

Apéndice A. Nociones básicas de combinatoria

(A.1) Sea A un conjunto y p un número entero positivo. Se llaman *p-variaciones con repetición* de elementos de A a los elementos del producto cartesiano

$$\underbrace{A \times \cdots \times A}_p.$$

Si A tiene n elementos, el número de p -variaciones con repetición de elementos de A , o sea el número de elementos de conjunto $A \times \cdots \times A$, se denota por V_p^n y es igual a

$$V_p^n = n^p.$$

(A.2) Se llaman *p-variaciones sin repetición* de elementos de A a los elementos del producto cartesiano $A \times \cdots \times A$ en los que no hay dos componentes iguales, esto es, a los elementos del conjunto

$$V' = \{(a_1, \dots, a_p) : a_i \in A \forall i \in \{1, \dots, p\} \text{ y } a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}$$

Si A tiene n elementos, el número de p -variaciones sin repetición de elementos de A se denota por $V_p'^n$ y es igual a

$$V_p'^n = \begin{cases} n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, & \text{si } n \geq p \\ 0, & \text{si } n < p \end{cases}$$

(A.3) Sea ahora p un número entero no negativo. Se llaman *p-combinaciones* de elementos de A a los subconjuntos de A que tienen p elementos.

Las p -combinaciones de elementos de A son por lo tanto elementos del conjunto $\mathcal{P}(A)$.

Si A es un conjunto de n elementos, entonces el número de p -combinaciones de elementos de A se denota por C_p^n y es igual a

$$C_p^n = \begin{cases} \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, & \text{si } n \geq p \\ 0, & \text{si } n < p \end{cases}$$

Los números C_p^n aparecen en el desarrollo del binomio de Newton (si a y b son dos números, entonces $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_p^n a^p b^{n-p}$) y se verifica que $C_{p+1}^{n+1} = C_{p+1}^n + C_p^n$. Esta propiedad permite calcular el número de combinaciones de $n+1$ elementos conociendo los números de combinaciones de n elementos sumando los dos números que se encuentran encima de cada posición en la siguiente figura:

$$\begin{array}{rcccccccc} n=0 & \longrightarrow & & & & & & 1 \\ n=1 & \longrightarrow & & & & & 1 & 1 \\ n=2 & \longrightarrow & & & & 1 & 2 & 1 \\ n=3 & \longrightarrow & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ n=4 & \longrightarrow & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n=5 & \longrightarrow & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ n=6 & \longrightarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & & & & & & & & \vdots \end{array}$$

Esta forma de representar los números C_p^n se conoce como *triángulo de Tartaglia* o *de Pascal*.

(A.4) Sea A un conjunto. Se llaman *permutaciones* de los elementos de A a todas las aplicaciones biyectivas $f : A \rightarrow A$.

Si A es un conjunto de n elementos, el número de permutaciones de los elementos de A es

$$P_n = n!,$$

y coincide con el número de n -variaciones sin repetición de elementos de A .