

Capítulo 5

Endomorfismos diagonalizables

5.1 Suma directa de variedades

Nota. En todo lo que sigue, V es un K espacio vectorial de dimensión n y \mathcal{B} es una base de V .

Definición 5.1.1 Sean L_1, L_2, \dots, L_r variedades lineales de V , decimos que V es suma directa de dichas variedades y lo notamos por $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_r$ si se verifica:

$$\text{a) } V = L_1 + L_2 + \dots + L_r = \sum_{i=1}^r L_i.$$

$$\text{b) } L_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r L_j = \{\mathbf{0}\}, \quad (i = 1, \dots, r).$$

Proposición 5.1.1 Sean L_1, L_2, \dots, L_r variedades lineales de V ,

$$V = \bigoplus_{i=1}^r L_i \iff \forall \mathbf{x} \in V, \exists! \mathbf{x}_i \in L_i, \quad (i = 1, \dots, r) \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_r.$$

Demostración

\Rightarrow Sea $\mathbf{x} \in V$ y supongamos que existen dos representaciones de dicho vector de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_r, & \mathbf{x}_i &\in L_i, \quad (i = 1, \dots, r), \\ \mathbf{x} &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \dots + \mathbf{y}_r, & \mathbf{y}_i &\in L_i, \quad (i = 1, \dots, r). \end{aligned}$$

Restando ambas igualdades se obtiene:

$$\mathbf{0} = \underbrace{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2) + \dots + (\mathbf{x}_r - \mathbf{y}_r)}_{\in \sum_{i=2}^r L_i},$$

de donde

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in L_1 \cap \sum_{i=2}^r L_i = \{\mathbf{0}\} \implies \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1.$$

Análogamente para el resto de los sumandos.

◀ Claramente, la existencia de vectores $\mathbf{x}_i \in L_i$, ($i = 1, \dots, r$) tales que $\forall \mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_r$ implica que $V = L_1 + \dots + L_r$. Veamos que la unicidad implica que

$$L_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r L_j = \{\mathbf{0}\}, \quad (i = 1, \dots, r).$$

En efecto, comprobémoslo para $i = 1$.

$$\mathbf{x}_1 \in L_1 \cap \sum_{j=2}^r L_j \implies \mathbf{x}_1 \in L_1, \mathbf{x}_1 \in \sum_{j=2}^r L_j \implies \exists \mathbf{x}_i \in L_i, (i = 2, \dots, r) \mid \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_r$$

\Downarrow

$$\mathbf{0} = -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_r$$

pero, por la unicidad, deducimos que $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, ($i = 1, \dots, r$) con lo cual

$$L_1 \cap \sum_{j=2}^r L_j = \{\mathbf{0}\}.$$

(Parece oportuno recordar que $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}$ y que esta representación del vector $\mathbf{0}$ como suma de elementos de L_i es, por hipótesis, única.)

Proposición 5.1.2 Sean L_1, L_2, \dots, L_r variedades lineales de V ,

$$V = \bigoplus_{i=1}^r L_i \implies \dim(V) = \sum_{i=1}^r \dim(L_i). \quad (5.1)$$

Demostración Procederemos por inducción sobre r , ($r \geq 2$).

- Para $r = 2$, sabemos que $\dim(V) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$.
- Supongamos que la proposición es cierta para $r - 1$ variedades.
- Prueba para r .

$$V = L_1 \oplus (L_2 \oplus \dots \oplus L_r) \implies \dim(V) = \dim(L_1) + \dim(L_2 \oplus \dots \oplus L_r)$$

pero por la hipótesis de inducción

$$\dim(L_2 \oplus \dots \oplus L_r) = \dim(L_2) + \dots + \dim(L_r),$$

de donde

$$\dim(V) = \dim(L_1) + \dim(L_2) + \dots + \dim(L_r).$$

Un aspecto que podría cuestionarse es si la suma $L_2 + \dots + L_r$ es directa lo cual es cierto. Habría que probar que

$$L_i \cap \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^r L_j = \{\mathbf{0}\}, \quad (i = 2, \dots, r).$$

Veámoslo para $i = 2$. Claramente se verifica que

$$\sum_{j=3}^r L_j \subset \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r L_j,$$

de donde

$$L_2 \cap \sum_{j=3}^r L_j \subset L_2 \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^r L_j = \{\mathbf{0}\}$$

y, por consiguiente,

$$L_2 \cap \sum_{j=3}^r L_j = \{\mathbf{0}\}$$

Proposición 5.1.3 Sean L_1, L_2, \dots, L_r variedades lineales de V y $V = \bigoplus_{i=1}^r L_i$. Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_r$ son bases, respectivamente, de L_1, L_2, \dots, L_r , se verifica que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$$

es una base de V .

Demostración Claramente \mathcal{B} es un sistema de generadores de V y $\text{car}(\mathcal{B}) = n$ de acuerdo con la fórmula 5.1.

Proposición 5.1.4 Sea \mathcal{B} una base de V y $\{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ una partición de \mathcal{B} . Sea $L_i = L(H_i)$. Entonces,

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_r.$$

Demostración Desde luego $V = L_1 + L_2 + \dots + L_r$. En efecto, sean

$$H_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n_1}\},$$

$$H_2 = \{\mathbf{u}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{u}_{n_2}\},$$

$$\vdots$$

$$H_r = \{\mathbf{u}_{n_{r-1}+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}.$$

Para todo vector $\mathbf{x} \in V$, se tiene que

$$\mathbf{x} = \underbrace{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_{n_1} \mathbf{u}_{n_1}}_{\mathbf{x}_1 \in L_1} + \underbrace{\alpha_{n_1+1} \mathbf{u}_{n_1+1} + \dots + \alpha_{n_2} \mathbf{u}_{n_2}}_{\mathbf{x}_2 \in L_2} + \dots + \underbrace{\alpha_{n_{r-1}+1} \mathbf{u}_{n_{r-1}+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n}_{\mathbf{x}_r \in L_r}$$

y, por consiguiente, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_r$, ($\mathbf{x}_i \in L_i$).

Por otra parte, se verifica que $L_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r L_j = \{\mathbf{0}\}$, ($i = 1, \dots, r$). Hagamos la comprobación para $i = 1$ (por estricta comodidad).

$$\mathbf{x}_1 \in L_1 \cap \sum_{j=2}^r L_j \implies \mathbf{x}_1 \in L_1, \mathbf{x}_1 \in \sum_{j=2}^r L_j \implies \exists \mathbf{x}_i \in L_i, (i = 2, \dots, r) \mid \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_r$$

\Downarrow

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \dots - \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Expresando cada vector como combinación lineal de la base de la variedad correspondiente, se tiene que

$$\underbrace{(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_{n_1} \mathbf{u}_{n_1})}_{\mathbf{x}_1 \in L_1} - \underbrace{(\alpha_{n_1+1} \mathbf{u}_{n_1+1} + \dots + \alpha_{n_2} \mathbf{u}_{n_2})}_{\mathbf{x}_2 \in L_2} - \dots - \underbrace{(\alpha_{n_{r-1}+1} \mathbf{u}_{n_{r-1}+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n)}_{\mathbf{x}_r \in L_r} = \mathbf{0},$$

de donde deducimos que $\alpha_i = 0$, $\forall i$, dado que \mathcal{B} es base de V .

Por tanto,

$$L_1 \cap \sum_{j=2}^r L_j = \{\mathbf{0}\}.$$

Definición 5.1.2 Sea $f \in \text{End}(V)$ y L una variedad lineal de V , decimos que L es *invariante* por f si se verifica que $f(L) \subset L$. Es decir,

$$L \text{ invariante por } f \iff \forall \mathbf{x} \in L, f(\mathbf{x}) \in L$$

Proposición 5.1.5 Sea $f \in \text{End}(V)$ y L_1, L_2, \dots, L_r tales que:

- a) $\dim(L_i) = n_i$, ($i = 1, \dots, r$).
- b) $\forall i$, L_i es invariante por f .

$$\text{c) } V = \bigoplus_{i=1}^r L_i.$$

Bajo dichas condiciones se verifica que existe una base \mathcal{B} de V respecto de la cual $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es diagonal por cajas. De modo más preciso: se verifica que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix} \quad \text{donde } A_i \in \mathcal{M}(n_i \times n_i, K). \quad (5.2)$$

Recíprocamente, si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es diagonal por bloques de la forma (5.2), existen r variedades invariantes de V verificando las condiciones a), b) y c) de la proposición.

Demostración Para mayor claridad, efectuaremos la demostración para $r = 2$. Sea L_1 y L_2 variedades lineales de V verificando las condiciones a), b) y c) de la proposición y sean $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_1}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_2}\}$ bases de L_1 y L_2 respectivamente ($n = n_1 + n_2$). Por la proposición 5.1.3, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V y, por hipótesis L_1 y L_2 son invariantes por f , luego $f(\mathbf{u}_i) \in L_1$ y $f(\mathbf{v}_j) \in L_2$ ($i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$). Teniendo en cuenta lo anterior se tendrá:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{n_1 1}\mathbf{u}_{n_1}, \\ f(\mathbf{u}_2) &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{n_1 2}\mathbf{u}_{n_1}, \\ &\vdots \\ f(\mathbf{u}_{n_1}) &= a_{1n_1}\mathbf{u}_1 + a_{2n_1}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{n_1 n_1}\mathbf{u}_{n_1}, \\ f(\mathbf{v}_1) &= b_{11}\mathbf{u}_1 + b_{21}\mathbf{u}_2 + \dots + b_{n_2 1}\mathbf{u}_{n_2}, \\ f(\mathbf{v}_2) &= b_{12}\mathbf{u}_1 + b_{22}\mathbf{u}_2 + \dots + b_{n_2 2}\mathbf{u}_{n_2}, \\ &\vdots \\ f(\mathbf{v}_{n_2}) &= b_{1n_2}\mathbf{u}_1 + b_{2n_2}\mathbf{u}_2 + \dots + b_{n_2 n_2}\mathbf{u}_{n_2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_1} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \dots & a_{n_1 n_1} & & & & \\ \hline & & & & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n_2} \\ & & & & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n_2} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & b_{n_2 1} & b_{n_2 2} & \dots & b_{n_2 n_2} \end{array} \right). \quad (5.3)$$

Veamos el recíproco. Sea

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n_1}, \mathbf{w}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{w}_{n_1+n_2}\} \quad (n_1 + n_2 = n)$$

la base de V respecto de la cual se verifica que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es de la forma (5.3) y consideremos las variedades

$$L_1 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n_1} \rangle,$$

$$L_2 = \langle \mathbf{w}_{n_1+1}, \mathbf{w}_{n_1+2}, \dots, \mathbf{w}_{n_1+n_2} \rangle,$$

es claro, después de la definición 5.1.2 y de la proposición 5.1.4, que dichas variedades verifican:

1. L_1 y L_2 son invariantes por f .
2. $V = L_1 \oplus L_2$.

5.2 Autovalores y autovectores

Nota. En lo que sigue $f \in \text{End}(V)$ y $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es la matriz de f respecto de \mathcal{B} .

Definición 5.2.1 Diremos que $\mathbf{a} \in V$ es un autovector de f , si y sólo si,

- a) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

$$\text{b) } \exists \lambda \in K \mid f(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}.$$

Al escalar λ se le llama autovalor de f asociado al autovector \mathbf{a} .

Proposición 5.2.1 El vector $\mathbf{a} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ es un autovector de f si y sólo si $\mathbf{a}_{\mathcal{B}}$ verifica el sistema

$$(\lambda I - A)\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t \quad (5.4)$$

Demostración Recordemos la ecuación del endomorfismo f :

$$(\mathbf{x}'_{\mathcal{B}})^t = (f(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = A(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t. \quad (5.5)$$

\mathbf{a} es un autovector de $f \iff \exists \lambda \in K \mid f(\mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a} \iff \exists \lambda \in K \mid (f(\mathbf{a}))_{\mathcal{B}}^t = \lambda (\mathbf{a}_{\mathcal{B}})^t \xrightarrow{5.5} A(\mathbf{a}_{\mathcal{B}})^t = \lambda (\mathbf{a}_{\mathcal{B}})^t \iff (\lambda I - A)(\mathbf{a}_{\mathcal{B}})^t = \mathbf{0}^t \iff \mathbf{a}_{\mathcal{B}}$ verifica la ecuación (5.4).

Consecuencias. De lo anterior se deduce que:

1. (5.4) es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas que tiene solución no trivial si y sólo si $|\lambda I - A| = 0$.
2. La ecuación $|\lambda I - A| = 0$ cuyo primer miembro es un polinomio de grado n en la indeterminada λ nos proporciona, por tanto, los autovalores de f .

Definición 5.2.2 Al determinante $|\lambda I - A|$ se le llama polinomio característico de f respecto de la base \mathcal{B} y será notado indistintamente por $P(f, \lambda)$ o $P(A, \lambda)$.

Definición 5.2.3 A la ecuación $|\lambda I - A| = 0$ se le llama ecuación característica de f respecto de la base \mathcal{B} .

Proposición 5.2.2 El polinomio característico de f es independiente de la base tomada en V . En otras palabras,

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f), A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) \implies |\lambda I - A| = |\lambda I - A'|.$$

Demostración Sabemos que $A' = P^{-1}AP$, donde $P = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$. Por tanto,

$$|\lambda I - A'| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| = |\lambda I - A|.$$

Definición 5.2.4 Sean $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, K)$ y $f, g \in \text{End}(V)$. Sobre estos conjuntos definiremos a continuación la semejanza de matrices (\sim) y la equivalencia lineal de endomorfismos (\sim_l).

- I. La matriz B es semejante a la matriz A si y sólo si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Simbólicamente,

$$A \sim B \iff \exists P \in \text{Gl}(n, K) \mid B = P^{-1}AP.$$

- II. Análogamente, g es linealmente equivalente a f si y sólo si existe un automorfismo φ de V tal que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. O bien, simbólicamente,

$$f \sim_l g \iff \exists \varphi \in \text{Gl}(V) \mid g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi.$$

Proposición 5.2.3 Las relaciones anteriormente definidas sobre los conjuntos $\mathcal{M}(n \times n, K)$ y $\text{End}(V)$, son de equivalencia.

Demostración Se deja como ejercicio.

Proposición 5.2.4 En las condiciones de la definición, se verifica:

1. $A \sim B \implies P(A, \lambda) = P(B, \lambda)$.
2. $f \sim_l g \implies P(f, \lambda) = P(g, \lambda)$.

Demostración La primera parte de la proposición es una reformulación de la proposición (5.2.2). Para probar la segunda basta ver que

$$g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \implies \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

y que, por consiguiente,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) \sim \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$$

con lo cual f y g tienen el mismo polinomio característico por lo dicho anteriormente (nótese, que por ser φ un automorfismo de V se verifica que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}$).

5.3 Subespacios propios. Endomorfismos diagonalizables

Nota En lo sucesivo, supondremos que $K = \mathbb{C}$ para que la ecuación característica tenga exactamente n raíces repetidas o no, reales o complejas (teorema fundamental del álgebra).

Definición 5.3.1 Llamaremos subespacio propio de V asociado al autovalor λ_i de f , al subconjunto de V definido por

$$V(\lambda_i) = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \lambda_i \mathbf{x}\}.$$

Proposición 5.3.1 Sea λ_i un autovalor asociado a f de multiplicidad m_i y $V(\lambda_i)$ el subespacio propio de V asociado a dicho autovalor. Se verifica que:

1. $V(\lambda_i) = \ker(\lambda_i 1_V - f)$.
2. $V(\lambda_i)$ es invariante por f .
3. $\dim(V(\lambda_i)) \leq m_i$.

Demostración

1. $\mathbf{x} \in V(\lambda_i) \iff f(\mathbf{x}) = \lambda_i \mathbf{x} \iff \lambda_i \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff (\lambda_i 1_V - f)(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} \in \ker(\lambda_i 1_V - f)$.

De lo que deducimos también que:

- $V(\lambda_i)$ es un subespacio vectorial de V por ser el núcleo de un endomorfismo de V .
- las ecuaciones de $V(\lambda_i)$ viene dadas por

$$V(\lambda_i) \equiv (\lambda_i I - A)\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t, \quad (A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$$

2. Evidente, ya que, por definición, $\forall \mathbf{x} \in V(\lambda_i)$ se verifica que $f(\mathbf{x}) = \lambda_i \mathbf{x} \in V(\lambda_i)$ por ser éste un subespacio vectorial de V .

3. Sea $\dim(V(\lambda_i)) = n_i$ y $\mathcal{B}_i = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_i}\}$ una base de $V(\lambda_i)$. Consideremos la base de V , $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_i}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-n_i}\}$ obtenida prolongando la base \mathcal{B}_i . Como $f(\mathbf{u}_i) = \lambda \mathbf{u}_i$, se tiene que la matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es de la forma:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_i & & & P \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ \hline & & & \lambda_i \\ & & 0 & Q \end{array} \right),$$

de donde

$$|\lambda I - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)| = \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda - \lambda_i & & & -P \\ & \lambda - \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ \hline & & & \lambda - \lambda_i \\ & & 0 & \lambda I - Q \end{array} \right| = (\lambda - \lambda_i)^{n_i} |\lambda I - Q|.$$

Ahora bien, como la multiplicidad de λ_i es m_i , se tiene que $n_i \leq m_i$.

(No olvidemos que el polinomio característico no depende de la base elegida y que, por consiguiente, la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico es m_i cualquiera que sea la base.)

Definición 5.3.2 Decimos que el endomorfismo f de V es diagonalizable si existe una base \mathcal{B} de V respecto de la cual la matriz de f es diagonal.

Proposición 5.3.2 Si la matriz $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es diagonal, los autovalores de f son los elementos de dicha diagonal.

Demostración En efecto,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & & & \\ & \lambda - a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - a_n \end{vmatrix},$$

de donde

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^n (\lambda - a_i) = 0 \Rightarrow \lambda = a_i, (i = 1, \dots, n).$$

Proposición 5.3.3 El endomorfismo f es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por autovectores de f .

Demostración

\Rightarrow Si f es diagonalizable, existe una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de V tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ será de la forma

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= a_1 \mathbf{u}_1, \\ f(\mathbf{u}_2) &= a_2 \mathbf{u}_2, \\ \dots &= \dots, \\ f(\mathbf{u}_n) &= a_n \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

y, por consiguiente, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ son, por definición, autovectores de f .

\Leftarrow Recíprocamente. Si la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de V está formada por autovectores de f , existirán n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ tales que $f(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i$ y, por tanto,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Lema 5.3.1 Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son autovalores *distintos* de f y $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ son, respectivamente, autovectores asociados a dichos autovalores, entonces $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es linealmente independiente.

Demostración Procederemos por inducción sobre r .

- \mathbf{a}_1 es l.i. ($\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$).
- Supongamos que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{r-1}\}$ es l.i.
- Probemos que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es l.i.
Partiendo de la relación

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

Aplicando f a ambos miembros, se tiene:

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_r \lambda_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0}. \quad (5.7)$$

Restando la ecuación (5.7) de la ecuación (5.6) previamente multiplicada por λ_r , se obtiene que

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) \mathbf{a}_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_r) \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) \mathbf{a}_{r-1} = \mathbf{0},$$

de donde deducimos que

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_r) = 0 \xrightarrow{\lambda_i - \lambda_r \neq 0} \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r-1).$$

Sustituyendo en (5.6), se tiene que

$$\alpha_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0} \xrightarrow{\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}} \alpha_r = 0$$

y, por tanto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ es l.i. como se quería demostrar.

Consecuencias

1. Si los n autovalores de f son distintos (multiplicidad igual a 1), entonces f es diagonalizable. En efecto, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los n autovalores distintos de f y $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ son autovectores asociados, respectivamente, a dichos autovalores, de conformidad con el lema \mathcal{B}

es linealmente independiente y, por tanto, es una base de V .

Por otra parte, respecto de dicha base será

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son autovalores distintos de f con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_r , respectivamente entonces la suma

$$V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \dots + V(\lambda_r)$$

es directa.

Hay que probar que

$$V(\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r V(\lambda_j) = \{\mathbf{0}\}.$$

Por razones de comodidad, haremos la demostración para $i = 1$.

$$\mathbf{x}_1 \in V(\lambda_1) \cap \sum_{j=2}^r V(\lambda_j) = \{\mathbf{0}\} \implies \mathbf{x}_1 \in V(\lambda_1), \quad \mathbf{x}_1 \in \sum_{j=2}^r V(\lambda_j) \implies \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \dots + \mathbf{x}_r$$

($\mathbf{x}_i \in V(\lambda_i) \ i = 2, 3, \dots, r$) $\implies \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$ es l.d. en contradicción con el lema.

Teorema 5.3.1 Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ los autovalores distintos de f con multiplicidades respectivas m_1, m_2, \dots, m_r $\left(\sum_{i=1}^r m_i = n = \dim(V) \right)$. Son equivalentes:

1. f es diagonalizable.
2. $\dim(V(\lambda_i)) = m_i \ (i = 1, \dots, r)$.
3. $V = \bigoplus_{i=1}^r V(\lambda_i)$.

Demostración

$1 \implies 2$ Si f es diagonalizable existe una base \mathcal{B} de V respecto de la cual la matriz de f es diagonal. Es decir, de la forma (ver proposición 5.3.2),

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_r \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Sea

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_{11}, \dots, \mathbf{u}_{1m_1}, \mathbf{u}_{21}, \dots, \mathbf{u}_{2m_2}, \dots, \mathbf{u}_{r1}, \dots, \mathbf{u}_{rm_r}\}.$$

Efectuemos una partición de \mathcal{B} del siguiente modo:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{12}, \dots, \mathbf{u}_{1m_1}\}, \\ H_2 &= \{\mathbf{u}_{21}, \mathbf{u}_{22}, \dots, \mathbf{u}_{2m_2}\}, \\ &\vdots \\ H_r &= \{\mathbf{u}_{r1}, \mathbf{u}_{r2}, \dots, \mathbf{u}_{rm_r}\}. \end{aligned}$$

Para H_1 se verifica que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_{11}) &= \lambda_1 \mathbf{u}_{11}, \\ f(\mathbf{u}_{12}) &= \lambda_1 \mathbf{u}_{12}, \\ &\vdots \\ f(\mathbf{u}_{1m_1}) &= \lambda_1 \mathbf{u}_{1m_1}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\{\mathbf{u}_{11}, \dots, \mathbf{u}_{1m_1}\} \subset V(\lambda_1)$ y como son linealmente independientes constituyen una base de $V(\lambda_1)$. Recuerdese que $\dim(V(\lambda_1)) \leq m_1$.

Análogamente para los restantes autovalores.

$[2 \Rightarrow 3]$ Desde luego, $\bigoplus_{i=1}^r V(\lambda_i) \subset V$.

Por otra parte, se tiene que

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^r V(\lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^r m_i = n = \dim(V),$$

luego $\bigoplus_{i=1}^r V(\lambda_i) = V$.

$[3 \Rightarrow 1]$ Sea \mathcal{B}_i una base de $V(\lambda_i)$, ($i = 1, \dots, r$). Como, por hipótesis, V es suma directa de sus subespacios propios, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ es una base de V cuyos elementos son autovectores de f . Por tanto, y de acuerdo con la proposición (5.3.3), f es diagonalizable.

Ejemplo Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Comprobar que es diagonalizable y calcular una matriz diagonal J semejante a la matriz A .
2. Calcular una base de autovectores de f .
3. Calcular una matriz invertible P , tal que $J = P^{-1}AP$.

Solución

1. Procedamos del modo siguiente:

(a) **Autovalores de f .**

La ecuación característica de A es

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde obtenemos que

$$(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2 = 0$$

y, por consiguiente, tenemos que los autovalores de f y sus correspondientes multiplicidades son

$$\lambda_1 = 1 (m_1 = 3), \quad \lambda_2 = 2 (m_2 = 2).$$

(b) **Cálculo de $\dim(V(\lambda_i))$.**

$$V(\lambda_1) \equiv (I - A)\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0,$$

de donde

$$\dim(V(\lambda_1)) = 5 - \text{rg}(I - A) = 5 - 2 = 3 = m_1.$$

Por otra parte,

$$V(\lambda_2) \equiv (2I - A)\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0,$$

de donde

$$\dim(V(\lambda_2)) = 5 - \text{rg}(2I - A) = 5 - 3 = 2 = m_2.$$

De lo anterior se deduce que f es diagonalizable y que

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

2. Cálculo de la base \mathcal{C} de autovectores de f .

(a) La base \mathcal{B}_1 de $V(\lambda_1)$, la calculamos a partir de sus ecuaciones y éstas son:

$$V(\lambda_1) \equiv (I - A)\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t \equiv \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior se tiene que

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\}.$$

(b) Análogamente, la base \mathcal{B}_2 de $V(\lambda_2)$, la calculamos resolviendo el sistema

$$V(\lambda_2) \equiv (2I - A)\mathbf{x}^t = \mathbf{0}^t \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\}.$$

(c) Como $V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2)$, la base buscada es

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\}.$$

3. La matriz P es la matriz del cambio de base de \mathcal{B} a \mathcal{C} . Es decir, la matriz cuyas columnas son las coordenadas respecto de \mathcal{B} de los vectores de \mathcal{C} . O sea,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$