

Fundamentos Matemáticos de la Informática II
Ejercicios

Hoja 1 - Conjuntos

1. Sea $G = \{x : x \text{ es un número natural menor que } 10 \text{ o } x \text{ es una letra de la palabra } \textit{tarima}\}$. Consideremos los subconjuntos $A = \{1, 2, 3, a, r\}$, $B = \{0, 2, 4, m, a\}$ y $C = \{2, m\}$.
 - a) Expresar G de forma enumerativa.
 - b) Hallar $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$.
 - c) Hallar \overline{A} en G . Hallar $\overline{(A \cup B) \cap C}$.
 - d) Hallar $A - B$, $B - A$ y $C - B$.
 - e) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A \cap C)$ de las partes de $A \cap C$. Hallar $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$.
2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f, g\}$ y sean los subconjuntos $A = \{1, 2, 4, 6, 8, b, c, d, f\}$, $B = \{1, 4, 7, a, d, g\}$ y $C = \{3, 5, 9, a, e\}$. Calcular:

a) $A \cup B$.	f) \overline{A} .	k) $A - C$.
b) $B \cup C$.	g) $\overline{A \cup B}$.	l) $A \Delta B$.
c) $(A \cup B) \cup C$.	h) $\overline{A \cap B}$.	m) $A \Delta C$.
d) $A \cap C$.	i) $A - B$.	n) $\mathcal{P}(C)$.
e) $(A \cap B) \cap C$.	j) $B - A$.	ñ) $\mathcal{P}(A \cap C)$.
3. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{3, 5\}$. Determinar cuales de estos conjuntos puede ser X de manera que se verifique una de las siguientes condiciones:

a) $X \cap B = \emptyset$.	c) $X \subseteq A$ y $X \not\subseteq C$.
b) $X \subseteq D$ y $X \not\subseteq B$.	d) $X \subseteq C$ y $X \not\subseteq A$.
4. Comprobar que si A , B y C son conjuntos, se satisfacen las siguientes igualdades:

a) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.	e) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
b) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$.	f) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$.
c) $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$.	g) $(A - B) - (A - C) = A \cap (C - B)$.
d) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.	h) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
5. Comprobar que si A y B son subconjuntos de un conjunto U , se satisfacen las siguientes afirmaciones:

a) $A \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$.	e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.
b) $A \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow A \cap B = A$.	f) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A} \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.
c) $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$.	g) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap C \subseteq B \cap C, \forall C \subseteq U$.
d) $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C \Rightarrow B \subseteq C$.	h) $A \subseteq B \Leftrightarrow (B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A), \forall C \subseteq U$.
6. Sean A , B y C subconjuntos del conjunto X . Hallar una forma más simple de expresar cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $((A \cup B) \cup C) \cap A \cap (((B \cup C) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})) \cup \overline{A})$.	d) $(A \cap \overline{B \cap C}) \cup \overline{(A \cup B) \cup C}$.
b) $((\overline{A \cup B} \cap \overline{C}) \cap (B \cup \overline{A \cup B})) \cup (\overline{A \cap B} \cup \overline{A})$.	e) $(A \cap B) \cup (\overline{A \cap B}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A \cap B})$.
c) $((A \cap B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \cup (\overline{A \cap B})$.	f) $(A \cup B) \cap (\overline{A \cup B}) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B})$.

7. Sean A y B subconjuntos de un conjunto X . Comprobar que se satisface cada una de las siguientes afirmaciones cuando sea cierta, o justificar por qué no lo es cuando no sea cierta:

$$\begin{array}{lll} a) & X \in \mathcal{P}(X). & d) \quad \emptyset \in \mathcal{P}(X). & g) \quad \mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B). \\ b) & X \subseteq \mathcal{P}(X). & e) \quad \emptyset \subseteq \mathcal{P}(X). & h) \quad \mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B). \\ c) & \{X\} \subseteq \mathcal{P}(X). & f) \quad \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B). & i) \quad \overline{A - B} = B - A. \end{array}$$

8. Sean A , B y C subconjuntos de un conjunto X . Comprobar que se satisface cada una de las siguientes afirmaciones cuando sea cierta, o justificar por qué no lo es cuando no sea cierta:

$$\begin{array}{ll} a) & A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C). \\ b) & A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C). \\ c) & A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C). \\ d) & \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}. \end{array}$$

9. Verificar si las siguientes correspondencias son o no aplicaciones, y en caso de serlo, determinar si son inyectivas y/o sobreyectivas:

$$\begin{array}{lll} a) & f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto x - 2. & c) & f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto e^x. & e) & f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ & & & x \longmapsto \text{sen } x. \\ b) & f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto \sqrt{x}. & d) & f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & & x \longmapsto +\sqrt{x+1}. & f) & f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & & x \longmapsto \arccos x. \end{array}$$

10. Determinar si las siguientes aplicaciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

$$\begin{array}{lll} a) & f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & x \longmapsto (x^2 - 4, x + 2). & b) & f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) \longmapsto (x + 2, xy - y^2). & c) & f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & & (x, y, z) \longmapsto (x + z, -y). \end{array}$$

11. Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x + 3$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 2$. Hallar

$$a) \quad g \circ f. \quad b) \quad f \circ g. \quad c) \quad f^{-1} \circ g. \quad d) \quad (f \circ g)^{-1}.$$

12. Si A es un subconjunto de U , se define la aplicación *característica* de A

$$\begin{array}{ll} f_A: & U \longrightarrow \{0, 1\} \\ & x \longmapsto f_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin A \\ 1, & \text{si } x \in A \end{cases} \end{array}$$

Comprobar que si A y B son subconjuntos de U , entonces

$$a) \quad f_A = f_B \Leftrightarrow A = B. \quad b) \quad f_{A \cup B} + f_{A \cap B} = f_A + f_B. \quad c) \quad f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B.$$

13. Si $f: A \longrightarrow B$ es una aplicación y T es un subconjunto de B , se llama *imagen inversa* de T mediante f al conjunto $f^{-1}(T) = \{x : x \in A, f(x) \in T\}$. Comprobar que

$$\begin{array}{ll} a) & \text{Si } S \text{ es un subconjunto de } A, \text{ entonces } S \subseteq f^{-1}(f(S)). \\ b) & \text{Si } T \text{ es un subconjunto de } B, \text{ entonces } T \subseteq f(f^{-1}(T)). \\ c) & \text{Si } \{T_i\}_{i \in I} \text{ es una familia de subconjuntos de } B, \text{ entonces } f^{-1}(\bigcup_{i \in I} T_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(T_i). \\ d) & \text{Si } \{T_i\}_{i \in I} \text{ es una familia de subconjuntos de } B, \text{ entonces } f^{-1}(\bigcap_{i \in I} T_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(T_i). \end{array}$$

14. Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ aplicaciones. Comprobar que:

$$\begin{array}{ll} a) & \text{Si } f \text{ y } g \text{ son inyectivas, entonces } g \circ f \text{ es inyectiva.} \\ b) & \text{Si } f \text{ y } g \text{ son sobreyectivas, entonces } g \circ f \text{ es sobreyectiva.} \\ c) & \text{Si } g \circ f \text{ es inyectiva, entonces } f \text{ es inyectiva.} \\ d) & \text{Si } g \circ f \text{ es sobreyectiva, entonces } g \text{ es sobreyectiva.} \end{array}$$