

## Capítulo 3

# Espacios vectoriales

### 3.1 Espacios vectoriales. Dependencia lineal

**Definición 3.1.1** Sean  $A$  y  $\Omega$  conjuntos no vacíos al segundo de los cuales le llamaremos *conjunto de escalares*. Una *operación* o *ley de composición externa* sobre  $A$  cuyo conjunto de escalares es  $\Omega$  es toda “regla” que asocie a cada par de elementos, el primero de  $\Omega$  y el segundo de  $A$ , un único elemento del conjunto  $A$ .

O bien, en términos de aplicaciones, llamamos *operación* o *ley de composición externa* sobre  $A$  cuyo conjunto de escalares es  $\Omega$  a toda aplicación

$$\circ : \Omega \times A \longrightarrow A.$$

Si  $(\alpha, x) \in \Omega \times A$ , el elemento  $c \in A$ , imagen del par  $(\alpha, x)$  por la aplicación  $\circ$ , será notado por  $c = \alpha \circ x$ .

Frecuentemente, a la ley  $\circ$  se le llama “multiplicación” y al elemento  $c = \alpha \circ x$  se le llama “producto” de  $\alpha$  por  $x$ .

**Definición 3.1.2** (CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL) Sea  $V$  un conjunto no vacío (cuyos elementos los representaremos con letras minúsculas “negritas”) y  $K$  un cuerpo (cuyos elementos serán representados por caracteres griegos o latinos en minúsculas). Sobre  $V$  se definen dos leyes de composición, interna y externa que notaremos con los símbolos  $+$  y  $\cdot$ , decimos que la terna  $(V, +, \cdot K)$  es un espacio vectorial sobre  $K$  o que es un  $K$ -espacio vectorial, si se verifica:

1.  $(V, +)$  es grupo abeliano. Es decir; la operación  $+$  tiene las siguientes propiedades:

E.1. ASOCIATIVA:  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

E.2. CONMUTATIVA:  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .

E.3. E. NEUTRO:  $\exists \mathbf{0} \in V \mid \forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ .

E.4. ELEMENTO SIMÉTRICO:  $\forall \mathbf{a} \in V, \exists -\mathbf{a} \in V \mid \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

2. Propiedades de la ley de composición externa (el elemento  $\lambda \cdot \mathbf{x}$  se notará simplemente por  $\lambda \mathbf{x}$ ).

E.5.  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \mathbf{x} \in V (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$ .

E.6.  $\forall \lambda \in K \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$ .

E.7.  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall \mathbf{x} \in V (\lambda(\mu \mathbf{x})) = (\lambda \mu)\mathbf{x}$ .

E.8.  $\forall \mathbf{x} \in V, 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$  (donde  $1 \in K$  es el elemento neutro de la multiplicación de  $K$ ).

**Definición 3.1.3** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $K$ , a los elementos de  $V$  se les llamará vectores y a los de  $K$  escalares.

**Proposición 3.1.1** PROPIEDADES INMEDIATAS. Si  $V$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $K$ , se verifica:

1.  $\forall \mathbf{x} \in V, 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2.  $\forall \lambda \in K, \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .
3.  $\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x} \in V, \lambda(-\mathbf{x}) = -\lambda\mathbf{x}$ .
4.  $\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x} \in V, (-\lambda)\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{x}$ .
5.  $\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$ .

**Demostración**

1.  $\forall \mathbf{x} \in V, \lambda\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{0} \implies \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .
2.  $\forall \lambda \in K, \lambda\mathbf{x} = (\lambda + 0)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + 0\mathbf{x} \implies 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
3.  $\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) = \lambda\mathbf{x} + \lambda(-\mathbf{x}) \implies \lambda(-\mathbf{x}) = -\lambda\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in V$ .
4.  $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = (\lambda + (-\lambda))\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + (-\lambda)\mathbf{x} \implies (-\lambda)\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{x}, \forall \lambda \in K$ .

Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , convendremos en que  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ . Al vector así definido lo llamaremos diferencia de los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

5.  $\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} + (-\mathbf{y})) = \lambda\mathbf{x} + \lambda(-\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$ .

**Ejemplos** Son espacios vectoriales:

- a) El conjunto  $V = \{\mathbf{0}\}$  cuyo único elemento es el vector  $\mathbf{0}$ , tiene, respecto de la adición y la multiplicación por un elemento de  $K$ , estructura de espacio vectorial. Se le llama espacio vectorial trivial.
- b) Sea  $V(n)$  el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que  $n$  en la indeterminada  $X$ , cuyos coeficientes son números reales.  $(V(n), +, \cdot \mathbb{R})$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
- c)  $(\mathbb{C}, +, \cdot \mathbb{R})$ , donde  $\mathbb{C}$  es el conjunto de los números complejos.
- d) Sea  $K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K\}$ , entonces  $(K^n, +, \cdot K)$  es un espacio vectorial sobre  $K$ . Las operaciones adición y multiplicación por un escalar vienen definidas por las siguientes igualdades:

1. ADICIÓN

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

2. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

- e)  $(\mathcal{M}(m \times n), +, \cdot K)$ , donde  $\mathcal{M}(m \times n)$  es el conjunto de las matrices de orden  $m \times n$  cuyos elementos pertenecen al cuerpo  $K$ .

**Nota.** En todo lo que sigue supondremos que  $V$  es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$  donde  $K$  es uno de los cuerpos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Definición 3.1.4** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$ . Decimos que el vector  $\mathbf{x}$  es *combinación lineal* (c.l.) de  $A$  o *depende linealmente* (d.l.) de  $A$ , si existen  $m$  escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  tales que verifiquen la relación

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m.$$

#### Corolarios

1. El vector  $\mathbf{0}$  depende linealmente de cualquier subconjunto de vectores de  $V$ .
2. Todo vector de  $V$  depende linealmente de cualquier subconjunto de  $V$  que lo contenga.

**Definición 3.1.5** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$ . Decimos que  $A$  es un conjunto de vectores *linealmente dependientes* (l.d.) o, simplemente que  $A$  es linealmente dependiente, si  $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ , no todos nulos, que verifiquen la relación

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

**Definición 3.1.6** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$ . Decimos que  $A$  es un conjunto de vectores linealmente independientes (l.i.) si no son linealmente dependientes. Es decir, la relación

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

se verifica, *únicamente*, si  $\alpha_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

También se dice que el conjunto  $A$  es linealmente independiente o que  $A$  es una *parte libre* de  $V$ .

**Definición 3.1.7** Sea  $G = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$ . Decimos que  $G$  es un *sistema de generadores* (s.g.) de  $V$ , si todo vector de  $V$  es combinación lineal de los vectores de  $G$ . De otro modo,

$$G \text{ s.g. de } V \iff \forall \mathbf{x} \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K \mid \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m.$$

**Definición 3.1.8** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$ . Decimos que  $\mathcal{B}$  es una *base* de  $V$ , si se verifica:

1.  $\mathcal{B}$  es una parte libre de  $V$ .
2.  $\mathcal{B}$  es un s.g. de  $V$ .

**Definición 3.1.9** Decimos que  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de *tipo finito*, si  $V$  posee un sistema de generadores finito.

**Lema 3.1.1** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$ ,

$$A \text{ l.d.} \iff \exists \mathbf{a}_i \in A \mid \mathbf{a}_i \text{ d.l. de } A \setminus \{\mathbf{a}_i\}.$$

**Demostración**

$\Rightarrow$  A l.d.  $\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ , no todos nulos, tales que verifican la relación

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Sea  $\alpha_1 \neq 0$ . Multiplicando los dos miembros de (3.1) por  $\alpha_1^{-1}$ , obtenemos:

$$\mathbf{a}_1 + \alpha_1^{-1} \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_1^{-1} \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

de donde

$$\mathbf{a}_1 = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 \mathbf{a}_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_m \mathbf{a}_m,$$

relación de la que deducimos que  $\mathbf{a}_1$  d.l. de  $A \setminus \{\mathbf{a}_1\}$ .

$\Leftarrow$  Si  $\mathbf{a}_1$  d.l. de  $A \setminus \{\mathbf{a}_1\}$ , se deduce que  $\exists \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m \in K$  tales que

$$\mathbf{a}_1 = \beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{a}_m.$$

Es decir,

$$-\mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Por definición, de la relación anterior deducimos que  $A$  es l.d. ya que al menos el primer coeficiente es distinto de cero.

**Lema 3.1.2** Sea  $G = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset V$  tal que:

1.  $G$  es un s.g. de  $V$ .
2. Existe  $\mathbf{a}_i \in G$  tal que  $\mathbf{a}_i$  d.l. de  $G' = G \setminus \{\mathbf{a}_i\}$ .

Entonces  $G'$  es un s.g. de  $V$ .

**Demostración** Como  $G$  es un s.g. de  $V$ , se deduce que

$$\forall \mathbf{x} \in V, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K \mid \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Si  $\mathbf{a}_1$  d.l. de  $G' = G \setminus \{\mathbf{a}_1\}$ , entonces

$$\exists \beta_2, \dots, \beta_m \in K \mid \mathbf{a}_1 = \beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{a}_m. \quad (3.3)$$

Sustituyendo (3.3) en (3.2), se tiene:

$$\mathbf{x} = \alpha_1(\beta_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_m \mathbf{a}_m) + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m.$$

Es decir,

$$\mathbf{x} = (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (\alpha_1 \beta_m + \alpha_m) \mathbf{a}_m,$$

expresión, esta última, que nos indica que  $\forall \mathbf{x} \in V$ ,  $\mathbf{x}$  es c.l. de  $G'$ , con lo cual  $G'$  es un s.g. de  $V$ .

**Teorema 3.1.1** (TEOREMA DE EXISTENCIA DE BASES) Todo  $K$ -espacio vectorial  $V$ , de tipo finito, posee una base.

**Demostración**

- Si  $V = \{\mathbf{0}\}$  (espacio vectorial trivial), admitiremos que  $V$  posee una base vacía (en realidad, esta concesión está justificada porque el único elemento de  $V$ , el vector  $\mathbf{0}$ , es l.d.).
- Si  $V \neq \{\mathbf{0}\}$ ,  $V$  posee, por hipótesis, un s.g. finito. Sea éste  $G = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ . Caben dos casos mutuamente excluyentes:

1.  $G$  es l.i. Entonces  $G$  es base de  $V$  y el teorema está demostrado.
2.  $G$  es l.d.  $\xrightarrow{\text{lema 3.1.1}} \exists \mathbf{a}_{i_1} \in G \mid \mathbf{a}_{i_1} \text{ d.l. de } G_1 = G \setminus \{\mathbf{a}_{i_1}\} \xrightarrow{\text{lema 3.1.2}} G_1 \text{ es un s.g. de } V.$   
Si  $G_1$  es l.i. el teorema está probado.  
Si no es así:
3. Construimos  $G_2$  como se indica en el punto 2. Repitiendo el razonamiento un número finito de veces llegaremos a un cierto  $G_r = G \setminus \{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ , que es s.g. de  $V$  y l.i. y, de aquí, que  $G_r$  sea una base de  $V$ .

**Lema 3.1.3** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $V$  y  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$ . Si  $m > n$ , el conjunto de vectores  $A$  es linealmente dependiente.

**Demostración** Partamos de la relación

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Sea

$$\mathbf{a}_i = a_{1i}\mathbf{u}_1 + a_{2i}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{ni}\mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^n a_{ji}\mathbf{u}_j, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Sustituyendo en (3.4) obtenemos:

$$x_1 \sum_{j=1}^n a_{j1} \mathbf{u}_j + x_2 \sum_{j=1}^n a_{j2} \mathbf{u}_j + \dots + x_m \sum_{j=1}^n a_{jm} \mathbf{u}_j = \mathbf{0}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} \end{pmatrix} \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Por ser  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  linealmente independientes, deducimos que:

$$[S] : \begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} &= 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} &= 0 \end{cases}$$

$[S]$  es un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones lineales con  $m$  incógnitas cuya expresión matricial es  $[S]: B\mathbf{x}^t = 0$ , donde  $B = (a_{ij})$ .

Como  $\text{rg}(B) \leq \min\{n, m\} = n < m$  (número de incógnitas) deducimos, por el teorema de Rouché-Frobénius, que  $[S]$  es un sistema compatible indeterminado. Es decir, existen  $m$  escalares, *no todos nulos*, que verifican la relación (3.4) y, de aquí, que  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$  sea un conjunto de vectores linealmente dependientes.

**Teorema 3.1.2** (TEOREMA DE LA BASE). Todas las bases de  $V$  tienen el mismo número de elementos.

**Demostración** Sean  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  y  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$  bases de  $V$ . Aplicando la proposición anterior (tomando, sucesivamente,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ ,  $A = \mathcal{B}_2$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2$ ,  $A = \mathcal{B}_1$ ) tenemos que:

- No puede ser  $m > n$  ya que si lo fuese  $\mathcal{B}_2$  sería linealmente dependiente. Por consiguiente, debe ser  $m \leq n$ .
- No puede ser  $n > m$  ya que si lo fuese  $\mathcal{B}_1$  sería linealmente dependiente. Por tanto, debe ser  $n \leq m$ .

De ambos razonamientos deducimos que  $m = n$ .

**Definición 3.1.10** Llamamos dimensión del espacio vectorial  $V$  al número de elementos de cualquiera de sus bases. De otro modo, si  $\mathcal{B}$  una base de  $V$ , entonces

$$\dim(V) = n \iff \text{card}(\mathcal{B}) = n.$$

**Proposición 3.1.2** (TRANSITIVIDAD DE LA DEPENDENCIA LINEAL). Sean  $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_q\}$  y  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m\}$  tres subconjuntos de vectores de  $V$  tales que:

- Todo vector de  $\mathcal{A}$  d.l. de  $\mathcal{B}$ .
- Todo vector de  $\mathcal{B}$  d.l. de  $\mathcal{C}$ .

En estas condiciones, todo vector de  $\mathcal{A}$  d.l. de  $\mathcal{C}$ .

**Demostración**  $\forall \mathbf{a}_i$  d.l. de  $\mathcal{B} \implies \exists \alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{qi} \in K$  tales que

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^q \alpha_{ji} \mathbf{b}_j, \quad (i = 1, \dots, p). \quad (3.5)$$

Análogamente,  $\forall \mathbf{b}_j$  d.l. de  $\mathcal{C} \implies \exists \beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{mj} \in K$  tales que

$$\mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^m \beta_{kj} \mathbf{c}_k, \quad (j = 1, \dots, q). \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5), obtenemos que

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^q \alpha_{ji} \sum_{k=1}^m \beta_{kj} \mathbf{c}_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^p \alpha_{ji} \beta_{kj} \mathbf{c}_k \quad (i = 1, \dots, p),$$

de donde deducimos que todo vector de  $\mathcal{A}$  d.l. de  $\mathcal{C}$ .

**Lema 3.1.4** Si  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$  un subconjunto de vectores de  $V$  linealmente independientes y  $\mathbf{a} \in V$ , entonces

$$\{\mathbf{a}\} \cup A \text{ l.d.} \iff \mathbf{a} \text{ d.l. de } A.$$

**Demostración**

$\Rightarrow$  Partamos de relación

$$\alpha \mathbf{a} + \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad (\alpha, \alpha_i \in K). \quad (3.7)$$

No puede ser  $\alpha = 0$  ya que si lo fuese, sustituyendo en (3.7) obtendríamos que

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

relación de la que deducimos que  $\alpha_i = 0$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) por ser  $A$  l.i. Luego  $\alpha \neq 0$  con lo cual  $\{\mathbf{a}\} \cup A$  sería l.i., en contra de la hipótesis. Multiplicando pues ambos miembros de (3.7) por  $\alpha^{-1}$  se tiene que

$$\mathbf{a} = (-\alpha^{-1}\alpha_1)\mathbf{a}_1 + (-\alpha^{-1}\alpha_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (-\alpha^{-1}\alpha_m)\mathbf{a}_m,$$

de donde deducimos que  $\mathbf{a}$  d.l. del conjunto  $A$ .

$\Leftarrow$  Es consecuencia inmediata del lema 3.1.1.

**Teorema 3.1.3** (TEOREMA DE LA PROLONGACIÓN DE LA BASE). Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de tipo finito de dimensión  $n$  y  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$  un conjunto de vectores linealmente independientes. Existe una base de  $V$  que contiene al conjunto  $A$ .

**Demostración** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base de  $V$ . Observemos, en primer lugar, que  $m \leq n$  ya que si fuese  $m > n$   $A$  sería l.d. (proposición 3.1.3).

Caben dos casos mutuamente excluyentes:

1. Todo vector de la base  $\mathcal{B}$  d.l. de  $A$  en cuyo caso, por la transitividad de la dependencia lineal, todo vector de  $V$  d.l. de  $A$  y por consiguiente  $A$  es una base de  $V$  y el teorema estaría demostrado.
2.  $\exists \mathbf{u}_{i_1} \in \mathcal{B}$  tal que  $\mathbf{u}_{i_1}$  no d.l. de  $A$ . En este caso, por el lema (3.1.4),  $\mathcal{B}_1 = A \cup \{\mathbf{u}_{i_1}\} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{u}_{i_1}\}$  es un conjunto de vectores l.i. Si todo vector de  $\mathcal{B}$  d.l. de  $\mathcal{B}_1$ , ésta sería una base de  $V$  que contiene al conjunto  $A$ . Si no es así repetimos los razonamientos anteriores hasta obtener un cierto  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_r}\}$  tal que todo elemento de  $\mathcal{B}$  d.l. de  $\mathcal{B}_r$  en cuyo caso  $\mathcal{B}_r$  sería una base de  $V$  tal que  $A \subset \mathcal{B}_r$ . (Nótese que el proceso tiene fin ya que, a lo sumo, habremos añadido al conjunto  $A$  los  $n$  vectores de la base  $\mathcal{B}$ ).

**Proposición 3.1.3** Sea  $\dim(V) = n$  y  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$  un subconjunto de  $V$  con, exactamente,  $n$  vectores. Se verifica que:

1.  $A$  l.i.  $\iff A$  es base de  $V$ .
2.  $A$  s.g. de  $V$   $\iff A$  es base de  $V$ .
3.  $A$  l.i.  $\iff A$  s.g. de  $V$ .

**Demostración**

1.  $\Rightarrow$  Como  $A$  es l.i., existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que  $A \subset \mathcal{B}$  (teorema de la prolongación de la base) y, por hipótesis,  $\text{card}(A) = \text{card}(\mathcal{B}) = n$ . Luego  $A = \mathcal{B}$ . De aquí que  $A$  sea base de  $V$ . La implicación recíproca es evidente.
2.  $\Rightarrow$  Como  $A$  es s.g. de  $V$ , existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal que  $\mathcal{B} \subset A$  (teorema de existencia de bases) y, por hipótesis,  $\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}(A) = n$ . Luego  $\mathcal{B} = A$ . De aquí que  $A$  sea base de  $V$ . La implicación recíproca es, igualmente, evidente.

3. Se obtiene de inmediato por transitividad.

### Notas

1. Si  $\dim(V) = n$ , en  $V$  no puede haber más de  $n$  vectores linealmente independientes. En efecto, después de la proposición anterior  $n$  vectores linealmente independientes constituyen una base de  $V$ , sea  $\mathcal{B}$  dicha base. Como todo vector  $\mathbf{x} \in V$  depende linealmente de dichos  $n$  vectores  $\mathcal{B} \cup \{\mathbf{x}\}$  es un conjunto de vectores linealmente dependientes (lema 3.1.4). Por lo anterior se suele decir que  $\mathcal{B}$  es una *parte libre maximal* de  $V$ .
2. Si  $\dim(V) = n$ , en  $V$  no puede haber un sistema de generadores con menos de  $n$  elementos. En efecto, Si  $G$  fuese un sistema de generadores de  $V$  con menos de  $n$  elementos podríamos extraer de  $G$  una base que, obviamente, tendría menos de  $n$  elementos lo cual, por el teorema de la base, es absurdo. Por ello, se dice que una base es *un sistema minimal* de generadores de  $V$ .

## 3.2 Coordenadas de un vector

**Nota** En todo que sigue supondremos que  $V$  es un espacio vectorial sobre  $K$  de dimensión  $n$  y que  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  es una base de  $V$ .

**Definición 3.2.1** Sea  $\mathbf{x} \in V$  y  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n$ . Llamaremos coordenadas del vector  $\mathbf{x}$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  a la  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Utilizaremos la siguiente notación:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Proposición 3.2.1** Sea  $\mathbf{x} \in V$ , las coordenadas de  $\mathbf{x}$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ , son únicas.

**Demostración** Supongamos que  $\mathbf{x} \in V$  y que  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Será pues:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_n\mathbf{u}_n, \\ \mathbf{x} &= y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \dots + y_n\mathbf{u}_n.\end{aligned}$$

Restando estas últimas igualdades obtenemos:

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1)\mathbf{u}_1 + \dots + (x_n - y_n)\mathbf{u}_n,$$

de donde deducimos que  $x_i - y_i = 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) por ser  $\mathcal{B}$  base de  $V$  y, por consiguiente,  $x_i = y_i$ .

**Proposición 3.2.2** La aplicación

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n,$$

definida por

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es una aplicación biyectiva.

Además, verifica que

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \quad \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y})_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{y}_{\mathcal{B}} \quad (3.8)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x} \in V, \quad \varphi_{\mathcal{B}}(\lambda \mathbf{x}) = (\lambda \mathbf{x})_{\mathcal{B}} = \lambda \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \quad (3.9)$$



**Demostración** La primera parte de la demostración ( $\varphi_{\mathcal{B}}$  está bien definida, es inyectiva y sobreyectiva) es consecuencia inmediata de la unicidad de las coordenadas.

Veamos la segunda parte. Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , tales que

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{y}_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Será, por tanto,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + \dots + y_n \mathbf{u}_n.$$

Sumando ambas igualdades, se tiene que

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (x_n + y_n) \mathbf{u}_n,$$

de donde

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})_{\mathcal{B}} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = \mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{y}_{\mathcal{B}}.$$

Análogamente,

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda x_1 \mathbf{u}_1 + \lambda x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda x_n \mathbf{u}_n \implies (\lambda \mathbf{x})_{\mathcal{B}} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda \mathbf{x}_{\mathcal{B}}.$$

**Nota** Esta proposición nos permite, en lo sucesivo, identificar a todo vector de  $V$  con sus correspondientes coordenadas respecto de una cierta base y, viceversa (más tarde, podremos afirmar que  $\varphi_{\mathcal{B}}$  es un *isomorfismo* de  $V$  en  $K^n$  o bien que los espacios vectoriales  $V$  y  $K^n$  son *isomorfos*).

**Definición 3.2.2** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$  tales que

$$(\mathbf{a}_1)_{\mathcal{B}} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}),$$

$$(\mathbf{a}_2)_{\mathcal{B}} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(\mathbf{a}_m)_{\mathcal{B}} = (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}).$$

Llamamos matriz de las coordenadas de  $A$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  a la matriz  $A_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}(n \times m, K)$ , cuyas columnas son, sucesivamente  $(\mathbf{a}_1)_{\mathcal{B}}, (\mathbf{a}_2)_{\mathcal{B}}, \dots, (\mathbf{a}_m)_{\mathcal{B}}$ . Es decir,

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

**Proposición 3.2.3** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$  tales que  $(\mathbf{a}_i)_{\mathcal{B}} = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ . Entonces,

$$A \text{ l.d.} \iff \text{rg}(A_{\mathcal{B}}) < m.$$

**Demostración**

$$A \text{ l.d.} \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K, \text{ no todos nulos } \mid \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

$\Updownarrow$  Tomando coordenadas en base  $\mathcal{B}$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ , no todos nulos tales que verifican:

$$\alpha_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) + \alpha_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) + \dots + \alpha_m(a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}) = (0, 0, \dots, 0)$$

$\Updownarrow$  O, lo que es lo mismo

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ , no todos nulos tales que verifican:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nm}\alpha_m = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$  Matricialmente

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ , no todos nulos tales que  $A_B \alpha^t = \mathbf{0}$

$\Updownarrow$

El sistema homogéneo  $S : A_B \mathbf{x}^t = \mathbf{0}$ , tiene solución no trivial

$\Updownarrow$  T. de Rouché-Frobenius

$$\text{rg}(A_B) < m \text{ (número de incógnitas).}$$

### Corolarios

1.  $A$  l.i.  $\iff \text{rg}(A) = m$ .
2. Si  $m > n$   $A$  es l.d. ya que  $\text{rg}(A_B) \leq \min\{m, n\} = n < m$  (número de incógnitas) y el sistema  $S$  tiene solución no trivial por lo que  $A$  sería l.d. (obtenemos de nuevo el resultado establecido en el lema 3.1.3).
3. Podemos extraer del conjunto  $A$  un subconjunto de vectores linealmente independientes en número máximo. En efecto, si  $\text{rg}(A_B) = r$  y  $M$  es un menor principal de  $A_B$ , es claro que las  $r$  columnas de  $A_B$  que forman parte de  $M$  son linealmente independientes (después de lo dicho en el corolario 1) y, es igualmente claro, que  $r$  es el número máximo de columnas de  $A_B$  linealmente independientes (ver propiedades del rango de una matriz).

**Proposición 3.2.4** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$  y  $\mathbf{b} \in V$  tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_i)_B &= (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}), \\ \mathbf{b}_B &= (b_1, b_2, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbf{b} \text{ d. l. de } A \iff \text{rg}(A_B) = \text{rg}(A_B | (\mathbf{b}_B)^t).$$

### Demostración

$$\mathbf{b} \text{ d.l. de } A \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K \mid \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}. \quad (3.10)$$

Procediendo de modo análogo a la proposición anterior, llegaremos a que (3.10) es equivalente a decir que  $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$  tales que verifican el sistema

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nm}\alpha_m = b_n \end{cases}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K, \mid A_{\mathcal{B}} \alpha^t = (\mathbf{b}_{\mathcal{B}})^t,$$

lo que equivale a decir que el sistema  $S : A_{\mathcal{B}} \mathbf{x}^t = (\mathbf{b}_{\mathcal{B}})^t$ , tiene solución y de aquí, por el teorema de Rouché-Frobénius, que

$$\text{rg}(A_{\mathcal{B}}) = \text{rg}(A_{\mathcal{B}} | (\mathbf{b}_{\mathcal{B}})^t).$$

### Aplicaciones

**Ejercicio** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 4,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_4\}$  una base de  $V$ . Sean  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} \in V$  y  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$  cuyas coordenadas respecto de la base  $\mathcal{B}$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1)_{\mathcal{B}} &= (1, 1, 1, 1), \\ (\mathbf{a}_2)_{\mathcal{B}} &= (1, 0, 1, 0), \\ (\mathbf{a}_3)_{\mathcal{B}} &= (0, 1, 0, 1), \\ (\mathbf{a}_4)_{\mathcal{B}} &= (4, 1, 4, 1), \\ \mathbf{b}_{\mathcal{B}} &= (1, 1, 0, 0), \\ \mathbf{c}_{\mathcal{B}} &= (2, -1, 2, -1). \end{aligned}$$

Se pide:

1. Averiguar si  $A$  es l.d.
2. Calcular un subconjunto  $C \subset A$ , tal que  $C$  contenga vectores independientes de  $A$ , en número máximo.
3. Averiguar si los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  dependen linealmente de  $A$ .
4. Prolongar  $C$  a una base de  $V$ .

**Solución** Sea  $A_{\mathcal{B}}$  la matriz de las coordenadas de  $A$  respecto de la base  $\mathcal{B}$ .

1.  $A$  l.d.  $\iff \text{rg}(A_{\mathcal{B}}) < 4$ . Por tanto  $A$  es l.d. ya que

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 4 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 < 4.$$

2. El subconjunto  $C$  pedido, queda determinado por dos columnas de  $A$  tales que el rango de la submatriz formada con ellas, sea de rango 2. Hemos tomado  $C = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ .
3. De acuerdo con la proposición 3.2.4, basta calcular el rango de las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\text{rg}(A_1) = 3 > \text{rg}(A_{\mathcal{B}}) \quad \text{y} \quad \text{rg}(A_2) = 2 = \text{rg}(A_{\mathcal{B}}),$$

deducimos que  $\mathbf{b}$  es independiente de  $A$  mientras que  $\mathbf{c}$  d.l. de  $A$ .

4. Construyamos la matriz  $(C_{\mathcal{B}}|I_4)$  (se recuerda que  $I_4$  es la matriz de las coordenadas de  $\mathcal{B}$  respecto de  $\mathcal{B}$ ).

$$(C_{\mathcal{B}}|I_4) = \left( \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Bastará elegir cualquier menor principal de orden 4 que contenga a las dos primeras columnas de la matriz anterior. Por consiguiente, una base de  $V$  que contenga a  $C$  puede ser  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ .

**Definición 3.2.3** Sean  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$  bases de  $V$ . Sean

$$(\mathbf{u}_i)_{\mathcal{B}'} = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}), \quad (i = 1, \dots, n)$$

las coordenadas de los vectores de  $\mathcal{B}$  respecto de la base  $\mathcal{B}'$ . Llamamos matriz de las coordenadas de  $\mathcal{B}$  respecto de la base  $\mathcal{B}'$  a la matriz  $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{M}(n \times n, K)$  cuyas columnas son sucesivamente  $(\mathbf{u}_1)_{\mathcal{B}'}, (\mathbf{u}_2)_{\mathcal{B}'}, \dots, (\mathbf{u}_n)_{\mathcal{B}'}$ . Simbólicamente,

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Análogamente, si  $(\mathbf{u}'_i)_{\mathcal{B}} = (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni})$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ , son las coordenadas de los vectores de la base  $\mathcal{B}'$  respecto de  $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Proposición 3.2.5** (FÓRMULAS DEL CAMBIO DE BASE). Sean  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}$  bases de  $V$  y  $\mathbf{x} \in V$ , tal que  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}'} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ . Es decir,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{u}'_1 + x'_2 \mathbf{u}'_2 + \dots + x'_n \mathbf{u}'_n. \quad (3.12)$$

Se verifica que:

1.  $(\mathbf{x}_{\mathcal{B}'})^t = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t$ .
2.  $(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})(\mathbf{x}_{\mathcal{B}'})^t$ .
3.  $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = I_n$ .

**Demostración**

1. Partiendo de la igualdad (3.11), se tiene que:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n$$

$\Updownarrow$  Tomando coordenadas en base  $\mathcal{B}'$

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) + x_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) + \dots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} \\ x'_2 = x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x'_n = x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_n a_{nn} \end{cases}$$

$\Updownarrow$  Matricialmente

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$(\mathbf{x}_{\mathcal{B}'})^t = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t.$$

2. Partiendo de la igualdad (3.12), tomando coordenadas en la base  $\mathcal{B}$  y procediendo como en el caso anterior llegaremos a la fórmula dada.
3. En primer lugar, es claro que tanto  $\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$  como  $\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$  son invertibles por ser  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  linealmente independientes (ver corolario 1 de la proposición 3.2.3). Dicho esto, la fórmula (3) se obtiene sin más que sustituir en la fórmula (2), el valor de  $(\mathbf{x}_{\mathcal{B}'})^t$  obtenido en la fórmula (1), lo cual dará lugar a la igualdad

$$(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = \mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t,$$

fórmula que es válida para  $\forall \mathbf{x} \in V$ , de aquí que  $\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B})\mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = I_n$  y que, por consiguiente,

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}.$$

### 3.3 Variedades lineales. Operaciones

**Definición 3.3.1** Sea  $W \subset V$ . Diremos que  $W$  es un subespacio vectorial o una variedad lineal de  $V$  si se verifica que:

1.  $W \neq \emptyset$ .
2. Si restringidas las operaciones de  $V$  a  $W$ , éste tiene estructura de espacio vectorial sobre  $K$ . Más brevemente, si la terna  $(W, +, \cdot_K)$  es un espacio vectorial sobre  $K$ .

**Proposición 3.3.1** Sea  $W$  una parte no vacía de  $V$ ,

$$W \text{ v.l. de } V \iff \begin{cases} \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, & \mathbf{x} - \mathbf{y} \in W, \\ \forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x} \in W, & \lambda \mathbf{x} \in W. \end{cases}$$

**Demostración** La implicación  $\Rightarrow$  es evidente por ser  $W$  variedad lineal de  $V$ .  
Veamos la implicación  $\Leftarrow$ :

- $\forall \mathbf{x} \in W \xrightarrow{\text{p.h.}} \mathbf{x} - \mathbf{x} \in W \Rightarrow \mathbf{0} \in W$ .
- $\forall \mathbf{y} \in W, (\mathbf{0} \in W) \xrightarrow{\text{p.h.}} \mathbf{0} - \mathbf{y} \in W \Rightarrow -\mathbf{y} \in W$ .
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, (-\mathbf{y} \in W) \xrightarrow{\text{p.h.}} \mathbf{x} - (-\mathbf{y}) \in W \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ , con lo que  $+$  es una ley de composición interna en  $W$ .
- La segunda condición  $(\forall \mathbf{x} \in W, \lambda \mathbf{x} \in W)$  equivale a afirmar que la ley de composición externa definida sobre  $V$ , lo es también sobre  $W$ .  
Las restantes propiedades de dichas leyes, se verifican en todo  $V$  luego, en particular, se verificarán en  $W \subset V$ .

**Nota** La condición  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, \mathbf{x} - \mathbf{y} \in W$  equivale a demostrar que  $W$ , respecto de la adición, es un subgrupo de  $V$ . Sin embargo, es fácilmente comprobable, que esta condición a los efectos de probar que  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$ , puede ser sustituida por la siguiente:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W.$$

**Teorema 3.3.1** Sea  $W$  un variedad lineal de  $V$ . Se verifica que:

1.  $W$  posee una base.
2.  $\dim(W) \leq \dim(V)$ .
3.  $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$ .

**Demostración**

1. Si  $W = \{\mathbf{0}\}$ ,  $W$  tiene base vacía y no hay nada que demostrar.  
Sea pues  $W \neq \{\mathbf{0}\}$ . Existirá  $\mathbf{v}_1 \in W$  tal que  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ . Sea  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1\}$ . Caben dos posibilidades:
  - Todo vector de  $W$  d.l. de  $\mathcal{B}_1$  en cuyo caso  $\mathcal{B}_1$  es base de  $W$  y el teorema está demostrado.
  - Existe un vector  $\mathbf{v}_2 \in W$  que no depende de  $\mathbf{v}_1$ , entonces  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  es l.i.  
Repitiendo el razonamiento anterior llegaremos a un cierto  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  tal que es libre y todo vector de  $W$  d.l. de  $\mathcal{B}_r$  y el proceso habrá terminado porque  $\mathcal{B}_r$  es base de  $W$ .

El proceso anterior no es indefinido ya que, no olvidemos, que  $r \leq n = \dim(V)$ , es decir; que el número máximo de vectores l.i. de  $W$  está acotado por  $n$ .

2. Sea  $\mathcal{B}'$  una base de  $W$ . Por el teorema de la prolongación de la base, existe una base  $\mathcal{B}$  de  $V$  tal  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ . De aquí que  $\text{card}(\mathcal{B}') \leq \text{card}(\mathcal{B})$  y que, por consiguiente,  $\dim(W) \leq \dim(V)$ .
3. Sean  $\mathcal{B}'$  y  $\mathcal{B}$  bases de  $W$  y  $V$ , respectivamente, obtenidas por el procedimiento anterior, entonces:

$$\dim(W) = \dim(V) \iff \text{card}(\mathcal{B}') = \text{card}(\mathcal{B}) \iff \mathcal{B}' = \mathcal{B} \iff W = V.$$

**Proposición 3.3.2** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$  y  $L(A) = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i \mid \alpha_i \in K, \mathbf{a}_i \in A \right\}$ .

$L(A)$  es una variedad lineal de  $V$ .

**Demostración** Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L(A) \implies \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{a}_i, \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{a}_i \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{a}_i$  y, por tanto,  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L(A)$ .

Análogamente, si  $\lambda \in K$  y  $\mathbf{x} \in L(A) \implies \lambda \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m (\lambda \alpha_i) \mathbf{a}_i \implies \lambda \mathbf{x} \in L(A)$ .

**Definición 3.3.2** Al conjunto  $L = L(A)$  se le llama variedad lineal de  $V$  engendrada por  $A$ . También se nota frecuentemente por  $L = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$ .

**Definición 3.3.3** Sean ahora,  $A$  un subconjunto infinito de  $V$  y  $L(A)$  el conjunto de las combinaciones lineales de un número finito de elementos de  $A$ . Obviamente  $L(A)$  es una variedad lineal de  $V$  ya que la suma de dos combinaciones lineales finitas de elementos de  $A$  es una combinación lineal finita de elementos de  $A$  e igualmente lo es el producto de un escalar por una combinación lineal finita de elementos de  $A$ . Al igual que en el caso anterior,  $L(A)$  recibe el nombre de variedad lineal de  $V$  engendrada por  $A$ .

**Proposición 3.3.3** (PROPIEDADES INMEDIATAS). Sea  $A$  y  $B$  subconjuntos arbitrarios de  $V$ . Se verifica que:

1.  $A \subset L(A)$ .
2.  $A = L(A) \iff A$  es una variedad lineal de  $V$ .
3.  $A \subset B \implies L(A) \subset L(B)$ .
4.  $L(A \cap B) \stackrel{(1)}{\subset} L(A) \cap L(B) \stackrel{(2)}{\subset} L(A) \cup L(B) \stackrel{(3)}{\subset} L(A \cup B)$ .
5.  $L(L(A)) = A \iff A$  es variedad lineal de  $V$ .

**Demostración**

1. Es evidente, ya que  $\forall \mathbf{x} \in A$ ,  $\mathbf{x}$  es c.l. de  $A$  ( $\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$  o, en general, el vector  $\mathbf{x}$  d.l. de cualquier subconjunto de  $V$  que lo contenga).
2. Bastará probar que  $L(A) \subset A$  lo cual es, asimismo, evidente ya que si  $A$  es una variedad lineal de  $V$ ,  $A$  contiene a todas las combinaciones lineales de sus elementos. Es decir,  $A \supset L(A)$ .
3.  $\mathbf{x} \in L(A) \implies \mathbf{x}$  es c.l. de elementos de  $A \xrightarrow{A \subset B} \mathbf{x}$  es c.l. de elementos de  $B \implies \mathbf{x} \in L(B)$ .
4. Inclusión (1):

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subset A \xrightarrow{(3)} L(A \cap B) \subset L(A) \\ A \cap B \subset B \xrightarrow{(3)} L(A \cap B) \subset L(B) \end{array} \right\} \implies L(A \cap B) \subset L(A) \cap L(B).$$

Inclusión (2). Es evidente ya que la intersección de dos conjuntos siempre está contenida en la unión de los mismos.

Inclusión (3):

$$\left. \begin{array}{l} A \subset A \cup B \xrightarrow{(3)} L(A) \subset L(A \cup B) \\ B \subset A \cup B \xrightarrow{(3)} L(B) \subset L(A \cup B) \end{array} \right\} \implies L(A) \cup L(B) \subset L(A \cup B).$$

5. Por una parte,  $A$  es una variedad lineal de  $V \iff L(A) = A$ .  
 Por otra, como  $L(A)$  es variedad lineal de  $V \implies L(L(A)) = L(A)$ .  
 De ambas conclusiones se deduce inmediatamente la igualdad.

**Proposición 3.3.4** Si  $L_1$  y  $L_2$  son variedades lineales de  $V$ ,  $L_1 \cap L_2$  es una variedad lineal de  $V$ .

**Demostración** En efecto,

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_1 \cap L_2 \implies (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_1) \wedge (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L_2) \implies (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L_1) \wedge (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L_2) \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L_1 \cap L_2$ .
- $\mathbf{x} \in L_1 \cap L_2 \implies (\mathbf{x} \in L_1) \wedge (\mathbf{x} \in L_2) \implies \forall \lambda \in K, (\lambda \mathbf{x} \in L_1) \wedge (\lambda \mathbf{x} \in L_2) \implies \lambda \mathbf{x} \in L_1 \cap L_2$ .

**Nota** La unión de variedades no es, en general, una variedad lineal de  $V$  como queda de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Consideremos el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ . Si  $L_1 = L((1, 0))$  y  $L_2 = L((0, 1))$ , entonces  $L_1 \cup L_2$  **no** es una variedad lineal de  $V$ . En efecto

$$L_1 \cup L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 0) \vee (y = 0)\}.$$

Es claro que  $(3, 0)$ , y  $(0, 5)$  pertenecen a  $L_1 \cup L_2$  sin embargo,  $(3, 0) + (0, 5) = (3, 5) \notin L_1 \cup L_2$ .

**Proposición 3.3.5** Sea  $A \subset V$  y  $\mathcal{B}$  una base de  $V$ . Se verifica que:

1.  $L(A)$  es la menor variedad de  $V$  que contiene a  $A$ .
2.  $L(A)$  es la intersección de todas las variedades lineales de  $V$  que contienen al conjunto  $A$ .
3. Si  $A$  es finito,  $\dim L(A) = \text{rg}(A_{\mathcal{B}})$

**Demostración**

1. Sea  $W$  una variedad lineal de  $V$  que contenga a  $A$ . Por las propiedades 2 y 3 de la proposición 3.3.3, se tiene que:  
 $A \subset W \implies L(A) \subset L(W) \implies L(A) \subset W$ .
2. Sea  $\{W_i\}_{i \in I}$  la familia de subespacios de  $V$  que  $A \subset W$ . Se tiene que:

- Por lo que se acaba de demostrar,  $L(A) \subset W_i, \forall i \in I$ .
- $\exists i \in I \mid L(A) = W_i$  ya que  $A \subset L(A)$ .

Por consiguiente,  $L(A) = \bigcap_{i \in I} W_i$ .

3. Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$  y sea  $\text{rg}(A_{\mathcal{B}}) = r$ . Se deduce que en  $A$  hay exactamente  $r$  vectores l.i. Supongamos que los  $r$  primeros vectores de  $A$  sean l.i. y sea  $A_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$ .  $A_1$  es base de  $L(A)$ . En efecto, todo vector de  $L(A)$  d.l. de  $A$  y todo vector de  $A$  d.l. de  $A_1$ , luego, por la transitividad de la dependencia lineal (proposición 3.1.2) deducimos que todo vector de  $L(A)$  d.l. de  $A_1$ . Como  $A_1$  es libre y sistema de generadores de  $L(A)$  es base de  $L(A)$ , luego  $\dim(L(A)) = r = \text{rg}(A_{\mathcal{B}})$ .



**Proposición 3.3.6** ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE  $L(A)$  Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  base de  $V$  y  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset V$  l.i.<sup>1</sup> Sea  $\mathbf{x} \in V$ :

$$\mathbf{x} \in L(A) \iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K \mid (\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = A_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\lambda}^t, \quad (\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)).$$

**Demostración** En efecto, sea  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $(\mathbf{a}_i)_{\mathcal{B}} = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ . Procediendo de modo análogo al de la proposición 3.2.4, se tiene que:  $\mathbf{x}$  d.l. de  $A \iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K$  tales que:

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1m}\lambda_m \\ x_2 &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2m}\lambda_m \\ \vdots &\vdots \\ x_n &= a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots + a_{nm}\lambda_m \end{cases} \quad (3.13)$$

Las ecuaciones (3.13), cuya expresión simbólica es  $(\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^t = A_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\lambda}^t$ , reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de  $L(A)$ .

**Teorema 3.3.2** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ ,  $\dim(V) = n$  y  $\mathcal{B}$  base de  $V$ . Consideremos el sistema lineal homogéneo de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas:

$$H : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Brevemente, en forma matricial,  $H : A\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$ .

Sea  $L$  el conjunto de la soluciones de  $H$ , es decir:

$$L = \{\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n \mid A\boldsymbol{\alpha}^t = \mathbf{0}\}.$$

Consideradas las soluciones de  $H$  como las coordenadas, respecto de  $\mathcal{B}$ , de un vector de  $V$ , se verifica que:

1.  $L$  es una variedad lineal de  $V$ .
2.  $\dim(L) = n - \text{rg}(A)$ .

**Demostración**

1. Comprobemos que  $L$  verifica las condiciones para ser variedad lineal de  $V$ .

- $L \neq \emptyset$  ya que  $(0, 0, \dots, 0) \in L$ .
- $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in L \implies (A\boldsymbol{\alpha}^t = \mathbf{0}) \wedge (A\boldsymbol{\beta}^t = \mathbf{0}) \implies A(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^t = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in L$ .
- $\boldsymbol{\alpha} \in L \implies A\boldsymbol{\alpha}^t = \mathbf{0} \implies \forall \lambda \in K, \lambda(A\boldsymbol{\alpha}^t) = \mathbf{0} \implies A(\lambda\boldsymbol{\alpha})^t = \mathbf{0} \implies \lambda\boldsymbol{\alpha} \in L$ .

2. Sea  $\text{rg}(A) = r$  y  $M$  un menor principal de  $A$  que supondremos formado por las  $r$  primeras filas y las  $r$  primeras columnas de  $A$ . Consideremos el sistema

$$H' \sim H : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n &= 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup>En realidad, no es necesario suponer que  $A$  es l.i. Sin embargo es conveniente que así sea para que las ecuaciones paramétricas de  $L(A)$  tengan un número mínimo de parámetros.

cuya matriz de los coeficientes es

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Como  $\det(M) \neq 0$ , la forma reducida por filas de  $A'$  es de la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{2r+1} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{rr+1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

y, por tanto, un sistema equivalente a  $H$  es

$$H'' : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{2r+1} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{rr+1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

cuya solución general es,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= - \sum_{i=r+1}^n b_{1i} x_i \\ x_2 &= - \sum_{i=r+1}^n b_{2i} x_i \\ &\vdots \\ x_r &= - \sum_{i=r+1}^n b_{ri} x_i \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Sea  $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-r}\}$  el conjunto de las soluciones particulares de  $H''$  obtenidas dando a las incógnitas  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  los  $n - r$  valores canónicos:

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1).$$

Sustituyendo estos valores en (3.15), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (-b_{1r+1}, -b_{2r+1}, \dots, -b_{rr+1}, 1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{a}_2 &= (-b_{1r+2}, -b_{2r+2}, \dots, -b_{rr+2}, 0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-r} &= (-b_{1n}, -b_{2n}, \dots, -b_{rn}, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}.$$

Claramente  $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-r}\}$ , es un conjunto de vectores l.i. ya que  $\text{rg}(S_B) = n - r$ .

Veamos ahora que  $S$  es un sistema de generadores de  $L$ . En efecto, sea

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n)$$

una solución de  $H''$  obtenida dando a las incógnitas del segundo miembro de (3.15) los valores  $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$ .

Claramente,

$$\mathbf{b} = \left( -\sum_{i=r+1}^n b_{1i}\lambda_i, -\sum_{i=r+1}^n b_{2i}\lambda_i, \dots, -\sum_{i=r+1}^n b_{ri}\lambda_i, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n \right).$$

Es ahora fácilmente comprobable que

$$\mathbf{b} = \lambda_{r+1}\mathbf{a}_1 + \lambda_{r+2}\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_{n-r},$$

con lo cual  $S$  es un sistema de generadores de  $L$  y, por tanto, base de  $L$ .

De lo anterior se deduce que

$$\dim(L) = \text{card}(S) = n - r = n - \text{rg}(A).$$

**Ejemplo** Consideremos el sistema

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

La forma reducida por filas de la matriz de los coeficientes de  $H$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones  $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  obtenidas dando a  $(x_3, x_4, x_5)$  los valores canónicos se recogen en la siguiente tabla

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$\mathbf{a}_1$	-1	0	1	0	0
$\mathbf{a}_2$	0	-1	0	1	0
$\mathbf{a}_3$	-1	0	0	0	1

Claramente, el rango de la matriz de las soluciones así obtenidas es igual a  $3 = 5 - 2$ , luego  $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  es l.i.

Por otra parte, la solución general de  $H$  es de la forma

$$\mathbf{b} = (-\lambda - \nu, -\mu, \lambda, \mu, \nu).$$

Como puede comprobarse

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2 + \nu\mathbf{a}_3$$

y, por lo tanto,  $S$  es un sistema de generadores.

**Proposición 3.3.7** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subset V$  y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  base de  $V$ , existe un sistema lineal homogéneo tal que  $\forall \mathbf{x} \in L(A)$ ,  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es solución de dicho sistema.

**Demostración** Sea  $(\mathbf{a}_i)_{\mathcal{B}} = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ . Sea  $H$  la variedad definida por el sistema lineal homogéneo de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas cuyos coeficientes son, sucesivamente  $(\mathbf{a}_1)_{\mathcal{B}}, \dots, (\mathbf{a}_m)_{\mathcal{B}}$ :

$$H : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n = 0 \end{cases}$$

sistema, que escrito en forma matricial sería de la forma

$$H : \mathbf{x}A_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Sea  $\text{rg}(A_{\mathcal{B}}) = r$  y  $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n-r}\}$  una base de las soluciones de  $H$ , donde

$$(\mathbf{s}_i)_{\mathcal{B}} = (s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{ni}), \quad (i = 1, \dots, n-r).$$

Consideremos el sistema

$$H' : \begin{cases} s_{11}x_1 + s_{21}x_2 + \dots + s_{n1}x_n = 0 \\ s_{12}x_1 + s_{22}x_2 + \dots + s_{n2}x_n = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ s_{1m}x_1 + s_{2m}x_2 + \dots + s_{nm}x_n = 0 \end{cases}$$

o bien, en forma matricial,

$$H' : \mathbf{x}S_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Se verifica que  $L(A) = H'$ .

En efecto, por una parte  $\dim(H') = n - (n-r) = r = \dim(L)$ .

Por otra, es fácil ver que  $\forall i$ ,  $(\mathbf{a}_i)_{\mathcal{B}}$  es solución de  $H'$ . Como  $(\mathbf{s}_i)$  es solución de  $H$ , se tiene que

$$(\mathbf{s}_i)_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = 0 \implies (S_{\mathcal{B}})^t A_{\mathcal{B}} = 0 \implies (A_{\mathcal{B}})^t S_{\mathcal{B}} = 0 \implies \forall i, \mathbf{a}_i S_{\mathcal{B}} = 0,$$

de donde deducimos que  $\forall i$ ,  $\mathbf{a}_i$  es solución de  $H'$  y, por tanto, es solución de  $H'$  cualquier c.l. de elementos de  $A$ . Es decir, cualquier elemento de  $L(A)$ .

### Notas

1. Aunque bajo el punto de vista teórico resulta más “elegante” la demostración dada, quizá sea más “práctico” el método del orlado. Si  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r\}$  es una base de la variedad  $L(A)$ , sus ecuaciones se pueden obtener imponiendo la condición de que

$$\text{rg} \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & x_n \end{array} \right) = r.$$

Es decir, seleccionado en  $A_{\mathcal{B}}$  un menor  $M$  de orden  $r$  distinto de cero, basta anular los determinantes de los menores obtenidos orlando  $M$  con la última columna de la matriz anterior.

**Ejemplo** En el  $\mathbb{R}$  espacio vectorial  $V$  cuya base es  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_5\}$ , se considera la

variedad  $L$  engendrada por los vectores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  dados por sus coordenadas respecto de la base  $\mathcal{B}$ :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 0, 1).$$

Calcular un sistema de ecuaciones implícitas de  $L$ .

**Solución.** Sea  $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ , como  $\text{rg}(A_{\mathcal{B}}) = 2$ , bastará imponer la condición

$$\text{rg} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \\ 1 & 1 & x_5 \end{array} \right) = 2 \implies \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_4 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_5 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right.$$

De donde

$$L \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{array} \right.$$

2. El sistema obtenido por cualquiera de los procedimientos recibe el nombre de *sistema de ecuaciones implícitas* de  $L(A)$ .
3. La demostración dada, sugiere la llamada *dualidad* entre las soluciones de una sistema homogéneo y los coeficientes del mismo (nótese que las soluciones de  $H$  son los coeficientes de  $H'$  y viceversa). Este tema será tratado con más amplitud en Secciones posteriores.

**Definición 3.3.4** Sean  $L_1$  y  $L_2$  variedades lineales de  $V$ , definimos la suma  $L_1 + L_2$  como la variedad engendrada por  $L_1 \cup L_2$ . Simbólicamente:

$$L_1 + L_2 = L(L_1 \cup L_2).$$

**Proposición 3.3.8** Sean  $L_1$  y  $L_2$  variedades lineales de  $V$  y sea

$$W = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, (\mathbf{x}_1 \in L_1, \mathbf{x}_2 \in L_2)\}.$$

Se verifica que:

1.  $W$  es una variedad lineal de  $V$ .
2.  $L_1 + L_2 = W$ .
3.  $L_1 + L_2$  es la menor <sup>2</sup> variedad lineal de  $V$  que contiene a  $L_1$  y a  $L_2$ .
4.  $L_1 + L_2$  es la intersección de todas las variedades lineales de  $V$  que contienen a  $L_1$  y a  $L_2$ .

**Demostración**

<sup>2</sup>La menor para el orden inducido por la inclusión de conjuntos. Es decir  $A \leq B \iff A \subset B$ .

1. Sean  $\lambda \in K$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ .

- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \implies \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in L_1, \exists \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in L_2 \mid (\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} = \underbrace{(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1)}_{\in L_1} + \underbrace{(\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2)}_{\in L_2} \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ .
- $\lambda \mathbf{x} = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2 \implies \lambda \mathbf{x} \in W$ .

2.  $\boxed{\subset}$  Es claro que:

$L_1 \subset W$ , ya que  $\forall \mathbf{x}_1 \in L_1, \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{0}$ .

$L_2 \subset W$ , ya que  $\forall \mathbf{x}_2 \in L_2, \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{x}_2$ .

$L_1 \subset W, L_2 \subset W \implies L_1 \cup L_2 \subset W \implies L(L_1 \cup L_2) \subset L(W) = W \implies L_1 + L_2 \subset W$ .

$\boxed{\supset}$   $\mathbf{x} \in W \implies \exists \mathbf{x}_1 \in L_1, \exists \mathbf{x}_2 \in L_2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ .

Por otra parte,

$\mathbf{x}_1 \in L_1, \mathbf{x}_2 \in L_2 \implies \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L_1 \cup L_2 \implies \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in L(L_1 \cup L_2) \implies \mathbf{x} \in L_1 + L_2$ .

3. Sea  $E$  una variedad lineal de  $V$  que contiene a  $L_1$  y a  $L_2$ .

$E \supset L_1, E \supset L_2 \implies E \supset L_1 \cup L_2 \implies L(E) \supset L(L_1 \cup L_2) \implies E \supset L_1 + L_2$ .

4. Es consecuencia inmediata de lo anterior. En efecto, sea  $\{E_i\}_{i \in I}$  la familia de subespacios de  $V$  que contienen a  $L_1$  y a  $L_2$ . Se tiene que:

- $L_1 + L_2 \in \{E_i\}_{i \in I}$ , ya que  $L_1 \subset L_1 + L_2$  e igualmente  $L_2 \subset L_1 + L_2$ .
- $\forall i \in I, L_1 + L_2 \subset E_i$ , por lo demostrado en el punto anterior.

De donde deducimos que  $L_1 + L_2 = \bigcap_{i \in I} \{E_i\}$ .

**Teorema 3.3.3** (TEOREMA DE LA DIMENSIÓN). Sea  $L_1$  y  $L_2$  variedades lineales de  $V$ , se verifica que

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).$$

**Demostración** Formulemos las siguientes hipótesis:

- $\dim(L_1 \cap L_2) = r$  y  $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$  una base de  $L_1 \cap L_2$ .
  - $\dim(L_1) = p$  y  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{p-r}\}$  una base de  $L_1$  obtenida prolongando  $\mathcal{B}_0$ .
  - $\dim(L_2) = q$  y  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{q-r}\}$  una base de  $L_2$  obtenida prolongando  $\mathcal{B}_0$ .
- Vamos a probar que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-r}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{q-r}\}$  es una base de  $L_1 + L_2$ . En efecto:

a)  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente.

Partamos de la relación,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{p-r} \beta_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{q-r} \gamma_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in L_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p-r} \beta_i \mathbf{v}_i}_{\in L_1} = - \underbrace{\sum_{i=1}^{q-r} \gamma_i \mathbf{w}_i}_{\in L_2}$$

$\Downarrow$

$$-\sum_{i=1}^{q-r} \gamma_i \mathbf{w}_i \in L_1 \cap L_2$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \delta_1, \dots, \delta_r \in K \mid -\sum_{i=1}^{q-r} \gamma_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^r \delta_i \mathbf{u}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^r \delta_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{q-r} \gamma_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow \text{ Por ser } \mathcal{B}_2 \text{ l.i.}$$

$$\gamma_i = 0, \quad (i = 1, \dots, q-r)$$

$$\Downarrow \text{ Sustituyendo en (3.16)}$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{p-r} \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow \text{ Por ser } \mathcal{B}_1 \text{ l.i.}$$

$$\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r), \quad \beta_i = 0 \quad (i = 1, \dots, p-r).$$

b)  $\mathcal{B}$  es un sistema de generadores de  $L_1 + L_2$ .

Sea  $\mathbf{x} \in L_1 + L_2 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  ( $\mathbf{x}_1 \in L_1$ ,  $\mathbf{x}_2 \in L_2$ ).

De  $\mathbf{x}_1 \in L_1$ ,  $\mathbf{x}_2 \in L_2 \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{p-r}, \delta_1, \dots, \delta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_r \in K$  tales que,

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{p-r} \beta_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{x}_2 = \sum_{i=1}^r \delta_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{q-r} \gamma_i \mathbf{w}_i,$$

de donde

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \delta_i) \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{p-r} \beta_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{q-r} \gamma_i \mathbf{w}_i$$

y, por consiguiente,  $\mathcal{B}$  es un sistema de generadores de  $L_1 + L_2$ .

De ambos puntos se deduce que  $\mathcal{B}$  es una base de  $V$  y, por tanto,

$$\dim(L_1 + L_2) = \text{card}(\mathcal{B}) = r + p - r + q - r = p + q - r = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2).$$

**Ejemplo** (ECUACIONES DE  $L_1 + L_2$ ). Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 5 y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_5\}$  una base de  $V$ . Se dan las variedades de  $V$ :

$$L_1 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 & - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$L_2 \equiv \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Calcular un sistema de ecuaciones implícitas independientes de  $L_1 + L_2$  y  $\dim(L_1 \cap L_2)$ .

**Solución** De una manera similar a la utilizada en la demostración anterior es fácil de probar que si  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  son, respectivamente, bases de  $L_1$  y  $L_2$ , entonces  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  es un **sistema de generadores** de  $L_1 + L_2$ .

Calculemos pues dichas bases.

- **Base  $\mathcal{B}_1$  de  $L_1$ .** Se obtiene resolviendo el primero de los sistemas y calculando una base del espacio de las soluciones. Una tal base puede ser,

$$\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 2)\}.$$

- **Base  $\mathcal{B}_2$  de  $L_2$ .** Un sistema equivalente al dado es

$$L_2 \equiv \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 2x_3 - 4x_4 + 7x_5 \\ 2x_2 = 2x_3 + x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

y una base de  $L_2$  la podemos obtener dando los valores canónicos a las incógnitas  $x_3, x_4, x_5$ . (Como es obvio, podemos multiplicar los vectores de la base obtenida por el escalar conveniente con el fin de que las coordenadas sean enteras). Así pues, tomaremos,

$$\mathcal{B}_2 = \{(-1, 1, 1, 0, 0), (-2, -1, 0, 2, 0), (3, 2, 0, 0, 2)\}.$$

- **Base  $\mathcal{B}_{12}$  de  $L_1 + L_2$ .** La calculamos a través de un menor principal de la matriz de las coordenadas

$$A = (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se verifica que  $\text{rg}(A) = 4$  y, puede comprobarse fácilmente, que las cuatro primeras columnas de  $A$  determinan una base de  $L_1 + L_2$ . Es decir,

$$\mathcal{B}_{12} = \{(-1, 1, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 2), (-2, -1, 0, 2, 0)\}$$

y, por consiguiente,  $L_1 + L_2$  viene dada por:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & x_4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir,

$$L_1 + L_2 \equiv 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_5 = 0.$$

- Aplicando la fórmula de la dimensión se tiene,

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 + L_2) = 3 + 3 - 4 = 2,$$

de donde  $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$ .

Adelantándonos a la definición que sigue a este ejemplo, podemos asegurar que la suma  $L_1 + L_2$  no es *directa*.

**Definición 3.3.5** Sea  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$  variedades lineales de  $V$ . Decimos que  $L$  es suma directa de  $L_1$  y  $L_2$  (notaremos  $L = L_1 \oplus L_2$ ) si se verifica:

- $L = L_1 + L_2$ .



$$\bullet L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

**Proposición 3.3.9** <sup>3</sup> En las condiciones de la definición,

$$L = L_1 \oplus L_2 \iff \forall \mathbf{x} \in L, \exists^1 \mathbf{x}_1 \in L_1, \exists^1 \mathbf{x}_2 \in L_2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2.$$

#### Demostración

$\Rightarrow$  El hecho de que la suma sea directa implica que  $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$ . Dicho esto, supongamos que  $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1 \in L_1, \exists \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2 \in L_2$  tales que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}'_2 \end{aligned} \right\}$$

Restando ambas igualdades, se tiene:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) \implies \underbrace{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1}_{\in L_1} = \underbrace{\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2}_{\in L_2} \implies \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2 \in L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\},$$

de donde

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}'_2.$$

$\Leftarrow$  El hecho de que  $\exists! \mathbf{x}_1 \in L_1, \exists! \mathbf{x}_2 \in L_2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ , implica que  $L = L_1 + L_2$ . Falta probar, pues, que de la unicidad se deduce que  $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$ .

Sea  $\mathbf{x} \in L_1 \cap L_2 \implies -\mathbf{x} \in L_1 \cap L_2 \implies \mathbf{x}, -\mathbf{x} \in L_1, \mathbf{x}, -\mathbf{x} \in L_2$ . Ahora bien, como

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{x} + (-\mathbf{x}), \\ \mathbf{0} &= (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}, \end{aligned}$$

y, por hipótesis, la descomposición es única, debe ser  $\mathbf{x} = -\mathbf{x}$  y, de aquí, que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Corolario** Por definición, si la suma  $L_1 + L_2$  es directa, debe ser  $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$ . Es decir,  $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$ . Por ello la fórmula de la dimensión para la suma directa de dos variedades sería:

$$\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2).$$

**Proposición 3.3.10** (PROPIEDADES). Sea  $\mathcal{R}(V)$  el conjunto de las variedades lineales de  $V$ . Sobre  $\mathcal{R}(V)$  hay definidas dos operaciones internas,  $L_1 + L_2$  y  $L_1 \cap L_2$  dichas operaciones verifican las siguientes propiedades

#### 1. ASOCIATIVAS

$$(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3),$$

$$(L_1 \cap L_2) \cap L_3 = L_1 \cap (L_2 \cap L_3).$$

#### 2. CONMUTATIVAS

$$L_1 + L_2 = L_2 + L_1,$$

$$L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1.$$

#### 3. IDEMPOTENTES

$$L_1 + L_1 = L_1,$$

$$L_1 \cap L_1 = L_1.$$

<sup>3</sup>Con el símbolo  $\exists^1$ , indicamos que *existe un elemento y sólo uno* que verifica la condición dada.

## 4. CANCELATIVAS

$$L_1 + (L_1 \cap L_2) = L_1,$$

$$L_1 \cap (L_1 + L_2) = L_1.$$

## 5. MODULARES

$$L_1 \subset L_3 \implies L_1 + (L_2 \cap L_3) = (L_1 + L_2) \cap L_3,$$

$$L_1 \supset L_3 \implies L_1 \cap (L_2 + L_3) = (L_1 \cap L_2) + L_3.$$

**Definición 3.3.6** A la terna  $(\mathcal{R}(V), +, \cap)$ , por verificar sus operaciones las propiedades 1 a 5, se le da el nombre de retículo de las variedades lineales de  $V$ .

## 3.4 El espacio producto

**Proposición 3.4.1** (PRODUCTO DE ESPACIOS VECTORIALES). Sean  $V_1$  y  $V_2$  espacios vectoriales de tipo finito sobre el mismo cuerpo  $K$ . Consideremos el conjunto producto

$$V_1 \times V_2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in V_1, \mathbf{y} \in V_2\}.$$

Sobre el conjunto  $V_1 \times V_2$ , definimos las operaciones siguientes:

- ADICIÓN:  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$ .
- MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR:  $\lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y})$ .

Se verifica que:

1.  $(V_1 \times V_2, +, \cdot K)$  es un espacio vectorial sobre  $K$ , llamado espacio vectorial producto de  $V_1$  por  $V_2$ .
2.  $\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$ .

**Demostración** La primera parte de la demostración es inmediata, baste tomar como modelo el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ . Demostremos pues la segunda.

Sea  $\dim(V_1) = p$  y  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$  una base de  $V_1$ ,  $\dim(V_2) = q$  y  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$  una base de  $V_2$ . Vamos a probar que

$$\mathcal{B} = \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{0}), \dots, (\mathbf{u}_p, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{v}_1), \dots, (\mathbf{0}, \mathbf{v}_q)\}$$

es una base de  $V_1 \times V_2$ .

- $\mathcal{B}$  es linealmente independiente. En efecto, partamos de la relación,

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^q \beta_i (\mathbf{0}, \mathbf{v}_i) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left( \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i, \mathbf{0} \right) + \left( \mathbf{0}, \sum_{i=1}^q \beta_i \mathbf{v}_i \right) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \implies \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i, \sum_{i=1}^q \beta_i \mathbf{v}_i \right) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

de donde

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \implies \alpha_i = 0 & (i = 1, \dots, p), \\ \sum_{i=1}^q \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \implies \beta_i = 0 & (i = 1, \dots, q), \end{cases}$$

por ser  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  bases de  $V_1$  y de  $V_2$ , respectivamente.

- $\mathcal{B}$  es un sistema de generadores de  $V_1 \times V_2$  ya que si  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_1 \times V_2 \implies \mathbf{x} \in V_1, \mathbf{y} \in V_2$ .  
Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in V_1 &\implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in K \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i, \\ \mathbf{y} \in V_2 &\implies \exists \beta_1, \dots, \beta_q \in K \mid \mathbf{y} = \sum_{i=1}^q \beta_i \mathbf{v}_i, \end{aligned}$$

de donde

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i, \sum_{i=1}^q \beta_i \mathbf{v}_i \right) = \left( \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{u}_i, \mathbf{0} \right) + \left( \mathbf{0}, \sum_{i=1}^q \beta_i \mathbf{v}_i \right)$$

y, por tanto,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^q \beta_i (\mathbf{0}, \mathbf{v}_i).$$

### 3.5 Espacio cociente

**Nota.** En toda la sección,  $V$  es un espacio vectorial sobre  $K$  y  $L$  una variedad lineal de  $V$ .

**Proposición 3.5.1** Definamos sobre  $V$  la siguiente relación binaria: si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , diremos que  $\mathbf{x}$  está  $L$ -relacionado con  $\mathbf{y}$  si y sólo si su diferencia pertenece a  $L$ . Simbólicamente:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \mathbf{x} R_L \mathbf{y} \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} \in L.$$

La relación así definida es de equivalencia.

**Demostración** Para ser relación de equivalencia han de cumplirse las propiedades *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

- REFLEXIVA:  $\forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} R_L \mathbf{x}$ .
- SIMÉTRICA:  $\mathbf{x} R_L \mathbf{y} \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in L \implies \mathbf{y} - \mathbf{x} \in L \implies \mathbf{y} R_L \mathbf{x}$ .
- TRANSITIVA:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} R_L \mathbf{y} &\implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in L \\ \mathbf{y} R_L \mathbf{z} &\implies \mathbf{y} - \mathbf{z} \in L \end{aligned} \right\} \implies (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{x} - \mathbf{z} \in L \implies \mathbf{x} R_L \mathbf{z}.$$

**Definición 3.5.1** Sea  $\mathbf{a} \in V$ , llamaremos clase de equivalencia del elemento  $\mathbf{a}$  (la notaremos por  $\mathbf{a} R_L$ ), al conjunto de todos los vectores de  $V$  que están  $L$ -relacionados con  $\mathbf{a}$ . Simbólicamente:

$$\mathbf{a} R_L = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} R_L \mathbf{a}\} = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} - \mathbf{a} \in L\}.$$

**Proposición 3.5.2** Sea  $\mathbf{a} \in V$ . Consideremos el conjunto

$$\mathbf{a} + L = \{\mathbf{a} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in L\}.$$

Se verifica que  $\mathbf{a}R_L = \mathbf{a} + L$ .

**Demostración**  $\mathbf{x} \in \mathbf{a}R_L \iff \mathbf{x} - \mathbf{a} \in L \iff \exists \mathbf{u} \in L \mid \mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{u} \iff \exists \mathbf{u} \in L \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{u} \iff \mathbf{x} \in \mathbf{a} + L$ .

**Proposición 3.5.3** (CRITERIO DE IGUALDAD DE CLASES)<sup>4</sup>. Sean  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ , y  $\mathbf{a} + L$  y  $\mathbf{b} + L$  sus correspondientes clases de equivalencia, entonces

$$\mathbf{a} + L = \mathbf{b} + L \iff \mathbf{a} - \mathbf{b} \in L.$$

**Demostración**  $\mathbf{a} + L = \mathbf{b} + L \implies \mathbf{a} + L \subset \mathbf{b} + L, \mathbf{b} + L \subset \mathbf{a} + L$ . Consideremos el primer caso:

$$\implies \mathbf{a} + L \subset \mathbf{b} + L \implies \forall \mathbf{u} \in L, \exists \mathbf{v} \in L \mid \mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{v} \implies \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \implies \mathbf{a} - \mathbf{b} \in L.$$

Análoga demostración para el segundo caso.

$$\Longleftarrow$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \in L \iff \exists \mathbf{u} \in L \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{u}. \quad (3.17)$$

Probemos que  $\mathbf{a} + L \subset \mathbf{b} + L$ . Sea  $\mathbf{x} \in \mathbf{a} + L$ ,

$$\mathbf{x} \in \mathbf{a} + L \implies \exists \mathbf{v} \in L \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v} \xrightarrow{\text{Por 3.17}} \mathbf{x} = \mathbf{b} + \underbrace{(\mathbf{u} + \mathbf{v})}_{\in L} \implies \mathbf{x} \in \mathbf{b} + L$$

y, análogamente, para la inclusión contraria.

**Definición 3.5.2** Llamamos *conjunto cociente* de  $V$  por la relación  $R_L$  y lo notamos por  $V/L$ , al conjunto de todas las clases de equivalencia inducidas por la relación  $R_L$ . Es decir,

$$V/L = \{\mathbf{a} + L \mid \mathbf{a} \in V\}.$$

**Proposición 3.5.4**  $V/L$  es una partición o clasificación de  $V$ , esto es:

1. La unión de todas las clases es igual a  $V$ .
2. Dos clases son iguales o disjuntas.

**Demostración**

1. Claramente, por la propiedad reflexiva, todo vector  $\mathbf{x}$  de  $V$  pertenece a alguna clase ya que, al menos,  $\mathbf{x}R_L \mathbf{x}$  y, por tanto  $V \subset \bigcup_{\mathbf{a} \in V} \{\mathbf{a} + L\}$ .

La inclusión contraria es trivial pues  $\forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{a} + L \subset V$  y, por tanto,  $\bigcup_{\mathbf{a} \in V} \{\mathbf{a} + L\} \subset V$ .

2. Sean  $\mathbf{a} + L, \mathbf{b} + L \in V/L$ . Supongamos que  $\mathbf{x} \in (\mathbf{a} + L) \cap (\mathbf{b} + L)$ . Ello implicaría que

$$\left. \begin{array}{l|l} \exists \mathbf{u} \in L & \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{u} \\ \exists \mathbf{v} \in L & \mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{v} \end{array} \right\} \implies \mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{v} \implies \mathbf{a} - \mathbf{b} \in L \xrightarrow{\text{CIC}} \mathbf{a} + L = \mathbf{b} + L,$$

lo que demuestra el aserto segundo.

<sup>4</sup>Dado el uso frecuente de este criterio, haremos referencia a él mediante las iniciales CIC.

**Proposición 3.5.5** (ESTRUCTURA DE  $V/L$ ) Consideremos el conjunto  $V/L$ . Definamos sobre él las siguientes operaciones:

- I. ADICIÓN:  $(\mathbf{a} + L) + (\mathbf{b} + L) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + L$ .
- II. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR:  $\forall \lambda \in K, \lambda(\mathbf{a} + L) = \lambda\mathbf{a} + L$ .

Se verifica que:

1.  $(V/L, +, \cdot K)$  es un espacio vectorial sobre  $K$ .
2.  $\dim(V/L) = \dim(V) - \dim(L)$ .

### Demostración

1. La demostración de este punto consta de distintos apartados que se detallan a continuación.

- 1.1. Probemos, en primer lugar, que la adición está bien definida o, de otro modo, que la suma es independiente de los representantes elegidos. Es decir,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} + L = \mathbf{a}' + L \\ \mathbf{b} + L = \mathbf{b}' + L \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} + L = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + L.$$

En efecto,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} + L = \mathbf{a}' + L \xrightarrow{\text{CIC}} \mathbf{a} - \mathbf{a}' \in L \\ \mathbf{b} + L = \mathbf{b}' + L \xrightarrow{\text{CIC}} \mathbf{b} - \mathbf{b}' \in L \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') \in L \xrightarrow{\text{CIC}} \mathbf{a} + \mathbf{b} + L = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + L.$$

- 1.2. Análogamente, la multiplicación por un escalar está bien definida. Es decir,

$$\mathbf{a} + L = \mathbf{a}' + L \Rightarrow \lambda\mathbf{a} + L = \lambda\mathbf{a}' + L.$$

En efecto,

$$\mathbf{a} + L = \mathbf{a}' + L \xrightarrow{\text{CIC}} \mathbf{a} - \mathbf{a}' \in L \Rightarrow \lambda\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a}' \in L \xrightarrow{\text{CIC}} \lambda\mathbf{a} + L = \lambda\mathbf{a}' + L.$$

- 1.3. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

E.1. **Asociativa:**  $[(\mathbf{a} + L) + (\mathbf{b} + L)] + (\mathbf{c} + L) = (\mathbf{a} + L) + [(\mathbf{b} + L) + (\mathbf{c} + L)]$ .

E.2. **Conmutativa:**  $(\mathbf{a} + L) + (\mathbf{b} + L) = (\mathbf{b} + L) + (\mathbf{a} + L)$ .

E.3. **E. neutro:** Es la clase  $\mathbf{0} + L = L$ .

E.4. **E. simétrico:**  $-(\mathbf{a} + L) = -\mathbf{a} + L$ .

- 1.4. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

E.5.  $\lambda[(\mathbf{a} + L) + (\mathbf{b} + L)] = \lambda(\mathbf{a} + L) + \lambda(\mathbf{b} + L)$ .

E.6.  $(\lambda + \mu)(\mathbf{a} + L) = \lambda(\mathbf{a} + L) + \mu(\mathbf{a} + L)$ .

E.7.  $\lambda(\mu(\mathbf{a} + L)) = \lambda\mu(\mathbf{a} + L)$ .

E.8.  $1(\mathbf{a} + L) = \mathbf{a} + L$ .

Todas estas propiedades son fácilmente comprobables y de ellas deducimos que, efectivamente,  $(V/L, +, \cdot K)$  es un  $K$ -espacio vectorial.

2. Calculemos ahora la dimensión del espacio  $V/L$ . Para ello supondremos que  $\dim(V) = n$ ,  $\dim(L) = r$  que  $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$  es una base de  $L$  y que

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

es una base de  $V$  obtenida prolongando  $\mathcal{B}_0$ .

Vamos a probar que

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_{r+1} + L, \dots, \mathbf{u}_n + L\}$$

es una base de  $V/L$ . En efecto:

- (a)  $\mathcal{B}'$  es linealmente independiente. Partamos de la relación,

$$\alpha_{r+1}(\mathbf{u}_{r+1} + L) + \dots + \alpha_n(\mathbf{u}_n + L) = \mathbf{0} + L$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n + L = \mathbf{0} + L$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n \in L$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \mid \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{u}_r$$

$$\Downarrow$$

$$-\alpha_1\mathbf{u}_1 - \dots - \alpha_r\mathbf{u}_r + \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_i = 0, (i = 1, \dots, n)$$

de donde se deduce que  $\mathcal{B}'$  es l.i.

- (b)  $\mathcal{B}'$  es un sistema de generadores de  $V/L$ . Para ello hay que probar que  $\forall \mathbf{x} \in V$ ,  $\mathbf{x} + L$  es combinación lineal de los elementos de  $\mathcal{B}'$ . En efecto,

$$\forall \mathbf{x} \in V \implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \mid \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{u}_r + \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x} + L = \underbrace{\alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{u}_r}_{\in L} + \alpha_{r+1}\mathbf{u}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n + L$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x} + L = \alpha_{r+1}(\mathbf{u}_{r+1} + L) + \dots + \alpha_n(\mathbf{u}_n + L)$$

y, por consiguiente,  $\mathcal{B}'$  es un sistema de generadores de  $V/L$  y por tanto base de  $V$ .

**Ejemplo.** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 4 y  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$  una base de  $V$ . Sea  $L = \langle \mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0) \rangle$ . Se pide:

1. Calcular la dimensión y una base,  $\mathcal{B}_1$ , de  $V/L$ .
2. Comprobar que  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 + L, \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{u}_4 + L\}$  es, asimismo, una base de  $V/L$ .

3. Calcular la matriz  $\mathcal{M}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ .

4. Sea  $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)$ . Calcular las coordenadas del vector  $\mathbf{x} + L$ , respecto las bases  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ .

**Solución.**

1. Claramente,  $\dim(V/L) = 4 - 2 = 2$  y  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  es una base de  $V/L$  ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Basta comprobar que  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4\}$  es base de  $V$ , para lo cual calcularemos el determinante de la matriz de las coordenadas de dicho conjunto de vectores. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

se deduce que  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 + L, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 + L\}$  es una base de  $V/L$ .

3. Para obtener la matriz  $\mathcal{M}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ , es necesario calcular las coordenadas de los vectores de la base  $\mathcal{B}_1$  respecto de la base  $\mathcal{B}_2$ . Sean  $(\alpha_1, \alpha_2)$  y  $(\beta_1, \beta_2)$  las coordenadas, respectivamente, de los vectores de  $\mathcal{B}_1$  respecto de  $\mathcal{B}_1$ . Será, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 + L &= \alpha_1(\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 + L) + \alpha_2(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 + L), \\ \mathbf{u}_2 + L &= \beta_1(\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 + L) + \beta_2(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 + L). \end{aligned}$$

Aplicando el criterio de igualdad de clases, se tiene que

$$\begin{aligned} -\mathbf{u}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u}_3 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{u}_4 &\in L, \\ -\mathbf{u}_2 + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{u}_3 + 2(\beta_1 - \beta_2)\mathbf{u}_4 &\in L, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} (-1, 0, \alpha_1 + \alpha_2, 2(\alpha_1 - \alpha_2)) &= \lambda_1(1, 0, 1, 1) + \lambda_2(2, 1, 1, 0), \\ (0, -1, \beta_1 + \beta_2, 2(\beta_1 - \beta_2)) &= \lambda'_1(1, 0, 1, 1) + \lambda'_2(2, 1, 1, 0), \end{aligned}$$

igualdades que dan lugar a los sistemas:

$$\begin{cases} -1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = \lambda_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2(\alpha_1 - \alpha_2) = \lambda_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \lambda'_1 + 2\lambda'_2 \\ -1 = \lambda'_2 \\ \beta_1 + \beta_2 = \lambda'_1 + \lambda'_2 \\ 2(\beta_1 - \beta_2) = \lambda'_1 \end{cases}$$

de los cuales obtenemos, respectivamente, que

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right), \quad (\beta_1, \beta_2) = (1, 0)$$

y, por consiguiente,

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sea  $(\mathbf{x} + L)_{\mathcal{B}_1} = (\alpha, \beta)$ . Procediendo como en el apartado anterior, obtendremos

$$(1, 2, 3, 4) + L = \alpha[(1, 0, 0, 0) + L] + \beta[(0, 1, 0, 0) + L].$$

Es decir,

$$(\alpha - 1, \beta - 2, -3, -4) \in L,$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha - 1 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \beta - 2 &= \lambda_2 \\ -3 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ -4 &= \lambda_1 \end{cases}$$

del cual obtenemos que  $(\alpha, \beta) = (-1, 3)$ .

Sea  $(\mathbf{x} + L)_{\mathcal{B}_2} = (\alpha', \beta')$ . Aplicando las fórmulas del cambio de base

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

se tiene, sin más que sustituir, que

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

de donde

$$(\mathbf{x} + L)_{\mathcal{B}_2} = \left( \frac{15}{4}, \frac{1}{4} \right).$$