

# Aplicaciones Lineales

Si  $V$  y  $W$  son dos e.v. sobre un mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ , llamaremos **aplicación lineal** (a.l.) de  $V$  en  $W$  a una función  $f: V \rightarrow W$  que verifica:

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{v}) &= f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \forall \vec{v} \in V \\ f(\lambda \vec{v}) &= \lambda f(\vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V \end{aligned}$$

Si  $V = W$  entonces la aplicación lineal se llama **endomorfismo**.

**Ejemplo 1** Estudiar si las siguientes funciones son aplicaciones lineales:

1.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (x - y, 0, 2x + 5y)$
2.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (x - y + 1, 0, 2x + 5y)$
3.  $f: P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R}), \quad f[p(x)] = xp'(x)$

## Propiedades

Si  $f: V \rightarrow W$  es una aplicación lineal, se tiene

1.  $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
2.  $f(\vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v})$

## Caracterización de una aplicación lineal

$f: V \rightarrow W$  es una aplicación lineal si y sólo si,  
 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

**Teorema 1** Si  $V$  es un e.v. de dimensión finita  $n$  sobre un cierto cuerpo  $\mathbb{K}$ , entonces  $V$  es isomorfo a  $\mathbb{K}^n$ .

Es decir los e.v. de dimensión finita podemos considerarlos como conjuntos de  $n$ -tuplas sobre un cierto  $\mathbb{K}$ .

## Núcleo e Imagen de una Aplicación Lineal

**Definición 1** Sea  $f: V \rightarrow W$  una aplicación lineal. Llamamos **Núcleo de  $f$**  ( $\text{Ker } f$ ) al conjunto de vectores de  $V$  cuya imagen es el elemento neutro de  $W$ .

$$\text{Ker } f = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$$

**Definición 2** Llamamos **Imagen de  $f$**  ( $\text{Im } f$ ) al conjunto de vectores de  $W$  que son imágenes bajo  $f$  de vectores de  $V$ .

$$\text{Im } f = \{\vec{w} \in W \mid \exists \vec{v} \in V \text{ t.q. } f(\vec{v}) = \vec{w}\}$$

**Teorema 2** Si  $f: V \rightarrow W$  es una aplicación lineal entre dos e.v. sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , se tiene que:

1.  $\text{Ker } f$  es un subespacio vectorial de  $V$
2.  $\text{Im } f$  es un subespacio vectorial de  $W$

**Ejemplo 2** Calcular núcleo e imagen de las siguientes aplicaciones lineales.

1.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (z, x + y, -z)$
2.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, 0)$
3.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (y, x)$
4.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (y, z)$

**Teorema 3** Dada una a.l.  $f: V \rightarrow W$  y un sistema generador de  $V$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ , se tiene que los vectores  $\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_p)\}$  forman un sistema generador de  $\text{Im } f$ .

**Teorema 4** Sea  $f: V \rightarrow W$  una a.l. donde  $V$  es un e.v. de dimensión finita. Entonces se verifica

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

**Teorema 5** Sea  $f: V \rightarrow W$  una aplicación lineal. Entonces:

1.  $f$  es inyectiva si y sólo si  $\text{Ker } f = \{\vec{0}_V\}$
2.  $f$  es sobreyectiva si y sólo si  $\text{Im } f = W$

**Ejemplo 3** Analizar, usando los núcleos e imágenes ya calculados en el ejemplo anterior, si las siguientes a.l. son inyectivas o sobreyectivas.

1.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (z, x + y, -z)$
2.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, 0)$
3.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (y, x)$
4.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (y, z)$

## Matriz de una aplicación lineal

**Teorema 6** Sean  $V$  y  $W$  dos e.v., sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Si  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  es una base de  $V$  y dado un sistema cualquiera  $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  de vectores de  $W$ , existe una a.l.  $f: V \rightarrow W$  y una sola tal que

$$f(\vec{v}_1) = \vec{u}_1, f(\vec{v}_2) = \vec{u}_2, \dots, f(\vec{v}_n) = \vec{u}_n$$

## Ecuaciones de una Aplicación Lineal

Sea  $f: V \rightarrow W$  una a.l. sobre un mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ . Sea  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  una base de  $V$  en las que las coordenadas de  $\vec{x} \in V$  son  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Sea  $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$  una base de  $W$  y sea  $f(\vec{x}) = \vec{y} \in W$  de coordenadas  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  en  $\mathcal{B}'$ .

Supongamos conocidas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base  $\mathcal{B}$  expresadas en la base  $\mathcal{B}'$ .

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1) &= a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \dots + a_{m1}\vec{w}_m \\ f(\vec{v}_2) &= a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + \dots + a_{m2}\vec{w}_m \\ &\vdots \\ f(\vec{v}_n) &= a_{1n}\vec{w}_1 + a_{2n}\vec{w}_2 + \dots + a_{mn}\vec{w}_m \end{aligned}$$

Tenemos entonces, por un lado

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \dots + y_m\vec{w}_m$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n) \\ &= x_1f(\vec{v}_1) + x_2f(\vec{v}_2) + \dots + x_nf(\vec{v}_n) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \dots + y_m\vec{w}_m &= \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n})\vec{w}_1 + \\ &\quad + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n})\vec{w}_2 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \dots + x_na_{mn})\vec{w}_m \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

que se expresa  $Y = AX$  donde  $A$  es una matriz  $m \times n$  que se denomina **matriz asociada a la aplicación lineal** respecto de las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$ .

Resumiendo lo anterior tenemos el siguiente

**Teorema 7** Sea  $f: V \rightarrow W$  una a.l. entre dos e.v. sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  con bases  $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  y  $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ , respectivamente. Si construimos la matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes por  $f$  de los vectores de la base  $\mathcal{B}$  en la base  $\mathcal{B}'$ .

Entonces se cumple que si  $v$  es la expresión respecto de la base  $\mathcal{B}$  de un vector de  $V$ , se tiene que  $Av$  nos da expresión de su imagen respecto de la base  $\mathcal{B}'$ , es decir,

$$f(v) = Av$$

Se dice que  $A$  es la matriz asociada a la a.l.  $f$  respecto de las bases  $\mathcal{B}$  de  $V$  y  $\mathcal{B}'$  de  $W$ , y por tanto, la denotamos por  $M(f)$ .

**Corolario 1** Si  $V$  es un e.v. de dimensión finita y  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  son bases (distintas) de  $V$ , entonces la matriz asociada a la a.l. identidad  $I: V \rightarrow V$  respecto de las bases  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  coincide con la matriz del cambio de base de  $\mathcal{B}_1$  a  $\mathcal{B}_2$ .

### Ejercicios:

1. Calcular la matriz asociada a la a.l.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(a, b, c) = (a + b, a - c)$  en los siguientes casos:
  - (a) Cuando las bases de los e.v. son canónicas.
  - (b) Respecto a las bases  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 3, 0)\}$  y  $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (-1, 2)\}$
2. Hallar el núcleo y la imagen de la a.l.  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:
3. Calcular la matriz asociada a la siguiente a.l.:

$f: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ ,  $f(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$  respecto de las bases  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$  y  $\mathcal{B}' = \{1, x\}$  de  $P_2(\mathbb{R})$  y  $P_1(\mathbb{R})$  respectivamente.

Sea  $f: V \rightarrow W$  una a.l. entre e.v. de dimensión finita, ambos sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ , respecto de cualesquiera bases de  $V$  y  $W$ . Se verifica que:

$$1. \dim(\text{Im} f) = \text{rang } M(f)$$

La dimensión de la imagen de la a.l.  $f$  es igual al rango de su matriz asociada  $M(f)$ .

Se llama *rango* de  $f$  a:

$$\text{rang } f = \text{rang } M(f)$$

2. Si  $\dim V = \dim W$ , la a.l.  $f$  es un isomorfismo si y sólo si su matriz asociada,  $M(f)$ , es regular.

**Teorema 8** Si  $f, g: V \rightarrow W$  son dos a.l., entonces la matriz asociada a la a.l.  $\lambda f + \mu g$  es

$$\lambda M(f) + \mu M(g)$$

**Teorema 9** Si  $f: V_1 \rightarrow V_2$  y  $g: V_2 \rightarrow V_3$  son a.l., entonces la matriz asociada a la a.l.  $g \circ f$  es la matriz  $M(g)M(f)$ .

## Cambio de base para ap. lineales

**Teorema 10** Sea  $f: V \rightarrow W$  una a.l.. Consideremos  $\mathcal{B}_V$  y  $\mathcal{B}'_V$  dos bases de  $V$ , y  $\mathcal{B}_W$  y  $\mathcal{B}'_W$  dos bases de  $W$ , la matriz  $P$  de cambio de base de  $\mathcal{B}_V$  a  $\mathcal{B}'_V$  y la matriz  $Q$  de  $\mathcal{B}_W$  a  $\mathcal{B}'_W$ .

$$\text{Entonces, } M(f, \mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W) = Q^{-1}M(f, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)P$$

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{B}_V \rangle & \xrightarrow{A} & \langle \mathcal{B}_W \rangle \\ \uparrow P & & \uparrow Q \\ \langle \mathcal{B}'_V \rangle & \xrightarrow{A' = Q^{-1}AP} & \langle \mathcal{B}'_W \rangle \end{array}$$

**Ejemplo 4** Dada la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + 3z)$$

la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}_3$ , la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B}_2$  y las bases:

$$\mathcal{B}'_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}; \quad \mathcal{B}'_2 = \{(1, 3), (2, -1)\}$$

Calcular  $M(f, \mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_2)$  a partir de la matriz  $M(f, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2)$ .

**Corolario 2** Dado un endomorfismo  $f: V \rightarrow V$ , dos bases de  $V$ ,  $\mathcal{B}_V$  y  $\mathcal{B}'_V$ , y  $P$ , la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_V$  a  $\mathcal{B}'_V$ , se tiene que

$$M(f, \mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_V) = P^{-1}M(f, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V)P$$