

TEMA 2: APLICACIONES LINEALES

1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Sean $(V', +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ dos espacios vectoriales sobre K .

Una función $f: V \rightarrow V'$ será aplicación lineal si:

$$f \text{ aplicación lineal} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \end{cases} \Leftrightarrow f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

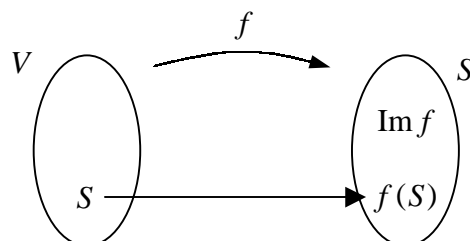
Ejercicio: Comprobar si las siguientes funciones son aplicaciones lineales:

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = (2x + y, 0)$
b) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $g(x, y) = (x^2 + y, y^2)$

- Las propiedades del conjunto V tras la función $f: V \rightarrow V'$ se siguen cumpliendo en el conjunto $\text{Im } f$, luego:

$\text{Im } f$ es **subespacio** de V'

- Si S es un sistema generador de V , entonces el conjunto $f(S)$ es un sistema generador de $\text{Im } f$.



Demostración:

$$\forall \vec{x} \in V \quad \begin{matrix} \exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in K \\ \exists \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \in S \end{matrix} / \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$$

Sea \vec{y} un vector de $\text{Im } f$. $\vec{y} \in \text{Im } f$.

$$\exists \vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{y}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n)$$

Como f es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= f(\lambda_1 \vec{x}_1) + \dots + f(\lambda_n \vec{x}_n) \\ \vec{y} &= \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{x}_n) \\ &\in f(S) \quad \in f(S) \end{aligned}$$

Así, el vector \vec{y} puede escribirse como una combinación lineal de vectores de $f(S)$

- Si B es una base de V y $f(B)$ es un sistema generador de V' , entonces la función f es **sobreyectiva**.
- Conociendo las imágenes de los vectores de una base de V conocemos la imagen de cualquier vector de V .

Ejemplo:

$$f: R^2 \rightarrow R^3$$

$B = \{(1,0), (1,1)\}$ es base de R^2

$$f(1,0) = (0,0,1)$$

$$f(1,1) = (1,0,0)$$

Para hallar la imagen de $(3,1)$:

$$f(3,1) = f(2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (1,1))$$

Como es aplicación lineal:

$$f(3,1) = 2f(1,0) + 1f(1,1) = 2(0,0,1) + 1(1,0,0) = (1,0,2)$$

Ejercicio: Generalizar la ley anterior para cualquier par $f(x_1, x_2)$.

Núcleo de una aplicación lineal

Tanto en V como en V' debe estar el vector nulo. Además, la imagen del vector nulo de V es el vector nulo de V' .

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

Demostración:

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0})$$

Como es una aplicación lineal:

$$f(\vec{0}) + f(\vec{0}) = f(\vec{0})$$

$$f(\vec{0}) = f(\vec{0}) - f(\vec{0})$$

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

El **núcleo** de una aplicación lineal se define como:

$$\text{Ker } f = \{\vec{x} \in V / f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

El vector nulo siempre pertenece al núcleo: $\vec{0} \in \text{Ker } f$

- $\text{Ker } f$ es un subespacio de V .
- f es **inyectiva** $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\vec{0}\}$
- $\dim(\text{Im } f) \leq \dim V'$
- $\dim(\text{Ker } f) \leq \dim V$
- $\dim(\text{Im } f) = \text{rango de } f = \text{rg } f$

Si S no es espacio vectorial, $\langle S \rangle$ sí que lo es, y además, su dimensión se llama rango de S : $\dim(\langle S \rangle) = \text{rg } S$

Sea B una base de V . $f(B)$ es generador de $\text{Im } f$: $\langle f(B) \rangle = \text{Im } f$

$$\text{rg } f(B) = \dim \langle f(B) \rangle = \dim(\text{Im } f) = \text{rg } f$$

El rango de una función es el rango del conjunto $f(B)$, donde B es cualquier base de V .

$$\dim V = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

- f es **sobreyectiva** $\Leftrightarrow \dim(\text{Im } f) = \dim V'$
- f es **inyectiva** $\Leftrightarrow \dim(\text{Ker } f) = 0$

Ejemplo:

$$f: R^4 \rightarrow R^3$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\dim R^4 = 4 \quad \dim R^3 = 3$$

$$\text{Ker } f = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\}$$

$$\text{Ker } f = \{(0, 0, 0, x_4) / x_4 \in R\} = \langle (0, 0, 0, 1) \rangle$$

$$\dim(\text{Ker } f) = 1$$

Como $\dim(\text{Ker } f) \neq 0$, no es inyectiva.

$$\dim V = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

$$4 = 1 + \dim(\text{Im } f) \rightarrow \dim(\text{Im } f) = 3$$

Como $\dim V' = \dim(\text{Im } f) = 3$, es sobreyectiva.

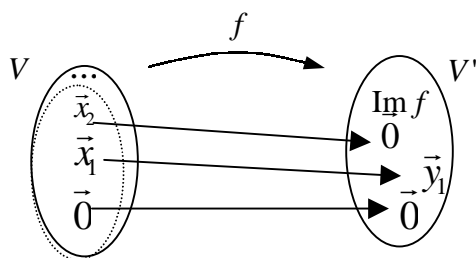
- f es **biyectiva** $\Leftrightarrow \dim V = \dim(\text{Im } f) = \dim V'$

Se dice entonces que f es un **isomorfismo**.

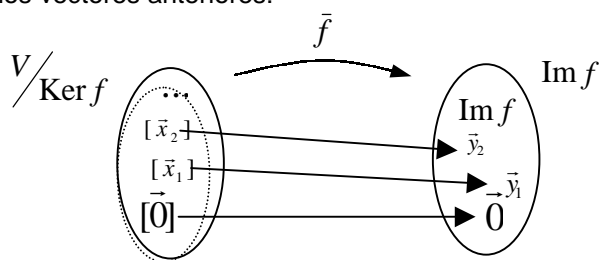
Ejercicio: Justificar que una función de V en V' no puede ser inyectiva y no sobreyectiva, y por otro lado, que no puede ser sobreyectiva y no inyectiva.

2. DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dado por ejemplo un vector $\vec{y}_1 \in \text{Im } f$, existe un conjunto de V formado por todos los vectores cuya imagen sea dicho vector. Esto se cumple igual para todos los vectores del conjunto imagen, pudiendo entonces dividirse el conjunto V en clases:



Se define entonces una nueva función \bar{f} , cuyo conjunto inicial son las clases de equivalencia de los vectores anteriores:



El conjunto original de la función \bar{f} es el **conjunto cociente**. La función \bar{f} es biyectiva, lo que da lugar a un **isomorfismo**.

Ejercicio: Demostrar que si $\vec{x} \in [\vec{x}]$ y $\vec{y} \in [\vec{x}]$ es porque $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$.

La relación entre las funciones anteriores puede verse con este diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \downarrow p & & \uparrow i \\ V/\text{Ker } f & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{Im } f \end{array}$$

Aparecen dos funciones nuevas, p y i , que se definen como:

- **función proyección:** p

$$p: V \rightarrow V/\text{Ker } f$$

$$p(\vec{x}) = [\vec{x}]$$

Esta función es sobreyectiva.

- **función inclusión:** i

$$i: \text{Im } f \rightarrow V'$$

$$i(\vec{x}) = \vec{x}$$

Además, está la función \bar{f} :

$$\bar{f}: V/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$$

$$\bar{f}([\vec{x}]) = f(\vec{x})$$

3. MATRICES Y APLICACIONES LINEALES

Las matrices se emplearán para poder realizar cambios entre dos bases distintas. Para comprender cómo funciona este método, se verá un ejemplo:

- *Ejemplo:*

$$f: R^3 \rightarrow R^2$$

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ base de } R^3$$

$$B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ base de } R^2$$

$$f(\vec{e}_1) = (1, 0) \text{ respecto de } B'$$

$$f(\vec{e}_2) = (1,1) \text{ respecto de } B'$$

$$f(\vec{e}_3) = (0,1) \text{ respecto de } B'$$

Dado un vector $\vec{x} \in R^3$, su imagen $f(\vec{x}) = \vec{y} \in R^2$. Considerando los vectores como matrices columna:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La relación entre ambos vectores es:

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)$$

Como se trata de una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} (y_1, y_2) &= x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3) \\ (y_1, y_2) &= x_1(1,0) + x_2(1,1) + x_3(0,1) = (x_1, 0) + (x_2, x_2) + (0, x_3) \\ (y_1, y_2) &= (x_1 \cdot \mathbf{1} + x_2 \cdot \mathbf{1} + x_3 \cdot \mathbf{0}, x_1 \cdot \mathbf{0} + x_2 \cdot \mathbf{1} + x_3 \cdot \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Estos coeficientes son los que aparecerán en la matriz que permite relacionar a los vectores \vec{x} y \vec{y} .

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{array}$$

La relación queda entonces como:

$$A = M(f, B, B')$$

Donde M es la matriz asociada que se ha calculado antes.

El rango de la aplicación lineal será igual al rango de la matriz asociada.

- *Ejemplo:*

Sean B y B' bases en R^3 .

Sean B_1 y B_1' bases en R^2 .

Las relaciones entre ellas quedan especificadas según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc}
 \vec{x} & B & \xrightarrow{A} & B' & \vec{y}' \\
 & \downarrow P & & \uparrow Q^{-1} & \\
 \vec{x}' & B_1 & \xrightarrow{A'} & B_1' & \vec{y}
 \end{array}$$

$$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x}' = P \cdot \vec{x} \quad \vec{y} = Q^{-1} \cdot \vec{y}'$$

$$A = Q^{-1} \cdot A' \cdot P$$

$$\vec{y} = Q^{-1} \cdot A' \cdot P \cdot \vec{x}$$

etc.

Todo esto no son más que distintas formas para calcular las representaciones de un vector en una u otra base, y dependerán de los datos que proporcione el enunciado.

Ejercicio: Si f es una función $f: V \rightarrow V$ y B y B' son dos bases de V , establecer la relación entre $A = M(f, B, B')$ y $A' = M(f, B', B')$.

• *Ejemplo:*

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

$$B = \{(1,1), (1,0)\} \text{ es base de } \mathbb{R}^2$$

$$B = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,0,1)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ es base de } \mathbb{R}^3$$

$$f(1,1) = (1,1,2)$$

$$f(1,0) = (1,0,1) \text{ respecto de la base canónica}$$

$$(1,1,2) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$$

$$(1,0,1) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$$

(Se trata de expresar el vector como una combinación lineal de los vectores de la base. Como el vector viene en base canónica, hay que encontrar alguna combinación, que no tiene por qué coincidir con las componentes del mismo.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si una aplicación lineal es **homomorfismo**, la matriz A ha de ser cuadrada, y su determinante distinto de cero.

Resumiendo lo anterior:

Sean V y V' dos **espacios vectoriales** sobre K .

Sobre ellos, se definirá una **aplicación lineal** $f: V \rightarrow V'$.

Esta aplicación lineal asignará un **vector** $\vec{y} \in V'$ a cada vector $\vec{x} \in V$. Es decir:

$$f(\vec{x}) = \vec{y}$$

Estos espacios vectoriales poseen diferentes **bases**. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} B_1 \text{ y } B_2 \text{ bases de } V \\ B_1' \text{ y } B_2' \text{ bases de } V' \end{array}$$

Se definen además dos **matrices asociadas**, una para cada par de bases:

$$\begin{array}{l} A = M(f, B_1, B_1') \\ A' = M(f, B_2, B_2') \end{array}$$

Y las **relaciones** pueden verse con el esquema:

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & B_1 & \xrightarrow{A} & B_1' & \vec{y}' \\ & \downarrow P & & \uparrow Q^{-1} & \\ \vec{x}' & B_2 & \xrightarrow{A'} & B_2' & \vec{y} \end{array}$$

Quedando entonces **expresiones** en términos de matrices como:

$$Y = A \cdot X \quad Y = Q^{-1} \cdot A' \cdot P \cdot X \quad A = Q^{-1} \cdot A' \cdot P$$

Donde X e Y son los vectores \vec{x} e \vec{y} expresados en forma matricial, respectivamente.

Ejercicio: Encontrar la matriz asociada $A' = M(f, B', B')$.

Encontrar las matrices de las funciones que intervienen en la descomposición canónica de la aplicación.

- Ejemplo:*

Siempre que se pida un cambio de base habrá que tener las ecuaciones que permiten realizarlo. Esto es, la expresión que relaciona cada vector de la base original con la final.

Por ejemplo:

$$f: R^3 \rightarrow R^3$$

$$A = M(f, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

$$B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{u}_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{u}_3 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned} \right\}$$

4. OTROS EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

a) Conjunto de las aplicaciones lineales

Sea el siguiente conjunto:

$$L(V, V') = \{f: V \rightarrow V' \mid f \text{ es aplicación lineal} \}$$

Se trata del espacio vectorial $(L(V, V'), +, \cdot)$.

Su dimensión es la siguiente:

$$\dim L(V, V') = \dim V \cdot \dim V'$$

b) Conjunto de las matrices de orden $m \times n$

Es el conjunto formado por todas las matrices de un determinado orden. Se encuentra relacionado con el anterior, puesto que las aplicaciones lineales pueden expresarse en forma de matrices.

Es el espacio vectorial $(M_{m \times n}, +, \cdot)$.

Su dimensión y propiedades son iguales que la del conjunto de las aplicaciones lineales. Por lo tanto:

$$\dim V = m$$

$$\dim V' = n$$

$$\dim M_{m \times n} = \dim V \cdot \dim V' = m \times n$$

c) Espacio vectorial dual de V

Es el conjunto de todas las funciones que parten de un espacio vectorial hacia el propio cuerpo de los reales.

Sea V un espacio vectorial sobre K , y sea el cuerpo de los reales K .

$$V^* = L(V, K) = \{f: V \rightarrow K \mid f \text{ es aplicación lineal}\}$$

Su dimensión se calcula como:

$$\dim K = 1$$

$$\boxed{\dim V^* = \dim V \cdot \dim K = \dim V}$$

- *Ejemplo:* Sea el cuerpo R^3 :

$$R^{3*} = L(R^3, R)$$

$$f: R^3 \rightarrow R$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo sería:

$$B = \{f_1, f_2, f_3\} \text{ es base de } R^{3*}$$

$$f_1: R^3 \rightarrow R \quad f_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1$$

$$f_2: R^3 \rightarrow R \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2$$

$$f_3: R^3 \rightarrow R \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3$$

Hay que prestar atención al hecho de que la base no es $B \neq \{x_1, x_2, x_3\}$, sino que son tres funciones: $B = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Para finalizar, queda aclarar que el conjunto de las aplicaciones lineales $L(V, V')$ y el conjunto $M_{m \times n}$ de las matrices son **isomorfos**.