

## Aplicaciones lineales y matrices

En todo el capítulo los  $K$ -espacios vectoriales considerados serán de dimensión finita.

### 1. Aplicaciones lineales y matrices como espacios isomorfos

**Definición 1.1.** Sean  $V$  y  $V'$   $K$ -espacios vectoriales y sea  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ . Supongamos que  $\dim_K V = n > 0$  y que  $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  es una base ordenada de  $V$ , asimismo, supongamos que  $\dim_K V' = m > 0$  y que  $\mathbb{B}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$  es una base ordenada de  $V'$ . Definimos *matriz asociada a  $f$  respecto a las bases  $\mathbb{B}$  de  $V$  y  $\mathbb{B}'$  de  $V'$* , y la representamos por  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f)$ , a la matriz de  $M_{m \times n}(K)$  cuya columna  $j$ -ésima, para  $1 \leq j \leq n$ , está formada por las  $m$  coordenadas de  $f(b_j)$  en la base  $\mathbb{B}'$ , es decir:

$$\text{Si } \begin{cases} f(b_1) = a_1^1 b'_1 + a_1^2 b'_2 + \dots + a_1^m b'_m \\ f(b_2) = a_2^1 b'_1 + a_2^2 b'_2 + \dots + a_2^m b'_m \\ \dots \dots \dots \\ f(b_n) = a_n^1 b'_1 + a_n^2 b'_2 + \dots + a_n^m b'_m \end{cases} \quad \text{entonces} \quad M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^m \end{bmatrix}$$

Notemos que, considerando la aplicación coordenada  $\varphi_{\mathbb{B}'}$ , las columnas de la matriz  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f)$  verifican que:

$$C_j(M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f)) = \varphi_{\mathbb{B}'}(f(b_j)) \quad \forall j, 1 \leq j \leq n$$

Además, si  $V = V'$ ,  $f \in \text{End}_K(V)$  y  $\mathbb{B} = \mathbb{B}'$ , a la matriz cuadrada  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}}(f)$  la representaremos simplemente por  $M_{\mathbb{B}}(f)$  y es inmediato comprobar que se cumple que  $M_{\mathbb{B}}(\text{id}_V) = I_n$ .

**Ejemplo 1.2.** La aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida según  $f(x, y) = (2x - y, x + y, -x + 3y)$   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  es lineal puesto que,  $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  y  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = \\ &= (2(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y'), (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), -(\alpha x + \beta x') + 3(\alpha y + \beta y')) = \\ &= \alpha(2x - y, x + y, -x + 3y) + \beta(2x' - y', x' + y', -x' + 3y') = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y') \end{aligned}$$

Y la matriz asociada a  $f$  en las correspondientes bases canónicas es:

$$M_{\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_3}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} f(1, 0) = (2, 1, -1) = 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1) \\ f(0, 1) = (-1, 1, 3) = (-1)(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) \end{cases}$$

Los sistemas,  $\{(1, 2), (-1, 0)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  y  $\{(5, 0, -1), (1, -3, 2), (-2, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , son bases ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

por tanto  $\mathbb{B} = ((1, 2), (-1, 0))$  y  $\mathbb{B}' = ((5, 0, -1), (1, -3, 2), (-2, 0, 1))$  son bases ordenadas de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente, y la matriz asociada a  $f$  en estas bases es:

$$M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 5 & \frac{-5}{9} \\ -1 & \frac{1}{3} \\ 12 & \frac{-2}{9} \end{bmatrix} \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} f(1, 2) = (0, 3, 5) = 5(5, 0, -1) + (-1)(1, -3, 2) + 12(-2, 0, 1) \\ f(-1, 0) = (-2, -1, 1) = \frac{-5}{9}(5, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, -3, 2) + \frac{-2}{9}(-2, 0, 1) \end{cases}$$

**Consecuencias 1.3.** En las condiciones de la definición 1.1, se tiene que:

- 1)  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) [x]_{\mathbb{B}} = [f(x)]_{\mathbb{B}'}$   $\forall x \in V$
- 2)  $\dim_K \text{Im} f = \text{rg } M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f)$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Supongamos  $x = x^1 b_1 + x^2 b_2 + \dots + x^n b_n \in V$ , entonces  $[x]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$  y:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{1 \leq j \leq n} x^j b_j\right) = \sum_{1 \leq j \leq n} x^j f(b_j) = \sum_{1 \leq j \leq n} x^j \left(\sum_{1 \leq i \leq m} a_j^i b'_i\right) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} x^j a_j^i\right) b'_i = \sum_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} a_j^i x^j\right) b'_i \end{aligned}$$

de donde:

$$[f(x)]_{\mathbb{B}'} = \begin{bmatrix} \sum_{1 \leq j \leq n} a_j^1 x^j \\ \sum_{1 \leq j \leq n} a_j^2 x^j \\ \vdots \\ \sum_{1 \leq j \leq n} a_j^m x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) [x]_{\mathbb{B}}$$

- 2) Si representamos por  $A$  a la matriz  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f)$ , haciendo uso de algunas definiciones y propiedades vistas en el capítulo 3, así como de que  $Imf = \langle f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n) \rangle$ , se tiene:

$$\begin{aligned} rg M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) &= rg A = \dim_K Col(A) = rg\{C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\} = \\ &= rg\{\varphi_{\mathbb{B}'}(f(b_1)), \varphi_{\mathbb{B}'}(f(b_2)), \dots, \varphi_{\mathbb{B}'}(f(b_n))\} = rg\{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\} = \\ &= \dim_K \langle f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n) \rangle = \dim_K Imf \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 1.4.** Sean  $V$  y  $V'$   $K$ -espacios vectoriales y  $\mathbb{B}$  y  $\mathbb{B}'$  bases ordenadas de  $V$  y  $V'$ , respectivamente. Consideremos la aplicación lineal  $f \in Hom_K(V, V')$  tal que  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ . Si las coordenadas en la base  $\mathbb{B}$  de un vector  $v \in V$  son  $(1, -2, 2)$ , entonces las coordenadas en la base  $\mathbb{B}'$  de  $f(v) \in V'$  son  $(5, 5)$  ya que:

$$M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**Proposición 1.5.** Sean  $V$ ,  $V'$  y  $V''$   $K$ -espacios vectoriales, con  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{B}'$  y  $\mathbb{B}''$  bases ordenadas de  $V$ ,  $V'$  y  $V''$  respectivamente, y sean  $f \in Hom_K(V, V')$  y  $g \in Hom_K(V', V'')$ , entonces:

$$M_{\mathbb{B},\mathbb{B}''}(g \circ f) = M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}''}(g) M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos  $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $\mathbb{B}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$  y  $\mathbb{B}'' = (b''_1, b''_2, \dots, b''_t)$ . Supongamos asimismo que  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  y que  $M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}''}(g) = [c_j^i]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq m}$ , entonces, de acuerdo con la definición de producto de matrices, se tiene:

$$M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}''}(g) M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) = [c_j^i]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq m} [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = [d_j^i]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n} \quad \text{donde} \quad d_j^i = \sum_{1 \leq k \leq m} c_k^i a_j^k$$

Por otro lado,  $\forall j, 1 \leq j \leq n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(b_j) &= g(f(b_j)) = g\left(\sum_{1 \leq k \leq m} a_j^k b'_k\right) = \sum_{1 \leq k \leq m} a_j^k g(b'_k) = \\ &= \sum_{1 \leq k \leq m} a_j^k \left(\sum_{1 \leq i \leq t} c_k^i b''_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq t} \left(\sum_{1 \leq k \leq m} a_j^k c_k^i\right) b''_i = \sum_{1 \leq i \leq t} d_j^i b''_i \end{aligned}$$

de donde, de acuerdo con la definición 1.1, se tiene que  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}''}(g \circ f) = [d_j^i]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n}$  y por consiguiente la igualdad buscada.

□

**Nota 1.6.** Si en la demostración anterior hubiéramos hecho uso del *convenio de Einstein*, expuesto en el capítulo 3, habríamos indicado  $d_j^i$  simplemente por  $c_k^i a_j^k$  y:

$$(g \circ f)(b_j) = g(f(b_j)) = g(a_j^k b'_k) = a_j^k g(b'_k) = a_j^k c_k^i b''_i = d_j^i b''_i$$

**Ejemplo 1.7.** Supongamos  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  y  $g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$  definidas según:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x + z) & \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ g(x, y) = (x + 2y, y, -x + y, 2x - y) & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Calcular la matriz asociada a  $f$ , a  $g$  y a  $g \circ f$  respecto a las correspondientes bases canónicas y dar asimismo la expresión de  $(g \circ f)(x, y, z)$  para  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

• Teniendo en cuenta que en la base canónica las coordenadas de un vector coinciden con sus componentes, las correspondientes matrices asociadas son:

$$M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad M_{\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_4}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}_4}(g \circ f) = M_{\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_4}(g) M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

• Respecto a la expresión de  $(g \circ f)(x, y, z)$  para  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , se tiene:

$$M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}_4}(g \circ f) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x + 2y + z \\ 3x + z \\ 2x - 2y + 2z \\ -x + 4y - 3z \end{bmatrix}$$

por lo que  $(g \circ f)(x, y, z) = (7x + 2y + z, 3x + z, 2x - 2y + 2z, -x + 4y - 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Proposición 1.8.** Sean  $V$  y  $V'$   $K$ -espacios vectoriales con  $\dim_K V = n > 0$  y  $\dim_K V' = m > 0$ , y supongamos que  $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  es una base ordenada de  $V$  y que  $\mathbb{B}' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)$  es una base ordenada de  $V'$ , entonces la siguiente aplicación es un isomorfismo de  $K$ -espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'} : \text{Hom}_K(V, V') &\longrightarrow M_{m \times n}(K) \\ f &\longmapsto M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Hay que justificar que  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}$  es lineal, inyectiva y suprayectiva:

- $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}$  es lineal: Es consecuencia de que,  $\forall f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$  y  $\forall \alpha, \beta \in K$ , se tiene:

$$(\alpha f + \beta g)(b_j) = \alpha f(b_j) + \beta g(b_j) \quad \forall j, 1 \leq j \leq n$$

y de la definición de suma y de producto por un escalar en  $M_{m \times n}(K)$ .

- $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}$  es inyectiva: Puesto que ya sabemos que es lineal, será suficiente comprobar que su núcleo se reduce a la aplicación nula, es decir, comprobar que si  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) = O \in M_{m \times n}(K)$ , entonces necesariamente  $f = 0$ , pero esto es inmediato teniendo en cuenta 1.3, página 116, ya que,  $\forall x \in V$ , se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) [x]_{\mathbb{B}} = \begin{cases} [f(x)]_{\mathbb{B}'} \\ O [x]_{\mathbb{B}} = O \in M_{m \times 1}(K) \end{cases}$$

por lo que  $f(x) = 0 \forall x \in V$ .

- $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}$  es suprayectiva: Supongamos  $A = [a_{ij}^j]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y, para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , consideremos el vector  $w_j \in V'$  definido según  $w_j = a_j^1 b'_1 + a_j^2 b'_2 + \cdots + a_j^m b'_m$ , entonces haciendo uso del teorema de existencia y unicidad de aplicaciones lineales, visto en el capítulo anterior, sabemos que  $\exists f \in \text{Hom}_K(V, V')$  tal que  $f(b_j) = w_j$  para todo  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ . Teniendo ahora en cuenta la definición de  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f)$  es inmediato que  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) = A$ .

□

**Definición 1.9.** Como consecuencia de la proposición anterior, si  $A \in M_{m \times n}(K)$  y consideramos las bases canónicas  $\mathbb{B}_n$  de  $K^n$  y  $\mathbb{B}_m$  de  $K^m$ , existe una única aplicación lineal,  $f_A \in \text{Hom}_K(K^n, K^m)$ , tal que  $M_{\mathbb{B}_n, \mathbb{B}_m}(f_A) = A$ . A  $f_A$  lo denominaremos *homomorfismo canónico asociado a la matriz A*.

**Proposición 1.10.** Si  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $f_A$  es su homomorfismo canónico asociado, entonces:

- 1)  $\text{Ker } f_A$  es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo que tiene a  $A$  como matriz de coeficientes y por tanto  $f_A$  es monomorfismo si y sólo si  $\text{rg } A = n$ .
- 2)  $\text{Im } f_A$  es el subespacio de  $K^m$  generado por las columnas de  $A$  y por tanto  $f_A$  es epimorfismo si y sólo si  $\text{rg } A = m$ .
- 3)  $f_A$  es automorfismo si y sólo si  $\text{rg } A = n = m$ , lo que a su vez equivale a que  $A$  sea una matriz invertible.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $M_{\mathbb{B}_n, \mathbb{B}_m}(f_A) = A$ , siendo  $\mathbb{B}_n$  y  $\mathbb{B}_m$  las correspondientes bases canónicas de  $K^n$  y  $K^m$ , respectivamente, se tiene:

$$1) \quad \text{Ker } f_A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n \mid f_A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)\} =$$

$$= \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n \mid A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Además se cumple que:

$$f_A \text{ es monomorfismo} \iff \text{Ker } f_A = \{0\} \iff \text{rg } A = n$$

$$2) \quad \text{Im } f_A = \langle f_A(e_1), f_A(e_2), \dots, f_A(e_n) \rangle = \langle C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A) \rangle \text{ siendo } e_j \text{ el } j\text{-ésimo}$$

vector de la base canónica de  $K^n$  y  $C_j(A)$  la  $j$ -ésima columna de  $A$ , para  $1 \leq j \leq n$ .

Además, teniendo en cuenta alguna de las caracterizaciones vistas del rango de una matriz, se cumple que:

$$f_A \text{ es epimorfismo} \iff \text{Im } f_A = K^m \iff \dim_K \text{Im } f_A = m \iff \text{rg } A = m$$

3) Estas equivalencias son consecuencia inmediata de los dos apartados anteriores.

□

**Ejemplo 1.11.** Si  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$ , entonces se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}_4}(f_A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ 2y + 2z \\ 3x + 4y + z \\ -2x + 3y + 5z \end{bmatrix}$$

por lo que  $f_A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  verifica que  $f_A(x, y, z) = (x - z, 2y + 2z, 3x + 4y + z, -2x + 3y + 5z)$   $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Además se tiene que:

• Puesto que  $\text{Fer}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , se tiene que el conjunto de soluciones, en forma matricial

parametrizada, del sistema homogéneo  $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

y por consiguiente  $(1, -1, 1)$  es base de  $\text{Ker} f_A$ .

• El sistema de  $\mathbb{R}^4$  formado por los vectores  $f_A(1, 0, 0) = (1, 0, 3, -2)$ ,  $f_A(0, 1, 0) = (0, 2, 4, 3)$  y  $f_A(0, 0, 1) = (-1, 2, 1, 5)$  sabemos que genera  $\text{Im} f_A$ , pero, teniendo en cuenta la matriz  $\text{Fer}(A)$ , sabemos que  $(-1, 2, 1, 5) = -(1, 0, 3, -2) + (0, 2, 4, 3)$  y que  $\{(1, 0, 3, -2), (0, 2, 4, 3)\}$  forman un sistema libre, por consiguiente  $\{(1, 0, 3, -2), (0, 2, 4, 3)\}$  es base de  $\text{Im} f_A$ .

**Corolario 1.12.** Si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita, entonces  $\text{Hom}_K(V, V')$  también lo es y:

$$\dim_K \text{Hom}_K(V, V') = \dim_K V \dim_K V'$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos  $\dim_K V = n > 0$  y  $\dim_K V' = m > 0$ , y sean  $\mathbb{B}$  y  $\mathbb{B}'$  bases ordenadas de  $V$  y  $V'$  respectivamente. Por un lado sabemos que el  $K$ -espacio vectorial  $M_{m \times n}(K)$  es de dimensión finita  $mn$ , por otro, por ser  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}$  isomorfismo, su inversa,  $(M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'})^{-1}$ , es también isomorfismo y, según vimos en el capítulo anterior, transformará cualquier base de  $M_{m \times n}(K)$  en una base de  $\text{Hom}_K(V, V')$ , en consecuencia,  $\text{Hom}_K(V, V')$  es de dimensión finita y:

$$\dim_K \text{Hom}_K(V, V') = \dim_K M_{m \times n}(K) = mn = \dim_K V \dim_K V'$$

□

**Corolario 1.13.** Sean  $V$  y  $V'$   $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita con  $\mathbb{B}$  y  $\mathbb{B}'$  bases ordenadas de  $V$  y  $V'$  respectivamente. Si  $f \in \text{Hom}_K(V, V')$ , entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $f$  es isomorfismo.
- 2)  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f)$  es inversible.

DEMOSTRACIÓN.

1)  $\implies$  2): Por ser  $f$  isomorfismo, su inversa,  $f^{-1}$ , es también isomorfismo y se cumple que  $f \circ f^{-1} = \text{id}_{V'}$  y  $f^{-1} \circ f = \text{id}_V$ , además, según vimos en el capítulo anterior, sabemos que  $\dim_K V = \dim_K V'$ , que supondremos igual a  $n > 0$ . Teniendo ahora en cuenta 1.5, se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}'}(f \circ f^{-1}) = \begin{cases} M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) M_{\mathbb{B}', \mathbb{B}}(f^{-1}) \\ M_{\mathbb{B}'}(\text{id}_{V'}) = I_n \end{cases} \quad M_{\mathbb{B}}(f^{-1} \circ f) = \begin{cases} M_{\mathbb{B}', \mathbb{B}}(f^{-1}) M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f) \\ M_{\mathbb{B}}(\text{id}_V) = I_n \end{cases}$$

por lo que

$$M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}}(f^{-1}) = I_n = M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}}(f^{-1}) M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f)$$

de donde deducimos que  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f)$  es inversible y además  $(M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f))^{-1} = M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}}(f^{-1})$ .

2)  $\implies$  1): Si suponemos ahora que  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f)$  es inversible, entonces por un lado tenemos que es una matriz cuadrada, por lo que  $\dim_K V = \dim_K V'$ , que supondremos igual a  $n > 0$ , y existirá  $C \in M_n(K)$  tal que  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) C = I_n = C M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f)$ .

Por otro lado, considerando la biyección  $M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}} : \text{Hom}_K(V', V) \rightarrow M_n(K)$ , concluimos que existe  $g \in \text{Hom}_K(V', V)$  tal que  $M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}}(g) = C$ , por tanto, haciendo uso de 1.5, se tiene:

$$I_n = \begin{cases} M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) C = M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}}(g) = M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}'}(f \circ g) = M_{\mathbb{B}'}(f \circ g) \\ C M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) = M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}}(g) M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f) = M_{\mathbb{B},\mathbb{B}}(g \circ f) = M_{\mathbb{B}}(g \circ f) \end{cases}$$

Pero también sabemos que  $M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}'}(id_{V'}) = M_{\mathbb{B}'}(id_{V'}) = I_n$  y  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}}(id_V) = M_{\mathbb{B}}(id_V) = I_n$  y, haciendo uso de que  $M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}'}$  y  $M_{\mathbb{B},\mathbb{B}}$  son aplicaciones inyectivas, se tiene:

$$\begin{cases} M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}'}(f \circ g) = I_n = M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}'}(id_{V'}) \implies f \circ g = id_{V'} \implies f \text{ es suprayectiva} \\ M_{\mathbb{B},\mathbb{B}}(g \circ f) = I_n = M_{\mathbb{B},\mathbb{B}}(id_V) \implies g \circ f = id_V \implies f \text{ es inyectiva} \end{cases}$$

por lo que  $f$  es biyectiva y, puesto que por hipótesis es lineal,  $f$  es un isomorfismo. □

**Nota 1.14.** Notemos que, en las condiciones del corolario anterior, si  $f$  es isomorfismo, entonces  $(M_{\mathbb{B},\mathbb{B}'}(f))^{-1} = M_{\mathbb{B}',\mathbb{B}}(f^{-1})$ .

**Ejemplo 1.15.** Si  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ , entonces se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}_3}(f_A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y - 3z \\ x - y \\ 2x + y - z \end{bmatrix}$$

por lo que  $f_A \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$  verifica  $f_A(x, y, z) = (3x + 2y - 3z, x - y, 2x + y - z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Además, puesto que  $A$  es inversible, ya que  $|A| = -4 \neq 0$ , entonces  $f_A$  es un automorfismo de  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $f_A \in GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$  y:

$$M_{\mathbb{B}_3}(f_A^{-1}) = (M_{\mathbb{B}_3}(f_A))^{-1} = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



y de aquí se tiene que  $f_A^{-1}$  está definida según:

$$f_A^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{4}(-x + y + 3z, -x - 3y + 3z, -3x - y + 5z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

## 2. Matriz de cambio de base

**Definición 2.1.** Si  $\mathbb{B}$  y  $\mathbb{D}$  son bases ordenadas de un  $K$ -espacio vectorial  $V$ , a la matriz  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}(id_V)$  la denominamos *matriz de cambio de base* puesto que, de acuerdo con 1.3, se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}(id_V) [x]_{\mathbb{B}} = [id_V(x)]_{\mathbb{D}} = [x]_{\mathbb{D}} \quad \forall x \in V$$

lo que nos proporciona la relación entre las coordenadas de cualquier vector  $x$  de  $V$  respecto a las bases  $\mathbb{B}$  y  $\mathbb{D}$ .

**Ejemplo 2.2.** Si consideramos en  $\mathbb{R}^3$  la base ordenada  $\mathbb{B} = ((1, 1, 2), (0, 1, 1), (2, 0, 1))$ , calcular las matrices de cambio de base  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3})$  y  $M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$ . Calcular las coordenadas, en la base  $\mathbb{B}$ , del vector  $v = (5, 3, 7) \in \mathbb{R}^3$  y obtener el vector  $u \in \mathbb{R}^3$  cuya terna de coordenadas en la base  $\mathbb{B}$  es  $(1, -3, 2)$ .

Puesto que en la base canónica las coordenadas de un vector coinciden con sus componentes, se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, haciendo uso de 1.14, página 122, se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = (M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \\ M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3}) \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

se tiene que la terna de coordenadas de  $v = (5, 3, 7)$ , en la base  $\mathbb{B}$ , es  $(3, 0, 1)$ , de hecho se tiene que  $v = (5, 3, 7) = 3(1, 1, 2) + 0(0, 1, 1) + 1(2, 0, 1)$ , y el vector  $u$ , cuya terna de coordenadas en la base  $\mathbb{B}$  es  $(1, -3, 2)$ , es el vector  $u = (5, -2, 1)$ , de hecho  $u = 1(1, 1, 2) - 3(0, 1, 1) + 2(2, 0, 1) = (5, -2, 1)$ .

**Nota 2.3.** De acuerdo con 1.13, página 121, puesto que la aplicación identidad  $id_V$  es un isomorfismo, se tiene que toda matriz de cambio de base es inversible. En la siguiente proposición vamos a justificar que *una matriz es inversible si y sólo si es una matriz de cambio de base*.

**Proposición 2.4.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n > 0$ ,  $\mathbb{B}$  base ordenada de  $V$  y  $P \in M_n(K)$ , entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $P$  es inversible, es decir,  $P \in GL(n, K)$ .
- 2) Existe una base ordenada  $\mathbb{D}$  de  $V$ , tal que  $P = M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V)$ .
- 3) Existe una base ordenada  $\mathbb{D}'$  de  $V$ , tal que  $P = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}'}(id_V)$ .

DEMOSTRACIÓN.

1)  $\implies$  2): Considerando el isomorfismo  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}} : Hom_K(V, V) \rightarrow M_n(K)$ , puesto que  $P \in M_n(K)$ , sabemos que existe  $f \in Hom_K(V, V)$  tal que  $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}}(f) = P$ . Por otro lado, de 1.13, página 121, se tiene que, por ser  $P$  inversible, necesariamente  $f$  es isomorfismo (automorfismo) y, según vimos en el capítulo anterior, si  $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , entonces  $\mathbb{D} = (f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$  es una base ordenada de  $V$ . Por otro lado, de la definición 1.1, se deriva de forma inmediata la siguiente igualdad:

$$M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V) = M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}}(f) = P$$

2)  $\implies$  1): Si existe una base ordenada  $\mathbb{D}$  de  $V$ , tal que  $P = M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V)$ , puesto que  $id_V$  es isomorfismo, de 1.13, página 121, se tiene que  $P = M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V)$  es inversible.

1)  $\implies$  3): Si  $P$  es inversible, obviamente  $P^{-1}$  también lo es y, aplicando la implicación "1)  $\implies$  2)" ya demostrada, a la matriz  $P^{-1}$ , se tiene que  $\exists \mathbb{D}'$ , base ordenada de  $V$ , tal que  $P^{-1} = M_{\mathbb{D}', \mathbb{B}}(id_V)$ , entonces, haciendo uso de 1.14, se tiene que  $P = (M_{\mathbb{D}', \mathbb{B}}(id_V))^{-1} = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}'}((id_V)^{-1}) = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}'}(id_V)$ .

3)  $\implies$  1): Si existe una base ordenada  $\mathbb{D}'$  de  $V$ , tal que  $P = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}'}(id_V)$ , puesto que  $id_V$  es isomorfismo, de 1.13, página 121, se tiene que  $P$  es inversible.

□

**Ejemplo 2.5.** La matriz  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}^3)$  es inversible ya que  $|P| = 2 \neq 0$ . Para

obtener bases ordenadas  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{D}'$  de  $\mathbb{R}^3$  de manera que  $P = M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3})$  y  $P = M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{D}'}(id_{\mathbb{R}^3})$ , siendo  $\mathbb{B}_3$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , reproduciremos la demostración anterior con estos datos. Si consideramos el único endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f_P$ , tal que  $M_{\mathbb{B}_3}(f_P) = P$ , que actúa de la forma siguiente:

$$f_P(x, y, z) = (y - z, x + 2y + z, x + z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

entonces la base  $\mathbb{D}$  buscada es  $\mathbb{D} = (f_P(1, 0, 0), f_P(0, 1, 0), f_P(0, 0, 1)) = ((0, 1, 1), (1, 2, 0), (-1, 1, 1))$  y

$$M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{B}_3}(f_P) = M_{\mathbb{B}_3}(f_P) = P$$

Para obtener la base  $\mathbb{D}'$  buscada, procederemos de igual manera pero con  $P^{-1}$ , ya que así obtendremos una base  $\mathbb{D}'$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $M_{\mathbb{D}', \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3}) = P^{-1}$  y de aquí, teniendo en cuenta 1.14, se tendrá  $P = (M_{\mathbb{D}', \mathbb{B}_3}(id_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{D}'}((id_{\mathbb{R}^3})^{-1}) = M_{\mathbb{B}_3, \mathbb{D}'}(id_{\mathbb{R}^3})$ . Por tanto hemos de calcular en primer lugar  $P^{-1}$ , para lo que utilizaremos lo visto en el capítulo 1:

$$Fer\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  y

$$f_{P^{-1}}(x, y, z) = (x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

y la base  $\mathbb{D}'$  buscada es:

$$\mathbb{D}' = (f_{P^{-1}}(1, 0, 0), f_{P^{-1}}(0, 1, 0), f_{P^{-1}}(0, 0, 1)) = ((1, 0, -1), (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}))$$

Notemos finalmente que los vectores de la base  $\mathbb{D}$  son las columnas de  $P$  y los de la base  $\mathbb{D}'$ , son las columnas de  $P^{-1}$ .

### 3. Matrices equivalentes: definición y caracterización

**Proposición 3.1.** Si  $m$  y  $n$  son enteros positivos, la siguiente relación, definida en  $M_{m \times n}(K)$ , es una relación binaria de equivalencia:

$$A \sim C \iff \exists P \in GL(m, K), \exists Q \in GL(n, K) / A = PCQ$$

**DEMOSTRACIÓN.** En efecto, veamos que esta relación cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- Reflexiva: Para justificar que  $A \sim A$ , basta considerar  $P = I_m \in GL(m, K)$  y  $Q = I_n \in GL(n, K)$ .

- Simétrica: Si suponemos  $A \sim C$ , entonces  $\exists P \in GL(m, K)$  y  $\exists Q \in GL(n, K)$  tales que  $A = PCQ$ . Por consiguiente, considerando  $P^{-1} \in GL(m, K)$  y  $Q^{-1} \in GL(n, K)$ , se tiene  $C \sim A$ , ya que:

$$P^{-1}AQ^{-1} = P^{-1}PCQQ^{-1} = C$$

- Transitiva: Si suponemos  $A \sim C$  y  $C \sim D$ , entonces  $\exists P_1, P_2 \in GL(m, K)$  y  $\exists Q_1, Q_2 \in GL(n, K)$  tales que  $A = P_1CQ_1$  y  $C = P_2DQ_2$ . Pero es inmediato que  $P_1P_2 \in GL(m, K)$  y  $Q_2Q_1 \in GL(n, K)$ , y se tiene  $A \sim D$ , ya que:

$$A = P_1CQ_1 = P_1P_2DQ_2Q_1$$

□

**Definición 3.2.** Dos matrices  $A, C \in M_{m \times n}(K)$  que pertenezcan a la misma clase de equivalencia para la relación de la proposición anterior, 3.1, diremos que son *matrices equivalentes*.

**Proposición 3.3.** Sea  $A \in M_{m \times n}(K)$ , con  $m$  y  $n$  enteros no nulos, y  $r \geq 0$ , entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1)  $rgA = r$ .

2)  $A$  es equivalente a la matriz  $R = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right] \in M_{m \times n}(K)$

DEMOSTRACIÓN.

1)  $\implies$  2): Supongamos que  $rgA = r$ , entonces la matriz  $F = Fer(A)$  es una matriz de  $M_{m \times n}(K)$  con las  $r$  primeras filas no nulas y las demás nulas y, puesto que su rango también es  $r$  (ya que  $Fer(F) = F$ ), las  $r$  primeras filas de  $F$  formarán un sistema libre de  $K^n$ . Además, existirán matrices elementales  $E_1, \dots, E_t \in M_m(K)$  de manera que  $F = E_1 \cdots E_t A$  y, puesto que las matrices elementales son inversibles y su producto también, obtenemos en definitiva una matriz  $P \in GL(m, K)$  tal que  $F = PA$ .

Por otro lado, la traspuesta de  $F$ ,  $F^T$ , será una matriz de  $M_{n \times m}(K)$  de rango  $r$  y, puesto que sus  $r$  primeras columnas son no nulas y las demás son nulas, es inmediato que su forma escalonada reducida,  $Fer(F^T)$ , es la matriz  $\left[ \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right] \in M_{n \times m}(K)$ , es decir, la matriz  $R^T$ . Además, razonando igual que antes, sabemos que existe una matriz inversible,  $S \in GL(n, K)$ , tal que  $Fer(F^T) = SF^T = S(PA)^T$ , de donde  $S(PA)^T = R^T$ . Finalmente, considerando  $Q = S^T$ , se tiene que  $Q \in GL(n, K)$  y  $PAQ = R$ , lo que justifica que  $R$  es equivalente a  $A$  y por consiguiente  $A$  lo es a  $R$ .

2)  $\implies$  1): Por ser  $A$  equivalente a  $R$ , existen matrices inversibles,  $P \in GL(m, K)$  y  $Q \in GL(n, K)$  de manera que  $A = PRQ$ . Considerando el homomorfismo canónico asociado a la matriz  $A$ , y aplicando

adecuadamente la proposición 2.4, página 124, encontramos bases ordenadas  $\mathbb{B}'$  de  $K^m$  y  $\mathbb{B}$  de  $K^n$ , de manera que  $P = M_{\mathbb{B}', \mathbb{B}_m}(id_{K^m})$  y  $Q = M_{\mathbb{B}_n, \mathbb{B}}(id_{K^n})$  y de aquí:

$$R = P^{-1}AQ^{-1} = M_{\mathbb{B}_m, \mathbb{B}'}(id_{K^m}) M_{\mathbb{B}_n, \mathbb{B}_m}(f_A) M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_n}(id_{K^n}) = M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}'}(f_A)$$

y por 1.3 también se tiene que  $\dim_K \text{Im} f_A = rgR$ , pero, de acuerdo con la definición de rango de una matriz, es inmediato que  $rgR = r$  con lo que finalmente tenemos  $rgA = \dim_K \text{Im} f_A = r$ .

□

**Ejemplo 3.4.** Comprobar que la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -2 \\ 5 & -5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  tiene rango 2 y encontrar una relación entre las matrices  $A$  y  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  como matrices equivalentes.

De acuerdo con la demostración anterior, se tiene que  $Fer([A|I_3]) = [Fer(A)|P])$ , por lo que calculando la forma escalonada reducida de la matriz  $[A|I_3]$  conoceremos simultáneamente el rango de  $A$  y la matriz  $P$  buscada.

$$Fer([A|I_3]) = Fer\left(\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{-1}{7} & 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{7} & 0 & \frac{-5}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right]$$

Y de aquí se tiene que  $rgA = 2$ ,  $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{-5}{14} & \frac{3}{14} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$  y  $F = Fer(A) = PA$ . Aplicando ahora el mismo

razonamiento a la traspuesta de  $Fer(A)$ , es decir a  $F^T$ , se tiene que:

$$Fer([F^T|I_4]) = Fer\left(\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{7} & \frac{11}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \end{array}\right]$$

Por lo que, siguiendo la notación usada en la proposición anterior, se tiene que  $Fer(F^T) = R^T$ ,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 7 \\ 0 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} \text{ y } R^T = SF^T \text{ por lo que } R = FS^T = PAQ, \text{ siendo } Q = S^T, \text{ lo que nos da}$$

una relación entre las matrices  $A$  y  $R$  como matrices equivalentes. Se puede efectivamente comprobar la igualdad siguiente:

$$PAQ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{-5}{14} & \frac{3}{14} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -2 \\ 5 & -5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 1 & -11 & 11 \\ -7 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

**Corolario 3.5.** Si  $A, C \in M_{m \times n}(K)$ , las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $A$  y  $C$  son equivalentes.
- 2)  $rg A = rg C$ .

DEMOSTRACIÓN.

1)  $\implies$  2): Supongamos que  $rg A = r$ , entonces de la proposición anterior, 3.3, se tiene que  $A$  es equivalente a la matriz  $R = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right]$ , pero por ser  $A$  y  $C$  equivalentes, también se tiene que  $C$  y  $R$  son equivalentes de donde, aplicando de nuevo la proposición anterior, se tiene que  $rg C = r$ .

2)  $\implies$  1): Si suponemos  $rg A = rg C = r$ , de la proposición anterior, 3.3, se deduce que tanto  $A$  como  $C$  son equivalentes a la matriz  $\left[ \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right] \in M_{m \times n}(K)$ , por consiguiente  $A$  y  $C$  son equivalentes. □

**Ejemplo 3.6.** Estudiar si las matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -2 \\ 5 & -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  y  $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  de  $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  son equivalentes y, en caso afirmativo, obtener matrices  $P \in GL(3, \mathbb{R})$  y  $Q \in GL(4, \mathbb{R})$ , tales que  $A = PCQ$ .

Puesto que la matriz  $A$  es la que hemos analizado en el ejemplo 3.4, para saber si  $A$  y  $C$  son equivalentes bastará saber si  $C$  es de rango 2. Pero si procedemos con  $C$  tal y como lo hemos hecho con la matriz  $A$  en el ejemplo 3.4, y confirmamos que también es de rango 2, tendremos que son equivalentes y habremos obtenido matrices  $P_1, P_2 \in GL(3, \mathbb{R})$  y matrices  $Q_1, Q_2 \in GL(4, \mathbb{R})$  tales que  $R = P_1 A Q_1$

y  $R = P_2 C Q_2$ , siendo  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . De aquí deduciremos finalmente que:

$$A = P_1^{-1} R Q_1^{-1} = P_1^{-1} (P_2 C Q_2) Q_1^{-1} = (P_1^{-1} P_2) C (Q_2 Q_1^{-1})$$

lo que nos dará una relación entre  $A$  y  $C$  como matrices equivalentes. Procedamos pues con  $C$  tal y como hemos hecho con  $A$  en el ejemplo 3.4:

$$Fer([C|I_3]) = Fer\left(\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Y de aquí se tiene que  $rgC = 2$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  y  $F' = Fer(C) = P_2C$ . Aplicando ahora el

mismo razonamiento a la traspuesta de  $Fer(C)$ , es decir a  $F'^T$ , se tiene que:

$$Fer([F'^T|I_4]) = Fer\left(\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Por consiguiente, siguiendo la notación usada en la proposición 3.3, se tiene que  $Fer(F'^T) = R^T$ ,

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } R^T = S'F'^T \text{ por lo que } R = F'S'^T = P_2CQ_2, \text{ siendo } Q_2 = S'^T, \text{ lo que nos}$$

da una relación entre las matrices  $C$  y  $R$  como matrices equivalentes. Se puede efectivamente comprobar la igualdad siguiente:

$$P_2CQ_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

#### 4. Matrices semejantes: definición y caracterización

**Proposición 4.1.** Si  $n$  es un entero positivo, la siguiente relación, definida en  $M_n(K)$ , es una relación binaria de equivalencia:

$$A \sim C \iff \exists P \in GL(n, K) / A = PCP^{-1}$$

**DEMOSTRACIÓN.** En efecto, veamos que esta relación cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- Reflexiva: Para justificar que  $A \sim A$ , basta considerar  $P = I_n \in GL(n, K)$ .
- Simétrica: Si suponemos  $A \sim C$ , entonces  $\exists P \in GL(n, K)$  tal que  $A = PCP^{-1}$ . Por consiguiente, considerando  $P^{-1} \in GL(n, K)$ , se tiene  $C \sim A$ , ya que:

$$P^{-1}A(P^{-1})^{-1} = P^{-1}AP = P^{-1}PCP^{-1}P = C$$

- Transitiva: Si suponemos  $A \sim C$  y  $C \sim D$ , entonces  $\exists P_1, P_2 \in GL(n, K)$  tales que  $A = P_1CP_1^{-1}$  y  $C = P_2DP_2^{-1}$ . Pero es inmediato que  $P_1P_2 \in GL(n, K)$  y se tiene  $A \sim D$ , ya que:

$$A = P_1CP_1^{-1} = P_1P_2DP_2^{-1}P_1^{-1} = (P_1P_2)D(P_1P_2)^{-1}$$

□

**Definición 4.2.** Dos matrices  $A, C \in M_n(K)$  que pertenezcan a la misma clase de equivalencia para la relación de la proposición anterior, 4.1, diremos que son *matrices semejantes*.

**Corolario 4.3.** Si  $A, C \in M_n(K)$ , entonces:

- 1)  $A$  y  $C$  semejantes  $\implies A$  y  $C$  equivalentes.
- 2)  $A$  y  $C$  semejantes  $\implies |A| = |C|$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Es consecuencia inmediata de la definición de matrices equivalentes y de matrices semejantes.
- 2) Haciendo uso de propiedades de determinantes, se tiene:

$$\begin{aligned} A \text{ y } C \text{ semejantes} &\implies \exists P \in GL(n, K) / A = PCP^{-1} \implies \\ &\implies |A| = |PCP^{-1}| = |P| |C| |P^{-1}| = |P| |P^{-1}| |C| = |PP^{-1}| |C| = |I_n| |C| = |C| \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.4.** Sea  $V$   $K$ -espacio vectorial con  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  base ordenada de  $V$ , y supongamos  $f \in \text{End}_K(V)$  y  $A = M_B(f)$ . Entonces, si  $C \in M_n(K)$ , se tiene que las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $C$  y  $A$  son semejantes.
- 2) Existe  $\mathbb{D}$ , base de  $V$ , de manera que  $C = M_{\mathbb{D}}(f)$ .

DEMOSTRACIÓN.

1)  $\implies$  2): Por ser  $C$  y  $A$  semejantes, se tiene que  $\exists P \in GL(n, K) / C = PAP^{-1}$ . Aplicando adecuadamente la proposición 2.4, se obtiene una base ordenada  $\mathbb{D}$  de  $V$  tal que  $P = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}(id_V)$ . Por consiguiente, de 1.14 se tiene que  $P^{-1} = M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V)$  y, haciendo uso de 1.5, página 117, se tiene que:

$$C = PAP^{-1} = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}(id_V) M_B(f) M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V) = M_{\mathbb{D}}(f)$$



2)  $\implies$  1): Si consideramos la matriz de cambio de base  $P = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}(id_V) \in GL(n, K)$ , haciendo uso de 1.5, página 117, se tiene que:

$$PAP^{-1} = M_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}(id_V) M_{\mathbb{B}}(f) M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V) = M_{\mathbb{D}, \mathbb{D}}(f) = M_{\mathbb{D}}(f) = C$$

de donde  $C$  y  $A$  son semejantes. □

**Nota 4.5.** En las condiciones de la proposición anterior, 4.4, si  $A$  y  $C$  son semejantes, diremos que  $C$  y  $A$  representan al mismo endomorfismo.

**Nota 4.6.** Otras caracterizaciones de matrices semejantes se verán en la asignatura *Álgebra Multilineal*.

## 5. Determinante de un endomorfismo

**Definición 5.1.** Si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n > 0$  y  $f \in \text{End}_K(V)$ . Por la proposición 4.4 sabemos que todas las matrices asociadas a  $f$  son semejantes, y de 4.3 se deduce que todas ellas tienen el mismo determinante, en consecuencia, al determinante común a todas las matrices asociadas a  $f$  lo denominaremos *determinante del endomorfismo  $f$*  y lo representaremos por  $\det f$ , es decir:

$$\det f = |M_{\mathbb{B}}(f)| \quad \forall \mathbb{B} \text{ base de } V$$

**Nota 5.2.** De la definición anterior se desprende que si  $A \in M_n(K)$  y  $f_A \in \text{End}_K(K^n)$  es su endomorfismo canónico asociado, entonces  $\det f_A = |A|$ .

**Proposición 5.3.** Si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n > 0$  y  $f \in \text{End}_K(V)$ , entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- 1)  $f$  es automorfismo.
- 2)  $\det f \neq 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathbb{B}$  una base ordenada de  $V$  y consideremos la matriz  $M_{\mathbb{B}}(f)$ , entonces, haciendo uso de 1.13, página 121, y de que una matriz cuadrada es inversible si y sólo si su determinante es no nulo, se tiene:

$$f \text{ automorfismo} \iff M_{\mathbb{B}}(f) \text{ es inversible} \iff \det f = |M_{\mathbb{B}}(f)| \neq 0$$

□