

Tema 6

Determinantes y sistemas de ecuaciones

Sea K un cuerpo.

1. Determinantes

(1.1) Sea n un entero positivo. Una permutación de orden n es una aplicación biyectiva $\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$.

Una permutación σ de orden n se suele representar también mediante la n -upla de las imágenes $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

El conjunto de las permutaciones de orden n se denota por Σ_n , y es un grupo (no abeliano si $n > 2$) con la composición de aplicaciones. El cardinal de Σ_n es $n!$.

(1.2) Ejemplos.

■ $n = 2$,

$$\Sigma_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

■ $n = 3$,

$$\Sigma_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}.$$

(1.3) Una *transposición* es una permutación σ de orden n para la que existen $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distintos de manera que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ y $\sigma(k) = k$ para todo $k \neq i, j$. La transposición σ también se denota por $\langle i, j \rangle$, donde i y j son los enteros *que transpone*.

Toda permutación de orden n se puede expresar como producto de transposiciones.

Por ejemplo, la permutación $\sigma = (4, 3, 1, 5, 2)$ de orden 5 se expresa como $\sigma = \langle 2, 5 \rangle \circ \langle 1, 2 \rangle \circ \langle 2, 3 \rangle \circ \langle 1, 4 \rangle$, pero también $\sigma = \langle 3, 4 \rangle \circ \langle 1, 3 \rangle \circ \langle 4, 5 \rangle \circ \langle 2, 5 \rangle$.

La representación de una permutación σ como producto de transposiciones no es única, ni tampoco es único el número de transposiciones que intervienen

en dicha expresión, pues por ejemplo $\sigma = \langle 2, 5 \rangle \circ \langle 1, 2 \rangle \circ \langle 2, 3 \rangle \circ \langle 1, 4 \rangle$ también se puede expresar como

$$\sigma = \langle 3, 4 \rangle \circ \langle 2, 5 \rangle \circ \langle 3, 4 \rangle \circ \langle 1, 2 \rangle \circ \langle 2, 3 \rangle \circ \langle 1, 4 \rangle.$$

Sin embargo, la *paridad* de σ , esto es, si el número de transposiciones el las que se descompone σ es par o impar, sí que está determinado por σ y se denota por $\epsilon(\sigma)$.

Se dice que el *signo de la permutación* σ es 1 si $\epsilon(\sigma)$ es par, y que es -1 si $\epsilon(\sigma)$ es impar. El signo de σ se denota por $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$.

Siguiendo con el ejemplo $\sigma = (4, 3, 1, 5, 2)$, la paridad de σ es par, y su signo es $(-1)^{\epsilon(\sigma)} = 1$.

(1.4) Sea n un entero positivo. Se llama *aplicación determinante* a la única aplicación

$$\det : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_n \longrightarrow K$$

que satisface las siguientes condiciones

(1.4.1) $\det(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)$ para cualesquiera $1 \leq i \leq n$ y $v_1, \dots, v_i, v'_i, \dots, v_n \in K^n$;

(1.4.2) $\det(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ para cualesquiera $1 \leq i \leq n$, $\lambda \in K$ y $v_1, \dots, v_i, \dots, v_n \in K^n$;

(1.4.3) si $v_1, \dots, v_n \in K^n$ y existen i, j distintos tales que $v_i = v_j$, entonces $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$;

(1.4.4) $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ es el i -ésimo vector de la base canónica de K^n .

Nota: Una aplicación de $K^n \times \cdots \times K^n$ en K que satisfaga (1.4.1) y (1.4.2) se dice que es una forma (n) -multilineal. Si satisface también (1.4.3), entonces se dice además que es alternada. La aplicación determinante es la única forma multilineal alternada que sobre la n -upla de vectores de la base canónica tiene imagen 1.

(1.5) Si $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, el *determinante* de A es el escalar $\det(A_1, \dots, A_n)$, donde $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ es la i -ésima fila de A . Este escalar se denota $\det A$, o también $|A|$.

Se puede comprobar, utilizando para ello que \det es una forma multilineal alternada, que el determinante de A es

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

(1.6) Ejemplos.

■ si $A = (a_{ij}) \in M_2(K)$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- si $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

(1.7) El determinante tiene las siguientes propiedades, que se derivan de (1.4.1)-(1.4.3) y también de la fórmula del determinante de A :

(1.7.1) si $A \in M_n(K)$, entonces $\det A^t = \det A$;

(1.7.2) si $A \in M_n(K)$ y B es la matriz que se obtiene al intercambiar de sitio dos filas (o dos columnas) de A , entonces $\det B = -\det A$;

(1.7.3) si $A \in M_n(K)$ tiene una fila (o una columna) llena de ceros, entonces $\det A = 0$;

(1.7.4) si $A \in M_n(K)$ y B es la matriz que se obtiene al sumarle a una fila (o a una columna) una combinación lineal de las otras, entonces $\det B = \det A$;

(1.7.5) si $A, B \in M_n(K)$, entonces $\det A * B = \det A \det B$;

(1.7.6) si $A \in M_n(K)$ es inversible, entonces $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;

(1.7.7) si $A \in M_n(K)$, entonces A es inversible si, y sólo si $\det A \neq 0$;

(1.7.8) si $A \in M_n(K)$, entonces $\det A = 0$ si, y sólo si el rango de A es menor que n .

(1.8) Otra forma de calcular el determinante de una matriz es mediante menores complementarios. Si $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, se llama *menor complementario* del coeficiente a_{ij} , y se denota A_{ij} a la matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ que queda al suprimir la i -ésima fila y la j -ésima columna de A , es decir,

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1\ 1} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\ 1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{n\ n} \end{pmatrix}$$

Si $i \in \{1, \dots, n\}$, la expresión del determinante de A *desarrollado por la i -ésima fila* es

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

De manera similar, si $j \in \{1, \dots, n\}$, la expresión del determinante de A *desarrollado por la j -ésima columna* es

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

2. Sistemas de ecuaciones lineales

(2.1) Una *ecuación* es una expresión del tipo $f(x) = b$, donde $f : A \rightarrow B$ es una aplicación y b es un elemento de B .

Una *solución de la ecuación* $f(x) = b$ es un elemento a de A tal que $f(a) = b$.

Claramente, la ecuación $f(x) = b$ admite solución si, y sólo si, $b \in \text{Im} f$.

(2.2) Sean m y n dos enteros positivos. Un *sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas* es una ecuación $f(x) = b$, donde $f : K^m \rightarrow K^n$ es una aplicación lineal y b es un elemento de K^n .

(2.3) Sea $f(x) = b$ un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas. Si B y B' son bases de K^m y K^n respectivamente, $M_B^{B'}(f) = (a_{ij})$ y (b_1, \dots, b_n) son las coordenadas de b en la base B' , entonces el sistema de ecuaciones $f(x) = b$ se puede expresar como

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right\}$$

Cuando las bases B y B' son las bases canónicas de K^m y K^n , entonces a la matriz A se le denomina *matriz de los coeficientes del sistema* $f(x) = b$, y a la matriz $(A|b)$ *matriz ampliada del sistema*.

(2.4) Un sistema de ecuaciones lineales $f(x) = b$ se dice que es *homogéneo* si $b = 0$.

Un sistema de ecuaciones lineales $f(x) = b$ se dice que es *incompatible* si no admite ninguna solución. Si admite solución se dice que es *compatible*, y en ese caso, se dice que es *determinado* si tiene una solución e *indeterminado* si tiene más de una solución.

(2.5) Sean m y n enteros positivos y $f(x) = b$ un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas. Si A es la matriz del sistema y $(A|b)$ es la matriz ampliada, entonces $f(x) = b$ es compatible si, y sólo si, el rango de A coincide con el rango de $(A|b)$.

Esto ocurre porque un elemento $s = (s_1, \dots, s_m) \in K^m$ es solución de $f(x) = b$ si, y sólo si, $s_1 A_1 + \dots + s_m A_m = b$, donde A_i es la i -ésima columna de A .

Por lo tanto, si $s = (s_1, \dots, s_m)$ es una solución, entonces el subespacio vectorial de K^n generado por A_1, \dots, A_m, b coincide con el generado por A_1, \dots, A_m , puesto que b es combinación lineal de A_1, \dots, A_m . Luego las dimensiones de estos dos subespacios, que por definición son los rangos de $(A|b)$ y A respectivamente, coinciden.

Recíprocamente, si los rangos de A y $(A|b)$ coinciden, entonces la inclusión

$$\mathcal{V}(\{A_1, \dots, A_m\}) \subseteq \mathcal{V}(\{A_1, \dots, A_m, b\})$$

es una igualdad, y por lo tanto $b \in \mathcal{V}(\{A_1, \dots, A_m\})$, esto es, existen $s_1, \dots, s_m \in K$ tales que $s_1 A_1 + \dots + s_m A_m = b$.

(2.6) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo siempre es compatible.

En efecto, la matriz ampliada de un sistema homogéneo $f(x) = 0$ es $(A|0)$, donde A es la matriz del sistema, y su rango coincide con el de A .

Si $f(x) = 0$ es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, entonces la m -upla $s = (0, \dots, 0)$ siempre es solución del sistema.

(2.7) Sean m y n enteros positivos y $f(x) = b$ un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas.

(2.7.1) El conjunto de soluciones del sistema homogéneo $f(x) = 0$ es $\text{Ker} f$;

(2.7.2) si α y β son soluciones del sistema $f(x) = b$, entonces $\alpha - \beta$ es una solución del sistema homogéneo $f(x) = 0$;

(2.7.3) si α es una solución del sistema $f(x) = b$, entonces el conjunto de soluciones del sistema es

$$\alpha + \text{Ker} f = \{\beta \in K^m : \exists \gamma \in \text{Ker} f, \beta = \alpha + \gamma\}.$$

(2.8) Teorema. (de Rouché – Frobenius). Sean m y n enteros positivos y $f(x) = b$ un sistema compatible de n ecuaciones lineales y m incógnitas. El sistema $f(x) = 0$ tiene solución única si, y sólo si, el rango de la matriz del sistema (que coincide con el rango de la matriz ampliada por (2.5)) es igual al número de incógnitas m .

Demostración. Supongamos primero que $f(x) = b$ tiene una solución única α . Si $\gamma \in \text{Ker} f$, entonces $\alpha + \gamma$ también es solución de $f(x) = b$, luego $\alpha + \gamma = \alpha$, esto es, $\gamma = 0$. Por tanto $\text{Ker} f = \{0\}$ y eso significa que f es un monomorfismo, y de ahí que el rango de A es

$$\text{rango}(A) = \dim \text{Im} f = \dim K^m - \dim \text{Ker} f = m.$$

Recíprocamente, si el rango de A es m , entonces

$$\dim \text{Ker} f = \dim K^m - \dim \text{Im} f = m - m = 0,$$

de donde $\text{Ker} f = \{0\}$. Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema $f(x) = 0$, que se obtiene sumándole a una solución α todos los elementos de $\text{Ker} f$, se reduce únicamente a esa solución α (que existe porque $f(x) = 0$ es compatible). \square

(2.9) Método de Cramer.

Sea n un entero positivo y $Ax = b$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, con $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ y $b = (b_i) \in K^n$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una solución del sistema, entonces $\alpha_i \det A = \det B_i$, donde

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$.

En efecto, si A_i el vector columna i -ésima de A para $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_i \det A &= \alpha \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) \\ &= \det(A_1, \dots, \alpha_i A_i, \dots, A_n) \\ &= \det(A_1, \dots, \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n, \dots, A_n) \\ &= \det(A_1, \dots, b, \dots, A_n) = \det B_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que en virtud del teorema de Rouché – Frobenius, el sistema $Ax = b$ tiene solución única si, y sólo si, el rango de la matriz A es n , esto es, si, y sólo si, $\det A \neq 0$, se tiene que en tal caso

$$\alpha_i = \det B_i \det A^{-1}$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

3. Inversa y rango utilizando determinantes

(3.1) Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Se llama *matriz de los adjuntos de A* , y se denota por A^a , a la matriz $A^a = (b_{ij}) \in M_n(K)$ cuyos coeficientes son $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ (donde A_{ij} es el menor complementario del elemento a_{ij} de A).

El producto de la matriz A por la traspuesta de la matriz A^a es

$$A(A^a)^t = (A^a)^t A = (\det A)I_n.$$

Como consecuencia, si $\det(A) \neq 0$, es decir, si A es inversible, entonces la matriz $(\det A^{-1})(A^a)^t$ es la inversa de A .

(3.2) Una matriz $B = (b_{ij}) \in M_p(K)$ se dice que es un *menor de orden p* de la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ si existen $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ y $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m$ tales que

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{pmatrix}.$$

Se dice que el menor B es no nulo cuando su determinante es distinto de cero.

Si $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces el rango de A coincide con el tamaño del menor no nulo más grande de A . Por lo tanto, se puede calcular el rango de una matriz A fijándose primero en los menores de orden 1 (es decir, los coeficientes) para ver si hay alguno distinto de cero. Si no lo hubiese, el rango de A es cero. Si lo hubiese, calcularíamos los determinantes de los menores de orden 2 para ver si hay alguno no nulo. Si no lo hubiese, el rango de A es uno, y si lo hubiese, calcularíamos los determinantes de los menores de orden tres para ver si hay alguno no nulo, ... y así sucesivamente, considerando menores cada vez de mayor tamaño.