/3} = 33,48$$

$$h_{C(\text{humos})} = \frac{(\text{Nu}) k_{\text{humos}}}{d_e} = \frac{33,48 \times 0,06772}{0,12} = 18,84 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} = 16,2 \frac{\text{Kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$$

Para el vapor de agua recalentado se puede hacer uso del ábaco correspondiente, del cual se obtiene un coeficiente de convección del orden de 140 Kcal/h.m².°C.



Conductividad térmica del hierro puro



Factores de corrección de la conductividad térmica de los aceros aleados

Cálculo de la conductividad térmica de los tubos, k_{tubos} ,

$$k_{\text{Fe}} = - 0,03125 T + 50 , \quad (\text{con } T \text{ en } ^\circ\text{C} = 300^\circ\text{C})$$

$$k_{\text{tubos}} = \frac{k_{\text{Fe}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots} = \frac{- 0,03125 T(^{\circ}\text{C}) + 50}{1 + 0,32 + 0,2 + 0,16 + 0,2 + 0,84 + 1,62} = 9,36 \frac{\text{Kcal}}{\text{m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Cálculo del coeficiente global de transmisión de calor U (Schack),

$$U_e = \frac{1}{\frac{r_e}{h_{C(\text{humos})} r_i} + \frac{r_e \ln \frac{r_e}{r_i}}{k_{Fe}} + \frac{1}{h_{C(\text{vapor})}}} = \frac{1}{\frac{0,06}{0,05 \times 142,14} + \frac{0,06 \ln \frac{0,06}{0,05}}{9,36} + \frac{1}{21,53}} = 17,83 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}}$$

Flujos cruzados,

$$U_e = \frac{1}{\frac{r_e}{h_{C(\text{humos})} r_i} + \frac{r_e \ln \frac{r_e}{r_i}}{k_{Fe}} + \frac{1}{h_{C(\text{vapor})}}} = \frac{1}{\frac{0,06}{0,05 \times 140} + \frac{0,06 \ln \frac{0,06}{0,05}}{9,36} + \frac{1}{16,2}} = 14 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}}$$

por lo que se podría tomar el valor medio, $U_e = (17,83 + 14)/2 = 15,91 \text{ Kcal/h.m}^2 \cdot ^\circ\text{C} = 18,5 \text{ kW/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$

$$Q_{\text{humos}} = 10 \frac{\text{Kg}}{\text{seg}} \times 1,1417 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C}} \times (1000 - 500)^\circ\text{C} = 5708 \text{ kW} = U_e A_e \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{T_2}{T_1}}$$

$$A_e = \frac{Q \ln \frac{T_2}{T_1}}{U_e (T_2 - T_1)} = \left| \begin{array}{l} T_2 = 1000 - 400 = 600^\circ\text{C} \\ T_1 = 500 - 200 = 300^\circ\text{C} \end{array} \right| = \frac{5708 \text{ kW} \times \ln \frac{600}{300}}{18,5 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \times (600 - 300)} = 0,7128 \text{ m}^2$$

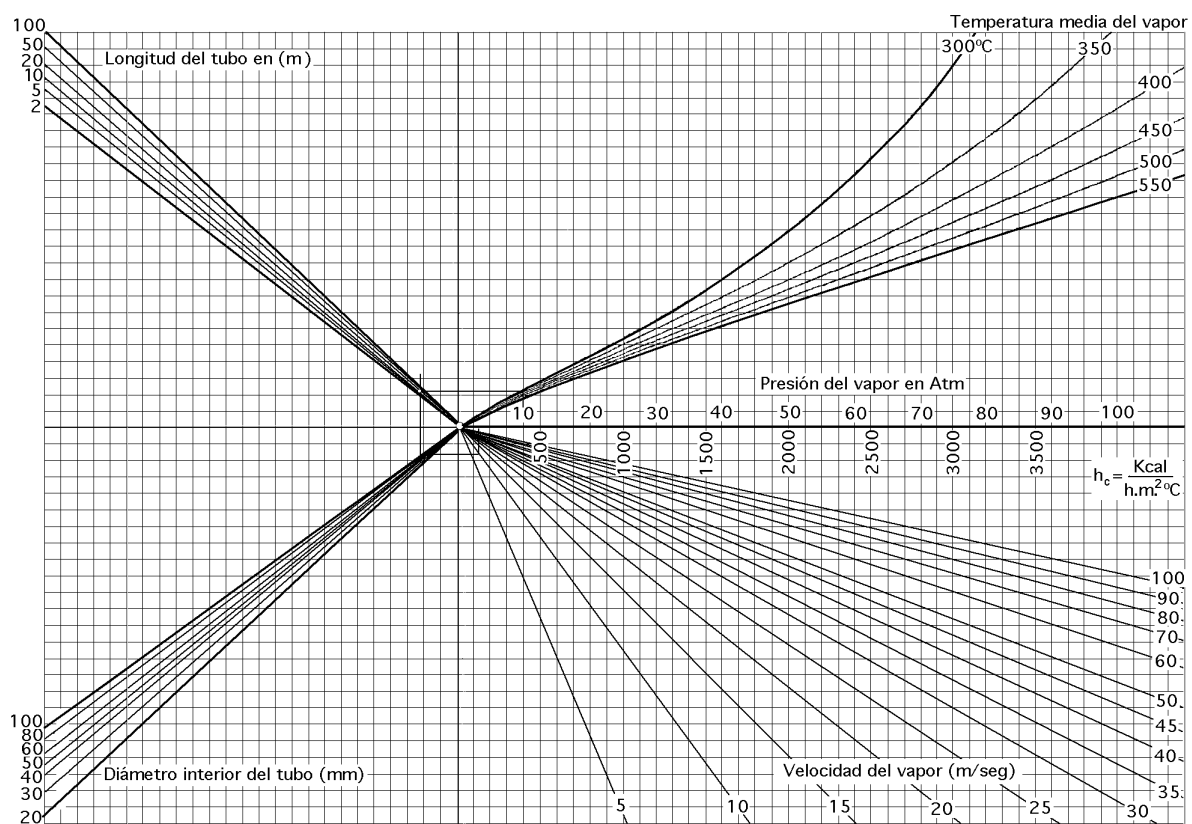
$$\text{Longitud del tubo: } \frac{0,7128 \text{ m}^2}{d_e} = \frac{0,7128 \text{ m}^2}{0,12 \text{ m}} = 1,89 \text{ m}$$

Número de kg de agua,

$$\text{Para } p = 10 \text{ atm} \quad \left\{ \begin{array}{l} i_{\text{final}} (400^\circ\text{C}) = 3052 \text{ kJ/Kg} \\ i_{\text{inicial}} (200^\circ\text{C}) = 2829 \text{ kJ/Kg} \end{array} \right\} \quad i = 3052 - 2829 = 435 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}(\text{agua})}$$

$$\text{Número de kW por 1 Kg de humos: } \frac{5708}{10} = 570,8 \frac{\text{kW}}{\text{Kg}(\text{humos})}, \text{ luego:}$$

$$G(\text{Kg vapor de agua}) = \frac{570,8 \frac{\text{kW}}{\text{Kg}(\text{humos})}}{435 \frac{\text{kJ}}{\text{Kg}(\text{agua})}} = \frac{490,8 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}(\text{humos})}}{103,9 \frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}(\text{agua})}} = 4,72 \frac{\text{Kg}(\text{agua})}{\text{Kg}(\text{humos})}$$

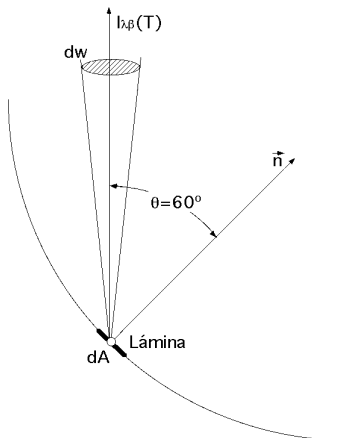


VI.1.- Una lámina de área $dA = 2 \text{ m}^2$ está colocada sobre una cavidad esférica que se encuentra a 800°K . Determinar:

a) La energía radiativa que atraviesa la lámina

b) La energía radiativa por unidad de ángulo sólido en la dirección que forma un ángulo de 60° con la normal a la superficie.

RESOLUCION



a) Energía radiativa que atraviesa la lámina

La radiación se puede aproximar a la emitida por un cuerpo negro a 800°K

$$Q = dA T_1^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 800^4 \text{ } ^\circ\text{K}^4 = 4,64 \text{ W}$$

b) Energía radiativa por unidad de ángulo sólido en la dirección que forma un ángulo de 60° con la normal a la superficie.

$$Q = I_b(T) dA \cos \theta = |E_b = T^4 = I_b(T)| = \frac{T^4}{\pi} dA \cos \theta =$$

$$= \frac{(5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4}) \times 800^4 \text{ } ^\circ\text{K}^4}{\pi} \times 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \times \cos 60^\circ = 0,74 \text{ W}$$

VI.2.- Si se supone que el Sol se comporta como un cuerpo negro a 6000°K ¿Cuál será la longitud de onda en que se da el máximo de potencia emisiva monocromática?

¿Cuál será la energía de esta fuente a 6000°K que se corresponde con el espectro visible $0,38 \mu\text{m} < \lambda < 0,76 \mu\text{m}$?

RESOLUCION

Longitud de onda en que se da el máximo de potencia emisiva monocromática

El valor de $\lambda(T)$ en que se da la máxima potencia emisiva monocromática es (Ley de Wien, $2897,6 \mu\text{m} \cdot ^\circ\text{K}$), luego la longitud de onda deseada es:

$$= \frac{2897,6 \mu\text{m} \cdot ^\circ\text{K}}{6000 \text{ } ^\circ\text{K}} = 0,483 \mu\text{m}$$

Energía de esta fuente a 6000°K que se corresponde con el espectro visible $0,38 \mu\text{m} < \lambda < 0,76 \mu\text{m}$

De la Tabla de funciones de radiación se obtiene:

Fracción de energía entre 0 y $\lambda(T) = 0,76 \times 6000 = 4560 \mu\text{m} \cdot ^\circ\text{K}$	<table border="1"> <tr><td>4400</td><td>0,548830</td></tr> <tr><td>4600</td><td>0,579316</td></tr> <tr><td>4560</td><td>0,571600</td></tr> </table>	4400	0,548830	4600	0,579316	4560	0,571600	= 57,16%
4400	0,548830							
4600	0,579316							
4560	0,571600							

Fracción de energía entre 0 y $\lambda(T) = 0,38 \times 6000 = 2280 \mu\text{m} \cdot ^\circ\text{K}$	<table border="1"> <tr><td>2200</td><td>0,100897</td></tr> <tr><td>2400</td><td>0,140268</td></tr> <tr><td>2280</td><td>0,116645</td></tr> </table>	2200	0,100897	2400	0,140268	2280	0,116645	= 11,66%
2200	0,100897							
2400	0,140268							
2280	0,116645							

La fracción de energía en el espectro visible será la diferencia: $57,16 - 11,66 = 45,5\%$

VI.3.- La emisión de la radiación desde una superficie se puede aproximar por la radiación de un cuerpo negro a $T=1000^\circ\text{K}$

Determinar:

a) La fracción de la energía total emitida por debajo de $\lambda = 5 \mu\text{m}$

b) ¿Cuál es la longitud de onda si la emisión de energía por debajo de ella es un 10,5% de la emisión total a 1000°K?

c) ¿Cuál es la longitud de onda para la que se produce la emisión espectral máxima a 1000°K?

RESOLUCION

a) Fracción de la energía total emitida por debajo de $\lambda = 5 \mu\text{m}$

De la Tabla de Funciones de radiación para: $T = 5 \times 1000 = 5000$, se obtiene:

$$f_{(0 \rightarrow T)} = \frac{E_b(0 \rightarrow T)}{T^4} = 0,6337 \quad \text{que el } 63,37\% \text{ de la emisión total sucede por debajo de } (\lambda = 5 \mu\text{m})$$

$$E_b(0 \rightarrow T) = 0,6337 \cdot T^4 = 0,6337 \times 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \times (1000)^4 \text{K}^4 = 35.935 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) Longitud de onda si la emisión de energía por debajo de ella es un 10,5% de la emisión total a 1000°K

$$\text{Para: } f_{(0 \rightarrow T)} = \frac{E_b(0 \rightarrow T) - E_b(0 \rightarrow 2T)}{T^4} = 0,105$$

$$0,6337 - \frac{E_b(0 \rightarrow 2T)}{T^4} = 0,105 \quad ; \quad \frac{E_b(0 \rightarrow 2T)}{T^4} = 0,5287 \quad T (\text{m} \cdot \text{K} \cdot 10^3) = 4,2777$$

$$= \frac{4,2777}{1000 \times 10^3} = 4,27 \times 10^{-6} \text{ m} = 4,27 \mu\text{m}$$

c) Longitud de onda para la que se produce la emisión espectral máxima a 1000°K

Teniendo en cuenta la Ley de Desplazamiento de Wien: $\lambda_{\text{máx}} T = 2,8976 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

$$\text{luego para: } T = 1000^\circ\text{K, se tiene: } \lambda_{\text{máx}} = \frac{2,8976 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{1000 \text{ K}} = 2,898 \times 10^{-6} \text{ m} = 2,89 \mu\text{m}$$

VI.4.- Una pequeña superficie de área $A=5 \text{ cm}^2$ está sometida a una radiación de intensidad constante, $I=1,8 \times 10^4 \text{ W/m}^2$. sobre el ángulo sólido subtendido por $0 < \theta < 2$ y $0 < \phi < \pi/6$. Calcular la radiación incidente sobre la superficie.

RESOLUCION

La radiación incidente sobre la superficie a través del ángulo sólido ($d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$), viene dada por:

$$q_i = A I \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

La energía total incidente Q_i sobre la superficie viene determinada por integración entre los ángulos θ y ϕ :

$$Q_i = A I \int_0^{\pi/6} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \dots = \frac{1}{4} A I = \frac{1}{4} (5 \cdot 10^{-4}) (1,8 \cdot 10^4) = 7,07 \text{ W}$$

VI.5.- Una superficie es irradiada uniformemente en todas direcciones en el espacio hemisférico; la distribución espectral de la intensidad de la radiación incidente es:

$$(0 < \lambda < 1) \mu\text{m} \quad I^i = 0$$

$$(1 < \lambda < 2) \mu\text{m} \quad I^i = 2000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}}$$

$$(2 < \lambda < 4) \mu\text{m} \quad I^i = 8000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}}$$

$$(4 < \lambda < 8) \mu\text{m} \quad I^i = 4000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \mu\text{m}}$$

$$(8) \mu\text{m} \quad I^i = 0$$

Calcular el flujo de radiación incidente sobre la superficie

RESOLUCION

Puesto que la intensidad de la radiación incidente es independiente de la dirección, el flujo q_i de la radiación incidente se calcula en la forma:

$$q_i = \int_{\Omega} I^i \, d\Omega \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right) = \left(\int_1^2 2000 \, d\theta + \int_2^4 8000 \, d\theta + \int_4^8 4000 \, d\theta \right) =$$

$$= [2000 \times (2 - 1) + 8000 \times (4 - 2) + 4000 \times (8 - 4)] = 34 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right)$$

V.6.-Una superficie de $A=2 \text{ cm}^2$ emite radiación como un cuerpo negro a $T = 1000^\circ\text{K}$.

- a) Calcular la radiación emitida dentro del ángulo sólido subtendido por $0 < \theta < 2$ y $0 < \phi < \pi/6$
 b) ¿Qué fracción de la energía emitida se corresponde con el espacio hemisférico entero?

RESOLUCION

a) Radiación emitida dentro del ángulo sólido subtendido por $0 < \theta < 2$ y $0 < \phi < \pi/6$

La radiación emitida por una superficie A a través de un ángulo sólido $d\omega$, de la forma:

$$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

en cualquier dirección, es:

$$q = A I_b(T) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

La energía en el ángulo sólido subtendido por los ángulos $[0, 2]$ y $[0, \pi/6]$ se obtiene por integración de:

$$Q = A I_b(T) \int_0^2 \int_0^{\pi/6} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \dots = \frac{1}{4} A I_b(T) = \frac{A T^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \times (2 \cdot 10^{-4}) \times (5,67 \times 10^{-8}) \times 1000^4 = 2,835 \text{ W}$$

b) Fracción de la energía emitida que se corresponde con el espacio hemisférico

$$Q_0 = A T^4 = A I_b(T)$$

luego el porcentaje de la energía total emitida dentro del ángulo sólido considerado es:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\frac{1}{4} A T^4}{A T^4} = \frac{1}{4} \quad \boxed{25\%}$$

VI.7.- La transmisividad espectral de un vidrio plano, para la radiación solar incidente, es aproximadamente la siguiente:

$$\tau_1 = 0 \text{ para } \lambda_0 = 0 \div \lambda_2 = 0,4 \mu\text{m}$$

$$\tau_2 = 0,8 \text{ para } \lambda_1 = 0,4 \div \lambda_2 = 3,0 \mu\text{m}$$

$$\tau_3 = 0 \text{ para } \lambda_2 = 3,0 \div \lambda_3$$

Calcular la transmisividad del cristal a todas las longitudes de onda

RESOLUCION

Suponiendo que la temperatura del Sol en su superficie es de 5.760°K , y que la radiación incidente es una radia-

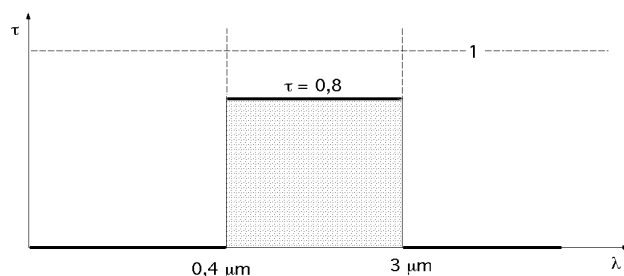
ción que procede de un cuerpo negro, la transmisividad se puede poner en la forma:

$$= \frac{0}{E_b(T)} = \int_0^1 \frac{E_b(T) d}{E_b(T)} + \int_1^2 \frac{E_b(T) d}{E_b(T)} + \int_2^3 \frac{E_b(T) d}{E_b(T)} =$$

$$= \left| \int_1^2 = 0 \right| = \int_2^3 \frac{E_b(T) d}{E_b(T)} = \int_2^3 \{f_{0-2} - f_{0-1}\}$$

Para 5760°K se tiene:

$$\left| \begin{array}{ll} \int_1^2 T = 0,4 \times \left(\frac{5760^\circ K}{1000}\right) = 2,304 & f_{0-1} = 0,125 \\ \int_2^3 T = 3,0 \times \left(\frac{5760^\circ K}{1000}\right) = 17,280 & f_{0-2} = 0,977 \end{array} \right| = 0,8 (0,977 - 0,125) = 0,68$$



VI.8.- La emisividad hemisférica del ladrillo a $T = 750^\circ K$ es función de la longitud de onda, como se indica a continuación:

- $\tau_1 = 0,1$, para ($\lambda_0 = 0 \div \lambda_1 = 2$) μm)
- $\tau_2 = 0,6$, para ($\lambda_1 = 2 \div \lambda_2 = 14$) μm)
- $\tau_3 = 0,8$, para ($\lambda_2 = 14 \div \lambda_3 = \infty$) μm)

Calcular la emisividad hemisférica sobre todas las longitudes de onda.

RESOLUCION

$$= \frac{0}{E_b(T)} = \int_0^1 \frac{E_b(T) d}{E_b(T)} + \int_1^2 \frac{E_b(T) d}{E_b(T)} + \int_2^3 \frac{E_b(T) d}{E_b(T)} =$$

$$= \int_0^1 f_{0-1} + \int_1^2 \{f_{0-2} - f_{0-1}\} + \int_2^3 \{f_{0-3} - f_{0-2}\}$$

Los valores de f_{0-} son:

$$\begin{array}{ll} \int_0^1 T = 2 \times 750 = 1500 & f_{0-1} = 0,013 \\ \int_1^2 T = 14 \times 750 = 10500 & f_{0-2} = 0,924 \\ \int_2^3 T & f_{0-3} = 1 \end{array}$$

luego:

$$= (0,1 \times 0,013) + 0,6 \times \{0,924 - 0,013\} + 0,8 \times \{1 - 0,924\} = 0,609$$

VI.9.- El filamento de una bombilla se puede considerar como un cuerpo negro a la temperatura $T = 2400^\circ K$. Si el cristal de la bombilla tiene una transmisividad de $\tau = 0,90$ para la radiación emitida por el filamento en el espectro visible, calcular el % de la energía total emitida por el filamento, que llega a alcanzar el medio ambiente como luz visible.

RESOLUCION

El espectro visible está comprendido entre $\lambda_1 = 0,38 \mu\text{m}$ y $\lambda_2 = 0,76 \mu\text{m}$.

La fracción F de la energía total emitida por el filamento, que alcanza el ambiente como luz, es:

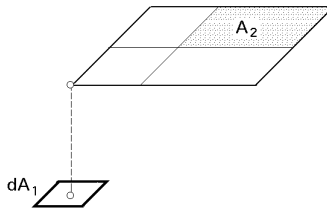
$$F = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_b(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_b(\lambda, T) d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_b(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_b(\lambda, T) d\lambda} = (f_{0,2} - f_{0,1})$$

en la que τ es la transmisividad del cristal de la bombilla

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } (\lambda_1, T) = \frac{0,38 \times 2400}{1000} = 0,912 \quad f_{0,1} = 0,0002 \\ \text{Para } (\lambda_2, T) = \frac{0,76 \times 2400}{1000} = 1,824 \quad f_{0,2} = 0,0436 \end{array} \right\} \quad F = 0,9 \times (0,0436 - 0,0002) = 0,039$$

es decir, sólo el 3,9% de la energía total entra en el ambiente como luz; el resto de la energía produce calentamiento

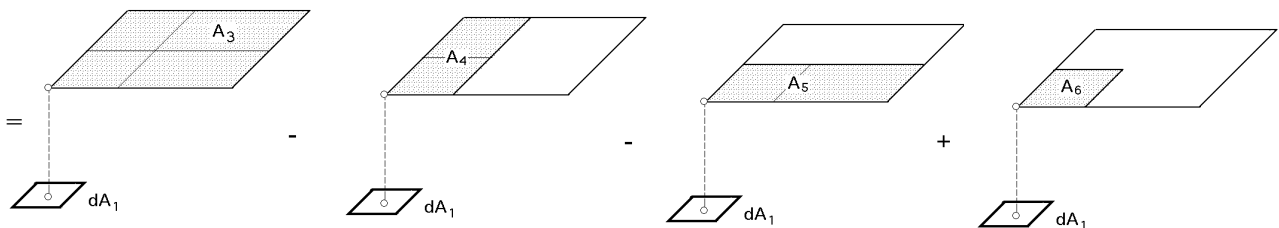
VI.10.- Hallar el factor de forma $F_{dA_1-A_2}$



RESOLUCION

El área A_2 se puede expresar como la suma algebraica de cuatro áreas. A_3 , A_4 , A_5 y A_6 , siendo:

$$A_2 = A_3 - A_4 - A_5 + A_6$$

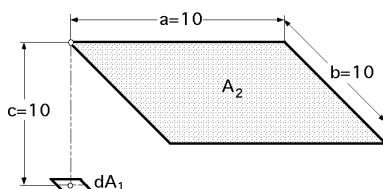


por lo que:

$$F_{dA_1-A_2} = F_{dA_1-A_3} - F_{dA_1-A_4} - F_{dA_1-A_5} + F_{dA_1-A_6}$$

Cada factor de forma se obtiene tomando los datos de la gráfica correspondiente, ya que el vértice por el que pasa la perpendicular a dA_1 es común a todas ellas

VI.11.- Determinar el factor de forma de una superficie elemental $dA_1 = 2 \text{ cm}^2$ respecto a una superficie A_2 de sección cuadrada de 10 cm de lado; la separación entre las superficies es de 10 cm.



RESOLUCION

dA_1 se puede considerar como superficie elemental si: $\frac{dA_1}{c^2} = \frac{2}{10^2} \ll 1$

Aplicando la expresión:

$$X = \frac{a}{c} = \frac{10}{10} = 1; \quad Y = \frac{b}{c} = \frac{10}{10} = 1$$

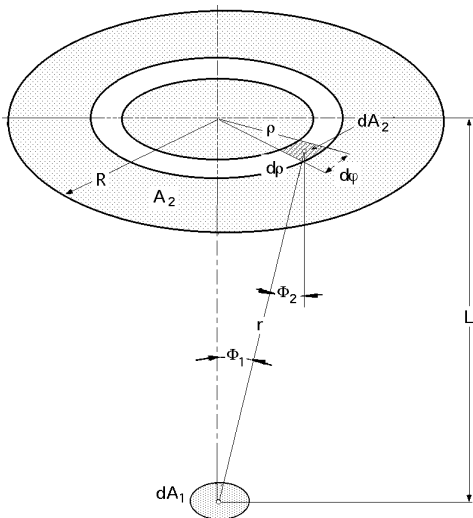
$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{X}{\sqrt{1+X^2}} \arctg \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} + \frac{Y}{\sqrt{1+Y^2}} \arctg \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = 0,1385$$

$$A_2 F_{A_2 \rightarrow dA_1} = dA_1 F_{dA_1 \rightarrow A_2}; \quad F_{A_2 \rightarrow dA_1} = \frac{dA_1 F_{dA_1 \rightarrow A_2}}{A_2} = \frac{2 \times 0,1385}{10^2} = 0,277 \cdot 10^{-2}$$

VI.12.- Determinar el factor de visión desde un elemento de superficie dA_1 respecto a un disco circular A_2 de radio R , paralelos entre sí y situados a una distancia L .

RESOLUCION



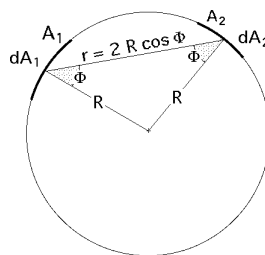
El factor de forma $F_{dA_1 \rightarrow A_2}$ es de la forma:

$$F_{dA_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_2 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} dA_2 = d\rho d\phi; \quad r^2 = \rho^2 + L^2; \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \\ \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cos \theta = \frac{L}{r} = \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{A_2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{L^2}{(\rho^2 + L^2)^2} \rho d\rho d\phi = \frac{R^2}{R^2 + L^2}$$

VI.13.- Determinar el factor de visión entre dos superficies sobre una esfera tal como se indica en la figura.

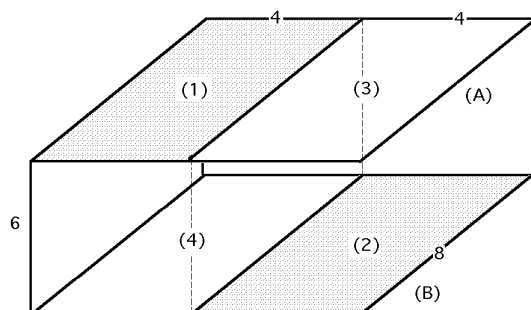


RESOLUCION

$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 = \left| \begin{array}{l} \theta_1 = \theta_2 = \theta \\ r = 2R \cos \theta \end{array} \right| = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} dA_1 dA_2 =$$

$$= \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \frac{dA_1 dA_2}{4 R^2} = \frac{A_2}{4 R^2}$$

VI.14.- Determinar el factor de forma F_{12} de la siguiente configuración:

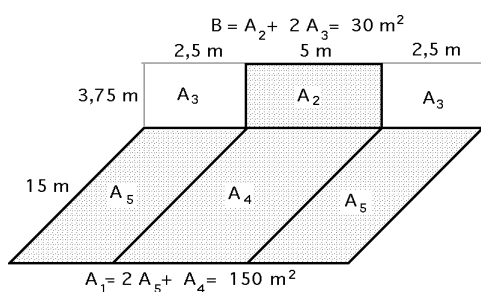


RESOLUCION

$$A F_{AB} = A_1 F_{1B} + A_3 F_{3B} = A_1 F_{14} + A_1 F_{12} + A_3 F_{34} + A_3 F_{32} = 2 A_1 F_{14} + 2 A_1 F_{12}$$

en la que: $A_1 F_{12} = A_4 F_{43} = A_3 F_{34}$
 $A_1 F_{14} = A_3 F_{32}$

$$A = 2 A_1 ; F_{AB} = F_{14} + F_{12} ; F_{12} = F_{AB} - F_{14} = \left| \begin{array}{l} F_{AB} = \frac{\frac{h}{D} = \frac{8}{6} = 1,33}{\frac{L}{D} = \frac{8}{6} = 1,33} = 0,28 \\ F_{14} = \frac{\frac{h}{D} = \frac{4}{6} = 0,67}{\frac{L}{D} = \frac{8}{6} = 1,33} = 0,18 \end{array} \right| = 0,28 - 0,18 = 0,10$$



VI.15.- Determinar el factor de forma F_{12} de la siguiente configuración:

RESOLUCION

$$A_1 F_{12} = A_4 F_{42} + 2 A_5 F_{52}$$

$$A_{45} F_{45-32} = A_4 F_{42} + A_4 F_{43} + A_5 F_{52} + A_5 F_{53} =$$

$$= | A_5 F_{52} = A_4 F_{43} | = A_4 F_{42} + 2 A_5 F_{52} + A_5 F_{53}$$

$$2 A_5 F_{52} = A_{45} F_{45-32} - A_4 F_{42} - A_5 F_{53}$$

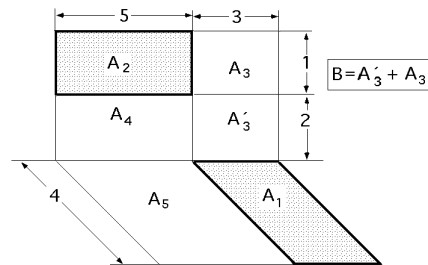
El A_{45-32} es directo

$$A_1 F_{12} = A_4 F_{42} + A_{45} F_{45-32} - A_4 F_{42} - A_5 F_{53} = A_{45} F_{45-32} - A_5 F_{53}$$

$$F_{12} = \frac{A_{45} F_{45-32} - A_5 F_{53}}{A_1}$$

$$F_{12} = \frac{A_{45} F_{45-32} - A_5 F_{53}}{A_1} = \left| \begin{array}{l} F_{45-32} = \frac{\frac{a}{b} = \frac{3,75}{7,5} = 0,5}{\frac{c}{b} = \frac{15}{7,5} = 2} = 0,077 \\ F_{53} = \frac{\frac{a}{b} = \frac{3,75}{2,5} = 1,5}{\frac{c}{b} = \frac{15}{2,5} = 6} = 0,18 \end{array} \right| = \frac{(7,5 \times 15) 0,077 - (2,5 \times 15) 0,18}{150} = 0,01275$$

VI.16.- Determinar el factor de forma F_{12} de la configuración:



RESOLUCION

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 F_{1-42} = A_5 F_{5-B} \\ A_1 F_{1-42} = A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-4} \end{array} \right\}$$

$$A_1 F_{1-2} = A_5 F_{5-B} - A_1 F_{1-4}$$

$$A_{5-1} F_{51-24B} = A_5 F_{5-42} + A_5 F_{5-B} + A_1 F_{1-42} + A_1 F_{1-B} = A_5 F_{5-42} + 2 A_5 F_{5-B} + A_1 F_{1-B}$$

$$A_5 F_{5-B} = \frac{A_{5-1} F_{51-24B} - A_5 F_{5-42} - A_1 F_{1-B}}{2}$$

$$A_5 F_{5-3'} = A_1 F_{1-4}$$

$$A_{5-1} F_{51-43'} = A_5 F_{5-4} + A_5 F_{5-3'} + A_1 F_{1-4} + A_1 F_{1-3'} = A_5 F_{5-4} + 2 A_5 F_{5-3'} + A_1 F_{1-3'}$$

$$A_5 F_{5-3'} = \frac{A_{5-1} F_{51-43'} - A_5 F_{5-4} - A_1 F_{1-3'}}{2} = A_1 F_{1-4}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{b} = \frac{3}{8} = 0,375 \\ A_{51} F_{51-24B} &= \quad \quad \quad F_{51-24B} = 0,2 \quad = 32 \times 0,2 = 6,4 \\ Y &= \frac{c}{b} = \frac{4}{8} = 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0,6 \\ A_5 F_{5-24} &= \quad \quad \quad F_{5-24} = 0,19 \quad = 20 \times 0,19 = 3,8 \\ Y &= \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{b} = \frac{3}{3} = 1 \\ A_1 F_{1-3} &= \quad \quad \quad F_{1-3} = 0,17 \quad = 12 \times 0,17 = 2,04 \\ Y &= \frac{c}{b} = \frac{4}{3} = 1,33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{b} = \frac{2}{8} = 0,25 \\ A_{51} F_{15-43'} &= \quad \quad \quad F_{15-43'} = 0,16 \quad = 32 \times 0,16 = 5,12 \\ Y &= \frac{c}{b} = \frac{4}{8} = 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{b} = \frac{2}{5} = 0,4 \\ A_5 F_{5-4} &= \quad \quad \quad F_{5-4} = 0,165 \quad = 20 \times 0,165 = 3,3 \\ Y &= \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned}$$

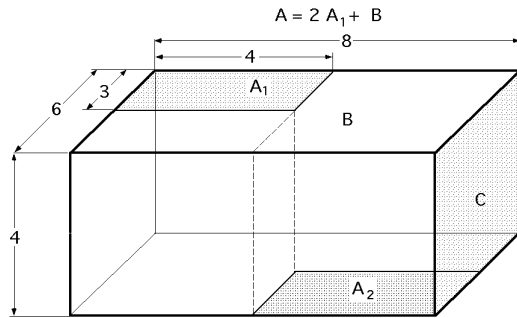
$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{b} = \frac{2}{3} = 0,66 \\ A_1 F_{1-3'} &= \quad \quad \quad F_{1-3'} = 0,16 \quad = 12 \times 0,16 = 1,92 \\ Y &= \frac{c}{b} = \frac{4}{3} = 1,33 \end{aligned}$$

$$A_5 F_{5-B} = \frac{A_{5-1} F_{51-24B} - A_5 F_{5-42} - A_1 F_{1-B}}{2} = \frac{6,4 - 3,8 - 2,04}{2} = 0,28$$

$$A_1 F_{1-4} = \frac{5,12 - 3,4 - 1,92}{2} = 5,22 \quad ; \quad F_{1-4} = \frac{5,12 - 3,4 - 1,92}{2 \times 6} = 0,435$$

$$A_1 F_{1-2} = A_5 F_{5-B} - A_1 F_{1-4} = (20 \times 0,28) - (12 \times 0,435) = 0,38$$

$$F_{1-2} = \frac{0,38}{A_1} = \frac{0,38}{12} = 0,03$$



VI.17.- Un local comercial de dimensiones en planta (8 x 6) m² y altura 4 m, tiene una fachada de cristal de (6 x 4) m². Hallar el factor de forma entre:

- La fracción A_1 del techo de (3 x 4) m² y la cristalera C.
- La fracción A_1 del techo de (3 x 4) m² y la fracción del suelo $A_2 = 3 \times 4$ m².

RESOLUCION

a) Hallar el factor de forma entre la fracción A_1 del techo de (3 x 4) m² y la cristalera C.

$$A F_{AC} = 2 A_1 F_{A1-C} + B F_{BC}$$

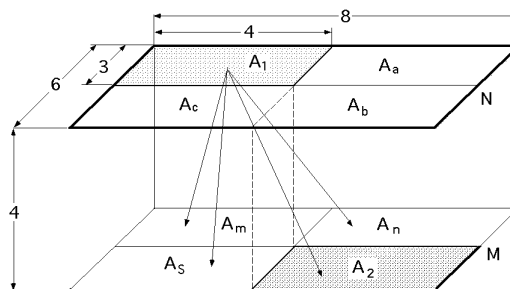
$$F_{A1-C} = \frac{A F_{AC} - B F_{BC}}{2 A_1} = \frac{48 \text{ m}^2 F_{AC} - 24 \text{ m}^2 F_{BC}}{2 \times 12 \text{ m}^2} = 2 F_{AC} - F_{BC} =$$

$$F_{AC} = \left| \begin{array}{c} \frac{a}{b} = \frac{4}{6} = 0,67 \\ \frac{c}{b} = \frac{8}{6} = 1,33 \end{array} \right| = 0,14$$

$$F_{BC} = \left| \begin{array}{c} \frac{a}{b} = \frac{4}{6} = 0,666 \\ \frac{c}{b} = \frac{4}{6} = 0,666 \end{array} \right| = 0,22$$

$$= (2 \times 0,14) - 0,22 = 0,06$$

b) Hallar el factor de forma entre la fracción A_1 del techo de (3 x 4) m² y la fracción del suelo ($A_2 = 3 \times 4$ m²).



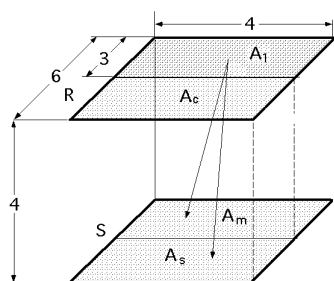
$$A_N F_{NM} = A_1 F_{1m} + A_1 F_{1n} + A_1 F_{1s} + A_1 F_{12} + A_a F_{am} + A_a F_{an} + A_a F_{as} + A_a F_{a2} +$$

$$+ A_c F_{cm} + A_c F_{cn} + A_c F_{cs} + A_c F_{c2} + A_b F_{bm} + A_b F_{bn} + A_b F_{bs} + A_b F_{b2} =$$

$$= 4 A_1 F_{1m} + 4 A_1 F_{1s} + 4 A_1 F_{1n} + 4 A_1 F_{12} = 4 A_1 F_{NM}$$

$$F_{NM} = F_{1m} + F_{1s} + F_{1n} + F_{12}$$

$$F_{12} = F_{NM} - F_{1m} - F_{1s} - F_{1n}$$

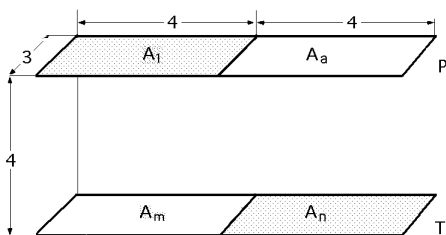


$$R F_{RS} = 2 A_1 F_{1s} + 2 A_c F_{cs}$$

$$(4 \times 6) F_{RS} = 2 \times (4 \times 3) F_{1s} + 2 \times (4 \times 3) F_{cs}$$

$$F_{RS} = F_{1s} + F_{cs}$$

$$F_{1s} = F_{RS} - F_{cs}$$



$$P F_{PT} = 2 A_1 F_{1m} + 2 A_1 F_{1n}$$

$$(3 \times 8) F_{PT} = 2 \times (4 \times 3) F_{1m} + 2 \times (4 \times 3) F_{1n}$$

$$F_{PT} = F_{1m} + F_{1n}$$

$$F_{1n} = F_{PT} - F_{1m}$$

$$F_{NM} = \begin{matrix} X = \frac{a}{b} = \frac{8}{4} = 2 \\ Y = \frac{c}{b} = \frac{6}{4} = 1,5 \end{matrix} = 0,36 \quad ; \quad F_{RS} = \begin{matrix} X = \frac{a}{b} = \frac{6}{4} = 1,5 \\ Y = \frac{c}{b} = \frac{4}{4} = 1 \end{matrix} = 0,25$$

$$F_{PT} = \begin{matrix} X = \frac{a}{b} = \frac{8}{4} = 2 \\ Y = \frac{c}{b} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{matrix} = 0,23 \quad ; \quad F_{1m} = F_{CS} = \begin{matrix} X = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} = 0,75 \\ Y = \frac{c}{b} = \frac{4}{4} = 1 \end{matrix} = 0,16$$

$$F_{12} = F_{NM} - F_{1m} - F_{1s} - F_{1n} = \begin{vmatrix} F_{1s} = F_{RS} - F_{cs} = 0,25 - 0,16 = 0,09 \\ F_{1n} = F_{PT} - F_{1m} = 0,23 - 0,16 = 0,07 \end{vmatrix} = 0,36 - 0,16 - 0,09 - 0,07 = 0,04$$

VI.18.- Determinar los siguientes factores de forma para las geometrías que se indican:

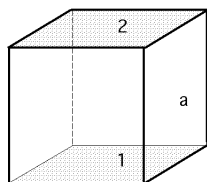
a) Desde la base de un cubo a cada una de las 5 caras restantes

b) Desde la base de un cilindro circular de radio r y longitud L , a la otra superficie paralela y a la superficie cilíndrica lateral, para $r = L$.

c) Entre dos superficies concéntricas esféricas A_1 y A_2 .

RESOLUCION

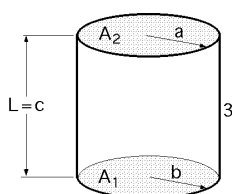
a) Desde la base de un cubo a cada una de las 5 caras restantes



$$F_{12} = 0,2 \text{ (Tablas)} \quad ; \quad F_{11} = F_{22} = 0 \quad ; \quad F_{13} = F_{14} = F_{15} = F_{16}$$

$$0,2 + 4 F_{13} = 1 \quad ; \quad F_{13} = F_{14} = F_{15} = F_{16} = 0,2$$

b) Desde la base de un cilindro circular de radio r y longitud L , a la otra superficie paralela y a la superficie cilíndrica lateral para $r = L$.

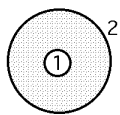


$$\frac{c}{b} = 1 \quad ; \quad \frac{a}{b} = 1 \quad ; \quad \text{para } (r = L), F_{12} = 0,38$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad ; \quad 0 + 0,38 + F_{13} = 1 \quad ; \quad F_{13} = 0,62$$

$$F_{31} = \frac{A_1}{A_3} F_{13} = \frac{r^2}{2 r L} F_{13} = \frac{r}{2 L} F_{13} = \frac{0,62}{2} = 0,31$$

c) Entre dos superficies concéntricas esféricas A_1 y A_2 .



$$F_{11} = 0 ; F_{11} + F_{12} = 1 ; F_{12} = 1$$

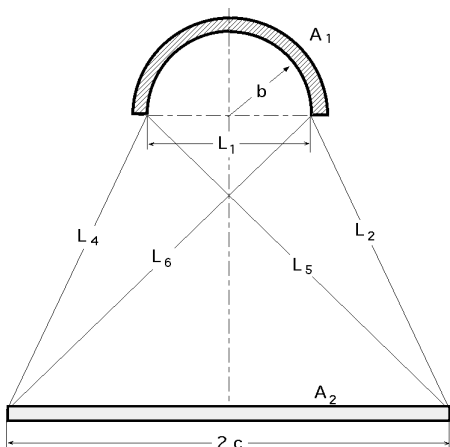
$$A_1 F_{12} + A_2 F_{21} = 1 ; F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12}$$

$$F_{21} + F_{22} = 1 ; F_{22} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{A_1}{A_2} F_{12} = 1 - \frac{A_1}{A_2}$$

VI.19.- Una superficie semicilíndrica A_1 , de gran longitud, de radio b y una superficie A_2 plana, también de gran longitud, y anchura $2c$, están localizadas a una distancia d tal como se indica en la figura.

Determinar el factor de visión F_{12} entre las superficies A_1 y A_2 , para $b = 5$ cm, $c = 10$ cm y $d = 8$ cm.

RESOLUCION



El factor de forma entre las superficies A_1 y A_2 es:

$$F_{12} = \frac{(L_5 + L_6) - (L_2 + L_4)}{2 A_1} = \left| \begin{array}{l} \text{Por simetría} \\ L_5 = L_6 \\ L_2 = L_4 \end{array} \right| = \frac{L_6 - L_4}{\frac{L_1}{2}}$$

Teniendo en cuenta los datos del problema:

$$L_4 = \sqrt{(c - b)^2 + d^2} = \sqrt{(10 - 5)^2 + 8^2} = 9,434$$

$$L_6 = \sqrt{(c + b)^2 + d^2} = \sqrt{(10 + 5)^2 + 8^2} = 17$$

$$L_1 = 2b = 2 \times 5 = 10$$

$$F_{12} = \frac{L_6 - L_4}{\frac{L_1}{2}} = \frac{17 - 9,434}{\frac{10}{2}} = 0,482$$

VI.20.- Un trabajador de un taller protesta porque el sistema de calefacción no está manteniendo la temperatura del aire al mínimo aceptable de 20°C . Para fundamentar su argumento muestra que la lectura de un termómetro de mercurio suspendido de la armadura del techo es de sólo 17°C . El techo y las paredes del taller son de hierro corrugado y no tiene aislante; al ponerlo en contacto con la pared, el termómetro marca 5°C . ¿Cuál es la verdadera temperatura del aire si el coeficiente medio de transferencia de calor por convección medio para el termómetro suspendido es de $10 \text{ W/m}^2\text{K}$?

El valor de h_c para el cristal del termómetro es 0,8

RESOLUCION

El termómetro se puede considerar como un cuerpo gris pequeño dentro de una cavidad grande y casi negra a 5°C .

Sean T_{term} , la temperatura que marca el termómetro, T_{aire} la temperatura del aire y T_{pared} la temperatura de las paredes.

En régimen estacionario, $Q_{\text{conv}} + Q_{\text{rad}} = 0$, ya que en este estado no hay conducción dentro del termómetro.

Por lo tanto:

$$h_c A (T_{\text{term}} - T_{\text{aire}}) + A (T_{\text{term}}^4 - T_{\text{pared}}^4) = 0$$

$$10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} (290 - T_{\text{aire}})^\circ\text{K} + 0,8 \times 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} (290^4 - 278^4) = 0 ; T_{\text{aire}} = 295^\circ\text{K} = 22^\circ\text{C}$$

El sistema de calefacción parece funcionar bien ya que $T_{\text{aire}} > 20^\circ\text{C}$

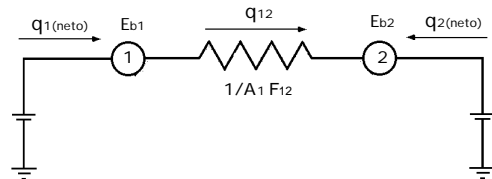
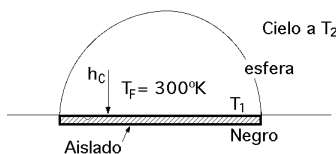
El termómetro recibe también calor de los operarios, maquinaria, luz, etc, que están por encima de los 5°C de la pared, por lo que la apreciación de $T_{\text{aire}} = 22^\circ\text{C}$ parece un poco elevada

VI.21.- Un plano negro tiene un área superficial de 2 m^2 y está encerrado de forma que su nivel superior coincide con la superficie de la tierra. La superficie inferior del plano está aislada. La superficie superior está expuesta al aire a $T_F=300^\circ\text{K}$, siendo el coeficiente de convección (plano-aire) $h_C = 10 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Calcular la temperatura de equilibrio del plano en las siguientes condiciones:

- El plano irradia hacia el cielo, en noche despejada, cuya temperatura efectiva de irradiación es de 100°K
- El plano irradia hacia el cielo en una noche nublada, siendo la temperatura efectiva del cielo de 250°K

RESOLUCION



El cielo se puede suponer como un cuerpo negro, ya que hacia el plano A_1 prácticamente no devuelve nada de la energía que éste emite, por lo que el cielo absorbe toda la energía emitida por A_1 .

Intercambio radiativo entre 2 cuerpos negros, con $F_{12} = 1$

$$q_{1(\text{neto})} = (\text{Flujo de calor que por convección va desde el aire a } T_F \text{ hacia el cuerpo negro } A_1) = h_C A_1 (T_F - T_1)$$

que es la convección (aire-plano). (La convección necesita contacto directo sólido-fluido).

El flujo de calor por convección tiene que ser igual al flujo radiativo desde A_1 hacia el cielo, es decir:

$$q_{1(\text{neto})} = q_{12} = A_1 F_{12} (E_{b1} - E_{b2}) \quad (\text{que es la radiación plano-cielo})$$

$$q_{1(\text{neto})} = h_C A_1 (T_F - T_1) = A_1 F_{12} (E_{b1} - E_{b2}) ; \quad h_C (T_F - T_1) = (E_{b1} - E_{b2})$$

a) Temperatura de equilibrio cuando el plano irradia hacia el cielo, en noche despejada, cuya temperatura efectiva de irradiación es de 100°K

$$10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} (300 - T_1)^\circ\text{K} = (T_1^4 - 100^4) \quad T_1 = 270,2^\circ\text{K} = -3^\circ\text{C}$$

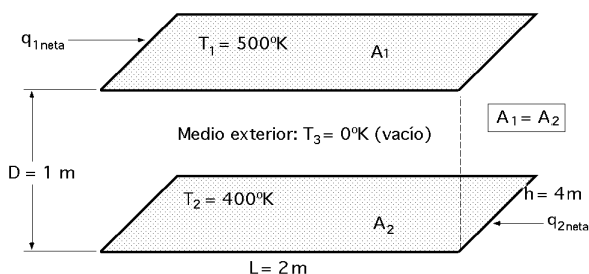
b) Temperatura de equilibrio cuando el plano irradia hacia el cielo en una noche nublada, siendo la temperatura efectiva del cielo de 250°K

$$10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} (300 - T_1)^\circ\text{K} = (T_1^4 - 250^4) \quad T_1 = 284,8^\circ\text{K} = 11,6^\circ\text{C}$$

VI.22.- Dos partes de un vehículo espacial pueden considerarse aproximadamente como 2 rectángulos opuestos y paralelos. Los rectángulos son negros y se mantienen a una temperatura de 500°K y 400°K respectivamente, por medios externos.

La energía incidente procedente de otras fuentes es despreciable y las partes posteriores de ambas superficies están aisladas.

Calcular



a) La energía que por unidad de tiempo debe añadirse a la superficie más caliente para mantener su temperatura.

b) La energía que por unidad de tiempo debe añadirse a la superficie más fría para mantener su temperatura

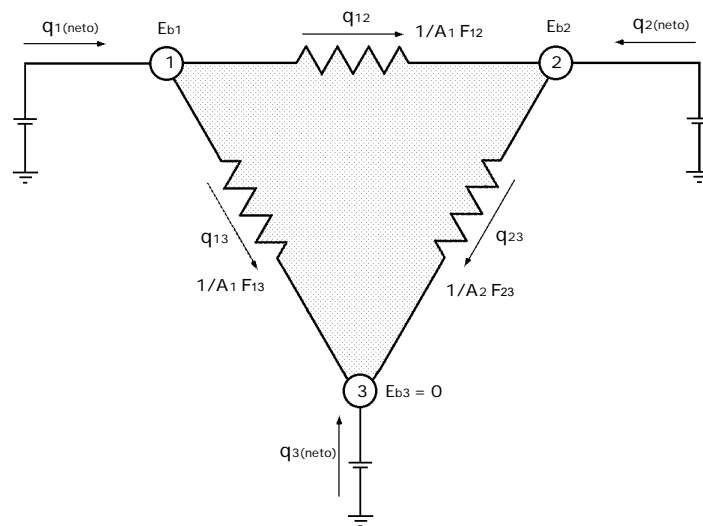
c) La transmisión de calor por unidad de tiempo entre las dos superficies y los alrededores.

d) Intercambio térmico entre las superficies

RESOLUCION

a) *Energía que por unidad de tiempo debe añadirse a la superficie más caliente para mantener su temperatura.*

$$F_{12} = \left| \begin{array}{l} \frac{L}{D} = \frac{2}{1} = 2 \\ \frac{h}{D} = \frac{4}{1} = 4 \end{array} \right| \quad \boxed{F_{12} = 0,52}$$



$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \ ; \ F_{11} = 0 \ ; \ F_{13} = 1 - F_{12} = 0,48$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 ; F_{22} = 0 ; F_{23} = 1 - F_{21} = 1 - \frac{A_1 F_{12}}{A_2} = 0,48$$

$$E_{b1} = T_1^4 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 500^4 \text{ } ^\circ K^4 = 3,54 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b2} = T_2^4 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 400^4 \text{ } ^\circ K^4 = 1,45 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b3} = 0$$

$$q_{1(neta)} = q_{1(emitida)} - q_{1(absorbida)} = A_1 E_{b1} - A_1 F_{12} E_{b2} = A_1 \{E_{b1} - F_{12} E_{b2}\} =$$

$$= (2 \times 4) \text{ m}^2 \{3,54 - (0,52 \times 1,45)\} \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 2,23 \cdot 10^4 \text{ W}$$

La superficie A_1 se tiene que calentar mediante una fuente exterior de energía para mantener su temperatura a T_1 .

b) Energía que por unidad de tiempo se debe añadir a la superficie más fría para mantener su temperatura

$$q_{2(neta)} = A_2 \{ E_{b2} - F_{21} E_{b1} \} = (2 \times 4) \text{ m}^2 \{ 1,45 - (0,52 \times 3,54) \} \times 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = - 3,13 \times 10^3 \text{ W}$$

La superficie A_2 se tiene que refrigerar mediante una fuente exterior de energía para mantener su temperatura a T_2 .

c) Transmisión de calor por unidad de tiempo entre las dos superficies y los alrededores.

$$q_{3(neta)} = -q_{13} - q_{23} = \left| \begin{array}{c} q_{13} = A_1 F_{13} E_{b1} \\ q_{23} = A_2 F_{23} E_{b2} \end{array} \right| = -A_1 F_{13} E_{b1} - A_2 F_{23} E_{b2} = \left[\begin{array}{c} A_1 = A_2 \\ F_{13} = F_{23} \end{array} \right] =$$

$$= -F_{13} \{E_{b1} + E_{b2}\} A_1 = -0,48 \{3,54 + 1,45\} \times 10^3 \times 8 = -1,918 \times 10^4 \text{ W}$$

Comprobación: $q_{1 \text{ neta}} + q_{2 \text{ neta}} + q_{3 \text{ neta}} = 0$

d) Intercambio térmico entre las superficies

$$q_{12} = A_1 F_{12} (E_{b1} - E_{b2}) = 8,70 \times 10^3 \text{ W}$$

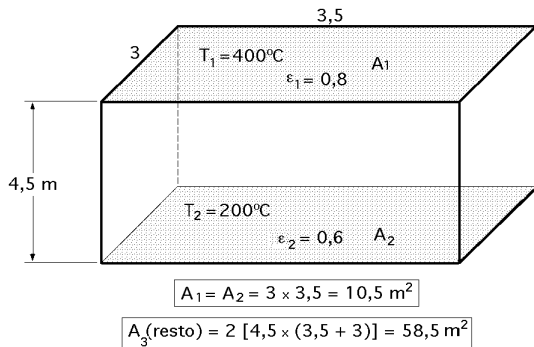
$$q_{13} = A_1 F_{13} (E_{b1} - E_{b3}) = 1,36 \times 10^4 \text{ W}$$

$$q_{23} = A_2 F_{23} (E_{b1} - E_{b3}) = 5,57 \times 10^3 \text{ W}$$

Comprobación: $q_{1 \text{ neta}} = q_{12} + q_{13}$

$$q_{2 \text{ neta}} = q_{23} - q_{12}$$

$$q_{3 \text{ neta}} = -q_{13} - q_{23}$$



VI.23.- Un horno tiene las siguientes dimensiones:

Ancho=3 m.; Longitud=3,5 m.; Altura=4,5 m.

El suelo se comporta como un plano a 200°C con una emisividad 0,6 y el techo lo hace como un plano a 400°C con una emisividad 0,8.

Si todas las demás superficies se comportan como superficies rerradiantes. determinar la cantidad de energía radiante intercambiada entre el suelo y el techo.

RESOLUCION

Dos superficies grises y una refractaria : $q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + R_{\text{equiv}} + \frac{2}{A_2}} = q_{12}$

$$E_{b1} = T_1^4 = (400 + 273)^4 = 11631,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$E_{b2} = T_2^4 = (200 + 273)^4 = 2838,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$F_{12} = \left| \begin{array}{l} \frac{3,5}{4,5} = 0,7 \\ \frac{3}{4,5} = 0,6 \end{array} \right| = 0,118$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 ; F_{11} = 0 ; F_{13} = 1 - 0,118 = 0,882$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 ; F_{22} = 0 ; F_{21} + F_{23} = 1 ; A_2 F_{21} = A_1 F_{12} ; F_{12} = F_{21} = 0,118 ; F_{23} = 0,882$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{1}{A_1 F_{12}^*} = \frac{X}{1 + X} \frac{1}{A_1 F_{12}} = \left| \begin{array}{l} X = \frac{F_{12}}{F_{13}} + \frac{A_1 F_{12}}{A_2 F_{23}} = \frac{0,118}{0,882} + \frac{10,5}{10,5} \frac{0,118}{0,882} = 0,2675 \\ F_{12}^* = F_{12} + \frac{1}{\frac{1}{F_{13}} + \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{F_{23}}} \\ = \frac{X}{1 + X} \frac{1}{A_1 F_{12}} = \frac{0,2675}{1 + 0,2675} \frac{1}{10,5 \times 0,118} = 0,1703 \end{array} \right| =$$

$$q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + R_{\text{equiv}} + \frac{2}{A_2}} = \frac{(11631,7 - 2838,1) \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{(\frac{0,2}{10,5 \times 0,8} + 0,1703 + \frac{0,4}{10,5 \times 0,6}) \frac{1}{\text{m}^2}} = 34130 \text{ W}$$

Por el método matricial sería:

$$\begin{bmatrix} (1 - F_{11} + \frac{1}{1}) & -F_{12} & -F_{13} \\ -F_{21} & (1 - F_{22} + \frac{2}{2}) & -F_{23} \\ -F_{31} & -F_{32} & (1 - F_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} E_{b1} \\ \frac{2}{2} E_{b2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 ; F_{11} = 0 ; F_{13} = 1 - 0,118 = 0,882$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 ; F_{22} = 0 ; F_{21} + F_{23} = 1 ; A_2 F_{21} = A_1 F_{12} ; F_{12} = F_{21} = 0,118 ; F_{23} = 0,882$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 ; F_{31} = F_{32} = \frac{A_2}{A_3} F_{23} = \frac{10,5}{58,2} \times 0,882 = 0,158 ; F_{33} = 1 - 0,158 - 0,158 = 0,683$$

$$\begin{bmatrix} (1 + \frac{0,8}{0,2}) & -0,118 & -0,882 \\ -0,118 & (1 + \frac{0,6}{0,4}) & -0,882 \\ -0,158 & -0,158 & (1 - 0,683) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46526 \\ 4257 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = 10819 \text{ W}$$

$$J_2 = 5004 \text{ W}$$

$$J_3 = 7911 \text{ W}$$

$$q_{12} = \frac{J_1 - J_2}{R_{\text{equiv}}} = \left| R_{\text{equiv}} = \frac{1}{A_1 F_{12}^*} \right| = \frac{10819 - 5004}{10,5 \times F_{12}^*} = \left| F_{12}^* = F_{12} + \frac{1}{\frac{1}{F_{13}} + \frac{A_1}{A_2} + \frac{1}{F_{23}}} = 0,118 + \frac{1}{\frac{1}{0,882} + \frac{1}{0,882}} = 0,569 \right| = \frac{10819 - 5004}{10,5 \times 0,569} = 34130 \text{ W} = q_{1(\text{neta})}$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{1}{1} (E_{b1} - J_1) A_1 = \frac{0,8}{0,2} \times (11631,7 - 10819) \times 10,5 = 34130 \text{ W}$$

$$q_{2(\text{neta})} = \frac{2}{2} (E_{b2} - J_2) A_2 = \frac{0,6}{0,4} \times (5004 - 2838,1) \times 10,5 = 34130 \text{ W}$$

$$q_{1(\text{neta})} = -q_{2(\text{neta})} ; q_{3(\text{neta})} = 0$$

VI.24.- Un tubo largo gris metálico transporta un líquido caliente de una máquina de procesamiento a otra en una planta industrial. El tubo tiene un diámetro exterior de 0,8 m. y una emisividad superficial de 0,5. Este tubo está rodeado por un segundo tubo gris que tiene un diámetro interior de 1,0 m. y una emisividad de 0,3. En el espacio que existe entre los tubos se hace un vacío para minimizar las pérdidas térmicas del líquido. El tubo interior está a $T_1 = 550^\circ\text{K}$ y el exterior a $T_2 = 300^\circ\text{K}$.

Con estos datos se pide:

a) Pérdidas de calor del líquido por metro lineal de tubería

b) La reducción de pérdidas térmicas del líquido en %, si el tubo interior se recubre con una pintura gris que posee una emisividad de 0,15

RESOLUCION

Al estar el espacio entre los tubos vacío, las únicas pérdidas térmicas son por radiación

a) Pérdidas de calor del líquido por metro lineal de tubería

Dois cilindros concéntricos largos, opacos y grises, el interior de superficie A_1 y el exterior de superficie A_2 , $F_{12} = 1$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_1} + \frac{2}{A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + 1 + \frac{2}{2} \frac{A_1}{A_2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{2}{2} \frac{A_1}{A_2}} A_1$$

$$E_{b1} = T_1^2 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4} \times 550^4 \text{K}^4 = 5188,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$E_{b2} = T_2^2 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4} \times 300^4 \text{K}^4 = 459,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\epsilon_1 = 1 - \rho_1 = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$\epsilon_2 = 1 - \rho_2 = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1 L}{d_2 L} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{0,8}{1} = 0,8 \quad ; \quad A_1 = d_1 L = 0,8 \times 1 = 2,51 \text{ m}^2$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{2}{2} \frac{A_1}{A_2}} A_1 = \frac{5188,4 - 459,3}{\frac{1}{0,5} + 1 + \frac{0,8 \times 0,7}{0,3}} \times 2,51 = 3073 \text{ W}$$

b) Reducción de pérdidas térmicas del líquido, en %, si el tubo interior se recubre con una pintura gris que posee una emisividad = 0,15.

$$\epsilon_1^* \text{ cambia a } 0,15 \quad ; \quad \epsilon_1^* = 1 - \rho_1^* = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$q_{1(\text{neta})}^* = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1^*} + 1 + \frac{2}{2} \frac{A_1}{A_2}} A_1 = \frac{5188,4 - 459,3}{\frac{1}{0,85} + 1 + \frac{0,8 \times 0,7}{0,3}} \times 2,51 = 1392,5 \text{ W}$$

$$\text{Reducción de pérdidas térmicas en \%} = \frac{3073 - 1392,5}{3073} \times 100 = 54,68\%$$

VI.25.- Un calentador circular gris de 10 cm de diámetro, se sitúa paralelamente y a 5 cm de distancia de un segundo receptor circular gris. La potencia conectada al calentador es de 300 W. Las bases posteriores del calentador y del receptor están aisladas, siendo despreciable la convección en ambas superficies. Ambos elementos están situados en una habitación grande que se mantiene a 77°C.

Determinar

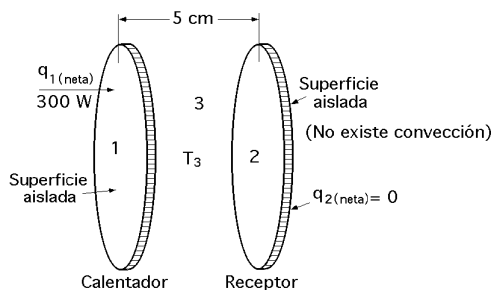
a) La temperatura del calentador sabiendo que $\epsilon_1 = 0,8$

b) La temperatura del receptor

c) La transmisión de calor neto radiativo a los alrededores por unidad de tiempo

d) La transferencia neta de calor radiativo por unidad de tiempo entre el calentador y el receptor

RESOLUCION



El que la superficie posterior del receptor esté aislada que no existe convección que el receptor se puede considerar como un cuerpo refractario, $q_{2(\text{neta})} = 0$, por cuanto no existe ningún tipo de energía exterior aplicada al mismo:

$$q_{2(\text{neta})} = 0 \quad J_2 = E_{b2} = G_2$$

Como los alrededores (a la temperatura $T_3 = 77 + 273 = 350^\circ\text{K}$), son grandes comparados con el tamaño del receptor y el calentador, el medio exterior se puede considerar como un cuerpo negro $\epsilon_3 = 1$; $J_3 = E_{b3}$

$$\text{Factor de forma: } F_{12} = 0,37 \quad ; \quad F_{23} = F_{13} = 1 - F_{12} = 0,63$$

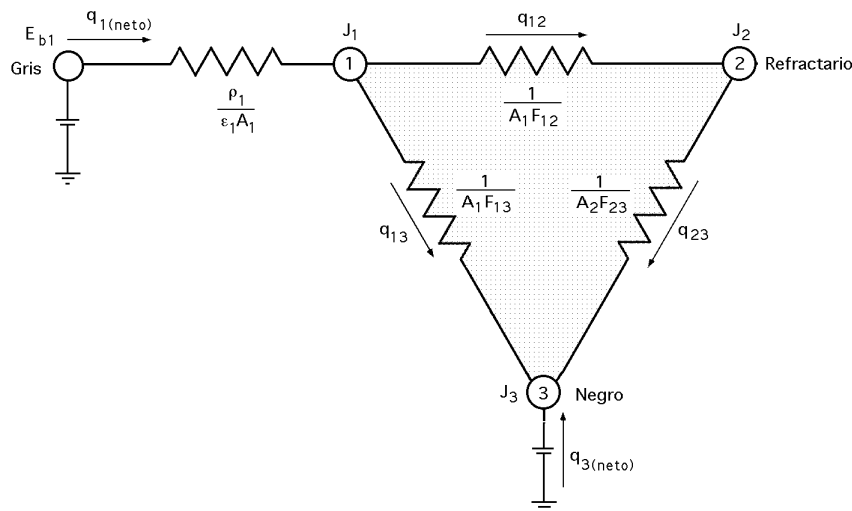
$$A_1 = A_2 = \pi r^2 = \pi \times 0,05^2 = 3,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E_{b3} = T_3^4 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4} \times 350^4 \text{K}^4 = 851 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\text{En (1)} : q_{1(\text{neta})} = \frac{J_1 - E_{b3}}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} + \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = A_1 F_{13} (J_1 - E_{b3}) + A_1 F_{12} (J_1 - J_2)$$

$$\text{En (2)} : \frac{J_2 - E_{b3}}{\frac{1}{A_2 F_{23}}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} ; A_1 F_{12} (J_1 - J_2) = A_2 F_{23} (J_2 - E_{b3}) ; |A_1 = A_2| ; F_{12} (J_1 - J_2) = F_{23} (J_2 - E_{b3})$$

que conforman un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas J_1 y J_2 . Sustituyendo valores se tiene:



$$\text{En (1)} : 300 \text{ W} = 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \times 0,63 (J_1 - 851 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}) + 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \times 0,37 (J_1 - J_2)$$

$$\text{En (2)} : 0,37 (J_1 - J_2) = 0,63 (J_2 - 851 \frac{\text{W}}{\text{m}^2})$$

cuya resolución permite obtener: $J_1 = 45.130 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$; $J_2 = 17.234 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

a) Temperatura del calentador sabiendo que $\epsilon_1 = 0,8$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{\epsilon_1 A_1}} ; 300 \text{ W} = \frac{\{E_{b1} - 45130\} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{0,8 \times 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \quad E_{b1} = 54684 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{E_{b1}}{5,67 \cdot 10^{-8}}} = \sqrt[4]{\frac{54684 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4}}} = 991^\circ\text{K} = 718^\circ\text{C}$$

b) Temperatura T_2 del receptor

$$J_2 = E_{b2} = T_2^4 \quad T_2 = \sqrt[4]{\frac{J_2}{5,67 \cdot 10^{-8}}} = \sqrt[4]{\frac{17234 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4}}} = 742,5^\circ\text{K} = 469,5^\circ\text{C}$$

c) Transmisión de calor neto radiativo a los alrededores por unidad de tiempo $q_{3(\text{neta})}$

$$q_{3(\text{neta})} = \frac{E_{b3} - J_1}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} + \frac{E_{b3} - J_2}{\frac{1}{A_2 F_{23}}} = \frac{851 - 45130}{7,85 \times 10^{-3} \times 0,63} + \frac{851 - 17234}{7,85 \times 10^{-3} \times 0,63} = -300 \text{ W}$$

d) Transferencia neta de calor radiativo por unidad de tiempo entre el calentador y el receptor

$$q_{12} = A_1 F_{12} (J_1 - J_2) = 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \times 0,37 (45134 - 17234) \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 81,035 \text{ W}$$

VI.26.- Un local comercial tiene las siguientes dimensiones, Longitud, 7 m.; Anchura, 5 m.; Altura, 3,7 m. La fachada, (5 x 3,7 m²) es integramente de cristal, y se encuentra a 2°C.

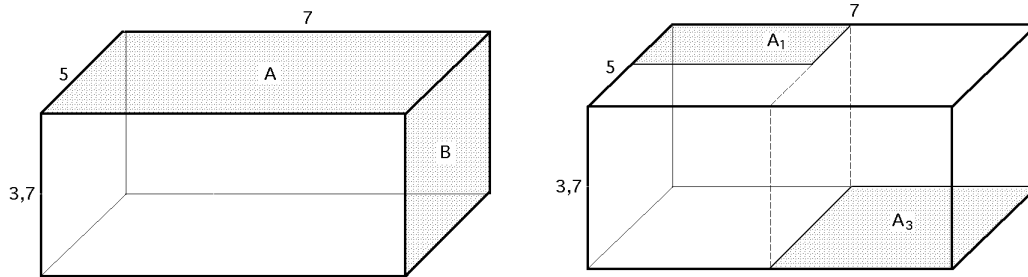
El techo se calienta mediante paneles radiantes, a 35°C, que lo cubren totalmente.

Determinar

a) El calor intercambiado entre el techo y la cristalera, en el supuesto de que se comporten como cuerpos negros

b) El calor intercambiado entre el techo y la cristalera, en el supuesto de que ambos, techo y cristalera, se comporten como cuerpos grises de emisividades 0,8 y 0,6 respectivamente.

c) El calor intercambiado entre una fracción del techo A₁ y una fracción del suelo A₂, tal como se indica en la figura, en el supuesto de considerarlas como superficies grises, de emisividades 0,8 y 0,4 respectivamente. El resto, cristalera incluida, se considerarán refractarias.



RESOLUCION

a) Calor intercambiado entre el techo y la cristalera, en el supuesto de que se comporten como cuerpos negros

$$q_{(AB)} = A F_{AB} (E_{bA} - E_{bB})$$

$$E_{bA} = 5,67 \times 10^{-8} (35 + 273)^4 = 510,25 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$E_{bB} = 5,67 \times 10^{-8} (2 + 273)^4 = 324,27 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$F_{AB} = \left| \begin{array}{l} X = \frac{a}{b} = \frac{7}{5} = 1,4 \\ Y = \frac{c}{b} = \frac{3,7}{5} = 0,74 \end{array} \right| = 0,14$$

$$q_{(AB)} = A F_{AB} (E_{bA} - E_{bB}) = q_{(AB)} = (7 \times 5) \text{ m}^2 \times 0,14 \times (510,25 - 324,27) \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 911,3 \text{ W}$$

b) Calor intercambiado entre el techo y la cristalera, en el supuesto de que ambos, techo y cristalera, se comporten como cuerpos grises de emisividades 0,8 y 0,6 respectivamente.

$$q_{(AB)} = \frac{E_{bA} - E_{bB}}{\frac{A}{A A_A} + R_{\text{equiv}} + \frac{B}{B A_B}}$$

$$A = 1 - A = 0,2 ; \quad B = 0,4$$

$$B = (5 \times 3,7) = 18,5 \text{ m}^2$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{X}{(X + 1) A F_{AB}}$$

$$F_{AA} + F_{AB} + F_{AR} = 1 ; F_{AR} = 1 - F_{AA} - F_{AB} = 1 - 0,14 = 0,86$$

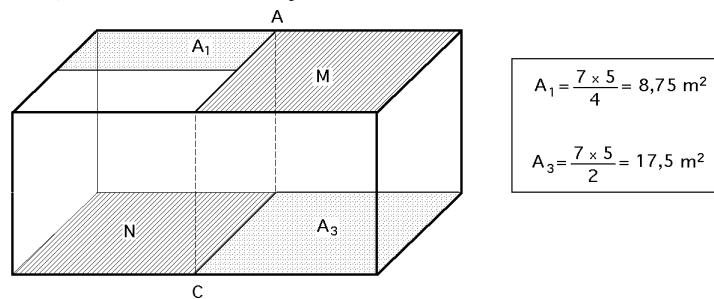
$$F_{BA} + F_{BB} + F_{BR} = 1 ; F_{BR} = 1 - F_{BA} = 1 - \frac{A}{B} F_{AB} = 1 - \frac{3,5}{18,5} \times 0,14 = 0,735$$

$$X = \frac{F_{BA}}{F_{AR}} + \frac{A}{B} \frac{F_{AB}}{F_{BR}} = \frac{0,14}{0,86} + \frac{3,5}{18,5} \times \frac{0,14}{0,735} = 0,523$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{X}{(X + 1) A F_{AB}} = \frac{0,523}{(0,523 + 1) \times 35 \times 0,14} = 0,0701$$

$$q_{(AB)} = \frac{510,25 - 324,27}{\frac{0,2}{0,8 \times 35} + 0,0701 + \frac{0,4}{0,6 \times 18,5}} = 1641,76 \text{ W}$$

c) El calor intercambiado entre una fracción del techo A_1 y una fracción del suelo A_2 , tal como se indica en la figura, en el supuesto de considerarlas como superficies grises, de emisividades 0,8 y 0,4 respectivamente. El resto, cristalera incluida, se considerarán refractarias.



Cálculo del factor de forma F_{13}

$$A F_{AC} = 2 A_1 F_{1N} + 2 A_1 F_{13} + M F_{MN} + M F_{M3} = \begin{vmatrix} 2 A_1 F_{1N} = M F_{M3} \\ 2 A_1 F_{13} = M F_{MN} \end{vmatrix} =$$

$$= M F_{M3} + 2 A_1 F_{13} + 2 A_1 F_{13} + M F_{M3} = 2 M F_{M3} + 4 A_1 F_{13}$$

$$F_{13} = \frac{A F_{AC} - 2 M F_{M3}}{4 A_1} = \frac{4 A_1 F_{AC} - 4 A_1 F_{M3}}{4 A_1} = F_{AC} - F_{M3}$$

$$F_{AC} = \begin{vmatrix} x = \frac{L}{D} = \frac{7}{3,7} = 1,9 \\ y = \frac{h}{D} = \frac{5}{3,7} = 1,35 \end{vmatrix} = 0,34$$

$$F_{M3} = \begin{vmatrix} x = \frac{L}{D} = \frac{3,5}{3,7} = 0,95 \\ y = \frac{h}{D} = \frac{5}{3,7} = 1,35 \end{vmatrix} = 0,225$$

$$F_{13} = F_{AC} - F_{M3} = 0,34 - 0,225 = 0,115$$

Calor intercambiado:

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b3}}{\frac{1}{1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{13}^*} + \frac{3}{3 A_3}}$$

$$A_1 F_{13}^* = \frac{A_1 (A_3 - A_1 F_{13}^2)}{A_1 + A_3 - 2 A_1 F_{13}} = \frac{8,75 \times [17,5 - (8,75 \times 0,115)]}{8,75 + 17,5 - (2 \times 8,75 \times 0,115)} = 6,28$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b3}}{\frac{1}{1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{13}^*} + \frac{3}{3 A_3}} = \frac{510,25 - 324,27}{\frac{0,2}{0,8 \times 8,75} + \frac{1}{6,28} + \frac{0,6}{0,4 \times 18,5}} = 680 \text{ W} = -q_{3(\text{neta})}$$

$$J_1 = -q_{1(\text{neta})} \frac{r_1}{e_1 A_1} + E_{b1} = -680 \frac{0,2}{0,8 \times 8,75} + 510,25 = 491 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$J_3 = -q_{3(\text{neta})} \frac{3}{3 A_3} + E_{b3} = +680 \frac{0,6}{0,4 \times 17,5} + 324,27 = 382,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$T_R = \sqrt[4]{\frac{J_1 A_1 F_{1R} + J_3 A_3 F_{3R}}{(A_1 F_{1R} + A_3 F_{3R})}}$$

$$F_{11} + F_{13} + F_{1R} = 1 ; F_{1R} = 1 - F_{13} = 1 - 0,114 = 0,885$$

$$F_{31} + F_{3R} + F_{33} = 1 ; F_{3R} = 1 - F_{31} = 1 - \frac{A_1 F_{13}}{A_3} = 1 - \frac{8,75 \times 0,114}{17,5} = 0,943$$

$$T_R = \sqrt[4]{\frac{(491 \times 8,75 \times 0,885) + (382,5 \times 17,5 \times 0,943)}{5,67 \times 10^{-8} \times [(8,75 \times 0,885) + (17,5 \times 0,943)]}} = 292,87\text{K} = \boxed{19,87^\circ\text{C}}$$

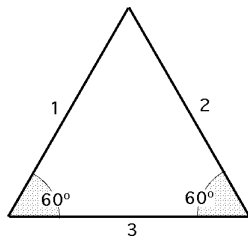
VI.27.- En un horno con perfil de triángulo equilátero y con una longitud suficiente como para despreciar los efectos de borde, la pared más caliente se mantiene a una temperatura $T_1=900^\circ\text{K}$ con una emisividad $\epsilon_1=0,8$

La pared fría está a $T_2=400^\circ\text{K}$ y tiene una emisividad $\epsilon_2=0,8$

La tercera pared es refractaria

Determinar el flujo neto de calor de la pared caliente

RESOLUCION



La pared (3) es refractaria: $q_{3(\text{neta})} = 0$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,8$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 ; 2 F_{12} = 1 ; F_{12} = F_{13} = 0,5$$

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0,5$$

$$E_{b1} - E_{b2} = (T_1^4 - T_2^4) = 5,67 \times 10^{-8} \times (900^4 - 400^4) = 35,749 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{X}{1+X} \frac{1}{F_{12}} + \frac{2 A_1}{2 A_2}} A_1 = \left| X = \frac{F_{12}}{F_{13}} + \frac{A_1}{A_2} \frac{F_{12}}{F_{23}} = 1 + (1) = 2 \right| =$$

$$= \frac{35,749 \text{ kW}}{\frac{0,2}{0,8} + \frac{2}{1+2} \frac{1}{0,5} + \frac{0,2}{0,8}} A_1 = 19,5 A_1 \text{ (kW)}$$

$$\boxed{\frac{q_{1(\text{neta})}}{A_1} = 19,5 \text{ kW}}$$

VI.28.- Dos placas cuadradas de $(1 \times 1) \text{ m}^2$ cada una, paralelas y directamente opuestas, a la distancia de 1 metro, tienen las siguientes temperaturas:

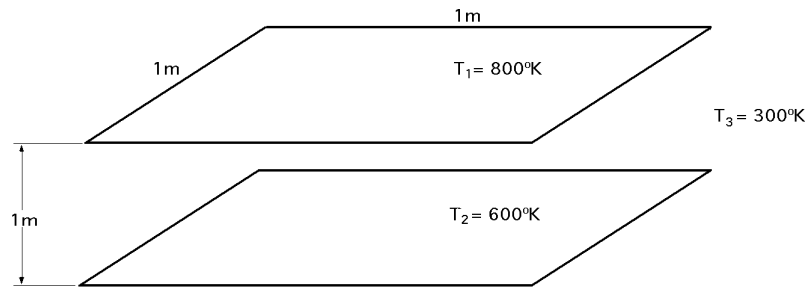
Placa caliente: $T_1 = 800^\circ\text{K}$; $\epsilon_1 = 0,8$

Placa fría: $T_2 = 600^\circ\text{K}$; $\epsilon_2 = 0,8$

El medio ambiente está a 300°K

Calcular la relación de transferencia neta de calor en cada placa y al ambiente

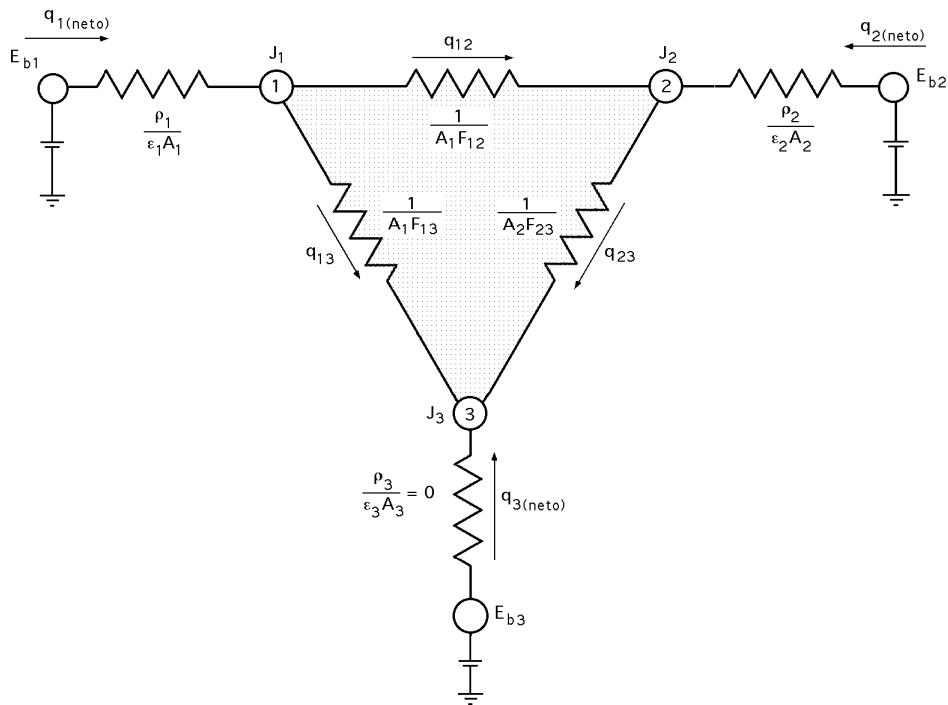
RESOLUCION



Es un recinto formado por tres superficies grises, siendo la tercera el medio exterior a 300°K

$$A_1 = A_2 = 1 \text{ m}^2 ; \quad \frac{A_1}{A_3} = 0 ; \quad \rho_1 = \rho_2 = 0,8$$

$$F_{12} = 0,2 ; \quad F_{13} = F_{23} ; \quad F_{12} + F_{13} = 1 ; \quad F_{13} = 1 - F_{12} = 1 - 0,2 = 0,8$$



$$\frac{1}{1 A_1} = \frac{1 - \rho_1}{1 A_1} = \frac{1 - 0,8}{0,8 \times 1} = 0,25$$

$$\frac{2}{2 A_2} = \frac{1 - \rho_2}{2 A_2} = \frac{1 - 0,8}{0,8 \times 1} = 0,25$$

$$\frac{3}{3 A_3} = \frac{1 - \rho_3}{3 A_3} = 0 \quad \boxed{J_3 = E_{b3}}$$

$$\frac{1}{A_1 F_{12}} = \frac{1}{1 \times 0,2} = 5$$

$$\frac{1}{A_1 F_{13}} = \frac{1}{A_2 F_{23}} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

$$E_{b1} = T_1^4 = 5,67 \times 10^{-8} \times 800^4 = 23,224 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$E_{b2} = T_2^4 = 5,67 \times 10^{-8} \times 600^4 = 7,348 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$E_{b3} = T_3^4 = 5,67 \times 10^{-8} \times 300^4 = 0,459 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

El problema se reduce al cálculo de las radiosidades J_1 y J_2 ; para ello sabemos que la suma de los flujos en los

nudos (1) y (2) tiene que ser cero.

$$(1) \quad \frac{23,224 - J_1}{0,25} + \frac{J_2 - J_1}{5} + \frac{0,459 - J_1}{1,25} = 0$$

$$(2) \quad \frac{J_1 - J_2}{5} + \frac{7,348 - J_2}{0,25} + \frac{0,459 - J_2}{1,25} = 0$$

Resolviendo se obtiene: $J_1 = 18,921 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$; $J_2 = 6,709 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{23,224 - 18,921}{0,25} = 17,212 \text{ kW}$$

$$q_{2(\text{neta})} = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{2}{A_2}} = \frac{7,348 - 6,709}{0,25} = 2,557 \text{ kW}$$

$$q_{3(\text{neta})} = \frac{E_{b3} - J_1}{\frac{1}{A_1}} + \frac{E_{b3} - J_2}{\frac{1}{A_2}} = \frac{0,459 - 18,921}{1,25} + \frac{0,459 - 6,709}{1,25} = -19,768 \text{ kW}$$

que indica que los planos (1) y (2) están disipando calor, y que el ambiente gana calor.

La suma algebraica:

$$q_{1(\text{neta})} + q_{2(\text{neta})} + q_{3(\text{neta})} = 0 \quad ; \quad 17,212 + 2,557 - 19,769 = 0$$

comprueba la veracidad de los resultados.

VI.29.- Dos placas paralelas, grandes, opacas, grises, emitiendo difusamente y reflejando difusamente, tienen emisividades $\epsilon_1 = 0,8$ y $\epsilon_2 = 0,5$, y están mantenidas a temperaturas uniformes $T_1 = 800^\circ\text{K}$ y $T_2 = 600^\circ\text{K}$. Determinar los flujos térmicos netos de radiación $q_{1(\text{neta})}$ y $q_{2(\text{neta})}$ entre las superficies de las placas.

RESOLUCION

Como se conocen las temperaturas de las superficies: $q_{1(\text{neta})} = \frac{1}{1} (E_{b1} - J_1)$

$$\begin{bmatrix} (1 - F_{11} + \frac{1}{1}) & -F_{12} \\ -F_{21} & (1 - F_{22} + \frac{2}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} E_{b1} \\ \frac{2}{2} E_{b2} \end{bmatrix}$$

$$F_{11} = F_{22} = 0 \quad ; \quad F_{11} + F_{12} = 1 \quad ; \quad F_{12} = 1 \quad ; \quad F_{21} = 1$$

$$E_{b1} = T_1^4 = 5,67 \times 10^{-8} \times 800^4 = 23,224 \text{ kW}$$

$$E_{b2} = T_2^4 = 5,67 \times 10^{-8} \times 600^4 = 7,348 \text{ kW}$$

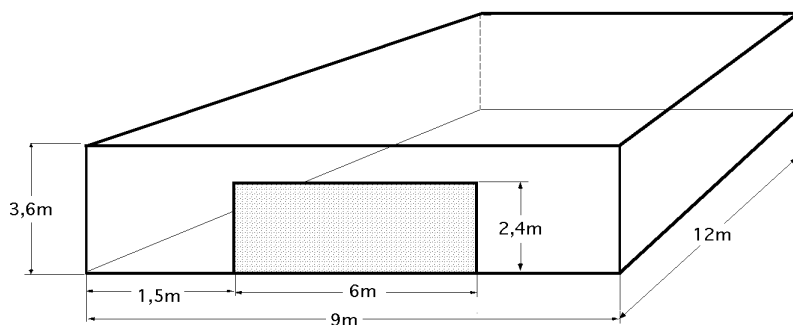
$$\begin{bmatrix} (1 + \frac{0,8}{0,2}) & -1 \\ -1 & (1 + \frac{0,5}{0,5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,8}{0,2} \times 23,224 \\ \frac{0,5}{0,5} \times 7,348 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = 21,46 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$J_2 = 14,40 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{0,8}{0,2} (23,224 - 21,46) = 7,056 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

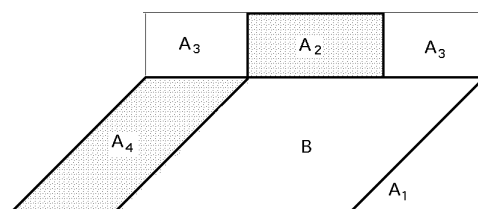
$$q_{2(\text{neta})} = \frac{0,5}{0,5} (7,348 - 14,404) = -7,056 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$



VI.30.- Una nave industrial de 12 m de longitud, 9 m de anchura y 3,6 metros de altura, tiene una cristallera de (6 x 2,4) m² tal como se indica en la figura. El local se calienta de forma que todo el suelo se convierte en un panel de calefacción radiante a 35°C, mientras que la cristallera está a 5°C. Determinar

- El factor de forma entre el suelo y la cristallera.
- El calor que se desprende del suelo a 35°C considerando que todas las paredes y techo, se comportan como cuerpos negros a 25°C, permaneciendo la cristallera a 5°C.
- El intercambio térmico entre el suelo 35°C y la luna del escaparate 5°C, consideradas como superficies negras, si se supone que todas las paredes y el techo se consideran rerradiantes. ¿Temperatura de las paredes y del techo?
- Energía a comunicar al suelo para mantener constante la temperatura del escaparate 5°C suponiendolos como superficies grises de emisividades 0,8 y 0,3 respectivamente, (las paredes y el techo se consideran rerradiantes)
- El intercambio térmico entre el suelo 35°C y la luna del escaparate 5°C, consideradas como superficies grises de emisividades 0,8 y 0,3 respectivamente, sin tener en cuenta el resto

RESOLUCION



- Factor de forma entre el suelo y la cristallera.

$$F_{12} = \frac{B}{A_1} \frac{F_{B-23} - A_4 F_{43}}{A_1} = \frac{[(7,5 \times 12) \times 0,075] - [(1,5 \times 12) \times 0,04]}{9 \times 12} = 0,0558$$

$$F_{1-\text{paredes}} = 1 - 0,0558 = 0,9442$$

- El calor que se desprende del suelo considerando que todas las paredes, techo, suelo y cristallera se comportan como cuerpos negros a 25°C.

$$E_{b1} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 308^4 \text{ } ^\circ K^4 = 510,25 \text{ W}$$

$$E_{b2} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 278^4 \text{ } ^\circ K^4 = 338,65 \text{ W}$$

Calor cedido por el suelo:

$$q = A_1 F_{12} (T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{1-\text{pared}} (T_1^4 - T_{\text{pared}}^4) = A_1 [F_{12} (T_1^4 - T_2^4) - F_{1-\text{pared}} (T_1^4 - T_{\text{pared}}^4)] =$$

$$= (12 \times 9) \text{ m}^2 \times 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} [0,0558 \times (308^4 - 278^4) - 0,9442 \times (308^4 - 298^4)] =$$

$$= (1034,1 + 6435,3) \text{ W} = 7470 \text{ W} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1034,1 \text{ W se corresponden con la cristallera} \\ 6435,3 \text{ W se corresponden con las paredes} \end{array} \right.$$

- Intercambio térmico entre el suelo 35°C y la luna del escaparate 5°C, consideradas como superficies negras, si se supone que todas las paredes y el techo se consideran rerradiantes

$$F_{12}^* = \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2 A_1 F_{12}} = \frac{(2,4 \times 6) - (9 \times 12) \times 0,0558^2}{(9 \times 12) + (2,4 \times 6) - 2 \times (9 \times 12) \times 0,0558} = 0,127$$

$$q_{1(\text{neta})} = A_1 F_{12}^* (E_{b1} - E_{b2}) = (9 \times 12) \text{ m}^2 \times 0,127 \times 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4} (308^4 - 278^4) ^\circ\text{K}^4 = \boxed{2353 \text{ W}}$$

Temperatura del techo y las paredes

$$T_R = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 A_1 F_{1R} + T_2^4 A_2 F_{2R}}{A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R}}} = \sqrt[4]{\frac{[308^4 \times (12 \times 9) \times 0,9442] + [278^4 \times (2,4 \times 6) \times 0,5815]}{(12 \times 9) \times 0,9442 + [(2,4 \times 6) \times 0,5815]}} = 306^\circ\text{K}$$

d) Energía a comunicar al suelo para mantener constante la temperatura del escaparate 5°C suponiendolos como superficies grises de emisividades 0,8 y 0,3 respectivamente, (las paredes y el techo se consideran rerradiantes)

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + R_{\text{equiv}} + \frac{2}{A_2}}$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{X}{1 + X} \frac{1}{A_1 F_{12}}$$

$$F_{12} = 0,0558 \quad ; \quad F_{11} + F_{12} + F_{1R} = 1 \quad ; \quad \boxed{F_{1R} = 1 - 0,0558 = 0,9442}$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{2R} = 1 \quad ; \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{12 \times 9}{2,4 \times 6} \times 0,0558 = 0,4185$$

$$\boxed{F_{2R} = 1 - 0,4185 = 0,5815}$$

$$X = \frac{F_{12}}{F_{1R}} + \frac{A_1}{A_2} \frac{F_{12}}{F_{2R}} = \frac{0,0558}{0,9442} + \frac{(9 \times 12)}{(6 \times 2,4)} \frac{0,0558}{0,5815} = 0,7788$$

$$R_{\text{equiv}} = \frac{0,7788}{1 + 0,7788} \frac{1}{(12 \times 9) \times 0,0558} = 0,07265$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + R_{\text{equiv}} + \frac{2}{A_2}} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4} (308^4 - 278^4) ^\circ\text{K}^4}{\frac{0,2}{0,8 \times (9 \times 12)} + 0,07265 + \frac{0,7}{0,3 \times (6 \times 2,4)}} = 724 \text{ W}$$

e) El intercambio térmico entre el suelo 35°C y la luna del escaparate 5°C, consideradas como superficies grises de emisividades 0,8 y 0,3 respectivamente, sin tener en cuenta el resto

$$724 \text{ W} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{510,25 - J_1}{0,2} \quad \boxed{J_1 = 508,57 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}$$

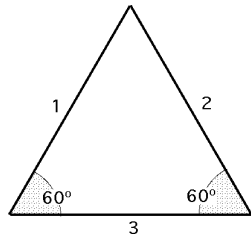
$$724 \text{ W} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2}} = \frac{J_2 - 338,65}{0,7} \quad \boxed{J_2 = 455,88 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}$$

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{508,57 - 456}{(12 \times 9) \times 0,0558} = 316,85 \text{ W}$$

VI.31.- Un recinto en forma de triángulo equilátero, de gran longitud, de superficies opacas, grises, emisores difusos y reflectoras difusas, tiene las siguientes emisividades, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,8$; $\epsilon_3 = 0,5$ y temperaturas, $T_1 = 800^\circ\text{K}$; $T_2 = 600^\circ\text{K}$; $T_3 = 300^\circ\text{K}$

Determinar los flujos térmicos netos $q_{1(\text{neta})}$ $q_{2(\text{neta})}$ $q_{3(\text{neta})}$

RESOLUCION



$$\begin{bmatrix} (1 - F_{11} + \frac{1}{1}) & -F_{12} & -F_{13} \\ -F_{21} & (1 - F_{22} + \frac{2}{2}) & -F_{23} \\ -F_{31} & -F_{32} & (1 - F_{33} + \frac{3}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} E_{b1} \\ \frac{2}{2} E_{b2} \\ \frac{3}{3} E_{b3} \end{bmatrix}$$

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 ; F_{12} + F_{13} = 1 ; F_{12} = F_{13} = 0,5 = F_{21} = F_{31}$$

$$T_1^4 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 800^4 \text{ } ^\circ K^4 = 23,224 \frac{kW}{m^2}$$

$$T_2^4 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 600^4 \text{ } ^\circ K^4 = 7,348 \frac{kW}{m^2}$$

$$T_3^4 = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 300^4 \text{ } ^\circ K^4 = 0,459 \frac{kW}{m^2}$$

$$\begin{bmatrix} (1 - 0 + \frac{0,8}{0,2}) & -0,5 & -0,5 \\ -0,15 & (1 - 0 + \frac{0,8}{0,2}) & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & (1 - 0 + \frac{0,5}{0,5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,8}{0,2} \times 23,224 \\ \frac{0,8}{0,2} \times 7,348 \\ \frac{0,5}{0,5} \times 0,459 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = 20,187 \frac{kW}{m^2}$$

$$J_2 = 8,641 \frac{kW}{m^2}$$

$$J_3 = 7,436 \frac{kW}{m^2}$$

$$q_{1(neta)} = \frac{1}{1} (E_{b1} - J_1) = \frac{0,8}{0,2} (23,224 - 20,187) = 12,148 \frac{kW}{m^2}$$

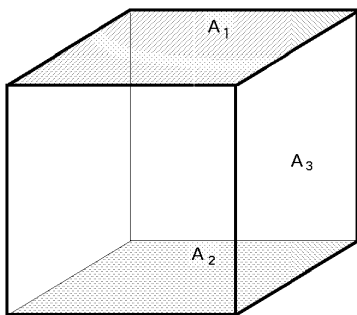
$$q_{2(neta)} = \frac{2}{2} (E_{b2} - J_2) = \frac{0,8}{0,2} (7,348 - 8,641) = -5,172 \frac{kW}{m^2}$$

$$q_{3(neta)} = \frac{3}{3} (E_{b3} - J_3) = \frac{0,5}{0,5} (0,459 - 7,436) = -6,977 \frac{kW}{m^2}$$

VI.32.- En un recinto con forma de cubo, la pared más alta se mantiene a $T_1 = 800^\circ K$ y tiene una emisividad $\epsilon_1 = 0,8$, mientras que la base está a $T_2 = 600^\circ K$ y tiene una emisividad $\epsilon_2 = 0,8$; las caras laterales son superficies rerradiantes.

Determinar el flujo neto de calor radiante en la superficie más elevada.

RESOLUCION



Por ser la superficie A_3 rerradiante: $q_{3(neta)} = 0$

$$\begin{bmatrix} (1 - F_{11} + \frac{1}{1}) & -F_{12} & -F_{13} \\ -F_{21} & (1 - F_{22} + \frac{2}{2}) & -F_{23} \\ -F_{31} & -F_{32} & (1 - F_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} E_{b1} \\ \frac{2}{2} E_{b2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{b1} = T_1^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 800^4 \text{ } ^\circ K^4 = 23,224 \frac{kW}{m^2}$$

$$E_{b2} = T_2^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \times 600^4 K^4 = 7,348 \frac{kW}{m^2}$$

$$F_{11} = 0 ; F_{12} = F_{21} = 0,2 ; F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 ; F_{13} = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$F_{22} = 0 ; F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 ; F_{23} = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 ; F_{31} = F_{32} = \frac{A_2}{A_3} F_{23} = \frac{A_1}{4 A_1} F_{23} = 0,2$$

$$F_{33} = 1 - F_{31} + F_{32} = 1 - 0,2 - 0,2 = 0,6$$

$$\begin{bmatrix} (1 + \frac{0,8}{0,2}) & -0,2 & -0,8 \\ -0,2 & (1 + \frac{0,8}{0,22}) & -0,8 \\ -0,2 & -0,2 & (1 - 0,6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0,8}{0,2} \times 23,334 \frac{kW}{m^2} \\ \frac{0,8}{0,2} \times 7,348 \frac{kW}{m^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = 21,392 \frac{kW}{m^2}$$

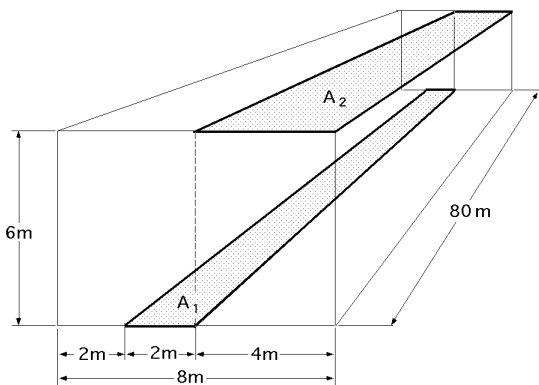
$$J_2 = 9,179 \frac{kW}{m^2}$$

$$J_3 = 15,286 \frac{kW}{m^2}$$

$$q_{1(neta)} = \frac{1}{1} (E_{b1} - J_1) = \frac{0,8}{0,2} (23,224 - 21,392) \frac{kW}{m^2} = 7,33 \frac{kW}{m^2}$$

$$q_{2(neta)} = \frac{2}{2} (E_{b2} - J_2) = \frac{0,8}{0,2} (7,348 - 9,179) \frac{kW}{m^2} = -7,33 \frac{kW}{m^2}$$

$$\text{Temperatura de la zona rerradiante: } T_3 = \sqrt[4]{\frac{J_3}{5,67 \times 10^{-8}}} = \sqrt[4]{\frac{15286}{5,67 \times 10^{-8}}} = 720 \text{ °K} = 447 \text{ °C}$$



VI.33.- Una nave industrial tiene las siguientes dimensiones: Longitud = 80 m; anchura = 8 m; altura = 6 m.

La fracción A₂ del techo se calienta mediante paneles solares y se mantienen a 40°C

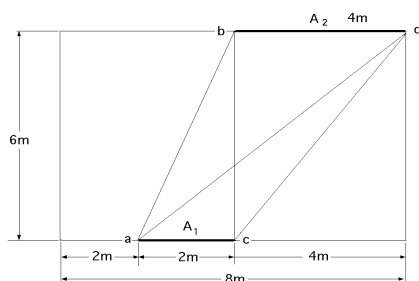
En la fracción A₁ del suelo, a 20°C, se instala maquinaria.

Determinar

a) El calor intercambiado entre las superficies A₁ y A₂ en el supuesto de considerarlas de emisividades 0,8 y 0,4 respectivamente.

b) El calor intercambiado “directamente” entre (1) y (2)

c) La temperatura de las paredes



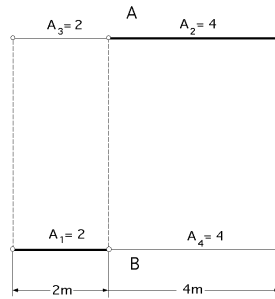
RESOLUCION

CALCULO DEL FACTOR DE FORMA F₁₂

Al ser la longitud (80 m), mucho mayor que las otras dimensiones, se pueden despreciar los efectos de borde y aplicar el método de Hottel.

$$F_{12} = \frac{\{(ad) + (bc)\} - \{(ab) + (cd)\}}{2 (ac)} = \begin{matrix} (ac) = 2 \text{ m} ; (bc) = 6 \text{ m} \\ (ab) = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,324 \text{ m} \\ (cd) = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7,211 \text{ m} \\ (ad) = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,485 \text{ m} \end{matrix} = \frac{\{8,485 + 6\} - \{6,324 + 7,211\}}{2 \times 2} = 0,2374$$

Si los efectos de borde no se desprecian:



$$A F_{AB} = A_3 F_{31} + A_3 F_{34} + A_2 F_{21} + A_2 F_{24} = A_3 F_{31} + 2 A_3 F_{34} + A_2 F_{24} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Por simetría: } A_3 = A_1 ; A_2 = A_4 \\ A_3 F_{34} = A_2 F_{21} = A_1 F_{12} \quad F_{34} = F_{12} \end{array} \right| = A_3 F_{31} + 2 A_3 F_{12} + A_2 F_{24}$$

$$F_{12} = \frac{A F_{AB} - A_3 F_{31} - A_2 F_{24}}{2 A_1}$$

$$F_{AB} = \left| \begin{array}{l} X = \frac{80}{6} = 13,33 \\ Y = \frac{6}{6} = 1 \end{array} \right| = 0,39 ; F_{31} = \left| \begin{array}{l} X = \frac{80}{6} = 13,33 \\ Y = \frac{2}{6} = 0,33 \end{array} \right| = 0,158 ; F_{24} = \left| \begin{array}{l} X = \frac{80}{6} = 13,33 \\ Y = \frac{4}{6} = 0,66 \end{array} \right| = 0,27$$

$$F_{12} = \frac{(6 \times 0,39) - (2 \times 0,158) - (4 \times 0,127)}{2 \times 2} = 0,236$$

a) Calor intercambiado entre las superficies A_1 y A_2 en el supuesto de considerarlas de emisividades 0,8 y 0,4 respectivamente.

$$E_{b1} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 313^4 ^\circ K^4 = 417,88 \frac{W}{m^2}$$

$$E_{b2} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \times 293^4 ^\circ K^4 = 544,20 \frac{W}{m^2}$$

$$q_{12}^* = \frac{E_{b2} - E_{b1}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}^*} + \frac{2}{A_2}}$$

$$A_1 F_{12}^* = A_1 F_{12} + \frac{1}{\frac{1}{A_2 F_{2R}} + \frac{1}{A_1 F_{1R}}}$$

$$F_{11} + F_{12} + F_{1R} = 1 ; 0 + 0,237 + F_{1R} = 1 ; F_{1R} = 0,763$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{2R} = 1 ; F_{21} A_2 + F_{12} A_1 \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = 0,237 \times \frac{2}{4} = 0,1185$$

$$F_{2R} = 1 - F_{21} = 1 - 0,1185 = 0,8815$$

$$A_1 F_{12}^* = A_1 F_{12} + \frac{1}{\frac{1}{A_2 F_{2R}} + \frac{1}{A_1 F_{1R}}} = (2 \times 0,237) + \frac{1}{\frac{1}{4 \times 0,8815} + \frac{1}{2 \times 0,763}} = 1,54$$

$$q_{12}^* = \frac{E_{b2} - E_{b1}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}^*} + \frac{2}{A_2}} = \frac{5,67 \times 10^{-8} (313^4 - 293^4)}{\frac{0,2}{2 \times 0,8} + \frac{1}{1,54} + \frac{0,6}{0,4 \times 4}} = -q_{1(neta)} = q_{2(neta)} = 109,9 \frac{W}{m}$$

$$Q_{12}^* = 109,9 \frac{W}{m} \times 80 m = 8790 W$$

B) Calor intercambiado “directamente” entre (1) y (2)

$$q_{12} = \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = A_1 F_{12} (J_2 - J_1)$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} \quad J_1 = E_{b1} - \frac{1}{A_1} q_{1(\text{neta})} = 417,88 - \frac{0,2}{0,8 \times 2} \times 109,87 \text{ W} = 431,6 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$q_{2(\text{neta})} = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{2}{A_2}} \quad J_2 = E_{b2} - \frac{2}{A_2} q_{2(\text{neta})} = 544,20 - \frac{0,6}{0,4 \times 4} \times 109,87 \text{ W} = 503 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$q_{12} = \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = A_1 F_{12} (J_2 - J_1) = (2 \times 0,237) \times (503 - 431,6) = 33,83 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

$$Q_{12} = 33,83 \frac{\text{W}}{\text{m}} \times 80 \text{ m} = 2707,5 \text{ W}$$

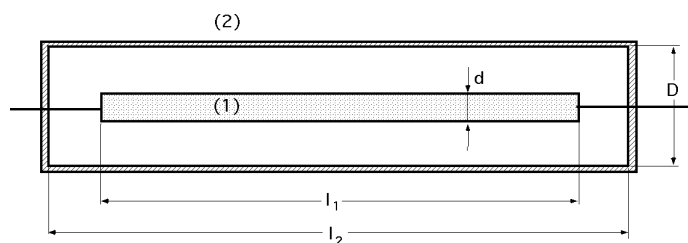
c) Temperatura de las paredes

$$T_R = \sqrt{\frac{J_1 A_1 F_{1R} + J_2 A_2 F_{2R}}{(A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R})}} = \sqrt{\frac{(431,6 \times 2 \times 0,763) + (503 \times 4 \times 0,8815)}{[(2 \times 0,763) + (4 \times 0,8815)]}} = 303,55^\circ\text{K}$$

VI.34.- Una varilla cilíndrica maciza metálica, de diámetro $d=5 \text{ mm}$ y longitud $l=100 \text{ mm}$, se introduce en una cámara de ensayos, también cilíndrica, de diámetro $D=100 \text{ mm}$ y longitud $L=500 \text{ mm}$ en la que se ha hecho el vacío.

Por la varilla a ensayar se hace circular una corriente eléctrica que eleva su temperatura a 1000°C , consumiendo una potencia de 80 W . Las paredes de la cámara de ensayos tienen una temperatura uniforme de 20°C .

Determinar la emisividad de la varilla a ensayar en los siguientes supuestos:



a) La cámara de ensayos se supone está conformada por superficies negras

b) La cámara de ensayos se supone está conformada por superficies grises, siendo su emisividad $\epsilon_{\text{cámara}} = 0,8$.

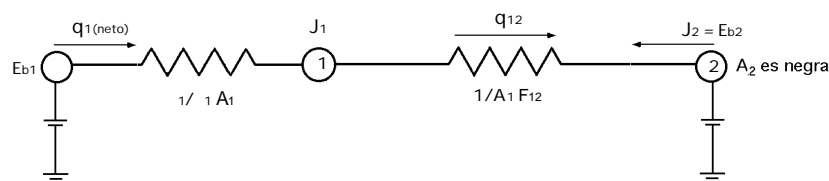
RESOLUCION

$$A_1 = 0,00159 \text{ m}^2 ; T_1 = 1273^\circ\text{K}$$

$$A_2 = 0,02356 \text{ m}^2 ; T_2 = 293^\circ\text{K}$$

$$F_{12} = 1 ; F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{d l_1 + 2 \frac{d^2}{4}}{D l_2 + 2 \frac{D^2}{4}} = \frac{(2 \times 0,005 \times 0,1) + 0,005^2}{(2 \times 0,1^2 \times 0,5) + 0,1^2} = 0,05125$$

a) Emisividad de la varilla a ensayar cuando la cámara de ensayos (2) se supone está conformada por superficies negras



$$q_{12} = q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1}} = \frac{J_1 - E_{b2}}{A_1 F_{12}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{F_{12}}} A_1 = \frac{1}{1} A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$$80 \text{ W} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} (1590 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2) (1293^4 - 293^4) \text{ K}^4 \quad \epsilon_1 = 0,3387$$

b) Emisividad de la varilla a ensayar si la cámara de ensayos se supone está conformada por superficies grises, siendo su emisividad $\epsilon_{\text{cámara}} = 0,8$.

$$q_{12} = q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{F_{12} A_1} + \frac{2}{A_2}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{2}{A_2}} A_1 = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{2}{A_2}} A_1 =$$

$$= \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (1273^4 - 293^4) \times 1,5904 \times 10^{-3}}{\frac{1}{1} + \frac{0,2 \times (1,5904 \times 10^{-3})}{0,8 \times 0,02356}} = 80 \text{ W} \quad \epsilon_1 = 0,34$$

que coincide prácticamente con la anterior y que es debido a que $A_2 \gg A_1$, por lo que A_1 se comporta como un cuerpo negro.

De otra forma:

$$q_{1(\text{neta})} = A_1 \epsilon_1 F_{12} T_1^4 - A_2 \epsilon_2 F_{21} T_2^4 = [A_1 \epsilon_1 F_{12} T_1^4 - A_2 \epsilon_2 F_{21} T_2^4] =$$

$$= 5,67 \times 10^{-8} [(1,59 \times 10^{-3} \times \epsilon_1 \times 1 \times 1273^4) - (0,02356 \times 0,8 \times 0,05125 \times 293^4)] = 80 \text{ W}$$

$$\epsilon_1 = 0,34$$

c) Radiosidades de las superficies A_1 y A_2 en el supuesto (a)

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1} - \epsilon_1} = (A_1 - \epsilon_1) \frac{E_{b1} - J_1}{1} = \left| \begin{array}{l} E_{b1} = T_1^4 = 148900 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ E_{b2} = T_2^4 = 417,88 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{array} \right| =$$

$$80 \text{ W} = \frac{(1,59 \times 10^{-3}) \times 0,3387}{1 - 0,3387} \times (148900 - J_1) \quad J_1 = 50662,75 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 80,55 \text{ W}$$

$$J_2 = E_{b2} \text{ (cuerpo negro)} \quad \epsilon_2 = 1; \quad J_2 = 417,88 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

d) Radiosidades de las superficies A_1 y A_2 en el supuesto (b)

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1} - \epsilon_1} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2} - \epsilon_2}$$

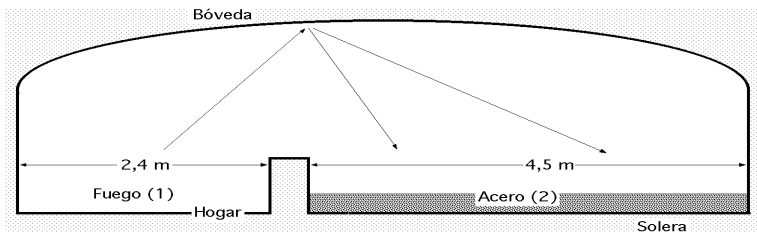
$$80 \text{ W} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{A_1} - \epsilon_1} = \frac{148900 - J_1}{\frac{1}{1,59 \times 10^{-3} \times 0,34}} \quad J_1 = 51230,75 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 81,45 \text{ W}$$

$$80 \text{ W} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2} - \epsilon_2} = \frac{J_2 - 417,88}{\frac{0,2}{0,02356 \times 0,8}} \quad J_2 = 1266,75 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 29,84 \text{ W}$$

$$\text{e) Refrigeración de la cámara: } q_{2(\text{neta})} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{A_2} - \epsilon_2} = 80 \text{ W}$$

VI.35.- En el horno que se muestra en la figura, el fuego del hogar se encuentra a 1350°C y se comporta como un cuerpo gris convexo de emisividad $\epsilon_1 = 0,7$, mientras que la solera donde se encuentra el acero se

halla a 800°C, comportándose como un cuerpo gris plano de $\epsilon = 0,8$. El hogar (fuego) y la solera (acero), se hallan separados por una pared, de forma que no se ven entre sí, mientras que el resto de las superficies se comportan como paredes rerradiantes no conductoras.



Determinar:

- El intercambio térmico entre el fuego y el acero, por unidad de anchura del horno
- La temperatura de la bóveda del horno

RESOLUCION

$$E_{b1} = T_1^4 = 1623^4 = 393420 \frac{W}{m^2} ; E_{b2} = T_2^4 = 1073^4 = 75160 \frac{W}{m^2}$$

$$F_{11} = 0 ; F_{12} = 0 ; F_{11} + F_{12} + F_{1R} = 1 \quad F_{1R} = 1$$

$$F_{22} = 0 ; A_1 F_{12} = A_2 F_{21} = 0 ; F_{21} = 0 ; F_{21} + F_{22} + F_{2R} = 1 \quad \boxed{F_{2R} = 1}$$

$$F_{12}^* = F_{12} + \frac{A_2 F_{1R} F_{2R}}{A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R}} = 0 + \frac{A_2}{A_1 + A_2} = \frac{4,5}{2,4 + 4,5} = 0,652$$

a) Intercambio térmico entre el fuego y el acero, por unidad de anchura del horno

$$q_{1neta} = q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}^*} + \frac{2}{2 A_2}} = \frac{393420 - 75160}{\frac{0,3}{0,7 \times 2,4} + \frac{1}{2,4 \times 0,652} + \frac{0,2}{0,8 \times 4,5}} = 364,485 \frac{kW}{m}$$

b) Temperatura de la bóveda del horno

Cálculo de las radiosidades

$$364485 \frac{W}{m} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{1 A_1}} \quad J_1 = E_{b1} - 364485 \frac{1}{1 A_1}$$

$$J_1 = 393420 \frac{W}{m^2} - 364485 W \times \frac{0,3}{0,7 \times 2,4} \frac{1}{m^2} = 328334 \frac{W}{m^2}$$

$$364485 \frac{W}{m} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{2 A_2}} \quad J_2 = E_{b2} + 364485 \frac{2}{2 A_2}$$

$$J_2 = 393420 \frac{W}{m^2} + 364485 W \times \frac{0,2}{0,8 \times 4,5} \frac{1}{m^2} = 95408,3 \frac{W}{m^2}$$

$$T_R = \sqrt[4]{\frac{J_1 A_1 F_{1R} + J_2 A_2 F_{2R}}{(A_1 F_{1R} + J_2 F_{2R})}} = \sqrt[4]{\frac{(328334 \times 2,4 \times 1) + (95408,3 \times 4,5 \times 1)}{(2,4 + 4,5)}} = 1328K = \boxed{1055^\circ C}$$

VI.36.- Se tienen dos planos paralelos de dimensiones (7 x 5) m, separados una distancia de 4 metros por un medio gaseoso que a efectos térmicos no participa en el proceso.

El plano superior A está a una temperatura $T_A = 400^\circ C$ y tiene una emisividad $\epsilon_A = 0,8$

El plano inferior B está a una temperatura $T_B = 20^\circ C$ y tiene una emisividad $\epsilon_B = 0,4$

Determinar

a) El calor extraído del plano B para mantener constante su temperatura

b) Si se coloca un plano C de las mismas dimensiones que los planos A y B, de $\epsilon_C = 0,7$, entre los dos

planos citados, a una distancia equidistante de 2 m, se desea saber el calor extraído en B para mantener constante la temperatura T_B .

c) Temperatura del plano C.

RESOLUCION

$$\text{Factor de forma } F_{AB} \left| \begin{array}{l} \frac{h}{D} = \frac{5}{4} = 1,25 \\ \frac{L}{D} = \frac{7}{4} = 1,75 \end{array} \right| F_{AB} = 0,3$$

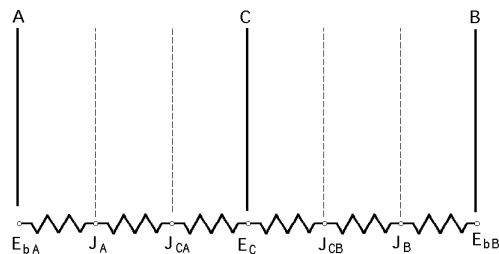
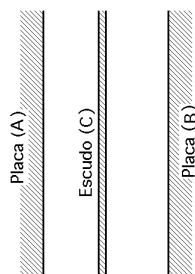
$$E_{bA} = 11.631,7 \frac{W}{m^2} ; E_{bB} = 417,9 \frac{W}{m^2} ; A_A = A_B = A = 35 m^2$$

a) Calor extraído del plano B para mantener constante su temperatura

$$q_{A(neta)} = \frac{E_{bA} - E_{bB}}{\frac{A}{A_A} + \frac{1}{A_A F_{AB}} + \frac{B}{B A_B}} = \frac{A (E_{bA} - E_{bB})}{\frac{A}{A} + \frac{1}{F_{AB}} + \frac{B}{B}} = \frac{35 m^2 \times (11.631,7 - 417,9) \frac{W}{m^2}}{\frac{0,2}{0,8} + \frac{1}{0,3} + \frac{0,6}{0,4}} = 77.209 W$$

b) Se coloca un plano C de las mismas dimensiones que los planos A y B, de $\epsilon_C = 0,7$, entre los dos planos citados, a una distancia equidistante de 2 m; se desea saber el calor extraído en B para mantener constante la temperatura T_B .

$$\text{Factor de forma } F_{AC} \left| \begin{array}{l} \frac{h}{D} = \frac{5}{2} = 2,5 \\ \frac{L}{D} = \frac{7}{2} = 3,5 \end{array} \right| F_{AC} = 0,54$$



2 placas paralelas infinitas de igual área y pantalla de radiación

$$q_{A(neta)} = \frac{E_{bA} - E_{bB}}{\frac{A}{A} + \frac{2}{F_{AC}} + \frac{2}{F_{CA}} + \frac{B}{B}} A = \frac{(11.631,7 - 417,9) \frac{W}{m^2}}{\frac{0,2}{0,8} + \frac{2}{0,54} + \frac{2 \times 0,3}{0,7} + \frac{0,6}{0,4}} \times 35 m^2 = 62.230 W = -q_{B neta}$$

c) Temperatura del plano C.

$$q_{A(neta)} = \frac{A (E_{bA} - E_{bC})}{\frac{A}{A} + \frac{1}{F_{AC}} + \frac{C}{C}} = \frac{35 m^2 \times (11.631,7 - E_{bC}) \frac{W}{m^2}}{\frac{0,2}{0,8} + \frac{1}{0,54} + \frac{0,3}{0,7}} = \frac{(11.631,7 - E_{bC}) W}{2,53} = 62.230 W$$

$$\text{Despejando } E_{bC}, \text{ resulta: } E_{bC} = 7133,36 W = T_C^4 \quad T_C = \sqrt[4]{\frac{7133,36}{5,67 \times 10^{-8}}} = 595,5^\circ K = \boxed{322,5^\circ C}$$

VI.37.- Se dispone de dos discos paralelos, con sus centros sobre el mismo eje, separados una distancia de 75 mm. El disco (1) tiene un diámetro de 75 mm y está a $200^\circ C$, y el disco (2) tiene un diámetro de 50 mm y se encuentra a una temperatura de $90^\circ C$.

Determinar,

A) El intercambio térmico entre las superficies

B) La energía a aplicar a cada superficie para mantener su temperatura

C) La temperatura del medio exterior

en los siguientes supuestos:

a) Los dos discos se comportan como superficies negras (el medio que los separa es transparente a la radiación)

b) Los dos discos se comportan como superficies negras (el medio que los separa es rerradiante)

c) Los dos discos se comportan como cuerpos grises de: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,7$, y están introducidos en un medio rerradiante.

RESOLUCION

$$X = \frac{a}{C} = \frac{25}{75} = 0,33 \quad ; \quad Y = \frac{c}{b} = \frac{75}{37,5} = 2 \quad ; \quad Z = 1 + (1 + X^2) Y^2 = 1 + (1 + 0,33^2) 2^2 = 5,44$$

$$F_{A_1 \rightarrow A_2} = \frac{Z - \sqrt{Z^2 - 4 X^2 Y^2}}{2} = \frac{5,44 - \sqrt{5,44^2 - (4 \times 0,33^2 \times 2^2)}}{2} = 0,0812$$

Aa) Intercambio térmico entre los dos discos si se comportan como superficies negras (el medio que los separa es transparente a la radiación)

$$q_{12} = A_1 F_{12} (E_{B1} - E_{B2}) = \frac{\pi \times 0,075^2}{4} \times 0,08 \times 5,67 \times 10^{-8} \times [(200 + 273)^4 - (90 + 273)^4] =$$

$$q_{12} = 0,655 \text{ W} = -q_{21}$$

Ba) Energía a aplicar a cada superficie para mantener su temperatura, si los dos discos se comportan como superficies negras (el medio que las separa es transparente a la radiación)

$$q_{1(\text{neta})} = A_1 (T_1^4 - F_{12} T_2^4) = \frac{\pi \times 0,075^2}{4} \times 5,67 \times 10^{-8} \times [(473)^4 - (0,08 \times 363^4)] = 12,19 \text{ W}$$

$$q_{2(\text{neta})} = A_2 (T_2^4 - F_{21} T_1^4) = \left| F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{75^2}{50^2} \times 0,08 = 0,18 \right| =$$

$$= \frac{\pi \times 0,05^2}{4} \times 5,67 \times 10^{-8} \times [(363)^4 - (0,18 \times 473^4)] = 0,93 \text{ W}$$

Ca) Temperatura del medio exterior si los dos discos se comportan como superficies negras (el medio que las separa es transparente a la radiación)

$$T_{\text{ext}} = 0^\circ\text{K}$$

Ab) Intercambio térmico entre los dos discos si se comportan como superficies negras (el medio que los separa es rerradiante)

$$q_{12}^* = A_1 F_{12}^* (E_{B1} - E_{B2}) = \left| \begin{aligned} F_{12}^* &= A_2 - A_2 F_{12}^2 = \\ &= \frac{(1,963 \times 10^{-3}) - (4,418 \times 10^{-3} \times 0,08^2)}{(4,418 \times 10^{-3}) + (1,963 \times 10^{-3}) - (2 \times 4,418 \times 10^{-3} \times 0,08)} = 0,341 \\ &= 4,418 \times 10^{-3} \times 0,341 \times (473^4 - 363^4) = 2,79 \text{ W} \end{aligned} \right| =$$

Bb) Energía a aplicar a cada superficie para mantener su temperatura, si los dos discos se comportan como superficies negras, (el medio que las separa es rerradiante)

$$q_{1(\text{neta})}^* = q_{12}^*$$

Cb) Temperatura del medio exterior si los dos discos se comportan como superficies negras (el medio que las separa es rerradiante)

$$T_{\text{medio exterior}} = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 A_1 F_{1R} + T_2^4 A_2 F_{2R}}{A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R}}} = \left| \begin{aligned} F_{11} + F_{12} + F_{1R} &= 1 \quad ; \quad F_{1R} = 0,92 \\ F_{21} + F_{22} + F_{2R} &= 1 \quad ; \quad F_{2R} = 0,82 \end{aligned} \right| =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{(473^4 \times 4,418 \times 10^{-3} \times 0,921) + (363^4 \times 1,963 \times 10^{-3} \times 0,82)}{(4,418 \times 10^{-3} \times 0,921) + (1,963 \times 10^{-3} \times 0,82)}} = 449,4^\circ\text{K} = 176,4^\circ\text{C}$$

Ac) Intercambio térmico entre los dos discos si se comportan como cuerpos grises de, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,7$, y están introducidos en un medio rerradiante.

$$q_{12} = q_{1(\text{neta})} = -q_{2(\text{neta})}$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}^*} + \frac{2}{\epsilon_2 A_2}} = \frac{(473^4 - 363^4)}{\frac{0,3}{0,7 \times 4,418 \times 10^{-3}} + \frac{1}{4,418 \times 10^{-3} \times 0,341} + \frac{0,3}{0,7 \times 1,963 \times 10^{-3}}} = 1,893 \text{ W}$$

Bc) Energía a aplicar a cada superficie para mantener su temperatura, si los dos discos se comportan como superficies grises $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,7$ (el medio que las separa es rerradiante)

$$q_{12} = q_{1(\text{neta})} = -q_{2(\text{neta})}$$

$$q_{12} = \frac{(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}^*} + \frac{2}{\epsilon_2 A_2}} = \frac{(473^4 - 363^4)}{\frac{0,3}{0,7 \times 4,418 \times 10^{-3}} + \frac{1}{4,418 \times 10^{-3} \times 0,341} + \frac{0,3}{0,7 \times 1,963 \times 10^{-3}}} = 1,893 \text{ W}$$

Cc) Temperatura del medio exterior si los dos discos se comportan como superficies grises $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,7$ (el medio que las separa es rerradiante)

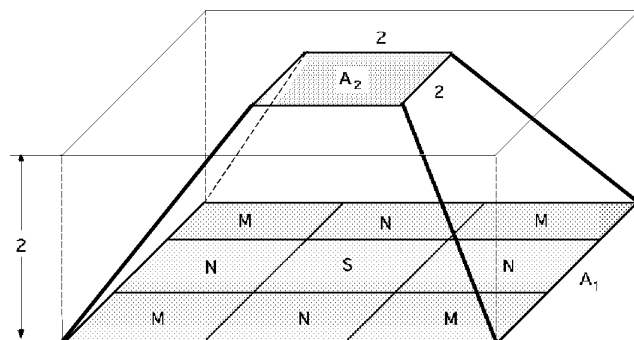
$$T_{\text{medio exterior}} = \sqrt[4]{\frac{J_1 A_1 F_{1R} + J_2 A_2 F_{2R}}{(A_1 F_{1R} + A_2 F_{2R})}}$$

$$q_{1(\text{neta})} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{\epsilon_1 A_1}} ; J_1 = -q_{1(\text{neta})} \frac{1}{\epsilon_1 A_1} + E_{b1} = \frac{-1,893 \times 0,3}{0,7 \times 4,418 \times 10^{-3}} + (\times 473^4) = 2654,5 \text{ W}$$

$$q_{2(\text{neta})} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{\epsilon_2 A_2}} ; J_2 = q_{2(\text{neta})} \frac{2}{\epsilon_2 A_2} + E_{b2} = \frac{1,893 \times 0,3}{0,7 \times 1,963 \times 10^{-3}} + (\times 363^4) = 1397,7 \text{ W}$$

$$T_{\text{medio ext}} = \sqrt[4]{\frac{(2654,5 \times 4,418 \times 10^{-3} \times 0,92) + (1397,7 \times 1,963 \times 10^{-3} \times 0,82)}{[(4,418 \times 10^{-3} \times 0,92) + (1,963 \times 10^{-3} \times 0,82)]}} = 448,68^\circ\text{K} = \boxed{175,68^\circ\text{C}}$$

VI.38.- En la configuración de tres superficies grises que se presenta en forma de tronco de pirámide, {bases (1) y (2) y superficies laterales (3)}, las emisividades correspondientes son:



Base inferior: $\epsilon_1 = 0,6$

Base superior: $\epsilon_2 = 0,4$

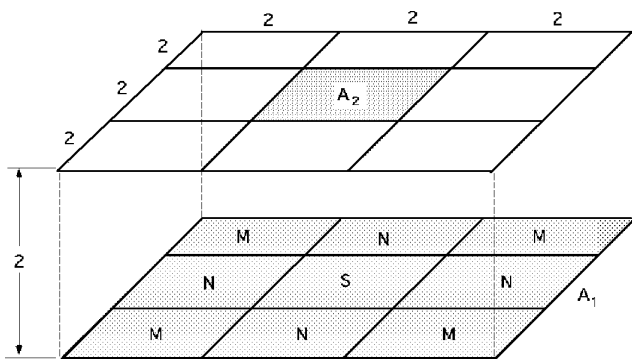
Determinar

a) El factor de forma F_{A1-A2}

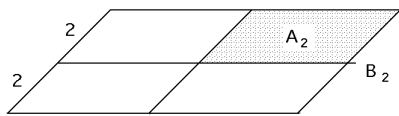
b) La temperatura de las superficies A_1 y A_3 si el flujo neto de calor de la superficie A_1 es de 2500 Kcal/h.m², las superficies laterales A_3 están perfectamente aisladas y la superficie A_2 se encuentra a 300°C.

RESOLUCION

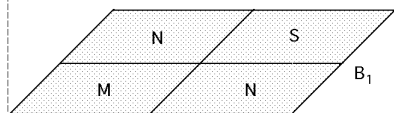
a) Factor de forma F_{A1-A2}



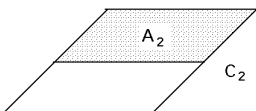
$$A_1 F_{12} = S F_{S-A_2} + 4 M F_{M-A_2} + 4 N F_{N-A_2}$$



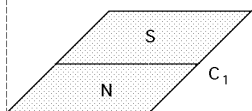
$$\begin{aligned} B_1 F_{B_1-B_2} &= \\ &= M F_{M-A_2} + 2 N F_{N-A_2} + S F_{S-A_2} + (\text{se repite otras 3 veces}) = \\ &= 4 M F_{M-A_2} + 8 N F_{N-A_2} + 4 S F_{S-A_2} \end{aligned}$$



$$4 M F_{M-A_2} = B_1 F_{B_1-B_2} - 8 N F_{N-A_2} - 4 S F_{S-A_2}$$



$$C_1 F_{C_1-C_2} = 2 N F_{N-A_2} + 2 S F_{S-A_2}$$



$$2 N F_{N-A_2} = C_1 F_{C_1-C_2} - 2 S F_{S-A_2}$$

$$A_1 F_{12} = S F_{S-A_2} + 4 M F_{M-A_2} + 4 N F_{N-A_2} =$$

$$= S F_{S-A_2} + B_1 F_{B_1-B_2} - 8 N F_{N-A_2} - 4 S F_{S-A_2} + 4 M F_{N-A_2} =$$

$$= -3 S F_{S-A_2} + B_1 F_{B_1-B_2} - 4 N F_{N-A_2} = -3 S F_{S-A_2} + B_1 F_{B_1-B_2} - 2 C_1 F_{C_1-C_2} + 4 S F_{S-A_2} =$$

$$= S F_{S-A_2} + B_1 F_{B_1-B_2} - 2 C_1 F_{C_1-C_2}$$

$$F_{S-A_2} = 0,2$$

$$F_{B_1-B_2} = 0,43$$

$$F_{C_1-C_2} = 0,32$$

$$F_{A_1-A_2} = \frac{S F_{S-A_2} + B_1 F_{B_1-B_2} - 2 C_1 F_{C_1-C_2}}{A_1} = \frac{(4 \times 0,2) + (16 \times 0,43) - (2 \times 8 \times 0,32)}{36} = 0,0711$$

Otros factores de forma:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad ; \quad \left| \begin{array}{l} F_{11} = 0 \\ F_{12} = 0,071 \\ F_{13} = 1 - 0,071 = 0,929 \end{array} \right|$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 \quad ; \quad \left| \begin{array}{l} F_{22} = 0 \\ F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{36}{4} \times 0,071 = 0,639 \\ F_{23} = 1 - 0,639 = 0,361 \end{array} \right|$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 \quad ; \quad \left| \begin{array}{l} F_{31} = \frac{A_1}{A_3} F_{13} = \frac{36}{32\sqrt{2}} \times 0,929 = 0,739 \\ F_{32} = \frac{A_2}{A_3} F_{23} = \frac{4}{32\sqrt{2}} \times 0,361 = 0,032 \\ F_{33} = 1 - F_{31} - F_{32} = 1 - 0,739 - 0,032 = 0,229 \end{array} \right|$$

	1	2	3
1	0	0,071	0,929
2	0,639	0	0,361
3	0,739	0,032	0,229

b) Temperatura de las superficies A_1 y A_3 si el flujo neto de calor de la superficie A_1 es de 2500 Kcal/h.m², las superficies laterales A_3 están perfectamente aisladas y la superficie A_2 se encuentra a 300°C.

$$\begin{bmatrix} (1 - F_{11}) & -F_{12} & -F_{13} \\ -F_{21} & (1 - F_{22} + \frac{2}{2}) & -F_{23} \\ -F_{31} & -F_{32} & (1 - F_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_{1(neta)}}{A_1} \\ \frac{2 E_{b2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{q_{1(neta)}}{A_1} = 2500 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2} = \frac{2500}{3600} \frac{\text{Kcal}}{\text{seg.m}^2} \times 427 \frac{\text{Kgm}}{\text{Kcal}} \times \frac{1}{102} \frac{\text{kW}}{\frac{\text{Kgm}}{\text{seg}}} = 2,907 \text{ kW} = 2907 \text{ W}$$

$$\frac{2 E_{b2}}{2} = \frac{0,4}{0,6} \times 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} (300 + 273)^4 \text{ K}^4 = 4075 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$q_{3(neta)} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,071 & -0,929 \\ -0,639 & (1 + \frac{0,4}{0,6}) & -0,361 \\ -0,739 & -0,032 & (1 - 0,229) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2907 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ 4075 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{array}{l} J_1 = 71625,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ J_2 = 45091,6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ J_3 = 70524,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{array}}$$

$$2907 = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{1}} = \frac{E_{b1} - 71625,7}{\frac{0,4}{0,6}} \quad ; \quad T_1^4 = 73563,7$$

$$\boxed{T_1} = \sqrt[4]{\frac{73563,7}{5,67 \times 10^{-8}}} = 1067,25^\circ\text{K} = \boxed{794,25^\circ\text{C}}$$

Superficie A_3 (refractaria): $J_3 = E_{b3} = 70524,3 \text{ W/m}^2$

$$\boxed{T_3} = \sqrt[4]{\frac{70524,3}{5,67 \times 10^{-8}}} = 1056,06^\circ\text{K} = \boxed{783,06^\circ\text{C}}$$

VI.39.- Dos placas grises anchas, opacas, paralelas e iguales tienen las siguientes características:

$$_1 = 0,2, T_1 = 400^\circ\text{K}, \quad _2 = 0,6, T_2 = 800^\circ\text{K}$$

y están separados por un gas gris $_g = 0,1$.

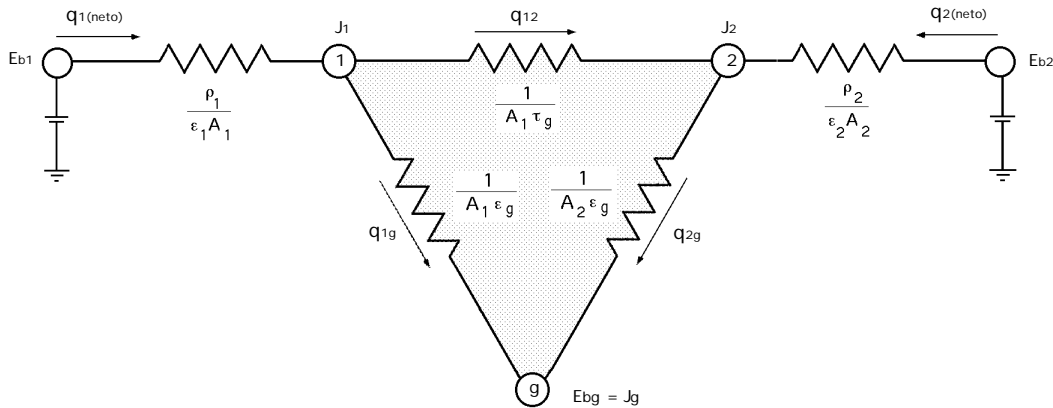
Determinar:

- La energía que hay que aplicar a la superficie (1) para mantener constante su temperatura
- La energía intercambiada entre las dos superficies opacas cuando el gas está presente.
- La temperatura del gas

d) La energía que habría que aplicar a la superficie (1) para mantener constante su temperatura, si el gas gris se reemplaza por otro transparente a la radiación

RESOLUCION

a) Energía a aplicar a la superficie (1) para mantener constante su temperatura



$$\frac{q_{1(neta)}}{A_1} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{1+g}} = \left| \begin{array}{l} E_{b1} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} (400 + 273)^4 K^4 = 11631,7 \frac{W}{m^2} \\ E_{b2} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} (800 + 273)^4 K^4 = 75159,16 \frac{W}{m^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{11631,7 - 75159,16}{\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,6} - \frac{2}{1+0,9}} = -11107 \frac{W}{m^2}$$

que dice que la superficie (1) tiene que enfriarse para mantener su temperatura a 400°C.

b) La energía intercambiada entre las dos superficies opacas cuando el gas está presente.

$$q_{1(neta)} = -q_{2(neta)} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{1}} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{2}}$$

$$-11107 \frac{W}{m^2} = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1}{1}} = \frac{11631,7 - J_1}{0,8} \quad J_1 = 56059,7 \frac{W}{m^2}$$

$$-11107 \frac{W}{m^2} = \frac{J_2 - E_{b2}}{\frac{2}{2}} = \frac{J_2 - 75159,16}{0,4} \quad J_2 = 67755 \frac{W}{m^2}$$

$$q_{12} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{gas}} = \frac{56059,7 - 67755}{0,9} = -10525 \frac{W}{m^2}$$

c) La temperatura del gas

$$q_{1(neta)} = q_{12} + \frac{J_1 - E_{b(gas)}}{\frac{1}{gas}}$$

$$-11107 = -10525 + \frac{56059,7 - 5,67 \times 10^{-8} T_{gas}^4}{0,1}$$

$T_{gas} = 1022^\circ K = 749^\circ C$

d) La energía que habría que aplicar a la superficie (1) para mantener constante su temperatura, si el gas gris se reemplaza por otro transparente a la radiación

$$q_{1(\text{neta})} = q_{12} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{1 + \frac{1}{1} + \frac{2}{2}} = \frac{11631,7 - 75159,16}{1 + 0,2 + \frac{0,4}{0,6}} = -11210,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ingeniería Energética

Recursos de Ingeniería Térmica



[Índice](#)

El índice completo del libro sobre ingeniería térmica



[Tablas](#)

Conjunto de tablas necesarias para la resolución de los problemas y que sirven como complemento al libro



[Bibliografía](#)

Otros libros donde puede encontrarse información adicional

[Principal](#) - [Ingeniería Térmica](#) - Recursos

INDICE

I- PRINCIPIOS BASICOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Introducción	1
Transmisión de calor por conducción	2
Pared plana	3
Paredes planas en serie	4
Analogía eléctrica de la conducción	4
Paredes en paralelo	5
Resistencia de contacto	6
Conductividad térmica	7
Coeficientes de conductividad térmica para las aleaciones	8
Conductividad térmica en líquidos	9
Conductividad térmica de gases y vapores	10
Transmisión de calor por convección	11
Transmisión de calor por radiación	16
Mecanismos combinados de transmisión de calor	18

II- CONDUCCION DE CALOR EN REGIMEN ESTACIONARIO (I)

Introducción	21
Ecuación fundamental de la transmisión de calor por conducción	22
Conducción en un cilindro sin generación de energía	24
Espesor de aislamiento crítico para un cilindro; número de Biot	26
Pared esférica sin generación de energía	28
Conducción monodimensional en régimen estacionario con generación de energía	30
Pared plana	30
Placa plana rodeada por un fluido convectivo	32
Pared cilíndrica	33
Pared cilíndrica rodeada con una vaina	34

III- CONDUCCION DE CALOR EN REGIMEN ESTACIONARIO (II)

Conducción de calor en función de dos o más variables independientes.- Método analítico	39
Conducción en régimen permanente en placas rectangulares	39
Placa rectangular con una distribución de temperatura dada en una arista y nula en las demás	41
Placa con un borde a temperatura uniforme	44
Placa rectangular con distribución de la temperatura en dos bordes opuestos	45
Distribución de temperaturas en más de una superficie de contorno	46
Condición de contorno de convección	47
Conducción en un cilindro circular de longitud finita	48
Tablas de Funciones de Bessel	51
Distribución de temperaturas en secciones rectangulares	53
Distribución de temperaturas en paralelepípedos	56
Distribución de temperaturas en cilindros	57
Distribución de temperaturas en tubos	59
Método gráfico	61

Factor de forma para la conducción para diferentes geometrías	62
Métodos numéricos	64
Método de relajación	67
Ecuaciones para los residuos en el caso de nudos en los límites	68
Método matricial	69
Técnicas de iteración	71

IV- CONDICION DE CONTORNO DE CONVECCION EN SOLIDOS INFINITOS

Introducción	73
Conducción transitoria en placa infinita	76
Conducción transitoria en un cilindro	81
Conducción transitoria en una esfera	85
Conducción transitoria en 2 y 3 dimensiones	89
Transmisión de calor por conducción en régimen transitorio con generación de calor E	90

V- CONDICION DE CONTORNO ISOTERMICA EN SOLIDOS INFINITOS

Conducción transitoria en placa infinita con condición de contorno isotérmica	97
Conducción transitoria en pared cilíndrica infinita con condición de contorno isotérmica	103
Conducción transitoria en una esfera con condición de contorno isotérmica	107
Transmisión de calor por conducción en régimen transitorio con generación de calor E	109

VI- CONDUCCION DE CALOR TRANSITORIA EN SOLIDOS SEMIINFINITOS

Conducción transitoria en un sólido semiinfinito	111
Condición de contorno isotérmica en sólido semiinfinito	112
Condición de contorno de convección en sólido semiinfinito	115
Sólido semiinfinito sometido a un flujo térmico uniforme en su superficie	117
Sólido semiinfinito sometido a un pulso de energía en su superficie	118
Contacto entre sólidos semiinfinitos	118
Sólido semiinfinito sometido a una variación periódica de su temperatura superficial	119
Conducción transitoria en un sólido con resistencia térmica despreciable	123
Pared que se calienta por una cara y se mantiene en contacto con un fluido por la otra	125

VII.- CONDUCCION TRANSITORIA DEL CALOR EN SOLIDOS FINITOS

Conducción transitoria bidimensional y tridimensional	127
Sistemas bidimensionales	131
Sistemas tridimensionales	132
Calor disipado	132
Conducción transitoria en 2 y 3 dimensiones (c.c. isotérmica)	133
Conducción transitoria en 2 y 3 dimensiones (c.c. convección)	133
Transmisión de calor por conducción en régimen transitorio con generación de calor E	136

VIII- CONDUCCION TRANSITORIA DEL CALOR EN SOLIDOS FINITOS. METODO GRAFICO

Soluciones numéricas a problemas de conducción monodimensionales en régimen transitorio	141
Nudos interiores	141
Nudos periféricos	144
Ecuaciones térmicas de los nudos y condiciones de estabilidad	146
Aplicación del método gráfico a paredes compuestas	147
Resolución gráfica con choque térmico	149
Resolución gráfica con convección en la superficie	150

IX.- SUPERFICIES AMPLIADAS DE SECCION TRANSVERSAL CONSTANTE

Introducción	153
--------------	-----

Transferencia de calor mediante aletas de sección transversal constante	154
Aleta muy larga	156
Aleta con su extremo libre aislado térmicamente	157
Aleta con convección desde su extremo libre	158
Aleta entre dos paredes a temperaturas diferentes	159
Campo de aplicación de las aletas rectas de sección uniforme	160
Perfil óptimo	161

X- SUPERFICIES AMPLIADAS DE SECCION TRANSVERSAL VARIABLE

Aletas de sección variable	165
Aleta anular de espesor constante	166
Aleta longitudinal de perfil trapecial	172
Aleta longitudinal de perfil triangular	173
Perfil óptimo de la aleta longitudinal de perfil triangular	174
Rendimiento de la aleta; casos particulares	174
Aletas longitudinales de perfil parabólico	174
Protuberancias	178
Coeficiente global de transmisión de calor con aletas, para el aire	180

XI.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION. CAPA LIMITE TERMICA E HIDRODINÁMICA

Introducción	183
Ecuación diferencial de la transmisión de calor en un medio en movimiento	185
Capa límite laminar en flujo sobre placa plana: polinomios de grado 2 y 3	188
Espesores y caudales de la capa límite	191
Espesor de desplazamiento de la capa límite	191
Espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite	192
Espesor de energía de la capa límite	193
Caudal de la capa límite	193
Caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite	193
Ecuación integral del impulso de la capa límite laminar	194
Caudal de la cantidad de movimiento	194
Fuerza de arrastre.- Casos particulares con perfiles de segundo y tercer grado	195
Ecuaciones de Prandtl de la capa límite	197
Ecuación clásica de Kàrmàn	198
Ecuación integral de la energía de la capa límite.- Casos particulares	199
Relación entre el coeficiente de arrastre y el de convección en flujo laminar sobre placa plana	204
Capa límite turbulenta para placa plana	205
Desprendimiento de la capa límite	207
Tabla de coeficientes de arrastre de algunos cuerpos y perfiles inmersos en una corriente fluida	207

XII.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION EN CONDUCTOS

Flujo en conductos circulares; flujo isotérmico; Ec. de Poiseuille	211
Flujo en conductos no circulares	214
Fluidos que circulan por tuberías en convección forzada en régimen laminar con flujo de calor constante	216

XIII.- TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCION. ANALOGÍAS Y ANALISIS DIMENSIONAL

Analogía entre la transmisión de calor y la cantidad de movimiento en flujo turbulento	217
Capa límite térmica sobre placa plana. Conductividad térmica. Cantidad de movimiento	217

Expresión general de la relación básica de la analogía entre el calor y la cantidad de movimiento	219
Analogía de Reynolds	220
Analogía de Prandtl	222
Analogía de Von Karman	224
Diagrama de Moody	225
Analogía de Colburn	226
Análisis dimensional. Teorema de Buckingham	227
Ecuación general de resistencia	229
Ecuación general de la pérdida de carga en una conducción cilíndrica	230
El método básico de análisis dimensional	230

XIV.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCION NATURAL

Correlaciones analíticas para la convección natural en placa plana vertical	237
Solución integral en pared isotérmica	239
Placa con flujo de calor constante	241
Correlaciones para la convección natural en placas	241
Convección natural, sobre placa vertical	242
Convección natural sobre placa vertical a temperatura uniforme	242
Convección natural sobre placa vertical con flujo de calor constante	244
Convección natural sobre placa inclinada	245
Convección natural en placa horizontal	245
Convección natural entre placas horizontales	246
Convección natural entre placas verticales	247
Convección natural entre placas inclinadas	248
Correlaciones para la convección natural en tubos	249
Convección natural sobre un tubo o un cilindro horizontal	249
Convección natural entre cilindros concéntricos	250

XV.- CORRELACIONES PARA LA CONVECCION FORZADA

Correlaciones para la convección forzada en placas	253
Flujo laminar sobre placa plana horizontal	253
Flujo laminar totalmente desarrollado entre placas planas paralelas	253
Flujo turbulento sobre placa plana horizontal	254
Correlaciones para la convección forzada en el interior de tuberías	255
Flujo laminar por el interior de tuberías	255
Flujo turbulento desarrollado por el interior de tuberías	256
Flujo turbulento no desarrollado por el interior de tuberías	260
Flujo turbulento de metales líquidos por el interior de tuberías	261
Flujo turbulento por un serpentín tubular	261
Correlaciones para la convección forzada por el exterior de tuberías	262
Flujo paralelo turbulento por el exterior de un tubo	262
Flujo paralelo turbulento por el exterior de tubos en batería	262
Correlaciones para la convección en esferas	263
Convección natural y forzada combinadas	264
Correlaciones para la convección en flujos cruzados	265
Flujo cruzado en tubo único liso	265
Flujo cruzado en tubos en batería	267
Correlaciones para la convección a través de un lecho compacto	273
Correlaciones para la convección en superficies giratorias	274

XVI.- CONDENSACION Y VAPORIZACION

Transferencia de calor por condensación	277
---	-----

Condensación en forma de película	277
Condensación en película laminar sobre placas y tubos verticales	281
Condensación en película laminar sobre placas y tubos inclinados	284
Condensación en película laminar sobre un tubo horizontal	284
Condensación en régimen turbulento	285
Efecto de la velocidad del vapor en placas y tubos verticales	286
Condensación en régimen turbulento en el interior de tubos horizontales	287
Condensación en forma de gotas	288
Transferencia de calor por ebullición de líquidos en reposo	288
Evaporación en película descendente sobre una pared vertical	288
Ebullición nucleada en recipientes con un líquido en reposo	289
Ebullición en la superficie exterior de un hilo horizontal caliente sumergido en un líquido	292
Ebullición de líquidos en flujo forzado en el interior de tubos horizontales	294
Ebullición de líquidos en flujo forzado en el interior de tubos verticales	295
Gradiente de presión en el interior de tubos verticales	298
Formulación para la evaporación en tubos verticales	299

XVII.- INTERCAMBIADORES DE CALOR: METODO DE LA (LMTD)

Introducción	303
Tipos básicos de intercambiadores de calor	303
Intercambiadores de paso simple 1-1	304
Intercambiador de corrientes paralelas en contracorriente 1-2	307
Intercambiador 2-4	309
Intercambiador de flujos cruzados	310
Coefficiente U de transferencia térmica global	311
Factor de suciedad	312
Transmisión de calor entre fluidos en movimiento, a temperaturas variables, a través de una pared	314
Temperatura media logarítmica (LMTD)	316
Factores de corrección de la (LMTD)	316
Factores de corrección de la (LMTD), para diversas configuraciones de intercambiadores	319

XVIII- INTERCAMBIADORES DE CALOR: METODO DE LA EFICIENCIA

Eficacia de los intercambiadores de calor	323
Flujos paralelos en equicorriente	325
Flujos paralelos en contracorriente	327
Valores de la eficiencia térmica para diversas configuraciones de intercambiadores	330
Intercambiadores de calor compactos	332

XIX- RADIACION TERMICA: FUNDAMENTOS

Introducción	343
Física de la radiación	344
Concepto de cuerpo negro	344
Ley de Planck	344
Ley del desplazamiento de Wien	345
Ley de Stefan-Boltzman	346
Funciones de radiación	346
Transmisión de calor por radiación	348
Factor de forma de la radiación	349
Factor de forma para dos superficies infinitesimales	349

Factor de forma para una superficie finita y otra infinitesimal	351
Factor de forma para dos superficies finitas	352
Propiedades de los factores de forma	352
Álgebra de factores de forma.- Casos particulares	354
Eliminación de superficies cóncavas	356
Factores de visión para superficies convexas generadas a lo largo de una recta	357
Método de las cuerdas cruzadas	359
Gráficas para la determinación de factores de forma	360

XX- RADIACION TERMICA: INTERCAMBIOS RADIATIVOS

Intercambio radiativo entre superficies negras	367
Intercambio radiativo entre dos superficies negras y una reflectaria	370
Superficies reflectarias	370
Cálculo de la temperatura de la superficie reflectaria	371
Factor de forma general.- Casos particulares	371
Intercambio radiativo entre superficies grises	373
Superficies reflectarias	375
Recinto formado por dos superficies grises.- Casos particulares	376
Recinto formado por dos superficies grises y una o varias pantallas de radiación	377
Recinto formado por tres superficies grises, dos opacas y una reflectaria	381
Técnicas matriciales	382
Superficies con temperaturas conocidas	382
Superficies con flujo neto de calor conocido	385

XXI- RADIACION TERMICA EN GASES

Radiación a través de un medio transmisor y absorbente	389
Superficies infinitas	389
Superficies finitas	392
Propiedades radiativas de los gases	394
Determinación práctica de la emisividad de algunos gases y vapores	400
Radiación de nubes de partículas	402
Llamas luminosas	404
Llamas de carbón pulverizado	405
Cálculos en hornos y hogares	406
Medida de temperaturas	408

TABLAS de propiedades térmicas de sólidos, líquidos, gases y vapores	411
--	-----

BIBLIOGRAFÍA	441
--------------	-----

INDICE	443
--------	-----

1.- GRUPOS ADIMENSIONALES UTILIZADOS EN LA TRANSFERENCIA DE CALOR

$$1) \text{ N}^\circ \text{ de BIOT: } Bi = \frac{h_c L}{k}$$

Es el cociente entre la resistencia térmica del sólido y la resistencia térmica del fluido.

$$2) \text{ N}^\circ \text{ de FOURIER: } Fo = \frac{t}{L^2}$$

Es el cociente entre la conducción del calor y el calor almacenado
Se utiliza en problemas de transferencia de calor transitorios

$$3) \text{ N}^\circ \text{ de GRAETZ: } Gz = Re \, Pr \left(\frac{d}{L} \right) = \frac{u d^2 c_p}{k L}$$

Se utiliza en problemas de convección forzada.

$$4) \text{ N}^\circ \text{ de GRASHOF: } Gr = \frac{g T L^3}{2}$$

Es el cociente entre las fuerzas de flotación y las fuerzas de viscosidad.

$$5) \text{ N}^\circ \text{ de LEWIS: } Le = \text{—}$$

Es el cociente entre la difusividad térmica y la difusividad molecular
Se utiliza en problemas de transferencia de masa.

$$6) \text{ N}^\circ \text{ de NUSSELT: } Nu = \frac{h_c L}{k}$$

Es el coeficiente básico de la transferencia de calor por convección.

$$7) \text{ N}^\circ \text{ de PECLET: } Pe = Re \, Pr = \frac{u L c_p}{k}$$

Es el cociente entre la transferencia de calor por convección y por conducción
Se utiliza en problemas de convección forzada.

$$8) \text{ N}^\circ \text{ de PRANDTL: } Pr = \text{—} = \frac{c_p}{k}$$

Es el cociente entre el impulso y la difusividad térmica.

$$9) \text{ N}^\circ \text{ de RAYLEIGH: } Ra = Gr \, Pr = \frac{g T L^3}{k}$$

Se utiliza en problemas de convección libre

$$10) \text{ N}^\circ \text{ de REYNOLDS: } Re = \frac{u L}{\mu}$$

Es el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad.

$$11) \text{ N}^\circ \text{ de SCHMIDT: } Sc = \text{—}$$

Es el cociente entre el impulso y la difusión de masa.

$$12) \text{ N}^\circ \text{ de SHERWOOD: } Sh = \frac{k L}{D}$$

Es el cociente entre la difusividad de masa y la difusividad molecular.

$$13) \text{ N}^\circ \text{ de STANTON: } St = \frac{Nu}{Re \, Pr} = \frac{h_c}{c_p u}$$

Es el cociente entre el calor transferido en la superficie y el transportado por el fluido.

$$14) \text{ N}^\circ \text{ de JAKOB: } Ja_l = \frac{c_{pl} (T_{sat} - T_{pared})}{r_{l-v}}$$

Es el cociente entre el calor sensible del líquido sobrecalentado y el calor latente del cambio de estado

2.- EMISIVIDADES NORMALES

METALES	Estado superficie	Temperatura (°C)	Emisividad	NO METALES	Estado superficie	Temperatura (°C)	Emisividad
Aluminio	placa pulida	25	0,040	Amianto	en cartón	37	0,960
Aluminio	placa pulida	200-600	0,038-0,06	Amianto	en papel	37	0,930
Aluminio	oxidado	100-500	0,20-0,33	Ladrillo	magnesita refractar	1000	0,380
Aluminio	placa mate	25	0,070	Ladrillo	rojo, rugoso	20	0,930
Antimonio	pulido	37-260	0,28-0,31	Ladrillo	gris, satinado	1100	0,750
Latón	oxidado	200-500	0,600	Ladrillo	sílice	540	0,800
Latón	pulido	20-300	0,05-0,032	Carbón,	filamento	1050-1400	0,526
Latón	placa usada	50-350	0,220	Carbón,	carbonilla bujías	95-270	0,953
Latón	mate	50	0,202	Carbón,	negro de humo	20	0,930
Cromo	pulido	37-1100	0,058	Cerámica	alfarería, satinado	20	0,900
Cobre	negro oxidado	37	0,780	Cerámica	porcelana	22	0,920
Cobre	ligeramente mate	25	0,037	Cerámica	refractaria, negra	93	0,940
Cobre	pulido	37-260	0,04-0,05	Arcilla	caldeada	70	91
Cobre	pulido electrolítico	80	0,018	Hormigón	rugoso	37	0,94
Oro	no pulido	20	0,470	Vidrio	liso	22	0,940
Oro	pulido	37-260	0,020	Vidrio	Pyrex, plomo, sosa	260-530	0,95-0,85
Hierro	oxidado	100	0,740	Hielo	liso	0	0,966
Hierro	esmerilado	20	0,240	Hielo	rugoso	0	0,985
Hierro	pulido	425-1025	0,14-0,38	Mármol	grano fino pulido	22	0,93
Hierro	pulido electrolítico	175-225	0,052-0,064	Mica		37	0,75
Hierro	todo oxidado	20	0,69	Mampostería	emplastecida	0	0,930
Hierro	laminado	925-1100	0,87-0,95	Papel	ordinario	20	0,8-0,9
Fundición	mecanizada	22	0,44	Papel	amianto	20	0,950
Fundición	oxidada a 600°C	200-600	0,64-0,78	Papel	alquitranado	20	0,910
Plomo	oxidado a 200°C	200	0,63	Papel	ordinario	95	0,920
Plomo	oxidado gris	23	0,280	Yeso blanco	rugosa	20	0,930
Plomo	pulido	130-260	0,08-0,056	Porcelana	vidriada	20	0,930
Magnesio	pulido	37-260	0,07-0,13	Cuarzo fundido	rugoso	20	0,930
Magnesio	oxidado	275-825	0,55-0,2	Goma blanda	gris	25	0,860
Molibdeno	para filamentos	700-2600	0,10-0,20	Goma dura	negra rugosa	25	0,950
Molibdeno	pulido	150-480	0,02-0,05	Madera de haya	láminas	25	0,935
Monel	pulido	37	0,170	Madera de encina	láminas	25	0,885
Níquel	oxidado a 600°C	260-540	0,37-0,48	Tierra		37	0,950
Níquel	pulido	100-260	0,045-0,07	PINTURAS			
Níquel	electrolítico	37-260	0,04-0,06	Aluminio	bronce de	100	0,300
Platino	electrolítico	260-540	0,06-0,1	Aluminio	esmaltado rugoso	20	0,390
Platino	placa pulida	260-540	0,06-0,1	Aluminio pintado	calentado a 325°C	150-300	0,350
Platino	oxidado a 600°C	260-540	0,07-0,11	Aluminio	Al 10%, laca 22%	100	0,520
Platino	filamento	26-1225	0,04-0,19	Aluminio	Al 26%, laca 27%	100	0,300
Plata	pulida, pura	225-625	0,02-0,03	Laca	blanca	100	0,925
Plata	pulida	37-370	0,02-0,03	Laca	negra mate	80	0,970
Acero	pulido	23	0,160	Aceite	pintura	20	0,89-0,97
Estaño	brillante	225-265	0,02-0,03	Aceite pintura	todos los colores	100	0,92-0,96
Estaño	pulido	37-370	0,070	Baquelita	esmaltada	80	0,935
Tungsteno	para filamentos	3300	0,390	Esmalte	blanco rugoso	20	0,900
Tungsteno	filamento envejecido	25-3300	0,03-0,35	Esmalte	negro brillante	25	0,876
Cinc	oxidado	20	0,250	Pintura al aceite		1-200	0,885
Cinc	pulido	225-325	0,05-0,06	Imprimación minio		20-1100	0,930

3.- ABSORTIVIDAD SOLAR DE SUPERFICIES

METALES	Estado superficial	Absortividad	METALES	Estado superficial	Absortividad
Aluminio	pulido	0,10	Magnesio	pulido	0,19
Aluminio	anodizado	0,14	Magnesio	oxidado	0,55-0,2
Aluminio	en placas	0,15	Níquel	muy pulido	0,15
Bronce	pulido	0,3-0,5	Níquel	pulido	0,36
Bronce	mate	0,4-0,65	Níquel	oxidado	0,79
Cromo	electroplateado	0,41	Platino	brillante	0,31
Cobre	muy pulido	0,18	Plata	muy pulida	0,07
Cobre	decapado	0,25	Plata	pulida	0,13
Cobre	decolorada por exposición	0,64	Acero inoxidable	pulido	0,33
Oro		0,21	Acero inoxidable	decapado	0,52
Hierro	galvanizado pulido	0,34	Tungsteno	muy pulido	0,37
Hierro	galvanizado nuevo	0,64	Cinc	muy pulido	0,34
Hierro	mate, oxidado	0,96	Cinc	pulido	0,55
NO METALES			NO METALES		
Asfalto pavimento		0,85	Hormigón	descolorido	0,65
Asfalto pavimento	libre de polvo	0,93	Hormigón	marrón	0,85
Asfalto pavimento	nuevo	0,93	Hormigón	sucio, oscuro	0,71
Ladrillo	barnizado blanco	0,26	Granito		0,45
Ladrillo	arcilla, barnizado crema	0,36	Grasa		0,75-0,80
Ladrillo	rojo	0,70	Grava		0,29
Ladrillo rojo	satinado oscuro	0,77	Oxido de magnesio		0,15
Mármol	sin pulir	0,47	Pintura aceite	plomo blanco	0,24-0,26
Mármol	blanco	0,44	Pintura aceite	crema clara	0,30
Mármol	con fisuras	0,60	Pintura aceite	verde claro	0,50
Papel aglomerado		0,25	Pintura aluminio		0,55
Papel blanco		0,28	Pintura aceite	gris claro	0,75
Arena		0,76	Pintura aceite negra	sobre hierro galvanizado	
Serrín de madera		0,75	Pizarra	gris plateado	0,79
Nieve	limpia	0,2-0,35	Pizarra	gris azulado	0,85
Hollín, carbón		0,95	Pizarra	gris verdoso	0,88
Oxido de cinc		0,15	Pizarra	gris oscuro	0,90

4.- PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS ELEMENTOS METALICOS

Conductividad térmica "k" (W/m°K), a la temperatura de:								Propiedades a 20°C				
ELEMENTO	200°K	273°K	400°K	600°K	800°K	1000°K	1200°K	Kg/m ³	c _p kJ/Kg°C	k W/m.°K	x 10 ⁶ m ² /seg	T.fusión °K
Aluminio	237,0	236,0	240,0	232,0	220,0			2702	896	236,0	97,5	933
Antimonio	30,2	25,5	21,2	18,2	16,8			6684	208	24,6	17,7	904
Berilio	301,0	218,0	161,0	126,0	107,0	89,0	73,0	1850	1750	205,0	63,3	1550
Bismuto	9,7	8,2						9780	124	7,9	6,5	545
Boro	52,5	31,7	18,7	11,3	8,1	6,3	5,2	2500	1047	28,6	10,9	2573
Cadmio	99,3	97,5	94,7					8650	231	97,0	48,5	594
Cesio	36,8	36,1						1873	230	36,0	83,6	302
Cromo	111,0	94,8	87,3	80,5	71,3	65,3	62,4	7160	440	91,4	29,0	2118
Cobalto	122,0	104,0	84,8					8862	389	100,0	29,0	1765
Cobre	413,0	401,0	392,0	383,0	371,0	357,0	342,0	8933	383	399,0	116,6	1356
Germanio	96,8	66,7	43,2	27,3	19,8	17,4	17,4	5360	61,6			1211
Oro	327,0	318,0	312,0	304,0	292,0	278,0	262,0	19300	129	316,0	126,9	1336
Hafnio	24,4	23,3	22,3	21,3	20,8	20,7	20,9	13280	23,1			2495
Indio	89,7	83,7	74,5					7300	82,2			430
Iridio	153,0	148,0	144,0	138,0	132,0	126,0	120,0	22500	134	147,0	48,8	2716
Hierro	94,0	83,5	69,4	54,7	43,3	32,6	28,2	7870	452	81,1	22,8	1810
Plomo	36,6	35,5	33,8	31,2				11340	129	35,3	24,1	601
Litio	88,1	79,2	72,1					534	3391	77,4	42,7	454
Magnesio	159,0	157,0	153,0	149,0	146,0			1740	1017	156,0	88,2	923
Manganeso	7,2	7,7						7290	486	7,8	2,2	1517
Mercurio	28,9							13546				234
Molibdeno	143,0	139,0	134,0	126,0	118,0	112,0	105,0	10240	251	138,0	53,7	2883
Níquel	106,0	94,0	80,1	65,5	67,4	71,8	76,1	8900	446	91,0	22,9	1726
Niobio	52,6	53,3	55,2	58,2	61,3	64,4	67,5	8570	270	53,6	23,2	2741
Paladio	75,5	75,5	75,5	75,5	75,5	75,5		12020	247	75,5	25,4	1825
Platino	72,4	71,5	71,6	73,0	75,5	78,6	82,6	21450	133	71,4	25,0	2042
Potasio	104,0	104,0	52,0					860	741	103,0	161,6	337
Renio	51,0	48,6	46,1	44,2	44,1	44,6	45,7	21100	137	48,1	16,6	3453
Rodio	154,0	151,0	146,0	136,0	127,0	121,0	115,0	12450	248	150,0	48,6	2233
Rubidio	58,9	58,3						1530	348	58,2	109,3	312
Silicio	264,0	168,0	98,9	61,9	42,2	31,2	25,7	2330	703	153,0	93,4	1685
Plata	403,0	428,0	420,0	405,0	389,0	374,0	358,0	10500	234	427,0	173,8	1234
Sodio	138,0	135,0						971	1206	133,0	113,6	371
Tántalo	57,5	57,4	57,8	58,6	59,4	60,2	61,0	16600	138	57,5	25,1	3269
Estaño	73,3	68,2	62,2					5750	227	67,0	51,3	505
Titanio	24,5	22,4	20,4	19,4	19,7	20,7	22,0	4500	611	22,0	8,0	1953
Tungsteno	197,0	182,0	162,0	139,0	128,0	121,0	115,0	19300	134	179,0	69,2	3653
Uranio	25,1	27,0	29,6	34,0	38,8	43,9	49,0	19070	113	27,4	12,7	1407
Vanadio	31,5	31,3	32,1	34,2	36,3	38,6	41,2	6100	502	31,4	10,3	2192
Cinc	123,0	122,0	116,0	105,0				7140	385	121,0	44,0	693
Circonio	25,2	23,2	21,6	20,7	21,6	23,7	25,7	6570	272	22,8	12,8	2125

5.- PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNAS ALEACIONES

Propiedades a 20°C		Densidad Kg/m³	Calor especif J/kg°K	Conduct. k W/m°K	Difusividad × 10 ⁵ m²/seg	Conductividad térmica en (W/m°C) a la temperatura en °C:								
Aleaciones	Composición					-100	0°C	100	200	300	400	600	800	1000
Duraluminio	94-96% Al; 3-5% Cu	2787	833	164	6,680	126	159	182	194					
Siluminio	87% Al; 1,33% Si	2659	871	164	7,100	119	137	144	152	161				
Alusil	80% Al; 20% Si	2627	854	161	7,172	144	157	168	175	178				
Al-Mg-Si	97% Al; 1% Mg; 1% Si	2707	8922	177	7,311		175	189	204					
Bronce de aluminio	95% Cu; 5% Al	8666	410	83	2,330									
Bronce	75% Cu; 25% Sn	8666	343	26	0,860									
Latón rojo	85% Cu; 9% Sn; 6% Zn	8714	385	61	1,804		59	71						
Latón	70% Cu; 30% Zn	8522	385	111	3,412	88		128	144	147	147			
Plata alemana	62% Cu; 15% Ni; 22% Zn	8618	394	24,9	0,733	19,2		31	40	45	48			
Constantán	60% Cu; 40% Ni	8922	410	22,7	0,612	21		22	26					
Fundición	4% C	7272	420	52	1,702									
Acero al carbono	0,5% C	7833	465	54	1,474		55	52	48	45	42	35	31	29
	1% C	7801	473	43	1,172		43	43	42	40	36	33	29	28
	1,5% C	7753	486	36	0,970		36	36	36	35	33	31	28	28
Acero al cromo	1% Cr	7865	460	61	1,665		62	55	52	47	42	36	33	33
	5% Cr	7833	460	40	1,110		40	38	36	36	33	29	29	29
	20% Cr	7689	460	40	1,11		22	22	22	22	24	24	26	29
Acero al níquel	10% Ni	7945	460	26	0,720									
	20% Ni	7993	460	19	0,526									
	40% Ni	8169	460	10	0,279									
	60% Ni	8378	460	19	0,493									
	80% Ni	8618	0,46	35	0,872									
	Invar 36% Ni	8,137	460	10,7	0,286									
Acero al Cr-Ni	15% Cr; 10% Ni	7865	460	19	0,526									
	15% Cr; 40% Ni	8073	460	11,6	0,305									
	18% Cr; 8% Ni	7817	460	16,3	0,444		16	17	17	19	19	22	27	31
	20% Cr; 15% Ni	7833	460	15,1	0,415									
	25% Cr; 20% Ni	7865	460	12,8	0,361									
	80% Cr; 15% Ni	8522	460	17	0,444									
Acero al manganeso	1% Mn	7865	460	50	1,388									
	5% Mn	7849	460	22	0,637									
Acero al silicio	1% Si	7769	460	42	1,164									
	5% Si	7417	460	19	0,555									
Acero al tungsteno	1% W	7913	448	66	1,858									
	5% W	8073	435	54	1,525									
	10% W	8314	419	48	1,391									
Ni-Cr	90% Ni; 10% Cr	8666	444	17	0,444		17	19	21	23	25			
	80% Ni; 20% Cr	8314	444	12,6	0,343		12	14	16	17	18	23		
Mg-Al; electrol.	Mg; 7 % Al; 1,5% Zn;	1810	1000	66	3,605		52	62	74	83				

6.- PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS MATERIALES

6.- PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS MATERIALES DE CONSTRUCCION Y AISLANTES

MATERIAL	Temperatura °C	Densidad $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Calor específico c_p $\frac{\text{Joules}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	Cond. térmica k $\frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{K}}$	Difusiv. térmica $\times 10^5$ $\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$
Amianto	20	383	816	0,113	0,036
Asfalto	20-55	2120		0,74-0,76	
Baquelita	20	1270		0,233	
Ladrillo común	20	1800	840	0,38-0,52	0,028-0,034
Ladrillo de carborundum (50% SiC)	20	2200		5,820	
Ladrillo de carborundum	600 1400			18,5 11,1	
Ladrillo de magnesita (50% MgO)	20 200 650 1200	2000	1,13	2,680 3,81 2,77 1,9	
Ladrillo de mampostería	20	1700	837	0,658	0,046
Ladrillo de sílice (95% SiO ₂)	20	1900		1,070	
Ladrillo de circonio (62% ZrO ₂)	20	3600		2,440	
Ladrillo al cromo	200 550 900	3000	0,84	2,32 2,47 1,99	0,092 0,098 0,079
Arcilla refractaria, cocida a 1330°C	500 800 1100	2000	0,96	1,04 1,07 1,09	0,054
Arcilla refractaria, cocida a 1450°C	500 800 1100	2300	0,96	1,28 1,37 1,4	0,04
Cartón	20			0,14-0,35	
Cemento (duro)	20			1,047	
Arcilla (48,7% humedad)	20	1545	880	1,260	0,101
Carbón, (antracita)	20	1370	1260	0,238	0,013-0,015
Hormigón (seco)	20	500	837	0,128	0,049
Corcho (tableros)	20	120	1880	0,042	0,015-0,044
Corcho (expandido)	20	120		0,036	
Tierra de diatomeas	20	466	879	0,126	0,031
Tierra arcillosa (28% humedad)	20	1500		1,510	
Tierra arenosa (8% humedad)	20	1500		1,050	
Fibra de vidrio	20	220		0,035	
Vidrio, (ventanas)	20	2800	800	0,810	0,034
Vidrio, (lana de)	20 20	100 200		0,036 0,040	
Granito	20	2750		3,000	
Hielo (0°C)	20	913	1830	2,220	0,124
Linóleo	20	535		0,081	
Mica	20	2900		0,523	
Corteza de pino	20	342		0,080	
Yeso	20	1800		0,814	
Plexiglás	20	1180		0,195	
Madera (chapa)	20	590		0,109	
Poliestireno	20	1050		0,157	
Goma dura (ebonita)	20	1150	2009	0,163	0,006
Goma esponjosa	20	224		0,055	
Arena seca	20			0,582	
Arena húmeda	20	1640		1,130	
Serrín	20	215		0,071	
Madera de roble	20	609-801	2390	0,17-0,21	0,011-0,012
Madera (Pino, abeto, abeto rojo)	20	416-421	2720	0,150	0,012
Láminas de fibra de madera	20	200		0,047	

7.- PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS ACEITES Y GLICERINAS

ACEITE DE MOTOR SIN USAR

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ¹⁰ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ³ (N.seg/m ²)	Visc. cinem. .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	($\frac{g}{2} 10^{-10}$)
0	899,1	1796	0,147	911	3848	4280	47100	
20	888,2	1880	0,145	872	799	900	10400	8475
40	876,1	1964	0,144	834	210	240	2870	
60	864	2047	0,14	800	72,5	83,9	1050	
80	852	2131	0,138	769	32	37,5	490	
100	840	2219	0,137	738	17,1	20,3	276	
120	829	2307	0,135	710	10,3	12,4	175	
140	816,9	2395	0,133	686	6,54	8	116	
160	805,9	2483	0,132	663	4,51	5,6	84	

ACEITE DE TRANSFORMADORES

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ¹⁰ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ³ (N.seg/m ²)	Visc. cinem. .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
-50	922	1,7	0,116	742	29320	31800	428600
-40	916	1,68	0,116	750	3866	4220	56300
-30	910	1,65	0,115	764	1183	1300	17000
-20	904	1,62	0,114	778	365,6	404	5200
-10	898	1,6	0,113	788	108,1	120	1530
0	891	1,62	0,112	778	55,24	67,5	867
10	885	1,65	0,111	763	33,45	37,8	495
20	879	1,71	0,111	736	21,1	24	326
30	873	1,78	0,11	707	13,44	15,4	218
40	867	1,83	0,109	688	9,364	10,8	157

GLICERINA C₃H₅(OH)₃

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. cinemát. .10 ⁴ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁷ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	(°K)
0	1276	2261	83,1	0,282	0,983	84700	
10	1270	2319	30	0,284	0,965	31000	
20	1264	2386	11,8	0,286	0,947	12500	0,0005
30	1258	2445	5	0,286	0,929	5380	
40	1252	2512	2,2	0,286	0,914	2450	
50	1245	2583	1,5	0,287	0,893	1630	

ETILENO GLICOL C₂H₄(OH)₂

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. cinemát. .10 ⁶ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁷ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	(°K)
0	1130,75	2294	57,53	0,242	0,934	615	
20	1116,65	2382	19,18	0,249	0,939	204	0,00065
40	1101,43	2474	8,69	0,256	0,939	93	
60	1087,66	2562	4,75	0,26	0,932	51	
80	1077,56	2650	2,98	0,261	0,921	32,4	
100	1058,5	2742	2,03	0,263	0,908	22,4	

8.- PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS METALES LIQUIDOS

MERCURIO.- Punto de fusión: -38,9°C; Punto de ebullición: 357°C									
Temper. °C	Densidad (Kg/m ³)	Coeficiente dilatac. térm. . 10 ³	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁷ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ⁴ (N.seg/m ²)	Visc. cinem. .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº Prandtl	($\frac{g}{2} 10^{-10}$)
0	13628		140,3	8,2	42,99	16,9	0,124	0,0288	
20	13579	18,2	139,4	8,69	46,06	15,48	0,114	0,0249	13,73
50	13506		138,6	9,4	50,22	14,05	0,104	0,0207	
100	13385		137,3	10,51	57,16	12,42	0,0928	0,0162	
150	13264		136,5	11,49	63,54	11,31	0,0853	0,0134	
200	13145		157	12,34	69,08	10,54	0,0802	0,0116	
250	13026		135,7	13,07	74,06	9,96	0,0765	0,0103	
315,7	12847		134	14,02	81,5	8,65	0,0673	0,0083	

SODIO.- Punto de fusión: 97,8°C; Punto de ebullición: 883°C									
T(°C)	Densidad (Kg/m ³)	Coeficiente dilatac. térm. . 10 ³	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁵ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ⁴ (N.seg/m ²)	Visc. cinem. .10 ⁷ (m ² /seg)	Pr	($\frac{g}{2} 10^{-9}$)
94,0	929	0,27	1382	86,30	6,71	6,99	7,31	0,0110	4,96
205,0	902	0,36	1340	80,30	6,71	4,32	4,60	0,0072	16,7
315,6	878,5		1304	75,78	6,65	3,29	3,77	0,0057	
371,0	860		1298	72,40	6,45	2,83	3,16	0,0051	
426,7	852,8		1277	69,39	6,41	2,52	2,97	0,0046	
538,0	820,0		1264	64,37	6,21	2,31	2,82	0,0040	
650,0	790		1261	60,56	6,11	1,96	2,50	0,0041	
705,0	778		1256	59,70	6,19	1,79	2,26	0,0038	
760,0	767,5		1270	56,58	5,83	1,72	2,25	0,0385	

BISMUTO.- Punto de fusión: 271°C; Punto de ebullición: 1477°C									
T(°C)	Densidad (Kg/m ³)	Coeficiente dilatac. térm. . 10 ³	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁵ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ⁴ (N.seg/m ²)	Visc. cinem. .10 ⁷ (m ² /seg)	Pr	($\frac{g}{2} 10^{-9}$)
316	10011	0,117	144,5	16,44	1,14	1,622	1,57	0,014	46,5
427	9867	0,122	149,5	15,58	1,06	1,339	1,35	0,013	65,6
811	9739	0,126	154,5	15,58	1,03	1,101	1,08	0,011	106
922	9611		159,5	15,58	1,01	0,923	0,903	0,009	
1033	9467		164,5	15,58	1,01	0,789	0,813	0,008	

PLOMO.- Punto de fusión: 327°C; Punto de ebullición: 1737°C							
Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. dinámica .10 ⁴ (N.seg/m ²)	Visc. cinemát. .10 ⁶ (m ² /seg)	Conductividad térmica "k" W/m°C	Difus. térmica .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandtl Pr
371	10540	159	2,4	0,0230	16,1	9,61	0,024
425	10470	156	2,11	0,0202	17,5		0,019
525	10350	155	1,72	0,0166	19,0		0,014
625	10230	155	1,49	0,0146	20,4		0,011
704	10140	155	1,37	0,0140	21,9	9,48	0,009

LITIO.- Punto de fusión: 179°C; Punto de ebullición: 1317°C							
Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. dinámica .10 ⁴ (N.seg/m ²)	Visc. cinemát. .10 ⁶ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Difus. térmica .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
204,4	509,2	4365	5,416	1,1098	46,37	20,96	0,051
315,6	498,8	4270	4,465	0,8982	43,08	20,32	0,043
426,7	489,1	4211	3,927	0,8053	38,24	18,65	0,0432
537,8	476,3	4171	3,473	0,7304	30,45	15,4	0,0476

POTASIO.- Punto de fusión: 63,9°C; Punto de ebullición: 760°C							
Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. dinámica .10 ⁴ (N.seg/m ²)	Visc. cinemát. .10 ⁶ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Difus. térmica .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
426,7	741,7	766	2,108	0,2839	39,45	69,74	0,0041
537,8	714,4	762	1,711	0,24	36,51	67,39	0,0036
648,9	690,3	766	1,463	0,2116	33,74	64,1	0,0033
760	667,7	783	1,331	0,1987	31,15	59,86	0,0033

Na-K, 56% Na, 44% K.- Punto de fusión: -11°C; Punto de ebullición: 784°C							
Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. dinámica .10 ⁴ (N.seg/m ²)	Visc. cinemát. .10 ⁶ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Difus. térmica .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
93,3	889,8	1130	5,622	0,6347	25,78	27,76	0,0246
204,4	865,6	1089	3,803	0,4414	26,47	28,23	0,0155
315,6	838,3	1068	2,935	0,3515	27,17	30,5	0,0115
426,7	814,2	1051	2,15	0,2652	27,68	32,52	0,0081
537,8	788,4	1047	2,026	0,2581	27,68	33,71	0,0076
648,9	759,5	1051	1,695	0,224	27,68	34,86	0,0064

9.- PROPIEDADES TERMICAS DE LIQUIDOS SATURADOS

FREON 12

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁶ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ⁶ N.seg/m ²	Visc. cinem. .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	$\frac{g}{2} \cdot 10^{-10}$
-50	1547	875	0,067	5,01	4,796	0,310	6,2	26,84
-40	1519	884,7	0,069	5,14	4,238	0,279	5,4	
-30	1490	895,6	0,069	5,26	3,770	0,253	4,8	
-20	1461	907,3	0,071	5,39	3,433	0,235	4,4	
-10	1429	920,3	0,073	5,50	3,158	0,221	4,0	
0	1397	934,5	0,073	5,57	2,990	0,214	3,8	
10	1364	949,6	0,073	5,60	2,769	0,203	3,6	
20	1330	965,9	0,073	5,60	2,633	0,198	3,5	
30	1295	983,5	0,071	5,60	2,512	0,194	3,5	
40	1257	1001,9	0,069	5,55	2,401	0,191	3,5	
50	1216	1021,6	0,067	5,45	2,310	0,190	3,5	

AMONIACO

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁶ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ⁶ N.seg/m ²	Visc. cinem. .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	$\frac{g}{2} \cdot 10^{-10}$
-50	703,7	4463	0,547	17,42	3,061	0,435	2,60	
-40	691,7	4467	0,547	17,75	2,808	0,406	2,28	
-30	679,3	4476	0,549	18,01	2,629	0,387	2,15	
-20	666,7	4509	0,547	18,19	2,540	0,381	2,09	
-10	653,6	4564	0,543	18,25	2,471	0,378	2,07	
0	640,1	4635	0,540	18,19	2,388	0,373	2,05	
10	626,2	4714	0,531	18,01	2,304	0,368	2,04	
20	611,8	4798	0,521	17,75	2,195	0,359	2,02	
30	596,4	4890	0,507	17,42	2,081	0,349	2,01	
40	581,0	4999	0,493	17,01	1,975	0,340	2,00	
50	564,3	5116	0,476	16,54	1,862	0,330	1,99	18,64

AGUA

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica .10 ⁶ (m ² /seg)	Visc. dinám. .10 ⁶ N.seg/m ²	Visc. cinem. .10 ⁶ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	$\frac{g}{2} \cdot 10^{-9}$
0	999,9	4226	0,558	0,131	1794	1,789	13,7	
20	998,2	4182	0,597	0,143	1004	1,006	7,02	2,035
40	992,3	4178	0,633	0,151	653,0	0,658	4,34	8,833
60	983,2	4181	0,658	0,155	470,0	0,478	3,02	22,75
80	971,8	4194	0,673	0,165	353,7	0,364	2,22	46,68
100	958,4	4211	0,682	0,169	281,0	0,294	1,75	85,09
120	943,1	4245	0,685	0,171	233,0	0,247	1,45	517,2
140	926,1	4279	0,687	0,172	198,2	0,214	1,24	
160	907,6	4338	0,682	0,173	171,5	0,189	1,10	
180	887,0	4413	0,678	0,172	153,5	0,173	1,00	
200	864,8	4501	0,665	0,170	129,0	0,160	0,94	
220	840,5	4606	0,656	0,168	126,0	0,150	0,89	1766
240	812,2	4752	0,639	0,164	116,0	0,143	0,87	
260	784,0	4944	0,614	0,157	107,5	0,137	0,87	
280	750,8	5204	0,583	0,150	101,4	0,135	0,92	
300	712,5	6594	0,543	0,132	94,1	0,132	1,02	

DIOXIDO DE CARBONO CO₂

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. cinemát. $\cdot 10^6$ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Dif. térmica $\cdot 10^7$ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	(°K)
-50	1156,3	1840	0,119	0,085	0,4021	2,96	
-40	1117,8	1880	0,118	0,1011	0,481	2,46	
-30	1076,8	1970	0,117	0,1116	0,5272	2,22	
-20	1032,4	2050	0,115	0,1151	0,5445	2,12	
-10	983,4	2180	0,13	0,1099	0,5133	2,2	
0	927,0	2470	0,108	0,1045	0,4578	2,38	
10	860,0	3140	0,101	0,0971	0,3608	2,8	
20	772,6	5000	0,091	0,0872	0,2219	4,1	0,014
30	597,8	36400	0,08	0,0703	0,0279	28,7	

DIOXIDO DE AZUFRE SO₂

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. cinemát. $\cdot 10^6$ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Dif. térmica $\cdot 10^7$ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	(°K)
-50	1560,8	1359,5	0,484	0,242	1,141	4,24	
-40	1536,8	1360,7	0,424	0,235	1,13	3,74	
-30	1520,64	1361,6	0,371	0,23	1,117	3,31	
-20	1488,6	1362,4	0,324	0,225	1,107	2,93	
-10	1463,6	1362,8	0,288	0,218	1,097	2,62	
0	1438,46	1363,6	0,257	0,211	1,081	2,38	
10	1412,5	1364,5	0,232	0,204	1,066	2,18	
20	1386,4	1365,3	0,21	0,199	1,05	2	0,00194
30	1359,33	1366,2	0,19	0,192	1,035	1,83	
40	1329,22	1367,4	0,173	0,185	1,019	1,7	
50	1299,1	1368,3	0,162	0,177	0,999	1,61	

SOLUCION EUTECTICA CLORURO CALCICO Cl₂Ca 29,9%

Temperatur °C	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p J/Kg°C	Visc. cinemát. $\cdot 10^6$ (m ² /seg)	Conductivida térmica "k" W/m°C	Dif. térmica $\cdot 10^7$ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr	(°K)
-50	1319,8	2608	36,35	0,402	1,166	312	
-40	1314,9	2635,6	24,97	0,415	1,200	208	
-30	1310,2	2661,1	17,18	0,429	1,234	139	
-20	1305,5	2688	11,04	0,445	1,267	87,1	
-10	1300,7	2713	6,96	0,459	1,300	53,6	
0	1296,1	2738	4,39	0,472	1,332	33	
10	1291,4	2763	3,35	0,485	1,363	24,6	
20	1286,6	2788	2,72	0,498	1,394	19,6	
30	1281,9	2814	2,27	0,511	1,419	16	
40	1277,2	2839	1,92	0,525	1,445	13,3	
50	1272,5	2868	1,65	0,535	1,468	11,3	

10.- PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS GASES Y VAPORES

VAPOR DE AGUA RECALENTADO

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁶ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
380	0,5863	2,0600	12,71	21,6	0,0246	0,204	1,060
400	0,5542	2,0140	13,44	24,2	0,0261	0,234	1,040
450	0,4902	1,9800	15,25	31,1	0,0299	0,307	1,010
500	0,4405	1,9850	17,04	38,6	0,0339	0,387	0,996
550	0,4005	1,9970	18,84	47,0	0,0379	0,475	0,991
600	0,3652	2,0260	20,67	56,6	0,0422	0,573	0,986
650	0,3380	2,0560	22,47	64,4	0,0464	0,666	0,995
700	0,3140	2,0850	24,26	77,2	0,0505	0,772	1,000
750	0,2931	2,1190	26,04	88,8	0,0549	0,883	1,005
800	0,2739	2,1520	27,86	102,0	0,0592	1,001	1,010
850	0,2579	2,1860	29,69	115,2	0,0637	1,130	1,019

HELIO

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁷ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
3		5,2	8,4	0,0106			
33	1,4657	5,2	50,2	3,42	0,0353	0,04625	0,74
144	3,3799	5,2	125,5	37,11	0,0928	0,5275	0,7
200	0,2435	5,2	156,6	64,38	0,1177	0,9288	0,694
255	0,1906	5,2	181,7	95,5	0,1357	1,3675	0,7
366	0,1328	5,2	230,5	173,6	0,1691	2,449	0,71
477	0,10204	5,2	275,0	269,3	0,197	3,716	0,72
589	0,08282	5,2	311,3	375,8	0,225	5,215	0,72
700	0,07032	5,2	347,5	494,2	0,251	6,661	0,72
800	0,06023	5,2	381,7	634,1	0,275	8,774	0,72
900	0,05286	5,2	413,6	781,3	0,298	10,834	0,72

NITROGENO

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁶ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
100	3,4808	1,0722	6,86	1,97	0,00945	0,0253	0,786
200	1,7108	1,0429	12,95	7,57	0,01824	0,1022	0,747
300	1,1421	1,0408	17,84	15,63	0,02620	0,2204	0,713
400	0,8538	1,0459	21,98	25,74	0,03335	0,3734	0,691
500	0,6824	1,0555	25,70	37,66	0,03984	0,5530	0,684
600	0,5687	1,0756	29,11	51,19	0,04580	0,7486	0,686
700	0,4934	1,0969	32,13	65,13	0,05123	0,9466	0,691
800	0,4277	1,1225	34,84	81,46	0,05609	1,1685	0,700
900	0,3796	1,1464	37,49	91,06	0,06070	1,3946	0,711
1000	0,3412	1,1677	40,00	117,20	0,06475	1,6250	0,724
1100	0,3108	1,1857	42,28	136,00	0,06850	1,8591	0,736
1200	0,2851	1,2037	44,50	156,10	0,07184	2,0932	0,748

AMONIACO

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁶ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
220	0,9304	2,1980	7,25	7,60	0,01710	0,2054	0,930
273	0,7929	2,1770	9,35	11,80	0,02200	0,1308	0,900
323	0,6487	2,1770	11,04	17,00	0,02700	0,1920	0,880
373	0,5590	2,2360	12,89	23,00	0,03270	0,2619	0,870
423	0,4934	2,3150	14,67	29,70	0,03910	0,3432	0,870
473	0,4405	2,3950	16,49	37,40	0,04670	0,4421	0,840

AIRE

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁵ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
100	3,6010	1,027	0,692	1,92	0,0092	0,0250	0,770
150	2,3675	1,010	1,028	4,34	0,0137	0,0575	0,753
200	1,7684	1,006	1,329	7,49	0,0181	0,1017	0,739
250	1,4128	1,005	1,488	10,53	0,0223	0,1316	0,722
300	1,1774	1,006	1,983	16,84	0,0262	0,2216	0,708
350	0,9980	1,009	2,075	20,76	0,0300	0,2983	0,697
400	0,8826	1,014	2,286	25,90	0,0336	0,3760	0,689
450	0,7833	1,021	2,484	31,71	0,0371	0,4222	0,683
500	0,7048	1,030	2,671	37,90	0,0404	0,5564	0,680
550	0,6423	1,039	2,848	44,34	0,0436	0,6532	0,680
600	0,5879	1,055	3,018	51,34	0,0466	0,7512	0,680
650	0,5430	1,063	3,177	58,51	0,0495	0,8578	0,682
700	0,5030	1,075	3,332	66,25	0,0523	0,9672	0,684
750	0,4709	1,086	3,481	73,91	0,0551	1,0774	0,686
800	0,4405	1,098	3,625	82,29	0,0578	1,1981	0,689
850	0,4149	1,109	3,765	90,75	0,0603	1,3097	0,692
900	0,3925	1,121	3,899	99,30	0,0628	1,4271	0,696
950	0,3716	1,132	4,023	108,20	0,0653	1,5510	0,699
1000	0,3524	1,142	4,152	117,80	0,0675	1,6779	0,702
1100	0,3204	1,160	4,440	138,60	0,0732	1,9690	0,704
1200	0,2947	1,179	4,690	159,10	0,0782	2,2510	0,707
1300	0,2707	1,197	4,930	182,10	0,0837	2,5830	0,705
1400	0,2515	1,214	5,170	205,50	0,0891	2,9200	0,705
1500	0,2355	1,230	5,400	229,10	0,0946	3,2620	0,705
1600	0,2211	1,248	5,630	254,50	0,1000	3,6090	0,705
1700	0,2082	1,267	5,850	280,50	0,1050	3,9770	0,705
1800	0,1970	1,287	6,070	308,10	0,1110	4,3790	0,704
1900	0,1858	1,309	6,290	338,50	0,1170	4,8110	0,704
2000	0,1762	1,338	6,500	369,00	0,1240	5,2600	0,702
2100	0,1682	1,372	6,720	399,60	0,1310	5,7150	0,700
2200	0,1602	1,419	6,930	432,60	0,1390	6,1200	0,707
2300	0,1538	1,482	7,140	464,00	0,1490	6,5400	0,710
2400	0,1458	1,574	7,350	504,00	0,1610	7,0200	0,718
2500	0,1394	1,688	7,570	543,50	0,1750	7,4410	0,730

MONOXIDO DE CARBONO

MONOXIDO DE CARBONO

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁶ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
220	1,5536	1,0429	13,83	8,90	0,01900	0,1176	0,758
250	1,3649	1,0425	15,40	11,28	0,02144	0,1506	0,750
300	1,1388	1,0421	17,84	15,67	0,02525	0,2128	0,737
350	0,9742	1,0434	20,09	20,62	0,02883	0,2836	0,728
400	0,8536	1,0484	22,19	25,99	0,03226	0,3605	0,722
450	0,7585	1,0551	24,18	31,88	0,04360	0,4439	0,718
500	0,6822	1,0635	26,06	38,19	0,03863	0,5324	0,718
550	0,6202	1,0756	27,89	44,97	0,04162	0,6240	0,721
600	0,5685	1,0877	29,60	52,06	0,04446	0,7190	0,724

HIDROGENO

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁶ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
30	0,84722	10,84	1,606	1,895	0,0228	0,0249	0,759
50	0,50955	10,501	2,516	4,88	0,0362	0,0676	0,721
100	0,24572	11,229	4,212	17,14	0,0665	0,2408	0,712
150	0,16371	12,602	5,595	34,18	0,0981	0,475	0,718
200	0,12270	13,54	6,813	55,53	0,1282	0,772	0,719
250	0,09819	14,059	7,919	80,64	0,1561	1,13	0,713
300	0,08185	14,314	8,963	109,5	0,182	1,554	0,706
350	0,07016	14,436	9,954	141,9	0,206	2,031	0,697
400	0,06135	14,491	10,864	177,1	0,228	2,568	0,69
450	0,05462	14,499	11,779	215,6	0,251	1,164	0,682
500	0,04918	14,507	12,636	257,0	0,272	3,817	0,675
550	0,04469	14,532	13,475	301,6	0,292	4,516	0,668
600	0,04085	14,537	14,285	349,7	0,315	5,306	0,664
700	0,03492	14,574	15,89	455,1	0,351	6,903	0,659
800	0,03060	14,675	17,40	569	0,384	8,563	0,664
900	0,02723	14,821	18,78	690	0,412	10,217	0,676
1000	0,02451	14,968	20,16	822	0,440	11,997	0,686
1100	0,02227	15,165	21,46	965	0,464	13,726	0,703
1200	0,02050	15,366	22,75	1107	0,488	15,484	0,715
1300	0,01890	15,575	24,08	1273	0,512	17,394	0,733
1333	0,01842	15,638	24,44	1328	0,519	18,013	0,736

OXIGENO

Temperatur °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁶ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁴ (m ² /seg)	Nº de Prandt Pr
100	3,9918	0,9479	7,77	1,95	0,00903	0,0239	0,815
150	2,6190	0,9178	11,49	4,39	0,01367	0,0569	0,773
200	1,9559	0,9131	14,85	7,59	0,01824	0,1021	0,745
250	1,5618	0,9157	17,87	11,45	0,02259	0,1579	0,725
300	1,3007	0,9203	20,63	15,86	0,02676	0,2235	0,709
350	1,1133	0,9291	23,16	20,80	0,03070	0,2968	0,702
400	0,9755	0,9420	25,54	26,18	0,03461	0,3768	0,695
450	0,8652	0,9567	27,77	31,99	0,03828	0,4609	0,694
500	0,7801	0,9722	29,91	38,34	0,04173	0,5502	0,697
550	0,7096	0,9881	31,97	45,05	0,04517	0,6441	0,700
600	0,6504	1,0044	33,92	52,15	0,04832	0,7399	0,704

DIOXIDO DE CARBONO, CO₂

Temp. °K	Densidad (Kg/m ³)	Calor específico c _p kJ/Kg°C	Visc. dinám. ·10 ⁶ (Kg/m.seg)	Visc. cinem. ·10 ⁶ (m ² /seg)	Conductiv. térmica "k" W/m°C	Dif. térmica ·10 ⁵ (m ² /seg)	Nº de Prandtl
220	2,4733	0,783	11,105	4,49	0,010805	0,0592	0,818
250	2,1657	0,804	12,59	5,81	0,012884	0,07401	0,793
300	1,7973	0,871	14,958	8,32	0,016572	0,10588	0,770
350	1,5362	0,900	17,205	11,19	0,02047	0,14808	0,755
400	1,3424	0,942	19,32	14,39	0,02461	0,19463	0,738
450	1,1918	0,980	21,34	17,90	0,02897	0,24813	0,721
500	1,0732	1,013	23,26	21,67	0,03352	0,3084	0,702
550	0,9739	1,047	25,08	25,74	0,03821	0,375	0,685
600	0,8938	1,076	26,83	30,02	0,04311	0,4483	0,668

VAPOR DE AGUA HUMEDO

Temperatura °C	Densidad Kg/m ³		Calor específico kJ/Kg.°C		Conductividad térmica W/m.°C		Viscosidad dinámica ·10 ³ (Kg/m.seg)		Número de Prandtl Pr	
	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor	Líquido	Vapor
0	1000	0,0049	4,21	1,86	0,569	0,0163	1,75	0,0085	13,00	0,97
5	1000	0,0068	4,20	1,86	0,578	0,0167	1,50	0,0087	10,90	0,96
10	1000	0,0094	4,19	1,86	0,587	0,0171	1,30	0,0088	9,29	0,96
15	999	0,0128	4,19	1,87	0,595	0,0175	1,14	0,0090	7,99	0,96
20	998	0,0173	4,18	1,87	0,603	0,0179	1,00	0,0092	6,95	0,96
25	997	0,0230	4,18	1,88	0,611	0,0183	0,89	0,0094	6,09	0,96
30	996	0,0304	4,18	1,88	0,618	0,0187	0,80	0,0095	5,39	0,96
40	992	0,0512	4,18	1,89	0,632	0,0195	0,59	0,0100	3,89	0,95
60	983	0,130	4,19	1,91	0,653	0,0212	0,46	0,0106	2,97	0,95
80	972	0,293	4,20	1,95	0,670	0,0229	0,351	0,0113	2,20	0,96
100	958	0,598	4,22	2,01	0,681	0,0248	0,279	0,1120	1,73	0,97
125	939	1,30	4,26	2,12	0,687	0,0273	0,220	0,0130	1,36	1,01
150	917	2,55	4,32	2,29	0,687	0,0300	0,181	0,0139	1,14	1,07
200	865	7,86	4,51	2,91	0,665	0,0375	0,134	0,0157	0,91	1,22
250	799	19,98	4,87	3,94	0,616	0,0495	0,107	0,0175	0,85	1,39
300	712	46,19	5,65	6,18	0,541	0,0720	0,085	0,0198	0,89	1,70

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL CO₂ HUMEDO

Temperatura °C	Presión		Líquido			Vapor saturado seco			
	Atmósferas	Bars	v' dm ³ /Kg	i' Kcal/Kg	s' Kcal/Kg.°C	v'' dm ³ /Kg	r Kcal/Kg	i'' Kcal/Kg	s'' Kcal/Kg.°C
-50	6,97	6,83	0,867	75,00	0,9020	55,407	80,56	155,57	1,2631
-45	8,49	8,32	0,881	77,30	0,9120	45,809	78,59	155,89	1,2563
-40	10,25	10,05	0,897	79,59	0,9218	38,164	76,58	156,17	1,2503
-35	12,26	12,02	0,913	81,80	0,9314	32,008	74,51	156,39	1,2443
-30	14,55	14,27	0,931	84,19	0,9408	27,001	72,37	156,56	1,2385
-25	17,14	16,81	0,950	86,53	0,9501	22,885	70,14	156,67	1,2328
-20	20,06	19,67	0,971	88,93	0,9594	19,466	67,79	156,78	1,2272
-15	23,34	22,79	0,994	91,44	0,9690	16,609	65,26	156,70	1,2218
-10	26,99	26,47	1,019	94,09	0,9787	14,194	62,51	156,60	1,2163
-5	30,51	30,45	1,048	96,91	0,9890	12,141	59,5	156,41	1,2109
0	35,54	34,85	1,081	100,00	1,0000	10,383	56,13	156,13	1,2055
5	40,50	39,71	1,120	103,10	1,0103	8,850	52,35	155,45	1,1985
10	45,95	45,06	1,166	106,50	1,0218	7,519	48,09	154,59	1,1917
15	51,93	50,92	1,223	110,10	1,0340	6,323	43,07	153,17	1,1836
20	58,46	57,33	1,297	114,00	1,0468	5,269	37,1	151,10	1,1734
25	65,59	64,32	1,409	118,80	1,0628	4,232	28,53	147,33	1,1585
30	73,34	71,92	1,680	125,90	1,0854	2,979	15,05	140,95	1,1351
35	74,96	73,51	2,156	133,50	1,1098	2,156	0	133,50	1,1098

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL SO₂ HUMEDO

Temp. (°C)	Presión		Líquido			Vapor saturado seco			
	Atmósferas	Bars	v' dm ³ /Kg	i' Kcal/Kg	s' Kcal/Kg.°C	v'' dm ³ /Kg	r Kcal/Kg	i'' Kcal/Kg	s'' Kcal/Kg.°C
-30	14,55	14,27	0,931	84,19	0,9408	27,001	72,37	156,56	1,2385
-25	17,14	16,81	0,950	86,53	0,9501	22,885	70,14	156,67	1,2328
-20	20,06	19,67	0,971	88,93	0,9594	19,466	67,79	156,78	1,2272
-15	23,34	22,79	0,994	91,44	0,9690	16,609	65,26	156,70	1,2218
-10	26,99	26,47	1,019	94,09	0,9787	14,194	62,51	156,60	1,2163
-5	30,51	30,45	1,048	96,91	0,9890	12,141	59,5	156,41	1,2109
0	35,54	34,85	1,081	100,00	1,0000	10,383	56,13	156,13	1,2055
5	40,50	39,71	1,120	103,10	1,0103	8,850	52,35	155,45	1,1985
10	45,95	45,06	1,166	106,50	1,0218	7,519	48,09	154,59	1,1917
15	51,93	50,92	1,223	110,10	1,0340	6,323	43,07	153,17	1,1835
20	58,46	57,33	1,297	114,00	1,0468	5,269	37,1	151,10	1,1734
25	65,59	64,32	1,409	118,80	1,0628	4,232	28,53	147,33	1,1585
30	73,34	71,92	1,680	125,90	1,0854	2,979	15,05	140,95	1,1351
35	74,96	73,51	2,156	133,50	1,1098	2,156	0	133,50	1,1098
40	6,427	6,303	0,7536	112,83	1,0434	58,8	82,09	194,92	1,3057
45	7,447	7,303	0,7622	114,41	1,0486	51,1	80,91	195,32	1,3029
50	8,583	8,417	0,7712	116,01	1,0534	44,6	79,71	195,72	1,3001
55	9,848	9,657	0,7808	117,64	1,0584	39,1	78,45	196,09	1,2974
60	11,25	11,030	0,7909	119,23	1,0631	34,4	77,21	196,44	1,2949

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL NH₃ HUMEDO

Temperat. °C	Presión Atm.abs.	v' (dm ³ /Kg)	v'' (m ³ /Kg)	' (Kg/m ³)	'' (Kg/m ³)	i' (Kcal/Kg)	i'' (Kcal/Kg)	r (Kcal/Kg)	s' (Kcal/Kg°C)	s'' (Kcal/Kg°C)
-52	0,3697	0,001420	2,933	704,4	0,3409	44,2	383,3	339,1	0,7741	2,3078
-50	0,4168	0,001425	2,623	702,0	0,3812	46,2	384,1	337,9	0,7832	2,2978
-48	0,4686	0,001429	2,351	699,6	0,425	48,4	384,9	336,5	0,7931	2,2880
-46	0,5256	0,001434	2,112	697,2	0,473	50,4	385,7	335,3	0,8021	2,2692
-44	0,5552	0,001439	1,901	694,8	0,526	52,5	386,5	334,0	0,8112	2,2692
-42	0,6568	0,001444	1,715	692,4	0,583	54,6	387,3	332,7	0,8203	2,2600
-40	0,7318	0,001449	1,550	690,0	0,045	56,8	388,1	331,3	0,8295	2,2510
-38	0,5137	0,001455	1,404	687,5	0,712	58,9	388,9	330,0	0,8385	2,2421
-36	0,9028	0,001460	1,274	685,1	0,765	61,0	389,6	328,6	0,8475	2,2336
-34	0,9999	0,001465	1,159	682,6	0,663	63,1	390,4	327,3	0,8565	2,2252
-32	1,1052	0,001470	1,055	680,1	0,948	65,3	391,2	325,9	0,8654	2,2170
-30	1,219	0,001476	0,963	671,7	1,038	67,4	391,9	324,5	0,8742	2,2090
-28	1,342	0,001481	0,8799	675,2	1,136	69,6	392,7	323,1	0,8830	2,2011
-26	1,475	0,001487	0,5056	672,6	1,242	71,7	393,4	321,7	0,8917	2,1934
-24	1,619	0,001492	0,7386	670,1	1,354	73,9	394,1	320,2	0,9003	2,1858
-22	1,774	0,001498	0,6782	667,6	1,474	76,0	394,8	318,8	0,9089	2,1784
-20	1,940	0,001504	0,6235	665,0	1,604	78,2	395,5	317,3	0,5174	2,1710
-18	2,117	0,001510	0,5742	662,4	1,742	80,3	396,1	315,8	0,9259	2,1638
-16	2,309	0,001516	0,5295	659,8	1,889	82,5	396,8	314,3	0,9343	2,1567
-14	2,514	0,001522	0,4889	657,2	2,046	84,7	397,4	312,7	0,9427	2,1498
-12	2,732	0,001528	0,4520	654,6	2,213	86,9	398,1	311,2	0,9511	2,1430
-10	2,966	0,001534	0,4185	652,0	2,390	89,0	398,7	309,7	0,9553	2,1362
-8	3,216	0,001540	0,3873	649,3	2,579	91,2	399,3	308,1	0,9675	2,1296
-6	3,481	0,001546	0,3599	646,7	2,779	93,4	399,9	306,5	0,9757	2,1231
-4	3,761	0,001553	0,3344	644,0	2,991	95,6	400,4	304,8	0,9839	2,1167
-2	4,060	0,001555	0,3110	641,3	3,216	97,8	401,0	303,2	0,9920	2,1103
0	4,379	0,001566	0,2897	638,6	3,452	100,0	401,5	301,5	1,0000	2,1041
2	4,716	0,001573	0,2700	635,8	3,703	102,2	402,0	299,8	1,0080	2,0979
4	5,073	0,001580	0,2553	633,1	3,969	104,4	402,5	298,1	1,0160	2,0919
6	5,450	0,001587	0,2353	630,3	4,250	106,6	403,0	296,4	1,0240	2,0859
8	5,849	0,001594	0,2200	677,5	4,546	108,9	403,5	294,6	1,0319	2,0799
10	6,271	0,001601	0,2058	624,7	4,859	111,1	403,9	292,8	1,0397	2,0741
12	6,715	0,001608	0,1927	621,8	5,189	113,4	404,4	291,0	1,0475	2,0683
14	7,183	0,001616	0,1806	619,0	5,537	115,6	404,8	289,2	1,0553	2,0626
16	7,677	0,001623	0,1694	616,1	5,904	117,9	405,2	287,3	1,0631	2,0570
18	8,196	0,001631	0,1591	613,2	6,289	120,1	405,6	285,5	1,0709	2,0514
20	8,741	0,001639	0,1494	610,3	6,694	122,4	405,9	283,5	1,0785	2,0459
22	9,314	0,001647	0,1405	607,3	7,119	124,7	406,3	281,6	1,0862	2,0405
24	9,915	0,001655	0,1322	604,3	7,564	126,9	406,6	279,7	1,0938	2,0351
26	10,544	0,001663	0,1245	601,3	8,031	129,2	406,9	277,7	1,1014	2,0297
28	11,204	0,001671	0,1174	598,3	8,521	131,5	407,2	275,7	1,1050	2,0243
30	11,895	0,001680	0,1107	595,2	9,034	133,8	407,4	273,6	1,1165	2,0191
32	12,617	0,001689	0,1045	592,1	9,573	136,2	407,7	271,5	1,1241	2,0139
34	13,374	0,001698	0,0986	589,0	10,138	138,5	407,9	269,4	1,1315	2,0087
36	14,165	0,001707	0,0932	585,9	10,731	140,8	408,0	267,2	1,1390	2,0035
38	14,990	0,001716	0,0881	582,7	11,353	143,1	408,2	265,1	1,1464	1,9981
40	15,850	0,001726	0,0833	579,5	12,005	145,5	408,4	262,9	1,1538	1,9933
42	16,747	0,001735	0,0788	576,2	12,689	147,9	408,5	260,6	1,1612	1,9882
44	17,682	0,001745	0,0746	572,9	13,404	150,3	408,6	258,3	1,1686	1,9832
46	18,658	0,001756	0,0707	569,6	14,153	152,6	408,6	256,0	1,1759	1,9781
48	19,673	0,001766	0,0670	566,3	14,936	155,0	408,7	253,7	1,1832	1,9731
50	20,727	0,001777	0,0635	552,9	15,756	157,4	408,7	251,3	1,1904	1,9681

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE MERCURIO

p Atm	T °C	v' m ³ /Kg	v'' m ³ /Kg	ρ' Kg/m ³	ρ'' Kg/m ³	i' Kcal/Kg	i'' Kcal/Kg	r Kcal/Kg	s' Kcal/Kg°C	s'' Kcal/Kg°C
0,0010	119,5	0,0000752	165,9	13298	0,006028	3,96	76,22	72,26	0,0119	0,1959
0,0015	128,0	0,0000753	113	13250	0,00555	4,23	76,94	72,21	0,0126	0,1926
0,002	134,6	0,0000754	56,16	13263	0,01161	4,45	76,61	72,16	0,0132	0,1902
0,003	144,1	0,0000755	58,78	13245	0,01701	4,76	76,86	72,10	0,0139	0,1867
0,004	151,2	0,0000756	44,84	13228	0,02230	4,98	77,03	72,05	0,0145	0,1843
0,006	161,5	0,0000758	30,62	13193	0,03266	5,34	77,32	71,98	0,0152	0,1808
0,008	168,9	0,0000759	23,35	13175	0,04253	5,58	77,52	71,94	0,0158	0,1785
0,010	175,0	0,0000760	18,94	13158	0,05250	5,79	77,69	72,90	0,0163	0,1767
0,015	186,6	0,0000761	12,95	13141	0,07722	6,16	77,98	71,82	0,0171	0,1733
0,02	195,0	0,0000762	9,893	13123	0,1011	6,44	78,20	71,76	0,0178	0,1711
0,03	207,6	0,0000764	6,772	13089	0,1477	6,55	75,53	71,68	0,0186	0,1677
0,04	216,9	0,0000765	5,178	13072	0,1931	7,16	78,78	71,62	0,0193	0,1654
0,05	224,5	0,0000766	4,206	13055	0,2378	7,41	78,98	71,57	0,0198	0,1636
0,06	230,9	0,0000767	3,550	13038	0,2817	7,63	79,16	71,53	0,0202	0,1621
0,08	241,0	0,0000769	2,716	13004	0,3682	7,98	79,44	71,46	0,0208	0,1598
0,10	249,6	0,0000770	2,209	12987	0,4527	8,25	79,66	71,41	0,0213	0,1580
0,12	256,7	0,0000771	1,866	12970	0,5359	8,48	79,84	71,36	0,0218	0,1565
0,14	262,7	0,0000772	1,618	12953	0,6181	8,68	80,00	71,32	0,0222	0,1553
0,16	268,0	0,0000772	1,430	12953	0,6993	8,86	80,14	71,28	0,0225	0,1542
0,18	272,9	0,0000773	1,282	12937	0,7800	9,02	80,27	71,25	0,0228	0,1533
0,20	277,3	0,0000774	1,163	12920	0,8599	9,16	80,38	71,22	0,0231	0,1525
0,25	286,7	0,0000775	0,9464	12903	1,057	9,46	80,62	71,16	0,0236	0,1507
0,30	294,4	0,0000776	0,7995	12887	1,251	9,73	80,84	71,11	0,0241	0,1494
0,35	301,7	0,0000777	0,6941	12870	1,441	9,96	81,02	71,06	0,0245	0,1481
0,40	308,0	0,0000778	0,6140	12853	1,629	10,18	81,19	71,01	0,0249	0,1471
0,50	318,8	0,0000780	0,5003	12821	1,999	10,55	81,49	70,94	0,0255	0,1453
0,60	328,0	0,0000781	0,4234	12804	2,362	10,86	81,74	70,68	0,0260	0,1439
0,70	335,9	0,0000782	0,3677	12768	2,720	11,12	81,94	70,82	0,0265	0,1428
0,80	342,7	0,0000783	0,3253	12771	3,074	11,34	82,01	70,77	0,0269	0,1418
0,9	349,7	0,0000784	0,2922	12755	3,422	11,56	82,29	70,73	0,0272	0,1408
1,0	355,0	0,0000785	0,2655	12739	3,767	11,76	82,45	70,69	0,0275	0,1400
1,2	365,3	0,0000787	0,2245	12706	4,446	12,11	82,63	70,62	0,0280	0,1386
1,4	374,0	0,0000788	0,1553	12690	5,120	12,38	82,94	70,56	0,0285	0,1375
1,6	381,9	0,0000789	0,1730	12674	5,780	12,64	83,14	70,50	0,0290	0,1366
1,8	389,3	0,0000790	0,1555	12658	6,431	12,90	83,35	70,45	0,0294	0,1357
2,0	395,8	0,0000791	0,1414	12642	7,072	13,11	83,51	70,40	0,0297	0,1349
2,2	401,7	0,0000792	0,1296	12626	7,716	13,32	83,68	70,36	0,0300	0,1342
2,4	407,4	0,0000793	0,1196	12610	8,347	13,54	83,86	70,32	0,0303	0,1335
2,6	412,5	0,0000794	0,1114	12594	8,977	13,70	83,98	70,28	0,0305	0,1329
2,8	417,5	0,0000794	0,1043	12584	9,588	13,87	84,11	70,24	0,0307	0,1324
3,0	422,4	0,0000795	0,09798	12579	10,21	14,04	84,25	70,21	0,0309	0,1320
3,5	432,8	0,0000797	0,08524	12547	11,73	14,40	84,53	70,13	0,0315	0,1308
4,0	442,4	0,0000798	0,07555	12531	13,23	14,74	84,80	70,06	0,0319	0,1298
4,5	451,0	0,0000799	0,06801	12516	14,70	15,03	85,02	69,99	0,0323	0,1289
5,0	458,9	0,0000801	0,06187	12484	16,16	15,30	85,23	69,93	0,0327	0,1282
5,5	466,3	0,0000802	0,05682	12469	17,56	15,56	85,43	69,87	0,0331	0,1276
6,0	472,8	0,0000803	0,05254	12453	19,03	15,78	85,59	69,81	0,0334	0,1270
6,5	479,1	0,0000804	0,04891	12433	20,45	15,99	85,75	69,76	0,0337	0,1260
7,0	485,1	0,0000805	0,04578	12422	21,84	16,20	85,91	69,71	0,0339	0,1258
8,0	496,3	0,0000806	0,04065	12407	24,60	16,59	86,20	69,61	0,0344	0,1249
9,0	506,3	0,0000808	0,03660	12376	27,32	16,94	86,47	69,53	0,0349	0,1241
10	515,5	0,0000809	0,03333	12361	30,00	17,25	86,70	69,45	0,0353	0,1234
12	532,3	0,0000812	0,02837	12315	35,25	17,85	87,15	69,30	0,0360	0,1220
14	546,7	0,0000814	0,02475	12285	40,40	18,35	87,51	69,16	0,0366	0,1210
16	559,8	0,0000816	0,02200	12255	45,46	18,81	87,84	69,03	0,0372	0,1201
18	571,4	0,0000818	0,01983	12225	50,43	19,23	88,14	68,91	0,0377	0,1193
20	582,4	0,0000819	0,01808	12210	55,31	19,62	88,42	68,80	0,0381	0,1185
25	606,5	0,0000823	0,01487	12151	67,25	20,46	89,00	68,54	0,0391	0,1170
30	627,1	0,0000827	0,01268	12092	78,86	21,18	89,48	68,30	0,0399	0,1158
35	645,5	0,0000830	0,01109	12048	90,17	21,83	89,91	68,08	0,0406	0,1147
40	661,8	0,0000832	0,00988	12019	101,2	22,41	90,28	67,87	0,0412	0,1138
45	677,0	0,0000835	0,00892	11976	112,1	22,95	90,62	67,67	0,0418	0,1130
50	690,9	0,0000837	0,00815	11947	122,7	23,44	90,91	67,47	0,0423	0,1123

11.- CALOR ESPECIFICO MEDIO DEL VAPOR DE AGUA RECALENTADO

Temperatura de recalentamiento en °C																						
p	Ts	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	550
0,5	80,9	0,470	0,470	0,469	0,469	0,469	0,469	0,470	0,470	0,471	0,472	0,473	0,475	0,476								
1	99,1	0,478	0,476	0,475	0,475	0,474	0,474	0,474	0,474	0,475	0,476	0,477	0,478	0,480								
2	119,6	0,491	0,488	0,486	0,485	0,484	0,483	0,482	0,482	0,482	0,482	0,483	0,483	0,484								
4	142,9	0,521	0,515	0,509	0,505	0,501	0,499	0,497	0,496	0,495	0,494	0,494	0,494	0,494	0,494							
6	158,1		0,544	0,534	0,526	0,519	0,514	0,510	0,508	0,505	0,504	0,504	0,503	0,503	0,503	0,503						
8	169,4		0,576	0,561	0,548	0,538	0,530	0,525	0,521	0,517	0,515	0,514	0,512	0,511	0,511	0,511						
10	179,0			0,590	0,572	0,558	0,548	0,540	0,534	0,530	0,520	0,524	0,522	0,521	0,521	0,521						
12	187,1			0,623	0,599	0,580	0,567	0,556	0,548	0,543	0,538	0,535	0,533	0,531	0,531	0,529						
14	194,1			0,660	0,629	0,605	0,588	0,575	0,565	0,558	0,553	0,548	0,545	0,542	0,540	0,536						
16	200,4				0,661	0,631	0,610	0,594	0,582	0,572	0,565	0,560	0,556	0,552	0,548	0,543						
18	206,1				0,697	0,660	0,634	0,615	0,600	0,589	0,580	0,574	0,568	0,562	0,556	0,552						
20	211,4				0,738	0,694	0,660	0,637	0,619	0,606	0,596	0,587	0,580	0,573	0,565	0,559						
22	216,2				0,810	0,722	0,684	0,658	0,637	0,621	0,608	0,597	0,587	0,579	0,572	0,567						
24	220,8					0,746	0,705	0,676	0,653	0,634	0,619	0,607	0,597	0,588	0,580	0,574						
26	225,0					0,752	0,722	0,692	0,667	0,647	0,631	0,618	0,606	0,596	0,588	0,581						
28	229,0					0,772	0,742	0,712	0,685	0,663	0,644	0,630	0,617	0,606	0,597	0,589						
30	232,8						0,760	0,730	0,702	0,678	0,657	0,641	0,627	0,616	0,607	0,599	0,594	0,590	0,586	0,582	0,579	0,578
35	241,4						0,797	0,767	0,737	0,709	0,686	0,667	0,651	0,637	0,625	0,616	0,610	0,605	0,600	0,596	0,592	0,590
40	249,2						0,838	0,807	0,776	0,745	0,718	0,695	0,676	0,660	0,647	0,635	0,628	0,622	0,616	0,611	0,606	0,603
45	256,3						0,878	0,846	0,814	0,782	0,752	0,725	0,703	0,684	0,668	0,655	0,646	0,638	0,631	0,625	0,620	0,617
50	262,7							0,886	0,853	0,820	0,787	0,756	0,731	0,709	0,690	0,675	0,665	0,655	0,647	0,640	0,634	0,631
60	274,3							0,961	0,926	0,891	0,856	0,820	0,788	0,760	0,737	0,717	0,702	0,690	0,679	0,670	0,662	0,658
70	284,5								0,988	0,958	0,928	0,887	0,849	0,814	0,785	0,760	0,741	0,726	0,712	0,701	0,690	0,686
80	293,6								1,086	1,044	1,002	0,960	0,913	0,872	0,838	0,806	0,783	0,764	0,748	0,733	0,720	0,714
90	301,9									1,138	1,088	1,038	0,988	0,939	0,895	0,859	0,828	0,805	0,785	0,768	0,753	0,746
100	309,5										1,131	1,117	1,061	1,004	0,954	0,912	0,875	0,848	0,824	0,803	0,786	0,778
120	323,1										1,295	1,281	1,230	1,157	1,094	1,029	0,980	0,942	0,909	0,881	0,857	0,846
140	335,1											1,425	1,425	1,337	1,248	1,174	1,102	1,048	1,005	0,968	0,937	0,923
160	345,7											1,667	1,667	1,563	1,446	1,341	1,250	1,179	1,120	1,072	1,031	1,012
200	364,1												2,747	2,350	2,070	1,861	1,687	1,551	1,444	1,358	1,286	1,255

12.- CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA HUMEDO

Presión sat	Temp. sat.	Volumen	Volumen	Entalpía	Entalpía	Entalpía	Entropía	Entropía	Entropía
bars	°C	v' (dm ³ /Kg)	v'' (dm ³ /Kg)	i' (kJ/Kg)	i'' (kJ/Kg)	r _{1-v} (kJ/Kg)	s' (kJ/Kg.°K)	s'' (kJ/Kg.°K)	s (kJ/Kg.°K)
0,0061	0,00	1,0002	206288,00	0,0	2500,8	2500,8	0,000	9,155	9,155
0,0061	1,00	1,0002	206146,00	0,0	2500,8	2500,8	0,000	9,155	9,155
0,0070	2,00	1,0001	179907,00	8,4	2496,0	2487,6	0,031	9,102	9,071
0,0081	4,00	1,0001	157258,00	16,8	2508,1	2491,3	0,061	9,050	8,989
0,0094	6,00	1,0001	137768,00	25,2	2511,8	2486,6	0,091	8,999	8,908
0,0100	7,00	1,0001	129205,00	29,3	2513,6	2484,3	0,106	8,974	8,868
0,0107	8,00	1,0002	120956,00	33,6	2515,5	2481,9	0,121	8,949	8,828
0,0123	10,00	1,0003	106422,00	42,0	2519,2	2477,2	0,151	8,900	8,749
0,0140	12,00	1,0006	93829,00	50,4	2522,9	2472,5	0,180	8,851	8,671
0,0160	14,00	1,0008	82894,00	58,8	2526,5	2467,8	0,210	8,804	8,594
0,0182	16,00	1,0011	73380,00	67,1	2530,3	2463,1	0,239	8,757	8,518
0,0206	18,00	1,0014	65084,00	75,5	2533,9	2458,4	0,268	8,711	8,444
0,0234	20,00	1,0018	57836,00	83,4	2537,6	2453,7	0,296	8,666	8,370
0,0250	21,00	1,0021	54260,00	88,4	2539,5	2451,1	0,312	8,642	8,330
0,0264	22,00	1,0023	51491,00	92,2	2541,2	2449,0	0,325	8,622	8,297
0,0298	24,00	1,0028	45925,00	100,6	2544,8	2444,2	0,353	8,579	8,226
0,0336	26,00	1,0033	41034,00	109,0	2548,5	2439,5	0,381	8,536	8,155
0,0378	28,00	1,0038	36727,00	117,3	2552,1	2434,8	0,409	8,494	8,085
0,0424	30,00	1,0044	32929,00	125,7	2555,7	2430,0	0,436	8,452	8,016
0,0475	32,00	1,0050	29573,00	134,0	2559,3	2425,3	0,464	8,412	7,948
0,0500	33,00	1,0053	28196,00	137,8	2560,9	2423,1	0,476	8,394	7,918
0,0532	34,00	1,0057	26601,00	142,4	2562,9	2420,5	0,491	8,372	7,881
0,0594	36,00	1,0064	23967,00	150,7	2566,5	2415,8	0,518	8,333	7,814
0,0662	38,00	1,0071	21628,00	159,1	2570,1	2411,0	0,545	8,294	7,749
0,0737	40,00	1,0079	19546,00	167,4	2573,7	2406,2	0,572	8,256	7,684
0,0750	40,32	1,0080	19239,00	168,8	2574,2	2405,5	0,576	8,250	7,674
0,0819	42,00	1,0087	17691,00	175,8	2577,2	2401,4	0,599	8,219	7,620
0,0910	44,00	1,0095	16035,00	184,2	2580,8	2396,6	0,625	8,182	7,557
0,1000	45,83	1,0103	14673,00	191,8	2584,1	2392,2	0,649	8,149	7,499
0,1008	46,00	1,0103	14556,00	192,5	2584,3	2391,8	0,651	8,146	7,494
0,1116	48,00	1,0112	13232,00	200,9	2587,9	2387,0	0,678	8,110	7,433
0,1233	50,00	1,0121	12045,00	209,3	2591,4	2382,2	0,704	8,075	7,372
0,1361	52,00	1,0130	10979,00	217,6	2595,0	2377,3	0,729	8,041	7,312
0,1500	54,00	1,0140	10021,00	226,0	2598,5	2372,5	0,755	8,007	7,252
0,1651	56,00	1,0150	9157,80	234,3	2602,0	2367,7	0,780	7,974	7,193
0,1815	58,00	1,0160	8379,90	242,7	2605,5	2362,8	0,806	7,941	7,135
0,1992	60,00	1,0170	7677,60	251,1	2609,0	2357,9	0,831	7,909	7,078
0,2000	60,09	1,0171	7648,40	251,5	2609,1	2357,7	0,832	7,907	7,075
0,2184	62,00	1,0182	7042,80	259,5	2612,5	2353,0	0,856	7,877	7,021
0,2391	64,00	1,0193	6468,20	267,8	2615,9	2318,1	0,881	7,845	6,965
0,2500	65,00	1,0199	6203,20	272,0	2617,6	2345,7	0,893	7,830	6,937
0,2615	66,00	1,0205	5947,30	276,2	2619,4	2343,2	0,906	7,815	6,909
0,2856	68,00	1,0216	5474,70	284,6	2622,8	2338,2	0,930	7,784	6,854
0,3000	69,13	1,0223	5228,10	289,3	2624,8	2335,4	0,944	7,767	6,823
0,3116	70,00	1,0228	5045,30	293,0	2626,3	2333,3	0,955	7,754	6,800
0,3396	72,00	1,0240	4654,70	301,4	2629,7	2328,3	0,979	7,725	6,746
0,3500	72,71	1,0244	4524,60	304,3	2630,9	2326,5	0,988	7,715	6,727
0,3696	74,00	1,0252	4299,10	309,7	2633,1	2323,3	1,003	7,696	6,693
0,4000	75,89	1,0264	3992,40	317,6	2636,3	2318,6	1,026	7,669	6,643
0,4019	76,00	1,0264	3974,80	318,1	2636,5	2318,3	1,027	7,667	6,640
0,4365	78,00	1,0277	3678,80	326,5	2639,8	2313,3	1,051	7,639	6,588
0,4736	80,00	1,0290	3408,30	334,9	2643,2	2308,3	1,075	7,611	6,536
0,5000	81,35	1,0299	3239,40	340,6	2645,4	2304,9	1,091	7,593	6,502
0,5133	82,00	1,0303	3160,90	343,3	2646,5	2303,2	1,099	7,584	6,485
0,5573	84,00	1,0317	2934,30	351,7	2649,9	2298,1	1,123	7,557	6,435
0,6000	85,95	1,0331	2731,20	359,9	2653,1	2293,2	1,145	7,531	6,386

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA HUMEDO (Continuación)

Presión sat.	Temp. sat.	Volumen	Volumen	Entalpía	Entalpía	Entalpía	Entropía	Entropía	Entropía
bars	°C	v' (dm ³ /Kg)	v'' (dm ³ /Kg)	i' (kJ/Kg)	i'' (kJ/Kg)	r _(1-v) (kJ/Kg)	s' (kJ/Kg.°K)	s'' (kJ/Kg.°K)	s (kJ/Kg.°K)
0,6011	86,00	1,0331	2726,60	360,1	2653,2	2293,0	1,146	7,531	6,385
0,6495	88,00	1,0345	2536,00	368,5	2656,5	2287,9	1,169	7,504	6,335
0,7000	89,96	1,0359	2364,30	376,8	2659,7	2282,9	1,192	7,478	6,287
0,7011	90,00	1,0359	2360,90	376,9	2659,7	2282,8	1,192	7,478	6,286
0,7561	92,00	1,0374	2199,90	385,4	2663,0	2277,6	1,216	7,453	6,237
0,8000	93,51	1,0385	2086,80	391,7	2665,4	2273,7	1,233	7,434	6,201
0,8146	94,00	1,0388	2051,80	393,8	2666,2	2272,4	1,239	7,428	6,189
0,8769	96,00	1,0404	1915,20	402,2	2669,4	2267,2	1,262	7,403	6,142
0,9000	96,71	1,0409	1869,10	405,2	2670,6	2265,4	1,270	7,394	6,125
0,9430	98,00	1,0419	1789,30	410,6	2672,6	2262,0	1,284	7,379	6,095
1,0000	99,63	1,0432	1693,70	417,5	2675,2	2257,7	1,303	7,359	6,056
1,0132	100,00	1,0435	1673,00	419,1	2675,8	2256,7	1,308	7,355	6,048
1,2000	104,81	1,0472	1428,20	439,4	2683,3	2244,0	1,361	7,298	5,937
1,2080	105,00	1,0474	1419,40	440,2	2683,6	2243,5	1,363	7,296	5,933
1,4000	109,32	1,0509	1236,50	458,4	2690,3	2231,9	1,411	7,246	5,835
1,4326	110,00	1,0515	1210,10	461,3	2691,3	2230,0	1,419	7,239	5,820
1,6000	113,32	1,0543	1091,30	475,4	2696,4	2221,0	1,455	7,202	5,747
1,6905	115,00	1,0558	1036,50	482,5	2698,9	2216,4	1,473	7,183	5,710
1,8000	116,93	1,0575	977,39	490,7	2701,8	2211,1	1,494	7,163	5,668
1,9853	120,00	1,0603	891,71	503,7	2706,3	2202,5	1,528	7,130	5,602
2,0000	120,23	1,0605	885,59	504,7	2706,6	2201,9	1,530	7,127	5,597
2,2000	123,27	1,0633	809,99	517,6	2711,0	2193,4	1,563	7,096	5,533
2,3209	125,00	1,0649	770,43	525,0	2713,5	2188,5	1,581	7,078	5,497
2,4000	126,09	1,0659	746,60	529,6	2715,0	2185,4	1,593	7,067	5,474
2,6000	128,73	1,0685	692,66	540,9	2718,7	2177,8	1,621	7,040	5,419
2,7012	130,00	1,0697	668,32	546,3	2720,5	2174,2	1,634	7,027	5,393
2,8000	131,21	1,0709	646,19	551,5	2722,2	2170,7	1,647	7,015	5,368
3,0000	133,54	1,0732	605,72	561,4	2725,4	2163,9	1,672	6,992	5,321
3,1305	135,00	1,0747	582,00	567,7	2727,3	2159,7	1,687	6,978	5,291
3,5000	138,88	1,0786	524,14	584,3	2732,5	2148,2	1,727	6,941	5,214
3,6136	140,00	1,0798	508,66	589,1	2733,9	2144,8	1,739	6,930	5,191
4,0000	143,63	1,0836	462,35	604,7	2738,6	2133,9	1,776	6,897	5,120
4,1549	145,00	1,0851	446,12	610,6	2740,4	2129,8	1,791	6,884	5,093
4,5000	147,92	1,0883	413,86	623,2	2744,0	2120,8	1,820	6,857	5,037
4,7597	150,00	1,0906	392,57	632,2	2746,5	2114,4	1,842	6,838	4,997
5,0000	151,85	1,0926	374,77	640,1	2748,7	2108,6	1,860	6,822	4,962
5,4331	155,00	1,0962	346,65	653,8	2752,5	2098,7	1,892	6,794	4,902
5,5000	155,47	1,0967	342,57	655,8	2735,0	2097,2	1,897	6,790	4,893
6,0000	158,84	1,1007	315,56	670,4	2756,8	2086,4	1,931	6,761	4,830
6,1805	160,00	1,1021	306,85	675,5	2758,1	2082,7	1,942	6,751	4,808
6,5000	161,99	1,1045	292,57	684,1	2760,3	2076,2	1,962	6,734	4,772
7,0000	164,96	1,1080	272,76	697,1	2763,5	2066,4	1,992	6,709	4,717
7,0076	165,00	1,1081	272,48	697,3	2763,5	2066,3	1,992	6,708	4,716
7,5000	167,76	1,1115	255,50	709,3	2766,4	2057,1	2,020	6,685	4,665
7,9203	170,00	1,1144	242,62	719,1	2768,7	2049,6	2,042	6,667	4,625
8,0000	170,41	1,1149	240,32	720,9	2769,1	2048,2	2,046	6,663	4,617
8,5000	172,94	1,1181	226,88	732,0	2771,5	2039,5	2,070	6,643	4,573
8,9247	175,00	1,1208	216,60	741,1	2773,5	2032,4	2,091	6,626	4,535
9,0000	175,36	1,1213	214,87	742,6	2773,8	2031,2	2,094	6,623	4,529
9,5000	177,67	1,1243	204,09	752,8	2776,0	2023,2	2,117	6,604	4,487
10,0271	180,00	1,1275	193,85	763,1	2778,0	2014,9	2,139	6,586	4,446
10,5000	182,01	1,1302	185,51	772,0	2779,8	2007,8	2,159	6,570	4,411

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA HUMEDO (Continuación)

Presión sat.	Temp. sat.	Volumen	Volumen	Entalpía	Entalpía	Entalpía	Entropía	Entropía	Entropía
bars	°C	v' (dm³/Kg)	v'' (dm³/Kg)	i' (kJ/Kg)	i'' (kJ/Kg)	r _(1-v) (kJ/Kg)	s' (kJ/Kg. °K)	s'' (kJ/Kg. °K)	s (kJ/Kg. °K)
11,0000	184,06	1,1331	177,44	781,1	2781,5	2000,4	2,179	6,554	4,375
11,5000	186,04	1,1359	170,05	789,9	2783,1	1993,2	2,198	6,538	4,340
12,0000	187,96	1,1386	163,25	798,4	2784,6	1986,2	2,216	6,523	4,307
12,5000	189,81	1,1412	156,98	806,7	2786,0	1979,3	2,234	6,508	4,274
13,0000	191,60	1,1438	151,17	814,7	2787,3	1972,6	2,251	6,495	4,244
13,5000	193,34	1,1464	145,79	822,2	2788,5	1966,0	2,268	6,482	4,214
14,0000	195,04	1,1400	140,77	830,0	2789,7	1959,6	2,284	6,469	4,186
14,5000	196,68	1,1514	136,08	837,4	2790,8	1953,4	2,299	6,457	4,158
15,0000	198,28	1,1539	131,70	844,6	2791,8	1917,1	2,314	6,445	4,130
15,5510	200,00	1,1565	127,29	852,4	2792,8	1940,4	2,331	6,431	4,101
16,0000	201,37	1,1586	123,73	858,5	2793,6	1935,1	2,344	6,422	4,078
17,0000	204,30	1,1633	116,66	871,8	2795,2	1923,4	2,371	6,400	4,028
17,2450	205,00	1,1644	115,05	875,0	2795,6	1920,6	2,378	6,394	4,017
18,0000	207,10	1,1678	110,36	884,5	2796,6	1912,1	2,398	6,379	3,981
19,0000	209,79	1,1722	104,69	896,8	2797,8	1901,1	2,423	6,359	3,936
19,0800	210,00	1,1726	104,27	897,7	2797,9	1900,2	2,425	6,358	3,933
20,0000	212,37	1,1766	99,57	908,6	2798,9	1890,4	2,447	6,340	3,893
21,0000	214,85	1,1809	94,93	919,9	2799,8	1879,9	2,470	6,322	3,852
21,0630	215,00	1,1812	94,65	920,6	2799,8	1879,3	2,471	6,321	3,850
22,0000	217,24	1,1851	90,69	930,9	2800,6	1869,7	2,492	6,305	3,813
23,0000	219,55	1,1892	86,80	941,6	2801,3	1859,7	2,514	6,288	3,775
23,2010	220,00	1,1900	86,06	943,7	2801,4	1857,8	2,518	6,285	3,767
24,0000	221,78	1,1932	83,23	951,9	2801,9	1850,0	2,534	6,272	3,738
25,0000	223,94	1,1972	19,94	961,9	2802,3	1840,4	2,554	6,257	3,702
25,5040	225,00	1,1992	78,31	966,9	2802,5	1835,6	2,564	6,249	3,685
27,5000	229,06	1,2069	72,71	985,9	2803,1	1817,2	2,602	6,220	3,618
27,9790	230,00	1,2087	71,47	990,3	2803,2	1812,9	2,610	6,213	3,603
30,0000	233,84	1,2163	66,65	1008,3	2803,4	1795,0	2,645	6,186	3,541
30,6350	235,00	1,2187	65,27	1013,8	2803,4	1789,5	2,656	6,178	3,522
32,5000	238,32	1,2256	61,49	1029,6	2803,2	1773,7	2,687	6,154	3,468
33,4800	240,00	1,2291	59,67	1037,6	2803,1	1765,5	2,702	6,142	3,440
35,0000	242,54	1,2345	57,05	1049,8	2802,7	1753,0	2,725	6,125	3,399
36,5240	245,00	1,2399	54,62	1061,6	2802,2	1740,7	2,748	6,107	3,359
37,5000	246,54	1,2433	53,17	1069,0	2801,9	1732,9	2,762	6,096	3,335
39,7760	250,00	1,2512	50,06	1085,8	2800,9	1715,1	2,793	6,072	3,278
40,0000	250,33	1,2520	49,77	1087,4	2800,8	1713,4	2,797	6,070	3,273
42,5000	253,95	1,2606	46,75	1105,1	2799,4	1694,3	2,830	6,044	3,214
43,2450	255,00	1,2631	45,91	1110,2	2799,0	1688,7	2,839	6,032	3,197
45,0000	257,41	1,2690	44,05	1122,1	2797,8	1675,7	2,861	6,020	3,158
46,9400	260,00	1,2755	42,15	1134,9	2796,4	1661,5	2,885	6,001	3,116
47,5000	260,73	1,2774	41,63	1138,9	2796,0	1657,4	2,892	5,996	3,104
50,0000	263,92	1,2857	39,44	1154,5	2794,0	1639,5	2,921	5,973	3,053
50,8720	265,00	1,2886	38,72	1159,9	2793,3	1633,3	2,931	5,966	3,035
55,0000	269,94	1,3021	35,60	1184,9	2789,5	1604,6	2,976	5,930	2,955
55,0510	270,00	1,3023	35,63	1185,2	2789,4	1604,2	2,976	5,930	2,954
59,4870	275,00	1,3168	32,74	1210,8	2784,9	1574,0	3,022	5,894	2,872
60,0000	275,56	1,3185	32,44	1213,7	2784,3	1570,6	3,027	5,890	2,862
64,1920	280,00	1,3321	30,13	1236,8	2779,6	1542,5	3,068	5,857	2,789
65,0000	280,83	1,3347	29,72	1241,1	2788,6	1537,5	3,076	5,851	2,775
69,1750	285,00	1,3483	27,74	1263,1	2773,4	1510,3	3,114	5,820	2,706
70,0000	285,80	1,3510	27,37	1267,4	2772,3	1540,9	3,122	5,814	2,692
74,4490	290,00	1,3655	25,54	1289,9	2766,3	1476,4	3,161	5,783	2,622
75,0000	290,51	1,3673	25,32	1292,6	2765,6	1472,9	3,166	5,779	2,613
80,0000	294,98	1,3838	23,52	1317,0	2758,3	1441,3	3,207	5,744	2,537
85,0000	299,24	1,4005	21,92	1340,6	2750,7	1410,1	3,248	5,711	2,463
85,9170	300,00	1,4036	21,64	1344,9	2749,2	1404,3	3,255	5,105	2,450

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA HUMEDO (Continuación)

Presión sat.	Temp. sat.	Volumen	Volumen	Entalpía	Entalpía	Entalpía	Entropía	Entropía	Entropía
bars	°C	v' (dm³/Kg)	v'' (dm³/Kg)	i' (kJ/Kg)	i'' (kJ/Kg)	$r_{(1-v)}$ (kJ/Kg)	s' (kJ/Kg.°K)	s'' (kJ/Kg.°K)	s (kJ/Kg.°K)
90,0000	303,31	1,4174	20,48	1363,5	2742,5	1379,0	3,286	5,679	2,392
92,1400	305,00	1,4247	19,92	1373,2	2738,9	1365,8	3,302	5,665	2,362
95,0000	307,22	1,4346	19,19	1385,9	2733,9	1348,0	3,324	5,647	2,323
98,7000	310,00	1,4475	18,32	1402,1	2727,2	1325,2	3,351	5,623	2,272
100,0000	310,96	1,4521	18,02	1407,7	2724,8	1317,1	3,360	5,615	2,255
105,6100	315,00	1,4722	16,83	1431,7	2714,1	1282,4	3,400	5,580	2,180
110,0000	318,04	1,4883	15,98	1450,1	2705,5	1255,4	3,430	5,553	2,123
112,9000	320,00	1,4992	15,45	1462,2	2699,6	1237,5	3,449	5,535	2,086
120,0000	324,64	1,5266	14,26	1491,2	2684,7	1193,5	3,496	5,493	1,997
120,5700	325,00	1,5289	14,17	1493,5	2683,5	1190,0	3,500	5,489	1,989
128,6500	330,00	1,5620	12,97	1526,0	2665,5	1139,5	3,552	5,441	1,889
130,0000	330,81	1,5678	12,78	1531,4	2662,3	1131,0	3,561	5,433	1,873
137,1400	335,00	1,5990	11,84	1559,7	2645,2	1085,5	3,605	5,390	1,785
140,0000	336,63	1,6115	11,49	1571,0	2638,0	1067,0	3,623	5,373	1,750
146,0000	340,00	1,6390	10,78	1594,8	2622,0	1027,2	3,661	5,366	1,675
150,0000	342,12	1,6580	10,35	1610,1	2611,3	1001,1	3,685	5,312	1,627
155,4800	345,00	1,6860	9,77	1631,8	2595,4	963,6	3,718	5,277	1,559
160,0000	347,32	1,7100	9,32	1649,7	2581,6	931,9	3,746	5,248	1,502
165,3700	350,00	1,7410	8,81	1671,2	2564,2	893,0	3,779	5,212	1,433
170,0000	352,26	1,7690	8,38	1690,0	2548,3	858,4	3,808	5,181	1,372
175,7700	355,00	1,8070	7,87	1713,9	2527,0	813,1	3,844	5,138	1,294
180,0000	356,96	1,8380	7,51	1731,8	2510,4	778,6	3,872	5,108	1,236
186,7400	360,00	1,8940	6,94	1761,5	2481,1	719,6	3,916	5,053	1,136
190,0000	361,44	1,9230	6,67	1776,5	2465,7	689,2	3,941	5,027	1,086
198,3000	365,00	2,0160	5,99	1817,5	2420,9	603,4	4,001	4,946	0,945
200,0000	365,71	2,0390	5,85	1826,6	2410,5	583,9	4,014	4,928	0,914
210,0000	369,79	2,2130	4,98	1888,5	2335,6	447,1	4,108	4,803	0,695
220,0000	373,71	2,6900	3,68	2007,9	2178,0	170,1	4,289	4,552	0,263

13.- CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA RECALENTADO

v = volumen específico en (dm³/Kg)

i = entalpía específica en (kJ/Kg)

s = entropía específica en (kJ/Kg°K)

T(°C)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
p(bar)=0,01 ; Ts= 6,98°C															
v)	1,0002	149097	172192	195277	218357	241436	264514	287591	310661	333737	356813	379889	402965	426041	449117
i)	0	2595	2689	2784	2880	2978	3077	3178	3280	3384	3489	3597	3706	3816	3929
s)	0	9,241	9,512	9,751	9,966	10,163	10,344	10,512	10,67	10,819	10,96	11,094	11,223	11,346	11,465
p(bar)=0,1 ; Ts= 45,83°C															
v)	1,0002	14870	17198	19514	21826	24136	26446	28755	31063	33371	35679	37988	40296	42603	44911
i)	0	2592	2688	2783	2880	2977	3077	3177	3280	3384	3489	3597	3706	3816	3929
s)	0	8,173	8,447	8,688	8,903	9,1	9,281	9,449	9,607	9,756	9,897	10,032	10,16	10,284	10,402
p(bar)=0,5 ; Ts= 81,35°C															
v)	1,0002	1,0121	3420	3890	4356	4821	5284	5747	6209	6672	7134	7596	8058	8519	8981
i)	0	209,3	2683	2780	2878	2976	3076	3177	3279	3383	3489	3596	3705	3816	3929
s)	0	0,703	7,694	7,94	8,158	8,355	8,537	8,705	8,864	9,013	9,154	9,289	9,417	9,541	9,659
p(bar)=1 ; Ts= 99,63°C															
v)	1,0001	1,0121	1696	1937	2173	2406	2639	2871	3103	3334	3565	3797	4028	4259	4490
i)	0,1	209,3	2676	2777	2876	2975	3075	3176	3278	3382	3488	3596	3705	3816	3928
s)	0	0,703	7,36	7,614	7,834	8,033	8,215	8,384	8,543	8,692	8,834	8,968	9,097	9,22	9,339
p(bar)=1,5 ; Ts= 114,4°C															
v)	1,0001	1,012	1,0434	1286	1445	1601	1757	1912	2067	2222	2376	2530	2685	2839	2993
i)	0,1	209,4	419,2	2773	2873	2973	3073	3175	3277	3382	3488	3595	3704	3815	3928
s)	0	0,703	1,307	7,42	7,643	7,843	8,027	8,196	8,355	8,504	8,646	8,781	8,909	9,033	9,152
p(bar)=2,0 ; Ts= 120,23°C															
v)	1,0001	1,012	1,0434	960,2	1081	1199	1316	1433	1549	1665	1781	1897	2013	2129	2244
i)	0,2	209,4	419,3	2770	2871	2971	3072	3174	3277	3381	3487	3595	3704	3815	3928
s)	0	0,703	1,307	7,28	7,507	7,708	7,892	8,062	8,221	8,371	8,513	8,648	8,776	8,9	9,019
p(bar)=2,5 ; Ts= 127,40°C															
v)	1,0001	1,012	1,0433	764,7	862,3	957,5	1052	1145	1239	1332	1424	1517	1610	1703	1795
i)	0,2	209,5	419,3	2766	2869	2970	3071	3173	3276	3380	3487	3594	3704	3815	3927
s)	0	0,703	1,307	7,17	7,4	7,603	7,788	7,958	8,117	8,267	8,409	8,544	8,673	8,797	8,916
p(bar)=3,0 ; Ts= 133,54°C															
v)	1	1,012	1,0433	634,2	716,6	796,5	875,4	953,4	1031	1109	1187	1264	1341	1419	1496
i)	0,3	209,5	419,4	2762	2806	2968	3070	3172	3275	3380	3486	3594	3703	3814	3927
s)	0	0,703	1,307	7,078	7,312	7,517	7,702	7,873	8,032	8,182	8,324	8,46	8,589	8,712	8,831
p(bar)=4,0 ; Ts= 143,63°C															
v)	1	1,0119	1,0433	471	534,5	595,3	654,9	713,9	772,5	831,1	889,3	947,4	1005	1063	1121
i)	0,4	209,6	419,4	2753	2862	2965	3067	3170	3274	3378	3485	3593	3703	3814	3927
s)	0	0,703	1,307	6,929	7,172	7,379	7,566	7,738	7,898	8,048	8,326	8,326	8,455	8,579	8,698
p(bar)=5,0 ; Ts= 151,85°C															
v)	0,9999	1,0119	1,0432	1,0905	425,2	474,5	522,6	570,1	617,2	664,1	710,8	757,5	804	850,4	896,9
i)	0,5	209,7	419,4	632,2	2857	2962	3065	3168	3272	3377	3484	3592	3702	3813	3926
s)	0	0,703	1,307	1,842	7,06	7,271	7,46	7,633	7,793	7,944	8,087	8,222	8,351	8,475	8,595
p(bar)=6,0 ; Ts= 158,84°C															
v)	0,9999	1,0118	1,0432	1,0905	352,2	394	434,4	474,3	513,6	552,8	591,9	630,8	669,7	708,4	747,1
i)	0,6	209,8	419,4	632,2	2851	2958	3062	3166	3270	3376	3483	3591	3701	3812	3925
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,968	7,182	7,373	7,546	7,707	7,858	8,001	8,131	8,267	8,391	8,51
p(bar)=7,0 ; Ts= 164,96°C															
v)	0,999	1,0118	1,0431	1,0904	300,1	336,4	371,4	405,8	439,7	473,4	503,9	540,4	573,7	607	640,7
i)	0,7	209,9	419,5	632,3	2846	2955	3060	3164	3269	3374	3482	3590	3700	3812	3925
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,888	7,106	7,298	7,473	7,634	7,786	7,929	8,065	8,195	8,319	8,438
p(bar)=8,0 ; Ts= 170,41°C															
v)	0,9998	1,0118	1,0431	1,0903	261	293,3	324,2	354,4	384,2	413,8	443,2	472,5	501,8	530,9	560
i)	0,8	209,9	419,6	632,3	2840	2951	3057	3162	3267	3373	3481	3589	3699	3811	3924
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,817	7,04	7,233	7,409	7,571	7,723	7,866	8,003	8,132	8,257	8,376

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA RECALENTADO

Continuación

T(°C)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
p(bar)=9,0 ; Ts= 175,36 °C															
v)	0,9997	1,0117	1,043	1,0903	230,5	259,7	287,4	314,4	341	367,4	393,7	419,8	445,8	471,7	497,6
i)	0,9	210	419,7	632,4	2835	2948	3055	3160	3266	3372	3480	3588	3699	3810	3924
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,753	6,98	7,176	7,352	7,515	7,667	7,811	7,948	8,077	8,202	8,321
p(bar)=10 ; Ts= 179,9 °C															
v)	0,9997	1,0117	1,043	1,0902	206,1	232,8	258	282,5	306,5	330,3	354	377,6	401	424,4	447,7
i)	1	210,1	419,7	632,5	2829	2944	3052	3158	3264	3370	3478	3587	3698	3810	3923
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,695	6,926	7,124	7,301	7,464	7,617	7,761	7,898	8,028	8,153	8,272
p(bar) = 11,0 ; Ts= 184,06 °C															
v)	0,9996	1,0116	1,0429	1,0901	186,1	210,8	233,9	256,3	278,2	300	321,6	343	364,4	385,7	406,9
i)	1,1	210,2	419,8	632,5	2823	2940	3050	3156	3262	3369	3477	3587	3697	3809	3922
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,64	6,877	7,076	7,255	7,419	7,572	7,716	7,853	7,983	8,108	8,228
p(bar) = 12,0 ; Ts= 187,96 °C															
v)	0,9996	1,0116	1,0429	1,0901	169,4	192,4	213,9	234,5	254,7	274,7	294,5	314,2	333,8	353,4	372,9
i)	1,2	210,3	419,9	632,6	2817	2937	3047	3154	3261	3368	3476	3586	3696	3808	3922
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,59	6,831	7,033	7,212	7,377	7,53	7,675	7,812	7,943	8,067	8,187
p(bar) = 13,0 ; Ts= 191,60 °C															
v)	0,9995	1,0115	1,0428	1,09	155,2	176,9	196,9	216,1	234,8	253,3	271,7	289,9	308,8	326,1	344,1
i)	1,3	210,4	420	632,7	2810	2933	3044	3152	3259	3366	3475	3585	3695	3808	3921
s)	0	0,703	1,306	1,841	6,542	6,788	5,992	7,173	7,338	7,492	7,637	7,774	7,905	8,03	8,15
p(bar) = 14,0 ; Ts= 195,04 °C															
v)	0,9995	1,0115	1,0428	1,0899	143	163,6	182,3	200,3	217,7	235,1	252,1	269	285,9	302,7	319,4
i)	1,4	210,5	420	632,7	2803	2929	3042	3150	3257	3365	3474	3584	3695	3807	3921
s)	0	0,7031	1,3061	1,841	6,496	6,749	6,955	7,137	7,302	7,456	7,602	7,739	7,87	7,995	8,115
p(bar) = 15,0 ; Ts= 198,28 °C															
v)	0,9994	1,0114	1,0427	1,0899	132,4	152	169,7	186,5	202,9	219,1	235,1	250,9	266,7	282,4	298
i)	1,5	210,5	420,1	632,8	2796	2925	3039	3148	3256	3364	3473	3583	3694	3806	3920
s)	0	0,703	1,306	1,84	6,452	6,711	6,919	7,102	7,268	7,423	7,569	7,707	7,838	7,963	8,03
p(bar) = 16,0 ; Ts= 201,37 °C															
v)	0,9994	1,0114	1,0426	1,0898	1,1565	141,9	158,6	174,6	190	205,2	220,2	235,1	249,9	264,6	279,3
i)	1,6	210,6	420,2	632,8	852,4	2921	3036	3546	3254	3362	3472	3582	3693	3805	3919
s)	0	0,703	1,306	1,84	2,331	6,675	6,886	7,07	7,237	7,392	7,538	7,676	7,807	7,932	8,053
p(bar) = 17,0 ; Ts= 204,30 °C															
v)	0,9993	1,0114	1,0114	1,0898	1,0426	133	148,9	164	178,5	192,9	207,1	221,1	235,1	249	262,8
i)	1,7	210,7	420,3	632,9	852,4	2917	3033	3144	3252	3361	3471	3581	3692	3805	3919
s)	0	0,703	1,306	1,84	2,33	6,641	6,854	7,04	7,207	7,362	7,509	7,647	7,778	7,904	8,024
p(bar) = 18,0 ; Ts= 207,10 °C															
v)	0,9993	1,0113	1,0425	1,087	1,1563	125	140,2	154,6	168,4	182	195,4	208,7	221,9	235	248,1
i)	1,8	210,8	420,3	633	852,5	2913	3031	3142	3251	3360	3470	3580	3691	3804	3918
s)	0	0,703	1,306	1,00	0,84	2,33	6,609	6,824	7,011	7,179	7,335	7,000	482	7,62	7,751
p(bar) = 19,0 ; Ts= 209,79 °C															
v)	0,9992	1,0113	1,0425	1,0896	1,1562	117,9	132,5	146,1	159,3	172,2	185	197,6	210,1	222,6	235
i)	1,9	210,9	420,4	633	852,8	2909	3028	3140	3249	3358	3468	3579	3691	3803	3918
s)	0	0,703	1,305	1,84	2,33	6,578	6,795	6,983	7,152	7,308	7,456	7,594	7,726	7,851	7,972
p(bar) = 20,0 ; Ts= 212,37 °C															
v)	0,9992	1,0112	1,0424	1,0896	1,1561	111,5	125,5	138,6	151,1	163,4	175,6	187,6	199,S	211,4	223,2
i)	2	211	420,5	633,1	852,6	2904	3025	3138	3248	3357	3467	3578	3690	3803	3917
s)	0	0,703	1,305	1,84	2,33	6,547	6,768	6,957	7,126	7,283	7,431	7,57	7,701	7,827	7,948
p(bar) = 22,0 ; Ts= 217,24 °C															
v)	0,9991	1,0111	1,0423	1,0894	1,1559	100,4	113,4	125,5	137	148,3	159,4	170,3	181,2	192	202,8
i)	2,2	211,1	420,6	633,2	852,6	2896	3019	3134	3244	3354	3465	3576	3688	3801	3916
s)	0	0,703	1,305	1,840	2,33	6,49	6,716	6,908	7,079	7,236	7,385	7,524	7,656	7,782	7,903
p(bar) = 24,0 ; Ts= 221,78 °C															
v)	0,999	1,011	1,0422	1,0893	1,1557	91,13	103,3	114,5	125,2	135,6	145,8	155,9	165,9	175,9	185,7
i)	2,4	211,3	420,8	635,3	852,7	2887	3014	3130	3241	3352	3463	3574	3687	3800	3915
s)	0	0,703	1,305	1,84	2,329	6,437	6,669	6,863	7,035	7,194	7,342	7,482	7,615	7,741	7,862

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA RECALENTADO

Continuación

T °C	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
p(bar) = 26,0 ; Ts= 226,00 °C															
v)	0,9988	1,0110	1,0421	1,0892	1,1555	33,26	94,82	105,3	115,2	124,9	134,4	143,8	153	162,2	171,3
i)	2,6	211,5	420,9	633,5	852,8	2877	3008	3125	3238	3349	3461	3573	3685	3799	3913
s)	0	0,702	1,305	1,839	2,329	5,385	6,624	6,821	6,994	7,154	7,303	7,443	7,576	7,703	7,824
p(bar) = 28,0 ; Ts= 230,00 °C															
v)	0,9987	1,0109	1,042	1,0891	1,1553	76,49	87,5	97,38	106,7	115,7	124,6	133,3	142	150,5	159
i)	2,8	211,7	421,1	633,6	852,9	2868	3002	3121	3234	3346	3458	3571	3683	3797	3912
s)	0	0,702	1,305	1,839	2,329	6,336	6,581	6,781	6,956	7,117	7,267	7,408	7,541	7,667	7,689
p(bar) = 30,0 ; Ts= 233,84 °C															
v)	0,9986	1,0108	1,0419	1,0889	1,1551	70,61	81,15	90,51	99,28	107,8	116,1	124,3	132,4	140,4	148,3
i)	3	211,8	421,2	633,7	852,9	2858	2995	3117	3231	3343	3456	3569	3682	3796	3911
s)	0	0,702	1,305	1,839	2,328	6,289	6,541	6,744	6,921	7,082	7,233	7,374	7,507	7,634	7,756
p(bar)= 32 ; Ts= 237,4°C															
v)	0,9985	1,0107	1,0418	1,0888	1,1549	75,43	78,59	84,49	92,8	100,8	108,7	116,41	124	131,5	139
i)	3,2	212	421,4	633,8	853	2847	2989	3112	3227	3341	3454	3567	3680	3794	3910
s)	0	0,702	1,305	1,839	2,328	5,243	6,503	6,709	6,887	7,05	7,201	7,343	7,476	7,603	7,725
p(bar)= 34 ; Ts= 240,9°C															
v)	0,9984	1,0106	1,0417	1,0887	1,1547	60,84	70,67	79,18	87,08	94,69	102,1	109,4	116,6	123,7	130,7
i)	3,4	212,2	421,5	634	853,1	2836	2983	3108	3224	3328	3451	3565	3679	3793	3909
s)	0	0,702	1,304	1,838	2,328	6,198	6,466	6,675	6,855	7,019	7,171	7,313	7,447	7,574	7,696
p(bar)= 36 ; Ts= 244,2°C															
v)	0,9983	1,0105	1,0416	1,0885	1,1545	56,73	66,3	74,46	81,99	89,23	96,27	103,2	110,1	116,7	123,4
i)	3,6	212,3	421,7	634,1	853,2	2825	2976	3103	3221	3335	3449	3563	3677	3792	3907
s)	0	0,702	1,304	1,838	2,327	6,154	6,431	6,644	6,825	6,99	7,142	7,285	7,419	7,547	7,669
p(bar)= 38 ; Ts= 247,3°C															
v)	0,9982	1,0104	1,0415	1,0884	1,1543	53,03	62,37	70,23	77,44	81,35	91,05	97,61	104,1	110,5	116,8
i)	3,8	212,5	421,8	634,2	853,3	2813	2970	3099	3217	3332	3447	3561	3675	3790	3906
s)	0	0,702	1,304	1,838	2,327	6,11	6,397	6,613	6,796	6,962	7,115	7,258	7,393	7,521	7,643
p(bar)= 40 ; Ts= 250,33°C															
v)	0,9981	1,0103	1,0414	1,0883	1,1541	1,2511	58,84	66,42	73,34	79,95	86,35	92,61	98,77	104,9	110,9
i)	4	212,7	422	634,3	853,4	1085,8	2963	3094	3214	3330	3445	3559	3674	3789	3905
s)	0	0,702	1,304	1,838	2,327	2,793	6,364	6,584	6,769	6,935	7,089	7,233	7,368	7,496	7,618
p(bar)= 44 ; Ts= 256,0°C															
v)	0,9979	1,0102	1,0412	1,0881	1,1537	1,2503	52,71	59,84	66,26	72,35	78,24	83,98	89,61	95,18	100,7
i)	4,4	213	422,3	634,6	853,6	1085,8	2949	3085	3207	3324	3440	3555	3671	3786	3902
s)	0	0,702	1,304	1,837	2,326	2,792	6,301	6,528	6,717	6,886	7,04	7,185	7,321	7,449	7,572
p(bar)= 48 ; Ts= 261,4°C															
v)	0,9977	1,01	1,041	1,0878	1,1533	1,2496	47,58	54,34	60,36	66,02	71,47	76,78	81,98	87,11	92,18
i)	4,8	213,4	422,6	634,8	853,7	1085,7	2935	3075	3199	3319	3435	3552	3667	3783	3900
s)	0	0,701	1,303	1,837	2,326	2,791	6,241	6,476	6,669	6,84	6,996	7,141	7,278	7,407	7,53
p(bar)= 52 ; Ts= 266,4°C															
v)	0,9975	1,0098	1,0408	1,0876	1,1529	1,2489	43,22	49,68	55,35	60,66	65,75	70,69	75,52	80,28	84,98
i)	5,2	213,7	422,9	635,1	853,9	1085,7	2919	3065	3192	3313	3431	3548	3664	3780	3898
s)	0	0,701	1,303	1,836	2,325	2,79	6,183	6,427	6,624	6,797	6,954	7,101	7,238	7,368	7,491
p(bar)= 56 ; Ts= 271,1°C															
v)	0,9973	1,0096	1,0406	1,0873	1,1525	1,2481	39,45	45,68	51,06	56,07	60,84	65,47	69,98	74,43	78,81
i)	5,6	214,1	423,2	635,3	854,1	1085,7	2904	3055	3185	3307	3426	3544	3661	3778	3895
s)	0	0,701	1,303	1,836	2,324	2,789	6,126	6,38	6,581	6,757	6,916	7,063	7,201	7,331	7,455
p(bar)= 60 ; Ts= 275,56°C															
v)	0,9971	1,0095	1,0404	1,0871	1,1522	1,2474	36,16	42,2	47,34	52,08	56,59	60,94	65,19	69,35	73,47
i)	6	214,4	423,5	635,6	854,2	1085,7	2887	3045	3177	3301	3421	3540	3657	3775	3893
s)	0	0,701	1,302	1,836	2,124	2,788	6,071	6,336	6,541	6,719	6,879	7,028	7,166	7,297	7,421
p(bar)= 64 ; Ts= 279,8°C															
v)	0,9969	1,0093	1,0402	1,0869	1,1518	1,2467	33,25	39,16	44,08	48,6	52,87	56,98	60,99	64,92	68,79
i)	6,5	214,8	423,8	635,8	854,4	1085,7	2869	3034	3170	3296	3417	3536	3654	3772	3890
s)	0	0,701	1,302	1,835	2,323	2,788	6,016	6,293	6,502	6,683	6,845	6,995	7,134	7,265	7,39

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA RECALENTADO

Continuación

T°C	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
p(bar)= 68 ; Ts= 283,8°C															
v)	0,9967	1,0091	1,04	1,0866	1,1514	1,246	30,65	36,46	41,21	45,52	49,58	53,49	57,28	61	64,66
i)	6,9	215,1	424,1	636,1	854,6	1085,7	2851	3024	3162	3290	3412	3532	3651	3769	3888
s)	0	0,7	1,302	1,835	2,323	2,787	5,961	6,251	6,466	6,649	6,812	6,963	7,103	7,235	7,36
p(bar)= 72 ; Ts= 287,7°C															
v)	0,9965	1,0089	1,0398	1,0864	1,151	1,2453	28,31	34,05	38,64	42,78	46,66	50,38	53,99	57,22	60,99
i)	7,3	215,4	424,4	636,3	854,7	1085,7	2831	3013	3154	3284	3407	3528	3648	3766	3885
s)	0	0,7	1,301	1,834	2,322	2,786	5,906	6,211	6,431	6,616	6,781	6,933	7,074	7,206	7,331
p(bar)= 76 ; Ts= 291,4°C															
v)	0,9963	1,0088	1,0396	1,0861	1,1506	1,2446	26,18	31,89	36,35	40,33	44,05	47,6	51,04	54,41	57,71
i)	7,7	215,8	424,7	636,6	854,9	1085,7	2810	3001	3147	3278	3402	3524	3644	3764	3833
s)	0	0,7	1,301	1,834	2,321	2,785	5,85	6,171	6,397	6,585	6,751	6,904	7,046	7,179	7,305
p(bar)= 80 ; Ts= 295,0°C															
v)	0,9961	1,0056	1,0394	1,0859	1,1502	1,2439	24,23	29,94	34,29	38,12	41,7	45,1	48,39	51,6	54,76
i)	8,1	216,1	425	636,8	855,1	1085,7	2787	2990	3139	3272	3398	3520	3641	3761	3881
s)	0	0,7	1,301	1,833	2,321	2,784	5,793	6,133	6,364	6,555	6,723	6,877	7,019	7,153	7,279
p(bar)= 84 ; Ts= 298,4°C															
v)	0,9959	1,0084	1,0392	1,0856	1,1498	1,2432	22,43	28,16	32,41	36,12	39,57	42,84	45,99	49,07	52,08
i)	8,5	216,5	425,3	637,1	855,3	1085,7	2763	2977	3131	3266	3393	3516	3638	3758	3878
s)	0	0,7	1,301	1,833	2,32	2,783	5,734	6,095	6,332	6,526	6,696	6,851	6,994	7,128	7,254
p(bar)= 88 ; Ts= 301,7°C															
v)	0,9958	1,0082	1,039	1,0854	1,1495	1,2426	1,403	26,54	30,7	34,31	37,63	40,78	43,81	46,76	49,66
i)	8,9	216,8	425,6	637,3	855,4	1085,7	1345	2965	3122	3260	3388	3513	3634	3755	3876
s)	0	0,7	1,3	1,832	2,32	2,782	3,254	6,058	6,301	6,498	6,669	6,826	6,969	7,104	7,231
p(bar)= 92; Ts= 304,9°C															
v)	0,9956	1,0081	1,0388	1,0851	1,1492	1,2419	1,401	25,05	29,14	32,65	35,86	38,9	41,82	44,66	47,44
i)	9,3	217,2	425,9	637,6	855,6	1085,7	1344	2952	3114	3253	3383	3509	3631	3752	3873
s)	0	0,699	1,3	1,832	2,319	2,781	3,252	6,021	6,271	6,471	6,644	6,802	6,946	7,081	7,209
p(bar)= 96; Ts= 308,0°C															
v)	0,9954	1,0079	1,0385	1,0849	1,1487	1,2412	1,399	23,68	27,71	31,12	34,24	37,18	39,99	42,73	45,4
i)	9,7	217,5	426,2	637,8	855,8	1085,8	1344	2939	3106	3247	3378	3504	3628	3749	3871
s)	0	0,699	1,3	1,832	2,318	2,78	3,25	5,984	6,243	6,445	6,62	6,778	6,923	7,059	7,187
p(bar)= 100; Ts= 310,96°C															
v)	0,9952	1,0077	1,0383	1,0846	1,1483	1,2405	1,397	22,41	26,39	29,72	32,75	35,59	38,31	40,95	43,23
i)	10,1	217,8	426,5	638,1	856	1085,8	1343	2926	3097	3241	3373	3500	3624	3746	3868
s)	0	0,699	1,299	1,831	2,318	2,779	3,248	5,947	6,213	6,419	6,596	6,756	6,902	7,038	7,166
p(bar)= 110; Ts= 318,04°C															
v)	0,9947	1,0073	1,0378	1,084	1,1474	1,2389	1,393	19,6	23,5	26,66	29,49	32,13	34,65	37,08	39,45
i)	11,1	218,7	427,3	638,7	856,4	1085,8	1342	2889	3075	3225	3360	3490	3616	3739	3862
s)	0	0,699	1,299	1,83	2,316	2,777	2,244	5,856	6,143	6,358	6,539	6,702	6,85	6,988	7,117
p(bar)= 120; Ts= 324,65°C															
v)	0,9942	1,0069	1,0373	1,0833	1,1464	1,2372	1,389	17,19	21,07	24,1	26,77	29,25	31,59	33,85	36,05
i)	12,1	219,6	428	639,3	856,8	1085,9	1341	2849	3052	3209	3348	3480	3607	3732	3856
s)	0	0,698	1,298	1,829	2,315	2,775	3,24	5,762	6,076	6,301	6,487	6,653	6,802	6,941	7,072
p(bar)= 130; Ts= 330,81°C															
v)	0,9937	1,0064	1,0368	1,0827	1,1455	1,2356	1,385	15,09	19,01	21,93	24,47	26,81	29,01	31,12	33,18
i)	13,1	220,4	428,8	639,9	857,3	1085,9	1340	2804	3028	3192	3335	3470	3599	3725	3850
s)	0,001	0,698	1,297	1,828	2,313	2,772	2,326	5,664	6,011	6,246	6,437	6,606	6,758	6,898	7,03
p(bar)= 140; Ts= 336,63°C															
v)	0,9932	1,006	1,0363	1,082	1,1446	1,2341	1,381	13,21	17,22	20,06	22,5	24,71	26,79	28,78	30,71
i)	14,1	221,3	429,6	640,6	857,7	1086	1339	2753	3003	3175	3322	3459	3590	3717	3843
s)	0,001	0,697	1,296	1,827	2,312	2,77	3,231	5,559	5,946	6,193	6,39	6,562	6,716	6,858	6,991
p(bar)= 150; Ts= 342,12°C															
v)	0,9928	1,0056	1,0358	1,0814	1,1436	1,2325	1,377	11,46	15,66	18,44	20,78	22,9	24,87	26,76	28,57
i)	15,1	222,1	430,3	641,2	858,2	1086,1	1338	2693	2977	3157	3309	3449	3581	3710	3837
s)	0,001	0,697	1,296	1,826	2,31	2,768	3,228	5,443	5,883	6,142	6,345	6,52	6,677	6,82	6,954

CONSTANTES TERMODINAMICAS DEL VAPOR DE AGUA RECALENTADO

Continuación

T(°C)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700
p(bar)= 160; Ts= 347,32°C															
v)	0,9923	1,0051	1,0353	1,0807	1,1427	1,2309	1,373	9,764	14,27	17,02	19,28	21,31	23,19	24,98	26,7
i)	16,1	223	431,1	641,8	858,6	1086,2	1338	2617	2949	3139	3295	3438	3573	3703	3831
s)	0,001	0,696	1,295	1,825	2,509	2,766	3,224	5,304	5,82	6,093	6,301	6,481	6,639	6,784	6,919
p(bar)= 170; Ts= 352,26°C															
v)	0,9918	1,0047	1,0349	1,0801	1,1418	1,2294	1,37	1,729	13,03	15,76	17,96	19,91	21,71	23,42	25,06
i)	17,1	223,8	431,8	642,5	859,1	1086,3	1337	1667	2920	3121	3281	3427	3564	3695	3825
s)	0,001	0,696	1,294	1,824	2,307	2,764	3,22	3,771	5,765	6,044	6,26	6,442	6,603	6,75	886
p(bar)= 180; Ts= 356,96°C															
v)	0,9914	1,0043	1,0344	1,0795	1,1409	1,2279	1,366	1,704	11,91	14,63	16,78	18,66	20,39	22,03	23,59
i)	18,1	224,7	432,6	643,1	859,6	1086,4	1336	1659	2888	3102	3268	3417	3555	3688	3818
s)	0,001	0,695	1,293	1,823	2,306	2,761	3,216	3,755	5,691	5,997	6,219	6,406	6,569	6,717	6,855
p(bar)= 190; Ts= 361,44°C															
v)	0,9909	1,0039	1,0539	1,0788	1,14	1,2264	1,363	1,683	10,89	13,62	15,72	17,54	19,21	20,78	22,28
i)	19,1	225,6	433,3	643,7	860	1086,6	1335	1653	2855	3082	3254	3406	3546	3680	3812
s)	0,001	0,695	1,293	1,822	2,305	2,759	3,213	3,742	5,625	5,95	6,18	6,371	6,536	6,686	6,825
p(bar)= 200; Ts= 365,7°C															
v)	0,9904	1,0034	1,0334	1,0782	1,1391	1,2249	1,36	1,665	9,95	12,7	14,77	16,54	18,15	19,66	21,1
i)	20,1	2264	434,1	644,4	860,5	1086,7	1335	1647	2819	3062	3239	3395	3537	3673	3806
s)	0,001	0,694	1,292	1,821	2,303	2,757	3,209	3,73	5,556	5,904	6,142	6,337	6,505	6,656	6,788
p(bar)= 210; Ts= 369,8°C															
v)	0,9899	1,003	1,0329	1,0776	1,1382	1,2235	1,356	1,649	9,076	11,87	13,9	15,63	17,19	18,65	20,03
i)	21,1	227,3	434,9	645	860,9	1086,9	1334	1642	2781	3041	3225	3383	3528	3665	3799
s)	0,001	0,694	1,291	1,819	2,302	2,755	3,206	3,719	5,484	5,858	6,105	6,303	6,474	6,627	6,768
p(bar)= 220; Ts= 373,7°C															
v)	0,9895	1,0026	1,325	1,077	1,1374	1,2221	1,353	1,635	8,254	11,11	13,12	14,8	16,32	17,73	19,06
i)	22,1	228,1	435,6	645,6	861,4	1087	1333	1637	2738	3020	3210	3372	3519	3658	3793
s)	0,001	0,693	1,29	1,818	2,3	2,753	3,203	3,709	5,409	5,813	6,068	6,271	6,444	6,599	6,742

TABLAS DE CONVERSION DE UNIDADES

LONGITUD					
metro m	milímetro mm	pulgada in (")	pie ft	yarda yd	milla (statute) mi
1	1000	39,3700787	3,2808399	1,0936133	0,00062137
0,001	1	0,0393701	0,0032808	0,0010936	0,00000062137
0,0254	25,4	1	0,08333	0,02777	0,000015782
0,3048	304,8	12	1	0,333	0,00018939
0,9144	914,4	36	3	1	0,00056818

SUPERFICIE					
metro cuadrado m ²	hectárea ha	pulgada cuadrada in ²	pie cuadrado ft ²	yarda cuadrada yd ²	acre
1	0,0001	1550,0031	10,76391	1,19599	0,00024711
10000	1	15500031	107639,1	0,0001196	2,4710538
0,0006,4516	0,00000006451	1	0,006944	0,0007716	0,00000015942
0,09290304	0,000009290351	144	1	0,111	0,000022957
0,8361274	0,000083613	1296	9	1	0,00020661
4046,856	0,4046856	6272640	43560	4840	1

VOLUMEN					
metro cúbico m ³	litro dm ³	pie cúbico ft ³	galón (USA) gal	galón imperial (GB) gal	barril de petróleo bbl (oil)
1	1000	35,3146667	264,17205	219,96923	6,2898108
0,001	1	0,0353147	0,2641721	0,2199692	0,0062898
0,0283168	28,3168466	1	7,4805195	6,2288349	0,1781076
0,0037854	3,7854118	0,1336806	1	0,8326741	0,0238095
0,0045461	4,5460904	0,1635437	1,20095	1	0,028594
1589873	158987295	56145833	42'	34,9723128	1

1 gal (USA) = 3,78541 dm³

1 ft³ = 0,0283 m³

UNIDADES DE PRESION					
kilopascal kN /m ²	atmósfera técnica Kgf/cm ²	milímetro de c. Hg (0°C)	metros de c. agua (4°C)	libras por pulgada ² lib/in ²	bar 100000 Pa
kPa	atm	mm Hg	m H ₂ O	psi	bar (hpz)
1	0,0101972	7,5006278	0,1019745	0,1450377	0,01
98,0665	1	735,560217	1000028	14,2233433	0,980665
0,1333222	0,0013595	1	0,0135955	193367	0,0013332
9,8063754	0,0999972	73,5539622	1	1,4222945	0,0980638
6,8947573	0,070307	51,7150013	0,7030893	1	0,0689476
100	1,0197162	750,062679	10,1974477	14,5037738	1

1 in H₂O (60°F = 15,55°C) = 0,248843 kP

in H₂O (60°F=20°C)=0,248641 kPa

1 atmósfera física (Atm)= 101,325 kPa=760 mm Hg

in Hg (60°F=20°C)=3,37685 kPa

1 Torr= (101,325/760) kPa

ENERGIA (Calor y Trabajo)					
Kilojulio	kW/hora	Horse power/hora USA 550 ft.lbf/seg	Caballo/hora 75 m.Kgf/seg	Kilocaloría (IT) Kcal(IT)	British Thermal Unit
kJ	kW h	hp. h	CV.h	Kcal (IT)	Btu (IT)
1	0,0002777	0,000372506	0,000377673	0,2388459	0,9478171
3600	1	1,3410221	1,3596216	859,84523	3412,1416
2684,5195	0,7456999	1	1,0138697	641,18648	2544,4336
2647,7955	0,7354988	0,9863201	1	632,41509	2509,6259
4,1868	0,001163	0,00155961	0,00158124	1	3,9683207
1,0550559	0,000293071	0,00039301	0,000398466	0,2519958	1
1 termia = 1000 Kca 1 therm = 100.000 Btu 1 But (IT) = 1055,0558 J 1 kilogramo fuerza.metro (m.Kgf) = 0,00980665 kJ IT se refiere a las unidades definidas en International Steam Ta					

MACROUNIDADES ENERGETICAS					
Terajulio	Gigavatio hora	Teracaloría (IT)	Ton. equivalente de carbón	Ton. equivalente de petróleo	Barril de petróleo día-año
TJ	GW h	Tcal (IT)	Tec	Tep	bd
1	0,2727	0,2388459	34,1208424	23,8845897	0,4955309
3,6	1	0,8598452	122,8350326	85,9845228	1,7839113
4,1868	1,163	1	142,8571429	100	2,0746888
0,0293076	0,008141	0,007	1	0,7	0,0145228
0,041868	0,01163	0,01	1,4285714	1	0,0207469
2,0180376	0,560568	0,482	68,8571429	48,2	1

POTENCIA					
Kilowatio	Kilocaloría/hora	Btu (IT)/hora	Horse power (USA)	Caballo vapor métrico	Tonelada de refrigeración
kW	Kcal (IT)/h	Btu (IT)/h	hp	CV	
1	859,84523	3412,1416	1,3410221	1,3596216	0,2843494
0,001163	1	3,9683207	0,0015596	0,0015812	0,0003307
0,00029307	0,2519958	1	0,00039301	0,00039847	0,000083335
0,7456999	641,18648	2544,4336	1	1,0138697	0,2120393
0,7354988	632,41509	2509,6259	0,9863201	1	0,2091386
3,5168	3023,9037	11999,82	4,7161065	4,7815173	1
1 caballo vapor (métrico) = 75 m kgf/seg = 735,499 W 1 Horse power (USA) mecánico = 550 ft lbf/seg					

TEMPERATURA
Temperatura en °C = (°F -32)/1,8
Temperatura en °F = 1,8 °C + 32
Temperatura en °K = °C + 273,14

PREFIXOS DEL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES																
Prefijo	exa	peta	tera	giga	mega	kilo	hecto	deca	deci	centi	mili	micro	nano	pico	femto	atto
Símbolo	E	P	T	G	M	k	h	da	d	c	m	μ	n	p	f	a
Factor	1e +18	1e +15	1e +12	1e +9	1e +6	1000	100	10	0,1	0,01	0,001	1e-6	1e-9	1e -12	1e -15	1e -18

BIBLIOGRAFIA

TRANSFERENCIA DE CALOR

A.F. Mills

ISBN 84-8086-194-0.- Ed McGraw-Hill/Irwin.INC., EE.UU.

LA TRANSMISION DEL CALOR: PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.-

F. Kreith; W.Z. Black

ISBN 84-205-0927-2, D.L. M.1014.- Ed Alhambra Universidad, Madrid 1983

TRANSMISSION DE LA CHALEUR.-

W.H. Mc Adams

Ed. Dunod, París 1964

CONVECTION HEAT TRANSFER.-

A. Bejan

ISBN 0-471-89612-8.- Ed John Wiley & Sons, Inc, New York 1984

HEAT CONDUCTION.-

James M. Hill; Jeffrey N. Dewynne

ISBN 0-632-01716-3.- Blackwell Scientific Publications, London 1987

CAMBIADORES DE CALOR.-

R. Gregorik

Ed Urmo 1968

UNIT OPERATIONS OF CHEMICAL ENGINEERING.-

W.L. McCabe; J.C.Smith

Ed McGraw-Hill, New York 1975

TRANSMISION DEL CALOR POR CONDUCCION.-

P.L.Luis

ISBN 84-300-9693-0 ; D. Legal M 28.725-83 Ed. Varicop 1983

HEAT TRANSFER.-

M. Necati Ozisik

ISBN 0-07-047982-8.- Ed McGraw-Hill Book Company 1985

TRANSMISION DEL CALOR.-

Alan J.Chapman

D.L. M 18571- Ed Interciencia.- Madrid 1968

HEAT TRANSFER FLUIDS AND SYSTEMS FOR PROCESS AND ENERGY APPLICATIONS.-

Jasbir Sinch

ISBN 0-8247-7191-5.- Ed. Marcel Dekker.- New York.- 1985

HEAT TRANSFER.- SCHAUM'S OUTLINE SERIES.-

Donald R. Pitts; Leighton E. Sissom

ISBN 0-07-050203-X.- Ed McGraw-Hill- New York 1977

THERMODYNAMIQUE TECHNIQUE: PRODUCTION ET TRANSFERT DE LA CHALEUR ECOULEMENTS.-

M. Bailly

Ed Bordas, 1971, n° 131.710.509

HEAT EXCHANGER SOURCE BOOK.-

J.W.Palen

ISBN 0-89116-451-0.- Ed Hemisphere Publishing Corporation, Londres 1986

POWER PLANT SYSTEM DESIGN.-

Kam W.Li; A. Paul Priddy

ISBN 0-471-88847-8.- Ed John Wiley & Sons, Inc, New York 1985

HEAT EXCHANGER DESIGN.-

Arthur P. Fraas

ISBN 0.471-62868-9.- Ed John Wiley & Sons, Inc, New York 1989

DESIGN OF THERMAL SYSTEMS.-

W.F. Stoecker

ISBN 0-07-061620.- Ed Hemisphere Publishing Corporation, New York 1989