

Fundamentos Matemáticos de la Informática II

Primera prueba parcial - Variante 1

9 - abril - 2003

1. De las siguientes afirmaciones, comprobar aquellas que sean ciertas y justificar (con un contraejemplo) por qué no lo son aquellas que no lo sean:

a) Si A, B y C son subconjuntos de X , entonces

$$(A - \overline{B \cup C}) - (A - \overline{\overline{B} \cup C}) = \emptyset.$$

Solución: Por una parte,

$$\begin{aligned} & (A - \overline{B \cup C}) - (A - \overline{\overline{B} \cup C}) \\ &= (A \cap (B \cup C)) \cap \overline{A \cap (\overline{B} \cup C)} \\ &= (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{A} \cup (B \cap \overline{C})) \\ &= (A \cap (B \cup C) \cap \overline{A}) \cup (A \cap (B \cup C) \cap (B \cap \overline{C})) \\ &= \emptyset \cup (A \cap (B \cup C) \cap \overline{B} \cap C) = A \cap \overline{B} \cap C, \end{aligned}$$

que, en general, no es vacío. Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{1, 3\}$, entonces

$$(A - \overline{B \cup C}) - (A - \overline{\overline{B} \cup C}) = \{1\} \neq \emptyset,$$

así que el enunciado es falso.

- b) El conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ es un sistema completo de restos módulo 7.

Solución: Lo que dice el enunciado es, por definición, que el conjunto $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ de clases de resto módulo 7 es igual a $\mathbb{Z}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$. Eso es cierto, porque

$$0 \equiv 0 \pmod{7}, \quad 2 \equiv 2 \pmod{7}, \quad 4 \equiv 4 \pmod{7}, \quad 6 \equiv 6 \pmod{7}, \quad 8 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 10 \equiv 3 \pmod{7}, \quad 12 \equiv 5 \pmod{7}.$$

- c) El conjunto $\mathbb{Z}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo abeliano con la suma de números complejos.

Solución: Trataremos de comprobar que lo es, y si detectamos que falla alguna propiedad entonces nos plantearemos buscar unos elementos que no la verifiquen (un contraejemplo).

- La suma de números complejos

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{Z}(\sqrt{-5}) \times \mathbb{Z}(\sqrt{-5}) &\longrightarrow \mathbb{Z}(\sqrt{-5}) \\ a + ib\sqrt{5}, c + id\sqrt{5} &\longmapsto a + ib\sqrt{5} + c + id\sqrt{5} = a + c + i(b + d)\sqrt{5} \end{aligned}$$

es una ley de composición interna en $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$, porque

- si $a + ib\sqrt{5}, c + id\sqrt{5} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, entonces $a + c, b + d \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto $a + c + i(b + d)\sqrt{5} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$;
- si $a + ib\sqrt{5} = a' + ib'\sqrt{5}$ y $c + id\sqrt{5} = c' + id'\sqrt{5}$ entonces $a = a', b = b', c = c'$ y $d = d'$, lo que implica que $a + c = a' + c'$ y $b + d = b' + d'$. Luego $a + ib\sqrt{5} + c + id\sqrt{5} = a + c + i(b + d)\sqrt{5} = a' + c' + i(b' + d')\sqrt{5} = a' + ib'\sqrt{5} + c' + id'\sqrt{5}$.

- Si $a + ib\sqrt{5}, c + id\sqrt{5}, e + if\sqrt{5} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$, entonces

$$\begin{aligned} a + ib\sqrt{5} + (c + id\sqrt{5} + e + if\sqrt{5}) &= a + ib\sqrt{5} + c + e + i(d + f)\sqrt{5} = a + c + e + i(b + d + f)\sqrt{5} \\ &= a + c + i(b + d)\sqrt{5} + e + if\sqrt{5} = (a + ib\sqrt{5} + c + id\sqrt{5}) + e + if\sqrt{5}. \end{aligned}$$

- El número complejo $0 = 0 + i0\sqrt{5}$ es un elemento de $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$, y si $a + ib\sqrt{5} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$, entonces $0 + a + ib\sqrt{5} = a + ib\sqrt{5} = a + ib\sqrt{5} + 0$.

- Si $a + ib\sqrt{5} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$, entonces $-a$ y $-b$ son enteros (puesto que a y b lo son), y por lo tanto $-a - ib\sqrt{5}$ es un elemento de $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ que además verifica

$$a + ib\sqrt{5} + (-a - ib\sqrt{5}) = -a - ib\sqrt{5} + a + ib\sqrt{5} = 0.$$

- Si $a + ib\sqrt{5}, c + id\sqrt{5} \in \mathbb{Z}(\sqrt{-5})$, entonces

$$a + ib\sqrt{5} + c + id\sqrt{5} = a + c + i(b + d)\sqrt{5} = c + id\sqrt{5} + a + ib\sqrt{5}.$$

Luego $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ es un grupo abeliano y el enunciado es cierto.

- Hallar el conjunto cociente de la relación binaria de equivalencia definida en \mathbb{Z}_7 por

$$\bar{a} R \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}^3 = \bar{b}^3.$$

Solución: El cubo de cada uno de los elementos de \mathbb{Z}_7 es:

$$\bar{0}^3 = \bar{0}, \quad \bar{1}^3 = \bar{1}, \quad \bar{2}^3 = \bar{1}, \quad \bar{3}^3 = \bar{6}, \quad \bar{4}^3 = \bar{1}, \quad \bar{5}^3 = \bar{6}, \quad \bar{6}^3 = \bar{6}.$$

Luego $\bar{2} R \bar{1}$, $\bar{4} R \bar{1}$, $\bar{5} R \bar{3}$ y $\bar{6} R \bar{3}$, así que si denotamos por $[\bar{a}]$ a la clase de \bar{a} , entonces

$$\mathbb{Z}_7/R = \{[\bar{0}], [\bar{1}], [\bar{3}]\},$$

donde $[\bar{0}] = \{\bar{0}\}$, $[\bar{1}] = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ y $[\bar{3}] = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

- Comprobar que

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

es una aplicación.

Determinar si es inyectiva y/o sobreyectiva.

Solución: f es una aplicación, porque

- para cada número entero positivo x (y de hecho para cada número real) existe un número real, que denotamos $\cos x$, y que es el coseno del ángulo que mide x radianes ($\cos x$ se puede definir como la suma de la serie sumable $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i} / (2i)!$).
- el coseno de un ángulo x (entero positivo o incluso real) es único, esto es, si x, x' son enteros positivos y $x = x'$, entonces $f(x) = \cos x = \cos x' = f(x')$ (la unicidad se sigue del hecho de que la suma de una serie sumable es única).

La aplicación f no es sobreyectiva, puesto que hay elementos de \mathbb{R} que no son el coseno de ningún número entero positivo x . Por ejemplo, $y = 2 \in \mathbb{R}$ y sin embargo no existe ningún entero positivo x (ni tampoco real) tal que $\cos x = y$, porque $\cos x \in [-1, 1]$ para cualquier x .

Sin embargo f es inyectiva. En efecto, sean $x, x' \in \mathbb{Z}^+$ tales que $f(x) = f(x')$, esto es, tales que $\cos x = \cos x'$. Entonces

$$x' = x + 2k\pi, \text{ o } x' = -x + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Si $x' = x + 2k\pi$ con $k \neq 0$, entonces $\pi = (x' - x)/2k \in \mathbb{Q}$, lo que es imposible porque $\pi \notin \mathbb{Q}$. Si $x' = -x + 2k\pi$, entonces $k \neq 0$ (dado que $x, x' > 0$) y eso implica que $\pi = (x + x')/2k \in \mathbb{Q}$, lo que de nuevo es imposible. Luego la única posibilidad es que $x' = x + 2k\pi$ con $k = 0$, esto es, que $x' = x$.

Fundamentos Matemáticos de la Informática II

Primera prueba parcial - Variante 2

9 - abril - 2003

1. De las siguientes afirmaciones, comprobar aquellas que sean ciertas y justificar (con un contraejemplo) por qué no lo son aquellas que no lo sean:

- a) Si A es un conjunto y B es un subconjunto de A , entonces $B \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Solución: Es cierto que $B \in \mathcal{P}(A)$, pero en general $B \notin \mathcal{P}(A)$. Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$. El conjunto $B = \{1\}$, pertenece a $\mathcal{P}(A)$, pero no está contenido en $\mathcal{P}(A)$. El enunciado no es cierto.

- b) La relación binaria de equivalencia dada por

$$\bar{a} R \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}^2 = \bar{b}^2$$

define exactamente dos clases de equivalencia en \mathbb{Z}_8 .

Solución: Los cuadrados de los elementos de \mathbb{Z}_8 son

$$\bar{0}^2 = \bar{0}, \quad \bar{1}^2 = \bar{1}, \quad \bar{2}^2 = \bar{4}, \quad \bar{3}^2 = \bar{1}, \quad \bar{4}^2 = \bar{0}, \quad \bar{5}^2 = \bar{1}, \quad \bar{6}^2 = \bar{4}, \quad \bar{7}^2 = \bar{1},$$

así que $\bar{4} R \bar{0}$, $\bar{3} R \bar{1}$, $\bar{5} R \bar{1}$, $\bar{3} R \bar{1}$ y $\bar{6} R \bar{2}$.

Luego R define en \mathbb{Z}_8 tres clases de equivalencia: $[\bar{0}] = \{\bar{0}, \bar{4}\}$, $[\bar{1}] = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ y $[\bar{2}] = \{\bar{2}, \bar{6}\}$. El enunciado es falso.

- c) El subconjunto $G = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ de \mathbb{Z}_{12} es un grupo con la suma de clases.

Solución: La suma de los elementos de G (suma de clases de resto módulo 12) se resume en la tabla siguiente

	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{9}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$

Sabemos que, para $m > 0$, $(\mathbb{Z}_m, +, 0)$ es un grupo abeliano. Veamos si G es o no un grupo.

- En primer lugar, la suma en G es una ley de composición interna, porque
 - si \bar{a}, \bar{b} son dos elementos de G , entonces la suma $\bar{a} + \bar{b}$ también es un elemento de G (nótese que en la tabla de la suma sólo aparecen elementos de G).
 - la suma de dos clases de resto módulo 12 es independiente de los representantes que se elijan para calcularla, así que la suma de dos elementos de G está definida de forma única.
- La suma de clases de resto módulo 12 es asociativa porque \mathbb{Z}_{12} es un grupo abeliano, así que la suma de elementos de G también lo es.
- $\bar{0}$ es un elemento de G , y es el neutro para la suma de clases módulo 12, así que también es el neutro en G (nótese en este sentido que tanto en la primera fila como en la primera columna de la tabla de la suma, los elementos de G aparecen tal y como están en los márgenes superior e izquierdo respectivamente).
- Cada elemento de G tiene un opuesto en G : nótese que en cada fila y en cada columna de la tabla de la suma aparece exactamente una vez $\bar{0}$.

Luego G es un grupo (de hecho, es un subgrupo de \mathbb{Z}_{12}). Además es abeliano porque la suma de clases de resto módulo 12 es conmutativa (nótese en este sentido que la tabla de la suma en G es simétrica respecto a la diagonal \searrow):

2. Comprobar que

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$$

es una aplicación.

Determinar si es inyectiva y/o sobreyectiva.

Solución: f es una aplicación, porque

- para cada número entero positivo x (y de hecho para cada número real) existe un número real, que denotamos $\sin x$, y que es el seno del ángulo que mide x radianes ($\sin x$ se puede definir como la suma de la serie sumable $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i+1} / (2i+1)!$).
- el seno de un ángulo x (entero positivo o incluso real) es único, esto es, si x, x' son enteros positivos y $x = x'$, entonces $f(x) = \sin x = \sin x' = f(x')$ (la unicidad se sigue del hecho de que la suma de una serie sumable es única).

La aplicación f no es sobreyectiva, puesto que hay elementos de \mathbb{R} que no son el seno de ningún número entero positivo x . Por ejemplo, $y = 2 \in \mathbb{R}$ y sin embargo no existe ningún entero positivo x ni tampoco real tal que $\sin x = y$, porque $\sin x \in [-1, 1]$ para cualquier x .

Sin embargo f es inyectiva. En efecto, sean $x, x' \in \mathbb{Z}^+$ tales que $f(x) = f(x')$, esto es, tales que $\sin x = \sin x'$. Entonces

$$x' = x + 2k\pi, \text{ o } x' = -x + (2k+1)\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Si $x' = x + 2k\pi$ con $k \neq 0$, entonces $\pi = (x' - x)/2k \in \mathbb{Q}$, lo que es imposible porque $\pi \notin \mathbb{Q}$. Si $x' = -x + (2k+1)\pi$, entonces $\pi = (x + x')/(2k+1) \in \mathbb{Q}$, lo que de nuevo es imposible. Luego la única posibilidad es que $x' = x + 2k\pi$ con $k = 0$, esto es, que $x' = x$.

3. Demostrar que si X, Y y Z son subconjuntos de U , entonces

$$(X - \overline{Y \cup Z}) \cup (X - \overline{\overline{Y} \cup Z}) = X.$$

Solución:

$$\begin{aligned} (X - \overline{Y \cup Z}) \cup (X - \overline{\overline{Y} \cup Z}) &= \\ &= (X \cap (Y \cup Z)) \cup (X \cap (\overline{Y} \cup Z)) \\ &= (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Z}) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (X \cap Z) \\ &= (X \cap (Y \cup \overline{Y})) \cup (X \cap (\overline{Z} \cup Z)) \\ &= (X \cap U) \cup (X \cap U) = X \cup X = X. \end{aligned}$$