

Unidad Didáctica II.

Continuación de la anterior, dedicada al estudio de los sistemas lineales, donde se estudian los sistemas de ecuaciones lineales, las variedades lineales vectoriales y la diagonalización de matrices y formas cuadráticas.

Capítulo 4. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Conocimientos previos:

- **Sistemas de ecuaciones lineales:**

Es un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n = b_1$$

$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n = b_m$$

Los números a_{ij} , para i de 1 a m y j de 1 a n , se llaman coeficientes de las incógnitas.

- **Método de Gauss:** Unidad didáctica I, página 16.
- **Regla de Cramer:** Unidad didáctica I, página 27.
- **Ecuaciones de cambio de base:** Unidad didáctica I, página 12.

Clasificación de Sistemas.

Definición:

Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el mismo cuerpo de definición K , una aplicación $f: E \rightarrow F$ se llama **aplicación lineal** u **homomorfismo** entre E y F si para cualquier par de vectores $\bar{u}, \bar{v} \in E$ y todo escalar $\alpha \in K$ se verifica:

$$f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v})$$

$$f(\alpha\bar{u}) = \alpha f(\bar{u})$$

Caracterización:

Estas dos propiedades son equivalentes a:

$$f: E \rightarrow F; \quad f \text{ lineal} \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in E$$

es

$$f(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})$$

Tipos:

- ◊ Si f biyectiva, la aplicación lineal es **isomorfismo**.
- ◊ Si $f: E \rightarrow E$ la aplicación se dice **endomorfismo**.
- ◊ Si f no es inyectiva ni sobreyectiva, se dice **aplicación en**.
- ◊ El endomorfismo biyectivo se dice **automorfismo**.
- ◊ La aplicación lineal de un espacio sobre su cuerpo de escalares; $f: E(K) \rightarrow K$ se dice **forma lineal**.

Principales propiedades:

Si $f: E \rightarrow F$ es aplicación lineal, se verifica:

- a) $f(\bar{0}) = \bar{0}$
- b) $\forall \bar{u} \in E; f(-\bar{u}) = -f(\bar{u})$
- c) $S \subset E$, S subespacio vectorial de $E \Rightarrow f(S)$ subespacio vectorial de F .
- d) Si $L = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ sistema de generadores de E , entonces:
 $f(L) = \{f(\bar{u}_1), \dots, f(\bar{u}_n)\}$ es sistema de generadores de $f(E)$.
- e) Si $L = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ es un sistema ligado de E , entonces:
 $f(L) = \{f(\bar{u}_1), \dots, f(\bar{u}_n)\}$ es sistema ligado de $f(E)$.

Imagen de una aplicación lineal:

Dada una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$, el conjunto $f(E) \subset F$ que es también espacio vectorial, se llama **imagen** de f . Se denomina $Im(f) = f(E)$.

La aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ será sobreyectiva si $f(E) = F$.

Los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ generan a E , los vectores $f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2), \dots, f(\bar{v}_n) \in F$ generan $Im(f)$. Supongamos que $\bar{u} \in Im(f)$; entonces $f(\bar{v}) = \bar{u}$ para algún vector $\bar{v} \in E$. Como los \bar{v}_i generan a E y $\bar{v} \in E$, existen escalares a_1, a_2, \dots, a_n tales que $\bar{v} = a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n$. En consecuencia,

$$\bar{u} = f(\bar{v}) = f(a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n) = a_1 f(\bar{v}_1) + a_2 f(\bar{v}_2) + \dots + a_n f(\bar{v}_n)$$

y por tanto los vectores $f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2), \dots, f(\bar{v}_n)$ generan a $Im(f)$.

Para la aplicación lineal definida: $F(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$

Para que el vector $(1, -4)$ pertenezca a $Im(f)$, ha de ser $f(x, y) = (1, -4)$, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -8x + 4y = -4 \end{array} \right\} y = 2x - 1$$

Los vectores $(x, 2x-1)$ se aplican en $(1, -4)$. El vector dado pertenece a $Im(f)$.

Núcleo de una aplicación lineal:

Dada una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$, se llama **Núcleo** de f , y se denota $K_{er}(f)$ o bien $N(f)$, el conjunto de vectores de E que se aplican en el vector nulo de F . Es decir, es la imagen inversa del vector nulo de F .

$$N(f) = \{ \bar{x} \in E, \text{ tal que } f(\bar{x}) = \bar{0} \} = f^{-1}(\bar{0})$$

$N(f)$ es subespacio vectorial de E , y se verifica:

$$\dim(N(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim E$$

Tienen que existir (x, y) tales que $f(x, y) = (0, 0)$

Para la aplicación lineal definida: $f(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$

El vector $(5, 10)$ pertenece al núcleo, pues

$$f(5, 10) = (2 \cdot 5 - 10, -8 \cdot 5 + 4 \cdot 10) = (0, 0)$$

Ejemplo:

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$

Se trata de hallar una base y la dimensión de: 1) la imagen U de f y 2) el núcleo W de f .

Solución:

1) Las imágenes de los siguientes generadores de \mathbb{R}^4 generan la imagen U de f :

$$f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

$$f(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$f(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3)$$

$$f(0, 0, 0, 1) = (1, -1, -3)$$

Formamos la matriz cuyas filas son los generadores de U y la reducimos por filas a la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$ es una base de U ; por tanto $\dim U = 2$.

2) Buscamos el conjunto de los (x, y, s, t) tales que $f(x, y, s, t) = (0, 0, 0, 0)$, esto es

$$f(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t) = (0, 0, 0)$$

Igualando las componentes correspondientes, forman el siguiente sistema homogéneo cuyo espacio solución es el núcleo W de f .

$$\begin{cases} x - y + s + t = 0 \\ x + 2s - t = 0 \\ x + y + 3s - 3t = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x - y + s + t = 0 \\ y + s - 2t = 0 \\ 2y + 2s - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\text{ó} \quad \begin{cases} x - y + s + t = 0 \\ y + s - 2t = 0 \end{cases}$$

Las variables libres son s y t ; luego $\dim W = 2$. Hacemos

a) $s = -1, t = 0$ para obtener la solución $(2, 1, -1, 0)$,

b) $s = 0, t = 1$ para obtener la solución $(1, 2, 0, 1)$.

Luego $\{(2, 1, -1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ es una base de W . (Obsérvese que $\dim U + \dim W = 2 + 2 = 4$, que es la dimensión del dominio \mathbb{R}^4 de f .)

Ejemplo:

Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

Se trata de hallar una base y la dimensión de: 1) la imagen U de f y 2) el núcleo W de f .

1) Las imágenes de los generadores de \mathbb{R}^3 generan la imagen U de f :

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (2, 1, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (-1, 1, -2)$$

Formamos la matriz cuyas filas son los generadores de U y la reducimos por filas a la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ a } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ a } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ es una base de U , y, por tanto $\dim U = 2$.

2) Buscamos el conjunto de los (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, esto es,

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z) = (0, 0, 0)$$

Igualando las componentes correspondientes formamos el sistema homogéneo cuyo espacio solución es el núcleo W de f .

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{ó} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

La única variable libre es z ; luego $\dim W = 1$. Sea $z = 1$; entonces $y = -1$ y $x = 3$. Luego $\{(3, -1, 1)\}$ es una base de W . (Obsérvese que $\dim U + \dim W = 2 + 1 = 3$, que es la dimensión del dominio \mathbb{R}^3 de f .)

Determinación de una aplicación lineal. Matriz:

Una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ queda determinada conociendo las imágenes de los elementos de una base de E .

Sea n la dimensión del espacio vectorial E , y sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ una base de E .

Sea m la dimensión del espacio vectorial F , y sea $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ una base de F .

Una aplicación lineal queda determinada conociendo $f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n)$, es decir, las imágenes por f de los vectores de la base de E .

Si $\bar{u} \in E$ tiene de coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) en la base B y su imagen $f(\bar{u})$ tiene de coordenadas (y_1, y_2, \dots, y_m) en la base B' .

Se verifica la siguiente **ecuación matricial**:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; Y = AX$$

donde las columnas de la matriz A son las coordenadas de los vectores $f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n)$ en la base B' de F .

Así:

$$f(\bar{e}_1) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}) \text{ en la base } B'$$

...

$$f(\bar{e}_n) = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}) \text{ en la base } B'$$

La expresión matricial puede resumirse:

$$Y_{B'} = M_{(f, B, B')} X_B$$

y se llama **expresión matricial de f** en las bases B y B' .

Conocida $M_{(f, B, B')}$ queda determinada la aplicación, y elegidas previamente las bases, cada matriz determina una aplicación lineal, esa matriz se llama **matriz de f en las bases B y B'** .

Las ecuaciones deducidas al resolver la expresión matricial de f , se llaman **ecuaciones de f** .

Ejemplo 1:

Hallar una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, cuya imagen es generada por $(1, 2, 0, -4)$ y $(2, 0, -1, -3)$.

Método 1. Consideremos la base usual de \mathbb{R}^3 : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Hacemos $f(e_1) = (1, 2, 0, -4)$, $f(e_2) = (2, 0, -1, -3)$ y $f(e_3) = (0, 0, 0, 0)$. La aplicación lineal f existe y es única, además la imagen de f es generada por los $f(e_i)$. Hallamos un formula general para $f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(1, 2, 0, -4) + y(2, 0, -1, -3) + z(0, 0, 0, 0) \\ &= (x + 2y, 2x, -y, -4x - 3y) \end{aligned}$$

Método 2. Formamos una matriz $A_{4 \times 3}$, cuyas columnas son los vectores dados, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Recordamos que A determina una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ cuya imagen es generada por las columnas de A . Luego A satisface las condiciones requeridas.

Ejemplo 2:

Hallar el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1, 0, 0, 0) = (1, -1, 2)$$

$$f(0, 1, 0, 0) = (2, 1, 1)$$

$$f(0, 0, 1, 0) = (4, -1, 5)$$

$$f(0, 0, 0, 1) = (-1, -5, 4)$$

En concreto, se piden sendas bases del núcleo y la imagen.

Resolución:

Respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^4 y \mathbb{R}^3 , la ecuación matricial, $Y = AX$, de la aplicación lineal es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

El núcleo lo forman las soluciones de $f(\bar{x}) = \bar{0}$, que si se usan coordenadas se pone en la forma $AX = 0$. Para resolver este sistema lineal homogéneo, realizando operaciones elementales en las filas de su matriz A , se obtienen sucesivamente las matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, los vectores del núcleo son los que cumplen (para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -2\alpha - 3\beta \\ x_2 = -\alpha + 2\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{array} \right\} \text{ luego}$$

$(-2, -1, 1, 0)$ y $(-3, 2, 0, 1)$ forman una base de $N(f)$.

La imagen es el espacio de \mathbb{R}^3 que engendran las cuatro columnas de A . Realizando operaciones elementales en las columnas de A se obtienen sistemas de columnas equivalentes al dado; al proceder de este modo, se obtiene sucesivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, los dos vectores columna no nulos de la última matriz, generan la imagen y, como son independientes, son base de ella; esto es:

$(1, 1, 0)$ y $(0, 1, -1)$ forman una base de $Im(f)$.

Ej.- Obtener una base del espacio vectorial solución del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & -1 & a \\ b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 0y + 0z + 0t = 0$$

$$x + 0y - 1z + at = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x, y, z, t) = (0, y, 0, 0)$$

$$3x + 0y - 1z + at = 0 \quad t = 0$$

$$bx + 0y + 0z + 1t = 0 \quad z = 0$$

La solución es $\langle (0, 1, 0, 0) \rangle$ que es base del espacio vectorial formado por las soluciones.

Rango de una aplicación lineal

Se llama **rango de una aplicación lineal** $f: E \rightarrow F$ la dimensión del espacio vectorial imagen. Se denota $rg(f)$.

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(f(E))$$

Propiedad: El $rg(f)$ coincide con el rango de la matriz asociada a f en cualquier base:

$$rg(f) = rg(M_f)$$

Aplicaciones lineales inyectivas

Las aplicaciones lineales inyectivas son de especial interés.

1. Una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ es inyectiva si, y solo si, su núcleo contiene sólo el vector nulo. Es decir:

$$f: E \rightarrow F, f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow N(f) = \{ \bar{0} \}$$

2. Una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ es inyectiva si, y solo si, un sistema libre de E se aplica en un sistema libre de F . Es decir, si la imagen de una base de E es una base de $f(E)$.

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow [B \text{ base de } E \Rightarrow f(B) \text{ base de } f(E)]$$

3. Si E tiene dimensión finita, entonces f es inyectiva si y solo si $\dim E = \dim f(E)$ o también $rg(M_f) = \dim E$.

Ejemplo:

La aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida mediante

$$f(x, y, z) = (x, x + y, y + z, x + y + z)$$

es inyectiva ya que las imágenes de los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 son los vectores:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (0, 1, 1, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1)$$

que forman una base de la imagen, ya que son linealmente independientes.

La inyectividad de f también se podía haber comprobado viendo que $N(f) = 0$; así es, ya que:

$$N(f): \begin{cases} x &= 0 \\ x + y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow N(f): \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N(f) = 0$$

Isomorfismos

Cuando se dispone de una aplicación lineal, entre dos espacios vectoriales E y F , que además es biyectiva, puede considerarse que E y F son iguales, se pueden identificar. Desde el punto de vista de los espacios vectoriales, no hay nada que permita diferenciar a E de F . Estas aplicaciones lineales y biyectivas se llaman isomorfismos. Un isomorfismo $f: E \rightarrow F$, de un espacio en sí mismo, recibe el nombre de automorfismo.

1. La composición de dos isomorfismos es, también, un isomorfismo.
2. Una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ es isomorfismo si y sólo si:

$$Im(f) = F \text{ y } N(f) = 0$$

3. Si E tiene dimensión finita, una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ es un isomorfismo si y sólo si:

$$dim E = dim f(E) = dim F$$

4. Si E tiene dimensión finita, una aplicación lineal $f: E \rightarrow E$ es un automorfismo si y sólo si es inyectiva o sobreyectiva.
5. Si $f: E \rightarrow F$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1}: F \rightarrow E$ también es un isomorfismo.
6. Dos espacios vectoriales de dimensión finita (sobre el mismo cuerpo K) son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

Ejemplo 1:

El espacio vectorial \mathbb{R}^n es isomorfo al espacio vectorial V de los polinomios de grado menor que n . Un isomorfismo entre ellos lo es la aplicación $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}) = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$.

Ejemplo 2:

Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y considérese la aplicación lineal $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a + b - 2c, 2a + b + c, 2a + 3b + hc)$$

Hallar $h \in \mathbb{R}$ para que f no sea un isomorfismo. Para dicho valor de h , hallar una base de la imagen $Im(f)$.

Solución:

El valor buscado de h es aquel que hace singular a la matriz A de f (en la base usual de V y en la canónica de \mathbb{R}^3); realizando, pues, operaciones elementales en las columnas de A , se tiene sucesivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & h \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & h+4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & h+9 \end{bmatrix}$$

La matriz A es singular para $h = -9$. Para este valor, el rango de A vale 2, la dimensión de $Im(f)$ es 2 y una base de este espacio la forman las dos columnas no nulas de la última matriz, es decir, los vectores $(1, 2, 2)$ y $(0, 1, -1)$ de \mathbb{R}^3 .

Caracterización de endomorfismos biyectivos:

Las aplicaciones lineales $f: E \rightarrow E$ son endomorfismos. La matriz de f en una base será cuadrada.

Si el endomorfismo es biyectivo el rango de la matriz será la dimensión de E , es decir, su determinante será distinto de cero

$$f: E \rightarrow E \text{ biyectivo} \Leftrightarrow |M_f| \neq 0$$

Conjunto de las aplicaciones lineales entre dos espacios E y F

El conjunto de todas las aplicaciones lineales entre E y F , espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K , se denota $\mathcal{L}(E, F)$.

Si f, g son dos aplicaciones lineales entre E y F ; $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, se define:

Aplicación suma de f y g , a la aplicación $f + g: E \rightarrow F$ tal que:

$$\forall \bar{u} \in E; (f + g)(\bar{u}) = f(\bar{u}) + g(\bar{u})$$

La suma así definida es interna:

$$(f + g) \in \mathcal{L}(E, F)$$

Si B y B' son dos bases de E y F respectivamente, y $M_{(f, B, B')}$ y $M_{(g, B, B')}$ son las matrices de f y g en esas bases, se verifica:

$$M_{(f+g, B, B')} = M_{(f, B, B')} + M_{(g, B, B')}$$

Aplicación producto por un escalar. Si $\alpha \in K$ y $f \in \mathcal{L}(E, F)$, se define aplicación $\alpha f: E \rightarrow F$ la aplicación tal que, $\forall \bar{u} \in E, (\alpha f)\bar{u} = \alpha f(\bar{u})$.

La aplicación αf es aplicación lineal, y se verifica:

$$M_{(\alpha f, B, B')} = \alpha M_{(f, B, B')}$$

El conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ con las operaciones suma y producto por un escalar es un K -espacio vectorial.

El anillo $\mathcal{L}(E)$ de los endomorfismos de E :

En el conjunto $\mathcal{L}(E)$ de las aplicaciones lineales sobre E , además de las operaciones suma y producto por un escalar, es posible definir otra operación interna, el producto, que será la propia composición de aplicaciones.

Dados $f: E \rightarrow E$ y $g: E \rightarrow E$ endomorfismos en E , se llama **producto** de f y g la aplicación $g \circ f: E \rightarrow E$

$$\forall \bar{u} \in E; (g \circ f)(\bar{u}) = g(f(\bar{u}))$$

La aplicación así definida es aplicación lineal; $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

Si B es una base de E , se verifica la relación entre matrices:

$$M_{(g \circ f, B)} = M_{(g, B)} \cdot M_{(f, B)}$$

El conjunto $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ es anillo unitario.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ tiene aplicación inversa f^{-1} , también $f^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ y su matriz

$$M_{(f^{-1}, B)} = M_{(f, B)}^{-1}$$

Matrices asociadas a un endomorfismo en dos bases distintas

Sea E un K -espacio vectorial de dimensión n y sean:

$$B_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}; B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$$

bases de E , donde los vectores de B_2 en B_1 son:

$$\bar{v}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$$

.....

$$\bar{v}_n = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$$

Sea una aplicación lineal $f: E \rightarrow E$ de matrices $M_{(f, B_1)}$ y $M_{(f, B_2)}$ en las bases B_1 y B_2 respectivamente.

La relación existente entre ambas matrices es:

$$M_{(f, B_2)} = C^{-1} \cdot M_{(f, B_1)} \cdot C$$

donde C = Matriz de cambio de base

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = M_{(B_2, B_1)}$$

la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B_2 expresados en B_1 .

Recordando que

$$M_{(B_2, B_1)} = M_{(B_1, B_2)}^{-1}$$

la expresión $M_{(f, B_2)} = C^{-1} \cdot M_{(f, B_1)} \cdot C$ quedará

$$M_{(f, B_2)} = M_{(B_1, B_2)} \cdot M_{(f, B_1)} \cdot M_{(B_1, B_2)}^{-1}$$

Capítulo 5. Sistemas de ecuaciones lineales

Conocimientos Previos:

- **Vectores linealmente independientes:** Un conjunto de vectores es **linealmente independiente** cuando ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.
- **Sistemas generadores de vectores:** Dado un conjunto de vectores de un espacio vectorial V , se llama subespacio **engendrado por dicho sistema** y se representa por $C(S)$, al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de S . El conjunto S es el generador del subespacio $C(S)$.
- **Vectores base:** Vectores que forman parte de la base.
- **Dimensión de un espacio vectorial:** el número de vectores de cualquiera de sus bases.
- **Base de un espacio vectorial:** Se dice que un sistema de vectores B es una **base** de V si es un sistema linealmente independiente de generadores de V .
- **Teorema de la Base:** *(Véase página 6 Unidad Didáctica I)*
- **Coordenadas de un vector respecto a la base:** Dado un vector como combinación lineal de los que forman la base, sus coordenadas serán los escalares que forman parte de la combinación lineal. Siendo la base u_1, u_2 , α, β serán las coordenadas del vector u , siendo $v = \alpha u_1 + \beta u_2$.

Clasificación de Sistemas:

Definiciones

Se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

en las que a_{ij} y b_i son escalares de un cuerpo K_i y x_1, x_2, \dots, x_n son las incógnitas.

Se llama **solución** del sistema la n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de elementos de K , tales que sustituidos en (x_1, x_2, \dots, x_n) verifican todas las ecuaciones. Un sistema de ecuaciones lineales en el que $b_i = 0$ se llama **homogéneo**.

Enfoque vectorial

Un sistema de ecuaciones tal como el del apartado 1, puede expresarse en forma matricial:

$$AX = B$$

donde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por tanto, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas puede interpretarse como la expresión de una aplicación lineal:

$$f: E \rightarrow F, \text{ de matriz asociada } A$$

donde E es un K -espacio vectorial de dimensión n y F un K -espacio vectorial de dimensión m y tal que la búsqueda de soluciones equivale a hallar vectores

$$\bar{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$$

que se aplican en el vector $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in F$.

La discusión del sistema puede realizarse según que \bar{b} pertenezca o no al conjunto $Im(f)$, de la siguiente forma:

- a) $\bar{b} \notin Im(f)$. En este caso no existe $\bar{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $f(\bar{u}) = \bar{b}$. El sistema no tiene solución (**sistema incompatible**).
- b) $\bar{b} \in Im(f)$. Existen vectores \bar{u} tales que $f(\bar{u}) = \bar{b}$. El sistema tiene solución (**sistema compatible**).

Cabe ahora investigar si la solución es o no única (sistema **determinado** o **indeterminado**, respectivamente).

En el caso particular de un sistema homogéneo ($AX = 0$), la búsqueda de soluciones equivale al cálculo del $N(f)$, es decir, el núcleo de la aplicación lineal de matriz A . En este caso, al ser $N(f) \neq 0$, un sistema homogéneo tiene al menos la solución $\bar{u} = (0, 0, \dots, 0)$. El problema de interés ahora es buscar si existen o no más soluciones, lo que equivale a analizar si la aplicación es o no inyectiva.

Equivalencia de sistemas

Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen los mismos sistemas de soluciones.

Proposición: Sea un sistema de ecuaciones lineales de matriz A . Si en A se efectúan operaciones elementales con las filas, la matriz obtenida corresponde a un sistema de ecuaciones equivalente al primero.

Teorema de Rouché-Frobenius. Análisis de las soluciones

Teorema de Rouché-Frobenius

Empleando notación matricial $AX = B$ para un sistema de ecuaciones lineales, se verifica:

La condición necesaria y suficiente para que el sistema $AX = B$ sea compatible es que coincidan los rangos de la matriz A y de la matriz $A|B$ que resulta de ampliar A con la columna matriz de los términos independientes B . Es decir,

$$\text{Sistema } AX = B \text{ compatible} \Leftrightarrow r(A) = r(A|B)$$

Consecuencias: Si n = número de incógnitas del sistema, y el sistema es compatible:

I) Si $r(A) = r(A|B) = n$ el sistema es **determinado**.

II) Si $r(A) = r(A|B) < n$ el sistema es **indeterminado**.

En el caso de sistema homogéneo ($AX = 0$), al ser $r(A) = r(A|0)$ es sistema es compatible. Será:

I) $= n$ **determinado** (solución única $\bar{u} = (0, 0, \dots, 0)$).

II) $< n$ **indeterminado**.

Dado $Ax = b$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, tiene solución si:

rango A = rango $A^* = n^\circ$ de incógnitas (n) S. C. DETERMINADO

rango A = rango $A^* < n^\circ$ de incógnitas (n) S. C. INDETERMINADO

rango $A < \text{rango } A^*$ S. INCOMPATIBLE

Ejemplos:

Discutir, sin resolver, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 13 \end{array} \right\} & \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - y = 8 \\ x + 3y = 2 \end{array} \right\} & \text{c)} \quad \left. \begin{array}{l} 6x - 2y = -10 \\ 3x - y = -5 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 13 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 2 & 4 & : & 13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rango}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; \text{rango}(A) = 1.$$

$$\text{rango}(A:b) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 13 - 10 = 3 \neq 0; \text{rango}(A:b) = 2.$$

Puesto que $\text{rango}(A) = 1 \neq \text{rango}(A:b) = 2$, el sistema es incompatible; no existe ninguna solución.

$$\text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - y = 8 \\ x + 3y = 2 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A:b) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & : & 8 \\ 1 & 3 & : & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rango}(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 1 = 10 \neq 0, \text{rango}(A) = 2.$$

$$\text{rango}(A:b) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2 \neq 0, \text{rango}(A:b) = 2.$$

Ya que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A:b) = 2 = \text{número de incógnitas}$, el sistema es compatible y determinado; es decir, existe una única solución.

$$\text{c)} \quad \left. \begin{array}{l} 6x - 2y = -10 \\ 3x - y = -5 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A:b) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & : & -10 \\ 3 & -1 & : & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rango}(A) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0, \text{ rango}(A) = 1.$$

$$\text{rango}(A:b) = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0, \text{ de momento, } \text{rango}(A:b) = 1.$$

$$\text{rango}(A:b) = \begin{vmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0, \text{ rango}(A:b) = 1.$$

Puesto que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A:b) = 1 < \text{número de incógnitas}$, el sistema es compatible e indeterminado; existen infinitas soluciones.

Métodos de resolución. Método de Gauss

Resolución de ecuaciones lineales

Se presentan algunos métodos de interés:

a) Método general

Sea el sistema $AX = B$ de m ecuaciones con n incógnitas, compatible. Si $r = r(A)$, existe una submatriz cuadrada de orden r obtenida de A , cuyo determinante es distinto de cero. Suponiendo que sea la matriz correspondiente a las r primeras filas y r primeras columnas (si no fuese así, se intercambiarían ecuaciones para ponerlas de esta forma).

En ese supuesto, el sistema dado es equivalente al siguiente:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n)$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n)$$

.....

$$a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{r\ r+1}x_{r+1} + \dots + a_{r\ n}x_n)$$

donde se han pasado al segundo miembro las incógnitas que no intervienen en la matriz regular de orden r , y se han eliminado las ecuaciones que tampoco intervienen en la misma matriz.

Este nuevo sistema, llamando parámetros a las incógnitas x_{r+1}, \dots, x_n , es determinado. Se resolvería por cualquiera de los métodos clásicos de reducción o eliminación.

b) Sistema de Cramer

Un sistema de ecuaciones se dice de **Cramer** si tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y la matriz del sistema es regular.

Un sistema determinado puede reducirse a uno de Cramer siguiendo el procedimiento general indicado en el apartado anterior.

Dado un sistema de Cramer $AX = B$, con A regular, su solución es única:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde A_i es la matriz que resulta de sustituir en A la columna i por el vector columna B de los términos independientes.

Dado un sistema **COMPATIBLE DETERMINADO**, tenemos que:

Su expresion matricial es $A X = B$ y al ser $\text{rg } A = n \Rightarrow |A| \neq 0$ y además A tiene inversa A^{-1} . Así pues:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = (1/|A| \cdot A^t) \cdot B \Rightarrow \\ \Rightarrow x_i = 1/|A| \cdot (A_{1i} b_1 + A_{2i} b_2 + \dots + A_{ni} b_n)$$

De donde obtenemos la Regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3, \dots, C_n)}{\det |A|}, x_2 = \frac{\det(C_1, B, C_3, \dots, C_n)}{\det |A|}, \dots, x_n = \frac{\det(C_1, C_2, C_3, \dots, B)}{\det |A|}$$

$$\text{Ej.- Resolver el sistema } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \end{array} \right\} \text{ por Cramer}$$

Cambiamos z por λ y pasamos λ a la derecha

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ x - y = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & (1-\lambda) \\ 1 & -1 & (3-3\lambda) \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema por Cramer y obtenemos:

$$x = -2\lambda + 2 \text{ de modo que la solución es } \{(-2\lambda + 2, -1 + \lambda, \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$$

$$\{(2, -1, 0) + (-2\lambda, \lambda, \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$y = -1 + \lambda$$

y por ultimo extrayendo λ tenemos que las infinitas soluciones del sistema son:

$$\{(2, -1, 0) + (-2, 1, 1) \cdot \lambda\}$$

Ejercicio: cálculo de las incógnitas en un sistema de ecuaciones lineales

Discutir y calcular el valor de las incógnitas de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x + 3y + 2z = -5 \end{array} \right.$$

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A:b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & : & 4 \\ 2 & -1 & 2 & : & 3 \\ 1 & 3 & 2 & : & -5 \end{pmatrix}$$

Calculamos a continuación el rango de A y el rango de la matriz ampliada $(A:b)$:

El rango de la matriz A será:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0, \text{ rango } (A) \geq 2.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 6 - 1 - 8 - 18 = -23 \neq 0, \text{ rango } (A) = 3.$$

El rango de la matriz ampliada $(A:b)$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 6 + 24 + 4 - 20 - 27 = -28 \neq 0, \text{ rango } (A:b) = 3.$$

Dado que $\text{rango } (A) = \text{rango } (A:b) = 3 = \text{número de incógnitas}$, el sistema es compatible y determinado; tiene, pues, una única solución. Resolvamos el sistema mediante la regla de Cramer:

Calculamos el $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 6 - 1 - 8 - 18 = -23.$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-8 - 20 - 9 + 5 - 12 - 24}{-23} = \frac{-68}{-23} = 68/23.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{18 + 8 + 10 + 3 - 16 + 30}{-23} = \frac{53}{-23} = -53/23.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{15 + 6 + 24 + 4 + 20 - 27}{-23} = \frac{42}{-23} = -42/23.$$

$$x = 68/23; y = -53/23; z = -42/23.$$

c) Método de Gauss

Es un método de fácil programación y por tanto de sencilla resolución con ayuda informática.

La idea del método es aplicar a la matriz ampliada $A|B$ del sistema, transformaciones elementales de las filas hasta conseguir una matriz A triangular, cuyo sistema asociado es fácilmente resoluble.

Ej.- Resolvemos el sistema anterior por Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} e_1 - e_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} 3 \cdot e_1 - e_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} e_3 - e_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$\text{Solución: } < (x, -x, 0) >; x \in \mathbb{R}$$

d) Método de la matriz inversa

Expresado el sistema en su forma matricial $AX = B$, podemos multiplicar ambos términos de la igualdad por A^{-1} , resultando $A^{-1}AX = A^{-1}B$, o lo que es lo mismo, $IX = A^{-1}B$, luego $X = A^{-1}B$, que nos da la solución del sistema, calculando la inversa de la matriz de los coeficientes y multiplicándola por la matriz de los términos independientes.

Sistemas homogéneos

Sistema homogéneo asociado

Dado un sistema lineal de ecuaciones $AX = B$, se denomina sistema homogéneo asociado al resultante de hacer cero la matriz de términos independientes $AX = 0$.

Supóngase que x_1 y x_2 son soluciones del sistema no homogéneo. Entonces su diferencia, $x_1 - x_2$, es una solución del sistema homogéneo asociado.

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = B - B = 0$$

Sean x e y dos soluciones particulares del sistema no homogéneo, entonces existe una solución h del sistema homogéneo asociado tal que $y = x + h$. (Siendo x e y soluciones del sistema no homogéneo, entonces $h = y - x$ es solución del sistema homogéneo asociado y por tanto $y = x + h$)

Para hallar todas las soluciones de un sistema no homogéneo, basta con hallar **una** solución y todas las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Ej.- Resolver el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Primero eliminamos la segunda ecuación porque es proporcional a la primera.

Hallamos el determinante de A para saber el rango

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{rg}(A) < 3$$

Como $C1 = C2$ el rango es dos. Y al ser homogéneo $\text{Rg } A = \text{Rg } A^ = 2 < n$. incognitas \Rightarrow S.C.I*

Si resolvemos el sistema por igualación tenemos $x = -y$ y por lo que la solución es $\{ (x, -x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$

O lo que es lo mismo $\{ (1, -1, 0) \} = \text{Ker}(f)$ si tomamos el sistema como la aplicación f .

Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial

El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial (es el núcleo de una aplicación). Las ecuaciones de dicho sistema se llaman ecuaciones implícitas o no paramétricas del subespacio vectorial solución.

En el caso de que el sistema tenga infinitas soluciones, dichas soluciones, en función de los parámetros correspondientes, se llaman ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial.

Al ser el número de parámetros a utilizar en la resolución del sistema $AX = 0$, igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz A , se verifica la siguiente relación:

Dimensión del subespacio = Número de incógnitas – Número de ecuaciones independientes.

Cálculo de las ecuaciones de un subespacio vectorial

Las ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial, y el paso de un tipo a otro de ecuaciones se efectúa de la siguiente manera:

a) Conocidas las ecuaciones implícitas; $AX = 0$

Se halla el rango de la matriz A , que sería el número de ecuaciones independientes.

Se resuelve el sistema. Esa solución en función de parámetros serán las ecuaciones paramétricas.

b) Conocidas las ecuaciones paramétricas del subespacio

Se eliminan los parámetros hasta obtener un número de ecuaciones independientes igual al número de incógnitas menos el número de parámetros.

Variedades lineales vectoriales

Introducción

Al trabajar con subespacios vectoriales se suelen encontrar expresiones del tipo:

$$L = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$$

Esta expresión significa que L es el subconjunto de los vectores de \mathbb{R}^3 cuyas coordenadas verifican la relación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$; a esta fórmula la llamamos **ecuaciones implícitas del subespacio vectorial**. Resulta menos frecuente pero es así mismo muy interesante ver expresiones de un subespacio vectorial escrito de la siguiente forma:

$$L = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 1) \}$$

o lo que es lo mismo:

$$L = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = \lambda, x_2 = \lambda + \mu, x_3 = \mu \}$$

esta última expresión constituye las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial L . Es interesante observar que la última de las tres expresiones se dedujo de la segunda, desarrollando la igualdad vectorial y que dicha expresión quiere decir que cualquier

vector de L se puede escribir como combinación lineal de dos vectores de \mathbb{R}^3 notables, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$ que pertenecen a L y tienen la propiedad de que a la vez de ser generadores de L , son linealmente independientes por lo que constituyen una base de L . Por tanto,

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

son una base de L y la expresión

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 1)$$

es la ecuación que expresa el conjunto de todos los vectores de L para los diferentes valores de los parámetros λ y μ . Es obvio pues que la dimensión de ese espacio es de dos y que el número de parámetros utilizados en la expresión es dos y que a su vez, considerada la ecuación implícita del subespacio como un sistema de ecuaciones lineales homogéneas de una ecuación con tres incógnitas, su rango será uno y, por tanto, el número de incógnitas a determinar serán dos, que es la diferencia entre el número de incógnitas, tres en este caso, y el rango de la matriz, uno en esta ocasión.

Variedades lineales

Hemos considerado hasta ahora el espacio vectorial \mathbb{R}^n como el conjunto de las n -uplas con números reales de la forma (x_1, x_2, \dots, x_n) con $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. A este espacio tan notable como útil le llamaremos V_n y escribiremos $V_n = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

A los subespacios vectoriales de V_n les llamaremos **variedades lineales**. Cuando $n = 2$ nos queremos referir al plano vectorial V_2 , cuando $n = 3$, llamaremos a V_3 *el espacio vectorial* o espacio, para no interferir con el concepto genérico.

Es evidente que V_2 y V_3 tienen dimensiones 2 y 3 respectivamente por lo que pueden darse las siguientes situaciones:

En el plano V_2 , consideremos $L \subset V_2$ una variedad lineal propia (es decir, $L \neq V_2$), entonces:

— Si $\dim L = 0$, $L = \{\bar{0}\}$.

— Si $\dim L = 1$, L es una **recta vectorial** del plano V_2 .

En el plano V_3 , consideremos $L \subset V_3$ una variedad lineal propia, entonces:

— Si $\dim L = 0$, $L = \{\bar{0}\}$.

— Si $\dim L = 1$, L es una **recta vectorial** del espacio V_3 .

— Si $\dim L = 2$, L es un **plano vectorial** del espacio V_3 .

Dada una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de V_2 . Si L es una recta vectorial del plano V_2 y $\bar{v} \in L$ con $\bar{v} \neq \bar{0}$, entonces cualquier vector de L es de la forma $\lambda\bar{v}$ para todo λ que pertenece a \mathbb{R} .

Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base de V_3

a) Si L es una recta vectorial del espacio V_3 y $\bar{v} \in L$ con $\bar{v} \neq \bar{0}$, se tiene que $\bar{u} = \lambda\bar{v}$ para cualquier λ que pertenece a \mathbb{R} .

b) Si L es un plano vectorial y $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in L$ son linealmente independientes, se tiene que $\bar{u} = \alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2$ para cualquier pareja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con n incógnitas es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , de dimensión igual a n menos el rango de la matriz de los coeficientes del sistema.

$$A(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2) = \alpha A\bar{x}_1 + \beta A\bar{x}_2 = \bar{0} \text{ pues } A\bar{x}_1 = \bar{0} \text{ y } A\bar{x}_2 = \bar{0}$$

En efecto, si el rango de la matriz A de los coeficientes del sistema es r , eso significa que existen r ecuaciones del sistema (eventualmente puede coincidir con m) que son linealmente independientes y que podemos escribir:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n$$

$$x_{r+1} = 1, \ x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0$$

$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 1$$

$$x_{r+1} = \lambda_1, x_{r+2} = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_{n-r}$$

Se puede demostrar que recíprocamente, dada una variedad lineal de dimensión r , si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ es una base de la variedad lineal y \bar{x} es un vector de dicha variedad, se verificará:

$$\text{rango } L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}) = r$$

ya que \bar{x} necesariamente tendrá que ser una combinación lineal de los vectores de la base. También podemos escribir:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} & x_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2r} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nr} & x_n \end{bmatrix} = r$$

Donde evidentemente el determinante de las r primeras filas y columnas es no nulo, pues los vectores $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ son linealmente independientes. La condición para que la matriz anterior tenga rango r es que con cada una de las $n - r$ filas restantes obtenemos al primer determinante aludido añadiendo así mismo la última columna y todos los determinantes así obtenidos iguales a uno, llegaremos así a $n - r$ ecuaciones homogéneas que se denominan **ecuaciones cartesianas del subespacio**.

Ejemplo:

Consideremos una variedad lineal L de \mathbb{R}^4 que tiene por base los vectores $(-1, 2, 0, 3)$ y $(1, 3, 1, 0)$, si (x_1, x_2, x_3, x_4) es otro vector de la variedad lineal, será combinación lineal de los vectores de la base, y se verificará:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} -1 & 1 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 3 & 0 & x_4 \end{bmatrix} = 2$$

y además

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por lo tanto, la condición para que el rango de la matriz considerada sea 2, es que los dos menores que resultan de orlar el anterior determinante con las filas tercera y cuarta sean iguales a cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ 3 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando ambos determinantes obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que son las ecuaciones cartesianas de la variedad lineal y quieren decir que si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in L$ tendrán que verificar dichas ecuaciones.

Caracterización de Variedades Lineales mediante ecuaciones paramétricas

Sea un espacio vectorial V de dimensión n y un subespacio L de dimensión r que tiene como base los vectores $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_r\}$ cuyas coordenadas serán:

$$\bar{e}_i = (\bar{e}_{i1}, \bar{e}_{i2}, \dots, \bar{e}_{in}) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

los vectores de la variedad lineal L se caracterizan por que si $\bar{x} \in L$ existirán r escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ tales que $\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_r \bar{e}_r$ ó bien su expresión desarrollada:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -2\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda \end{array} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal.

Métodos de eliminación

Método matricial

Las ecuaciones paramétricas de una variedad lineal son un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$x_1 = x_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

$$x_2 = x_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

.....

$$x_n = x_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

cuya expresión matricial es $A\bar{\lambda} = \bar{x}$, donde

$$\bar{\lambda}^t = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \quad \text{y} \quad \bar{x}^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y A es una matriz $n \times r$. Considerando el sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ con los términos independientes x_1, x_2, \dots, x_n , aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, la condición de compatibilidad resulta ser:

$$rg[A] = rg[A|\bar{x}]$$

siendo $[A|\bar{x}]$ la matriz ampliada de A con los términos independientes \bar{x} . Si $rg[A] = r$, existirá una submatriz $A_{r \times r}$ tal que $|A_{r \times r}| \neq 0$, entonces la condición analítica de la expresión $rg[A|\bar{x}] = r$ la obtendremos obligando a que todos los menores obtenidos orlando a $A_{r \times r}$ con una fila y una columna sean iguales a cero, como podemos adjuntar $n - r$ filas distintas, podemos enunciar:

Si n ecuaciones paramétricas contienen r parámetros, la eliminación de éstos produce $n - r$ ecuaciones cartesianas.

Veamos un ejemplo de este método que es el más seguro. El resto de los procedimientos constituyen artificios de cálculo interesantes y podrán ser usados, cuidando de interpretar correctamente los resultados.

Ejemplo:

Sean las ecuaciones paramétricas:

$$x_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$x_2 = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$x_3 = 2\lambda_1 - \lambda_2$$

$$x_4 = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

Escribiéndolas en forma matricial serán:

$$A\bar{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \bar{x}$$

es evidente que A es de rango 2 y que una submatriz de 2×2 tiene por determinante

$$|A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

luego la condición de compatibilidad será:

$$rg[A] = 2 = rg[A|\bar{x}] = rg \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \\ 1 & 2 & x_4 \end{bmatrix}$$

y eso implica:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrolladas serán:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ecuaciones cartesianas implícitas de la variedad.

Método de igualación

Ejemplo:

Sean las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$x_2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$x_3 = 2\lambda_1 + \lambda_2$$

Despejamos uno de los parámetros, por ejemplo λ_1 , será:

$$\lambda_1 = x_1 + \lambda_2 = x_2 - \lambda_2 = \frac{1}{2}(x_3 - \lambda_2)$$

que podemos escribir:

$$\left. \begin{cases} x_1 + \lambda_2 = x_2 - \lambda_2 \\ x_2 - \lambda_2 = \frac{1}{2}(x_3 - \lambda_2) \end{cases} \right\} \text{ o también } \begin{cases} \lambda_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \lambda_2 = 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

que no contiene λ_1 . Por tanto, igualando ambas expresiones tenemos:

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = 2x_2 - x_3$$

y operando, resulta:

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

que es la ecuación cartesiana implícita de la variedad lineal.

Método de sustitución

Consiste en despejar un parámetro de la primera ecuación e introducirlo en las restantes. Si eran n ecuaciones y r parámetros, tendremos ahora $n - 1$ ecuaciones con $r - 1$ parámetros. Continuando el proceso llegamos a tener $n - r$ ecuaciones sin parámetros. Estas últimas serían las ecuaciones implícitas cartesianas de la variedad.

Método de reducción

Consiste en aplicar el método de Gauss al sistema de ecuaciones en los parámetros, hasta conseguir un nuevo sistema de ecuaciones sin parámetros.

Capítulo 6. Diagonalización de matrices. Formas cuadráticas.

Conocimientos previos:

- **Aplicación lineal**: Dados dos espacios vectoriales E y F sobre el cuerpo K , se llama aplicación lineal u homomorfismo entre E y F , cuando para cualquier par de vectores u, v y todo escalar α se cumple:

$$F(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$F(\alpha u) = \alpha f(u)$$

- **Endomorfismo**: Aplicación de tipo $f: E \rightarrow E$
- **Matriz regular**: Se llaman **matrices singulares** a aquellas cuyo determinante es cero, y **regulares** si es distinto de cero.
- **Relación de Equivalencia. Clases de Equivalencias**:

Matriz simétrica y antisimétrica: Matriz **simétrica** es una matriz cuadrada en la que los elementos situados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales. Matriz **antisimétrica** es una matriz cuadrada que tenga los elementos situados simétricamente respecto de la diagonal principal iguales y con signo contrario, siendo los elementos de ésta nulos.

Diagonalización de Matrices

Introducción

En este capítulo se analizan las expresiones analíticas de un mismo endomorfismo respecto de diferentes bases, en este caso las matrices correspondientes son semejantes entre si, y todas ellas pertenecen a una clase de equivalencia. Se busca que en esta clase exista una matriz diagonal y en su caso la matriz asociada al cambio de base, respecto a la cual la expresión analítica del endomorfismo es diagonal. Como se verá, no siempre todas las matrices de una clase son semejantes a una matriz diagonal. En este capítulo se estudian las condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea diagonalizable.

Valores y vectores propios de una aplicación lineal

Sea $f: V \rightarrow V$ una aplicación lineal sobre el espacio vectorial V . Se define:

Autovalor o **valor propio** de f es todo escalar λ tal que existe un vector $\bar{u} \in V$ no nulo para el que $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$.

Autovector o **vector propio** de f , correspondiente al autovalor λ es todo vector \bar{u} no nulo de V tal que $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$.

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada

Al ser toda matriz cuadrada A representante de una aplicación lineal $f: V \rightarrow V$, se define valor y vector propio de A el valor y vector propio de la aplicación asociada. En forma matricial:

$$\lambda \text{ autovalor de } A \Leftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ tal que } AX = \lambda X$$

$$X \neq 0, X \text{ autovector de } A \Leftrightarrow \exists \lambda \in R \text{ tal que } AX = \lambda X$$

Ecuación característica

Para una matriz cuadrada A , los vectores propios asociados al valor λ , son las soluciones de la ecuación matricial:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

La ecuación: $|A - \lambda I| = 0$ se llama **ecuación característica** de A , sus soluciones son los autovalores de A . El polinomio en λ : $|A - \lambda I|$ se llama **polinomio característico** de A .

Subespacios propios

Para cada autovalor de λ de A , el conjunto X de autovectores asociado se obtiene resolviendo el sistema resultante de la ecuación: $(A - \lambda I)X = 0$. Para cada λ ese conjunto es un subespacio vectorial que se llama **subespacio propio** asociado a λ . Se denota L_λ , y su dimensión es:

$$\dim L_\lambda = n - \text{rg}(A - \lambda I)$$

donde n = orden de A .

Proposición: Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son autovalores de una matriz de orden n , distintos dos a dos, el sistema $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$, donde X_i es vector propio asociado a λ_i , es un sistema libre. Si además $p = n$, el sistema es una base del espacio vectorial V de definición de la aplicación asociada a A .

Semejanza de matrices

Dos matrices A y B son **semejantes** si existe una matriz P regular, tal que:

$$B = P^{-1}AP \quad (P = \text{matriz de paso})$$

Algunas propiedades de interés:

- Si A y B son semejantes $|A| = |B|$.
- Si A y B son semejantes, también lo son A^n y B^n .
- Las matrices asociadas a un endomorfismo en diferentes bases, son semejantes.
- Si A y B son semejantes, tienen la misma ecuación característica y, con ello, los mismos autovalores con el mismo orden de multiplicidad en ella.

Diagonalización de matrices

Una matriz cuadrada A de orden n se dice **diagonalizable** si, y solo si, es semejante a una matriz D diagonal. Es decir, si existe una matriz P , regular, tal que $D = P^{-1}AP$. **Diagonalizar** una matriz es el proceso de encontrar la matriz D diagonal semejante y la matriz P de paso.

Teorema de caracterización de matrices diagonalizables: Una matriz A de orden n , con números reales, es diagonalizable si, y solo si, admite n vectores propios linealmente independientes. Esto sucede cuando:

1. La ecuación característica tiene n raíces reales (iguales o no).
2. El orden de multiplicidad de cada autovalor en la ecuación característica coincide con la dimensión del subespacio propio asociado.

Proceso de diagonalización. Su cálculo

Sea A matriz de orden n diagonalizable. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, son los autovalores con ordenes de multiplicidad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, respectivamente ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n$), entonces la aplicación lineal f , de matriz asociada A , tiene también asociada en una cierta base la matriz diagonal D cuya diagonal principal es

$$(\overbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}^{\alpha_1}, \overbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}^{\alpha_2}, \dots, \overbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}^{\alpha_r})$$

La matriz de paso P es la que tiene por columnas:

Las α_1 primeras, los vectores de una base del subespacio asociado a λ_1 .

Las α_2 siguientes, los vectores de una base del subespacio propio asociado a λ_2 , y así sucesivamente.

Ese conjunto de vectores propios que forman las columnas de P son la base donde f tiene asociada la matriz D .

Este proceso de diagonalización se llama **por semejanza**.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

calcularemos los valores propios, los vectores propios correspondientes, la matriz diagonal y la matriz de paso. La ecuación característica será:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[\lambda^2 - 5\lambda + 4]$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$.

Para calcular los vectores propios correspondientes a cada uno de ellos, tenemos la ecuación matricial $(A - \lambda I) \vec{u} = \vec{0}$, y siendo

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

resultará, para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 - u_3 = 0 \\ -u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 - u_2 = 0 \\ -u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

$u_1 = \delta, u_2 = 2\delta, u_3 = \delta; \forall \delta \in \mathbf{R}$ o bien escribiendo $L_1 = \{(\delta, 2\delta, \delta), \forall \delta \in \mathbf{R}\}$. La base de L_1 será $(1, 2, 1)$.

Para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

$u_1 = \psi, u_2 = 0, u_3 = -\psi; \forall \psi \in \mathbb{R}$ o bien escribiendo $L_2 = \{(\psi, 0, -\psi), \forall \psi \in \mathbb{R}\}$. La base de L_2 será $(1, 0, -1)$.

Para $\lambda_3 = 4$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

$u_1 = \varphi, u_2 = -\varphi, u_3 = \varphi; \forall \varphi \in \mathbb{R}$ o bien escribiendo $L_3 = \{(\varphi, -\varphi, \varphi), \forall \varphi \in \mathbb{R}\}$. La base de L_3 será $(1, -1, 1)$.

La matriz diagonal se compone colocando los autovalores en la diagonal de una matriz, con el resto de los términos igual a 0, y la matriz de paso formando una matriz cuyas columnas son las bases de cada uno de los vectores propios:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para comprobar la corrección de la solución debería verificarse que $D = P^{-1}AP$.

Matrices simétricas

Si la matriz A es simétrica, en la diagonalización existen ciertas características:

- Los autovalores son todos reales.
- Verifican el teorema de caracterización de matrices diagonalizables.
- La base de vectores propios es ortogonal.

Matriz ortogonal

Dividiendo cada vector de la base ortogonal por su módulo se obtiene una base ortonormal (**ortonormalización**). La matriz cuadrada que tiene por columnas (o filas) un sistema ortogonal se llama **Matriz ortogonal** y verifica:

$$A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow A' = A^{-1}$$

Diagonalización ortogonal

Toda matriz real y simétrica es ortogonalmente diagonalizable, es decir:

$$A \text{ simétrica} \Rightarrow \exists P \text{ ortogonal tal que } D = P^{-1}AP \text{ es diagonal}$$

Formas bilineales sobre un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K . Una **forma bilineal** sobre V es una aplicación $f: V \times V \rightarrow K$, tal que:

$$1. f(\alpha \bar{u}_1 + \beta \bar{u}_2, \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}_1, \bar{v}) + \beta f(\bar{u}_2, \bar{v})$$

$$2. f(\bar{u}, \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha f(\bar{u}, \bar{v}_1) + \beta f(\bar{u}, \bar{v}_2)$$

Si el cuerpo $K = \mathbb{R}$ (reales), la forma bilineal se dice real.

Una forma bilineal se dice **simétrica** si $f(\bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{v}, \bar{u})$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$.

Una forma bilineal se dice **alternada** si $f(\bar{u}, \bar{u}) = 0$, $\forall \bar{u} \in V$. (Esta definición es equivalente a: $f(\bar{u}, \bar{v}) = -f(\bar{v}, \bar{u})$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$).

Ejemplo:

La aplicación $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada par de vectores $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$ le asigna el valor

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = 3x_1y_1 - 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2$$

es una forma bilineal sobre \mathbb{R}^2 . Nótese que esta forma bilineal se puede expresar matricialmente poniendo:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Expresión matricial de una forma bilineal

Sea $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal sobre V de dimensión n , y sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ una base de V .

Si $\bar{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son las coordenadas de ambos vectores en la base B , la imagen $f(\bar{u}, \bar{v})$ puede expresarse:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = X^t A Y$$

donde:

X^t = matriz fila de las coordenadas de X en B .

Y = matriz columna de las coordenadas de Y en B .

A = matriz asociada a f en la base B . Cada a_{ij} de A en la base B verifica

$$a_{ij} = f(\bar{e}_i, \bar{e}_j); \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Por tanto, una forma bilineal f en una base B queda determinada conociendo la imagen por f de cada par de vectores de B .

Se dice que A es la *matriz (de Gram) de la forma bilineal f* en la base B . La correspondencia $f \bullet \rightarrow A$ es un isomorfismo del espacio vectorial $\mathcal{B}(V)$, de las formas bilineales sobre el espacio V de dimensión n , en el espacio vectorial M_n , de las matrices cuadradas $n \times n$.

Consecuencia: Una forma bilineal f de matriz asociada A es:

Simétrica si A simétrica

Alternada si A es antisimétrica.

Ejemplo:

Sea $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 6x_1y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$$

La expresión matricial de f en la base canónica de \mathbb{R}^3 es:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X'AY$$

La matriz A' de f en la nueva base $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, donde $\bar{u}_1 = (2, 0, 0)$, $\bar{u}_2 = (1, 2, 0)$ y $\bar{u}_3 = (-3, 1, 1)$, será:

$$A' = \begin{bmatrix} f(\bar{u}_1, \bar{u}_1) & f(\bar{u}_1, \bar{u}_2) & f(\bar{u}_1, \bar{u}_3) \\ f(\bar{u}_2, \bar{u}_1) & f(\bar{u}_2, \bar{u}_2) & f(\bar{u}_2, \bar{u}_3) \\ f(\bar{u}_3, \bar{u}_1) & f(\bar{u}_3, \bar{u}_2) & f(\bar{u}_3, \bar{u}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -6 \\ 8 & -2 & -9 \\ -10 & 21 & 9 \end{bmatrix}$$

Cambio de base en una forma bilineal

Sea $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$; $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$ dos bases de V , tales que:

$$\bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \text{ en } B$$

.....

$$\bar{e}'_n = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \text{ en } B$$

Si A y A' son las matrices de f en las bases B y B' , respectivamente, se verifica:

$$A' = P'AP$$

donde P es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B' expresadas en B . Es decir,

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrices congruentes

Dos matrices A y B cuadradas del mismo orden se dicen congruentes si existe una matriz regular P tal que:

$$A = P'BP$$

Las matrices A y A' de una forma bilineal sobre dos bases diferentes, son congruentes.

Vectores conjugados respecto a una forma bilineal simétrica. Núcleo

Dos vectores \bar{u}, \bar{v} son **conjugados** respecto a una forma bilineal simétrica f , si:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = 0$$

Un vector \bar{u} es **conjugado con un subespacio** S respecto de f si lo es con todos los vectores de S .

$$\bar{u} \text{ conjugado con } S \Leftrightarrow f(\bar{u}, \bar{v}) = 0; \quad \forall \bar{v} \in S$$

Si B es base de S , la anterior definición es equivalente a:

$$\bar{u} \text{ conjugado con } S \Leftrightarrow f(\bar{u}, \bar{v}) = 0; \quad \forall \bar{v} \in B \text{ siendo } B = \text{base de } S$$

Se llama **núcleo** de una forma bilineal simétrica $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, el conjunto de vectores de V conjugados con todos los de V .

$$N(f) = \{ \bar{u} \in V \text{ tal que } f(\bar{u}, \bar{v}) = 0; \quad \forall \bar{v} \in V \}$$

Al ser

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = X^t A Y = 0 \Rightarrow N(f) = \{ Y \text{ tal que } A Y = 0 \}$$

Una forma bilineal simétrica se dice degenerada si $N(f) \neq \{0\}$, es decir, cuando:

$$\text{rg}(A) < n \quad (n = \dim V)$$

Formas cuadráticas

Definición

Sea V un espacio vectorial real y $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal sobre V . Se llama **forma cuadrática** asociada a f , la aplicación $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$q(\bar{u}) = f(\bar{u}, \bar{u}) \text{ para todo } \bar{u} \in V$$

Forma polar asociada a una forma cuadrática

De la definición de forma cuadrática se deduce que existe una sola forma cuadrática asociada a una forma bilineal dada. El recíproco no es cierto, existen diferentes formas bilineales asociadas a una forma cuadrática. De todas ellas una sola es simétrica y se llama **Forma polar** de la forma cuadrática.

Así, si $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, su forma polar está definida:

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} [q(\bar{u} + \bar{v}) - q(\bar{u}) - q(\bar{v})]$$

Propiedades de las formas cuadráticas

Si $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma cuadrática asociada a $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$;

- a) $q(\lambda \bar{u}) = f(\lambda \bar{u}, \lambda \bar{u}) = \lambda^2 f(\bar{u}, \bar{u}) = \lambda^2 q(\bar{u})$
- b) $q(\bar{0}) = 0$
- c) $q(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}) = q(\bar{u}) + q(\bar{v}) + f(\bar{u}, \bar{v}) + f(\bar{v}, \bar{u})$

Formas cuadráticas definidas

En toda forma cuadrática es $q(\vec{0}) = 0$. Ahora bien, podría haber otros vectores $\vec{u} \in V$ tales que $q(\vec{u}) = 0$.

Una forma cuadrática, $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **definida** si

$$q \text{ definida} \Leftrightarrow [q(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}]$$

Expresión matricial de una forma cuadrática

Si $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal de matriz A en una base B , será:

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = X^t A Y$$

La forma cuadrática asociada a f , en la misma base de V será:

$$q(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u}) = X^t A X$$

Ahora bien, al existir diferentes formas bilineales asociadas a q , se define:

Matriz de una forma cuadrática la matriz de su forma polar asociada. Esta matriz será, por lo tanto, simétrica.

Cambio de base en una forma cuadrática

Si $q(\vec{u}) = X^t A X$ es la expresión de una forma cuadrática en la base B , y es P la matriz que expresa en columnas las coordenadas de los vectores de una nueva base B' en B , la expresión de q en B' será:

$$q(\vec{u}) = X^t A X \text{ siendo } A' = P^t A P$$

Las dos matrices A y A' son, por tanto, congruentes.

Por tanto, dos matrices cuadradas del mismo orden son congruentes si lo son de una misma forma cuadrática en dos bases distintas.

Diagonalización de una forma cuadrática

Diagonalizar una forma cuadrática consiste en encontrar una base respecto de la cual la matriz sea diagonal. Su expresión, en esa nueva base, quedará reducida a una suma de cuadrados

$$q(\vec{u}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$$

Proposición: En toda forma cuadrática $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ existe alguna base de V donde la matriz asociada a q es diagonal.

Rango y signatura de una forma cuadrática

El **rango de una forma cuadrática** es el rango de su matriz

$$rg(q) = rg(A)$$

Signatura de una forma cuadrática $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ se llama al par (p, m) donde p es el número de elementos positivos que posee la diagonal de la matriz diagonal asociada a q , y m los negativos. Se designa $sg(q)$ y se verifica:

$$p + m = rg(q)$$

Teorema de Sylvester: El número de elementos positivos que hay en la matriz diagonal de cualquiera de las matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática dada, es el mismo.

Tanto el rango como la signatura de una forma cuadrática son invariantes expresada la forma en cualquier base.

Proceso de diagonalización

Hay diversas formas de diagonalizar una forma cuadrática e incluso la misma matriz asociada diagonal no es única. Las formas distintas son las mismas de la diagonalización de matrices simétricas.

Clasificación de las formas cuadráticas

Sea $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ forma cuadrática, donde $\dim V = n$. La forma cuadrática puede ser:

1. **Definida positiva.** Si $q(\bar{u}) > 0; \forall \bar{u} \in V, \bar{u} \neq 0$.
2. **Definida negativa.** Si $q(\bar{u}) < 0; \forall \bar{u} \in V, \bar{u} \neq 0$.
3. **Semidefinida positiva.** Si $q(\bar{u}) \geq 0; \forall \bar{u} \in V, \exists \bar{u} = 0$ tal que $q(\bar{u}) = 0$.
4. **Semidefinida negativa.** Si $q(\bar{u}) \leq 0; \forall \bar{u} \in V, \exists \bar{u} \neq 0$ tal que $q(\bar{u}) = 0$.
5. **Indefinida.** Si $\exists \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in V$ tal que $q(\bar{u}_1) > 0; q(\bar{u}_2) < 0$.

Una forma cuadrática puede clasificarse haciendo uso de su diagonalización y recordando que tanto el rango como la signatura son invariantes. Así:

1. Definida positiva:

$$sg(q) = (n, 0); \quad rg(q) = n$$

o bien, cuando todos los autovalores son positivos.

2. Definida negativa:

$$sg(q) = (0, n); \quad rg(q) = n$$

o bien, cuando todos los autovalores son negativos.

3. Semidefinida positiva:

$$sg(q) = (r, 0); \quad rg(q) = r < n$$

los autovalores son mayores que cero, con alguno de ellos cero.

4. Semidefinida negativa:

$$sg(q) = (0, r); \quad rg(q) = r < n$$

los autovalores son negativos, con alguno de ellos cero.

5. Indefinida:

Restantes casos. Los autovalores son positivos y negativos.