

ALGEBRA

Unidad Didáctica I.

En ella se introduce el Espacio Vectorial, así como las técnicas y herramientas básicas que se van a utilizar en el resto del curso.

Comienza con el estudio de los espacios vectoriales. Una de las misiones del informático es procesar la información, y los datos son parte de la información. Es mucho mas fácil para su manejo, tener los datos organizados según una estructura que tenga propiedades que permitan soluciones algorítmicas. En álgebra se estudia la estructura matemática.

Capítulo 1. Espacios Vectoriales

Conocimientos previos:

- **Producto cartesiano:**
Dados dos conjuntos **A** y **B**, el conjunto de los pares ordenados de la forma (x, y) con x elemento de **A** e y elemento de **B** forman un tercer conjunto designado **AxB**, que es su producto cartesiano.
- **Correspondencia:**
- **Aplicación:**
Dados dos conjuntos **A** y **B**, una aplicación f de **A** en **B** es una terna formada por $f: (C, A, B)$, donde **C** es un subconjunto del producto cartesiano **AxB** tal que para cada a de **A** existe un único b de **B** tal que (a, b) es elemento de **C**.
 - **Imagen:** Para a elemento de **A**, es el elemento b de **B** que le corresponde por la aplicación.
 - **Aplicación inyectiva:** la aplicación donde los elementos del conjunto imagen poseen a lo sumo una antiimagen.
 - **Aplicación sobreyectiva:** La aplicación, donde cada elemento del conjunto imagen, posee por lo menos una antiimagen.
 - **Aplicación biyectiva:** Aplicación inyectiva, que es a la vez sobreyectiva.
- **Grupo:** Conjunto **G** con una operación $*$ definida en él que verifica:
 1. La operación es *asociativa*: $(a*b)*c=a*(b*c)$ para a, b, c elementos de **G**.
 2. Existe un *elemento neutro* e en **G**, para cualquier a de **G** se verifica $a*e=e*a=a$.
 3. Cada elemento a de **G** posee *simétrico*, existe b tal que $a*b=b*a=e$.

Si la operación definida es además *conmutativa* (para a y b elementos del grupo cualquiera se verifica que $a*b=b*a$) se trata de un *grupo abeliano*.
- **Subgrupo:** Un conjunto **H** de un grupo **G** es un *subgrupo* de **G** si la operación con la que **G** tiene estructura de grupo (*producto* o *suma*) de dos elementos de **H** está en **H** y además es un grupo con la mismo operación que **G**.
- **Anillo:** En un conjunto **A** con dos operaciones en él definidas, suma(+) y producto (.) que verifica:
 1. Es un *grupo abeliano* respecto a la suma.
 2. El producto posee propiedad asociativa

Si la operación producto es *conmutativa*, se trata de un *anillo conmutativo*.

Si existe un *elemento neutro* para el producto llamado *elemento unidad* del anillo, se trata de un *anillo unitario*.

- **Cuerpo:** Un anillo \mathbf{K} , con las operaciones suma y producto, se dice que es un *cuerpo* si:
 1. Es *anillo conmutativo*.
 2. Es *unitario* y su unidad es distinta del *elemento neutro* para la suma (cero).
 3. Todos los elementos distintos del cero poseen *inverso* respecto del producto.

Estructura del espacio vectorial sobre \mathbf{R} .

Vector:

Recordar:

Un vector v es un segmento orientado. Cada vector se simboliza por las coordenadas cartesianas de su extremo (v_1, v_2) , - con origen de coordenadas $(0, 0)$ *vector libre* - en caso de que nos den un vector indicando las coordenadas de su origen y de su extremo, lo reduciremos a su vector libre correspondiente, restando las coordenadas del extremo menos las del origen.

Dirección de un vector es la recta sobre la que se apoya el vector, cada dirección tiene dos **sentidos** (indicado por la punta de la flecha de cada vector).

Módulo de un vector es la longitud de la flecha que lo representa.

$$|v| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots + (v_n)^2} \quad (\text{El módulo de un vector siempre es positivo})$$

Vectores opuestos, son dos vectores con la misma dirección pero diferente sentido.

$$\overrightarrow{\quad u \quad}, \overleftarrow{\quad v \quad},$$

Vectores unitarios, son aquellos cuyo módulo es 1. $[(0, 1), (0, 0, 1), \dots]$

Elemento de un *espacio vectorial*. Dados 2 puntos p y q en el plano, se llama *vector* con origen p y extremo q al segmento orientado que une p y q (pq). Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección, sentido y longitud, el conjunto de vectores iguales (*equipolentes*) forman una *clase*. Se puede escoger un representante que denominaremos \bar{v} .

Operaciones con vectores:

Suma: $\bar{u} + \bar{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.

Producto de un vector y un escalar: $\bar{u} \cdot k = (u_1, u_2) \cdot k = (u_1 k, u_2 k)$.

Espacio vectorial:

(Los elementos de \mathbf{E} se llaman *vectores* y los de \mathbf{K} *escalares*)

Dados un conjunto \mathbf{E} , se dice que tiene estructura de *espacio vectorial* sobre el *cuerpo* \mathbf{K} , $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ si

1. \mathbf{E} es un *grupo abeliano* respecto a la suma.
2. $\forall a, b \in \mathbf{K} \text{ y } \forall u, v \in \mathbf{E}, \mathbf{K} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ y se verifican las propiedades:
 - a) **asociativa de escalares:** $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$
 - b) **elemento neutro de escalares:** $1 \cdot u = u$.
 - c) **Distributiva respecto a la suma de vectores** $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
 - d) **Distributiva respecto a la suma de escalares** $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$

Si \mathbf{K} (cuerpo de escalares) es \mathbf{R} , \mathbf{C} , \mathbf{Q} , el *espacio vectorial* \mathbf{E} se dice, *Real*, *Complejo* o *Racional*, respectivamente.

Son *espacios vectoriales* de interés:

- Todo cuerpo \mathbf{K} es *espacio vectorial* sobre sí mismo.
- El conjunto \mathbf{C} (números complejos) es *espacio vectorial* sobre \mathbf{R} .
- El conjunto *Producto Cartesiano* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ de *espacios vectoriales* sobre \mathbf{K} es *espacio vectorial* sobre el mismo \mathbf{K} , para las operaciones:

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2)$$

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

$\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \dots, \mathbf{R}^n$, son *espacios vectoriales* sobre \mathbf{R} , con esas operaciones.

- El conjunto $\mathbf{Pn}[\mathbf{x}]$ de los polinomios en una variable de grado menor o igual a n y coeficiente en \mathbf{K} es espacio vectorial sobre \mathbf{K} , con las operaciones de suma de polinomios y de producto por un $\alpha \in \mathbf{K}$.

Subespacio vectorial. Sistemas de Generadores.

Subespacio vectorial:

Sea \mathbf{E} un k -espacio vectorial. Toda parte \mathbf{S} no vacía de \mathbf{E} que sea un k -espacio vectorial para las mismas leyes que \mathbf{E} , se llama *subespacio vectorial* de \mathbf{E} .

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto \mathbf{S} de \mathbf{E} sea subespacio vectorial suyo es que se verifique:

- $\forall u, v \in \mathbf{S}; u+v \in \mathbf{S}$.
- $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall u \in \mathbf{S}; \alpha u \in \mathbf{S}$.

Ejemplo.- Comprobación de un subespacio vectorial:

$$\text{Sea } \mathbf{S} = \{(x, 2x, z)\}$$

$$(x, 2x, z) + (x', 2x', z') = [x+x', 2(x+x'), z+z'] \in \mathbf{S}$$

$$k(x, 2x, z) = (kx, 2kx, kz) \in \mathbf{S}.$$

Sistema de vectores:

Se llama *sistema*, o *familia de vectores* de \mathbf{E} cualquier subconjunto finito de \mathbf{E} .

$$\mathbf{F} = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \quad u_i \in \mathbf{E}.$$

Combinación lineal de vectores:

Toda expresión del tipo $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ con $\alpha_i \in \mathbf{K}$, se llama *combinación lineal* de vectores de la familia $\mathbf{F} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Toda *combinación lineal* de vectores de \mathbf{E} es un vector de \mathbf{E} .

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n; \quad u \text{ es combinación lineal de } u_1, \dots, u_n.$$

Subespacio vectorial generado por un sistema F:

Dado un sistema \mathbf{F} de vectores de \mathbf{E} , el conjunto de todos los vectores combinación lineal de vectores de \mathbf{F} es un subespacio vectorial, $\mathbf{L}(\mathbf{F})$.

$$\mathbf{F} = \{u_1, \dots, u_n\}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{F}) = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n; \quad \forall \alpha_i \in \mathbf{K}\}.$$

Un sistema de vectores es *libre*, o *linealmente independiente*, si para que la combinación lineal de ellos sea el vector nulo, $\forall \alpha_i = 0$.

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Un sistema no libre se llama *ligado*, o *linealmente dependiente*.

En todo *sistema ligado* existe al menos un vector que puede ponerse como *combinación lineal* de los restantes.

$$\mathbf{F} = \{u_1, \dots, u_n\} \text{ ligado} \Leftrightarrow \exists u_i \in \mathbf{F} \text{ tal que}$$

$$u_i = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \lambda_{i+1} u_{i+1} + \dots + \lambda_n u_n.$$

Determinación

Si un sistema dado $\mathbf{F} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ de vectores es linealmente dependiente, el vector cero debe poderse expresar como combinación lineal de ellos, por tanto:

$$c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + \dots + c_n \bar{u}_n = \bar{0}$$

Esto nos lleva a un sistema homogéneo de ecuaciones. Los vectores serán linealmente dependientes si y sólo si el sistema tiene soluciones no triviales. El sistema se escribe empleando una matriz aumentada y luego se reduce por filas. Si el resultado es del tipo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

el sistema no tiene soluciones distintas de la trivial ($c_1 = 0; c_2 = 0; \dots c_n = 0$) y en consecuencia los vectores dados son linealmente independientes.

Si por el contrario el resultado es del tipo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

el sistema tiene un número infinito de soluciones y al menos un vector es combinación lineal de los demás.

Sistemas de generadores:

Dado un subespacio vectorial S , se dice que el sistema F de vectores *genera*, o es *sistema de generadores* de S , si $L(F)=S$.

Sistemas equivalentes:

Dos sistemas F_1, F_2 son *equivalentes* si generan el mismo espacio vectorial.

$$L(F_1)=L(F_2).$$

Si a un sistema F se le añade un vector combinación lineal de los de F , si se obtiene un sistema equivalente.

Si F es *ligado*, el sistema resultante de eliminar en F el vector combinación lineal de los restantes, es *equivalente* a F .

Interpretación geométrica de la dependencia lineal en \mathbb{R}^3

Supóngase que \bar{u} , \bar{v} y w son tres vectores linealmente dependientes en \mathbb{R}^3 . Entonces existen constantes c_1, c_2 y c_3 , no todas cero, tales que

$$c_1\bar{u} + c_2\bar{v} + c_3\bar{w} = \bar{0}$$

Supóngase que $c_3 \neq 0$ (se obtiene un resultado similar si $c_1 \neq 0$ ó si $c_2 \neq 0$). Entonces ambos lados de la ecuación se pueden dividir por c_3 y acondicionar los términos a fin de obtener

$$\bar{w} = -\frac{c_1}{c_3}\bar{u} - \frac{c_2}{c_3}\bar{v} = A\bar{u} + B\bar{v}$$

donde $A = -c_1/c_3$ y $B = -c_2/c_3$.

A continuación se demuestra que \bar{u} , \bar{v} y w son coplanares. Se calcula

$$\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = (A\bar{u} + B\bar{v}) \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = A[\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})] + B[\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})] = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$$

ya que tanto \bar{u} como \bar{v} son ortogonales (véase pag. 9, capítulo 2) a $\bar{u} \times \bar{v}$. Sea $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}$. Entonces \bar{u} y \bar{v} se encuentran en un plano que consiste en todos los vectores que pasan por el origen y que son ortogonales a \bar{n} . Pero \bar{w} está en el mismo plano, porque $\bar{w} \cdot \bar{n} = \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$. Esto muestra que \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} son coplanares. Se llega así a la conclusión siguiente:

Tres vectores en \mathbb{R}^3 son linealmente dependientes si y sólo si son coplanares.

Base de un espacio vectorial finito. Coordenadas. Teorema de la base.

Base de un espacio vectorial:

Se llama *base de un espacio vectorial* a todo sistema *libre*, de generadores. En todo espacio vectorial existe al menos una base. (**Teorema de la base**).

En un espacio vectorial todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Sea \mathbf{E} es un espacio vectorial, $\mathbf{B}=\{e_1+ \dots + e_n\}$ una base de \mathbf{E} y $u \in \mathbf{E}$.

Los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tales que $u=\alpha_1e_1+ \dots + \alpha_n e_n$, se llaman *coordenadas* de u en \mathbf{B} , siendo estas únicas en esa base.

Llamamos **base canónica** al conjunto de vectores que van teniendo 1 en un elemento y los demás cero, de forma alternativa, serán bases canónicas:

$(0, 1), (1, 0)$

$(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$

...

Dimensión de un espacio vectorial:

Se llama *dimensión* de un espacio vectorial, en número de vectores de una cualquiera de sus *bases*.

Si \mathbf{E} es un *espacio vectorial* de dimensión n :

- Todo sistema de generadores de \mathbf{E} con n vectores, es una *base* de \mathbf{E} .
- Todo sistema *libre* de \mathbf{E} tiene un número de vectores $\leq n$.
- Todo sistema de \mathbf{E} con más de n vectores, es *ligado*.

Suma y suma directa de subespacios

Suma de espacios vectoriales:

Si $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbf{E}(\mathbf{K})$, el conjunto suma $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2=\{x=u+v; \forall u \in \mathbf{S}_1, \forall v \in \mathbf{S}_2\}$

Verifica:

- $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$ es subespacio vectorial de \mathbf{E} .
- Si $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ Son sistemas de \mathbf{E} tales que $\mathbf{S}_1=\mathbf{L}(\mathbf{F}_1), \mathbf{S}_2=\mathbf{L}(\mathbf{F}_2), \mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2=\mathbf{L}(\mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2)$
- Si $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2=\mathbf{S}$, entonces $\forall x \in \mathbf{S}, \exists u \in \mathbf{S}_1, \exists v \in \mathbf{S}_2 / x=u+v$. Es decir, todo vector de \mathbf{S} puede descomponerse como suma de uno \mathbf{S}_1 y otro \mathbf{S}_2 .

Intersección de subespacios vectoriales:

Si $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ son subespacios vectoriales de \mathbf{E} , el conjunto $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$ es también subespacios vectorial de \mathbf{E} .

Relación entre dimensiones de los subespacios suma e intersección:

Se verifica:

$$\dim(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2) + \dim(\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2) = \dim \mathbf{S}_1 + \dim \mathbf{S}_2.$$

Suma directa. Espacios suplementarios:

La suma $\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$ de *subespacios vectoriales* de \mathbf{E} , es directa si su intersección es nula. Se denota $\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2$.

Así si $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$, siendo $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \{\emptyset\}$, se dice que \mathbf{S} es *suma directa* de \mathbf{S}_1 y de \mathbf{S}_2 . Los subespacios \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 se llaman *suplementarios* de \mathbf{S} .

En el caso particular de ser $\mathbf{E}=\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2$, los espacios \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 se llaman *suplementarios*.

Si \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 son *suplementarios*, todo vector de \mathbf{E} puede descomponerse, de manera única, como suma de un vector de \mathbf{S}_1 y otro de \mathbf{S}_2 :

$$\mathbf{E}=\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{E}, \exists u_1 \in \mathbf{S}_1 (u_1 \text{ único}), u_2 \in \mathbf{S}_2 (u_2 \text{ único}), \text{ tal que } x=u_1+u_2.$$

Rango de un sistema de vectores:

Se llama *rango* de un sistema \mathbf{F} de vectores la dimensión del subespacio \mathbf{S} generado por \mathbf{F} . $\text{rg}(\mathbf{F})$.

El *rango* de un sistema de vectores es el *mayor número de vectores independientes* contenidos en él.

Teorema de la base incompleta:

Si \mathbf{E} es un espacio vectorial de dimensión n y $\mathbf{F}=\{u_1, \dots, u_r\}$ ($r < n$) un sistema libre de \mathbf{E} , existen $n-r$ vectores en \mathbf{E} que añadidos a \mathbf{F} , es subespacio suplementario del $\mathbf{L}(\mathbf{F})$.

Capítulo 2. Aplicaciones Lineales y Matrices

Conocimientos previos:

- **Grupo abeliano:** (Véase capítulo 1)
- **Correspondencia:** " "
- **Aplicación:** " "

Matriz sobre el Cuerpo \mathbf{R}

Definición:

Se llama *Matriz* a una forma rectangular compuesta de *filas* (m) y *columnas* (n), donde cada elemento lleva asociado un doble índice, el primero ($i=1, 2, \dots, m$) para indicar la fila y el segundo ($j=1, 2, \dots, n$) para indicar la columna. El orden de la matriz ($m \times n$) expresa las filas y columnas que componen la matriz. Se designa como $\mathbf{A}_{m \times n}$ o como un conjunto de sus elementos (a_{ij}).

Si $\mathbf{I}=\{1, 2, \dots, m\}$ y $\mathbf{J}=\{1, 2, \dots, n\}$, una Matriz de m filas y n columnas y coeficientes reales se representa como $\mathbf{M}(m \times n; \mathbf{R})$.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tipos de Matrices:

- Si $m \neq n$ la matriz A se dice **Rectangular**.

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

- Si $m = n$ la matriz se dice **Cuadrada** de tamaño, u orden n .

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

- La matriz A de orden $(1, n)$ se dice **Matriz fila**.

$$(a \quad a \quad a)$$

- La matriz A de orden $(m, 1)$ se dice **Matriz columna**.

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

- Si A es una matriz de orden (m, n) la matriz $-A$, de orden (m, n) cuyos elementos son los opuestos de los de A , se llama **"Opuesta de A "**.

Si $A=(a_{ij})$; $-A=(b_{ij})$ tal que $b_{ij}=-a_{ij}$

$$\begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \end{pmatrix}$$

- Si A es de orden (m, n) se llama matriz **transpuesta** de A y se designa A^t a la matriz de orden (n, m) tal que:

Si $A=(a_{ij})$ es $A^t=(b_{ij})$ tal que $b_{ij}=a_{ji}$
es la matriz que resulta de A al cambiar filas por columnas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{transpuesta} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matriz **nula** de orden (m, n) se designa 0 y es tal que

$$0=(a_{ij}); a_{ij}=0 \forall ij$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz **diagonal** es la que tiene los elementos $a_{ij}=0$ y es cuadrada; se designa D .

$$D=(a_{ij}); D \text{ diagonal} \Leftrightarrow a_{ij}=0 \forall i \neq j$$

Solo tiene elementos distintos de 0 las a_{ii} (se llama **diagonal** de la matriz).

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

- Matriz **escalar** es la matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales.

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Matriz **unidad** de orden n es la matriz escalar con elementos 1 en la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz **simétrica** es la matriz cuadrada que coincide con su transpuesta. Tiene iguales los elementos simétricos respecto a la diagonal

$$A \text{ simétrica} \Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji} \Leftrightarrow A=A^t$$

$$\begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}$$

- Matriz **antisimétrica** o **hemisimétrica** es la matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su transpuesta. Tiene ceros los elementos de la diagonal y los elementos situados encima son opuestos a sus simétricos respecto a la diagonal.

$$A \text{ antisimétrica} \Leftrightarrow a_{ii}=0 \text{ y } a_{ij}=-a_{ji} \text{ si } i \neq j \Leftrightarrow A=-A^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Ejemplo} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz **triangular superior**, matriz cuadrada en la que los coeficientes por debajo de la diagonal principal tienen valor 0.

$$a_{mn}=0 \text{ para } m > n.$$

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- Matriz **triangular inferior**, matriz cuadrada en la que los coeficientes por encima de la diagonal principal tienen el valor 0.

$$a_{mn}=0 \text{ para } m < n.$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

- Matrices **ortogonales**, se dice que una matriz real A es ortogonal, si $AA^T = A^T A = I$. Se observa que una matriz ortogonal A es necesariamente cuadrada e invertible, con inversa $A^{-1} = A^T$. Consideremos una matriz 3×3 arbitraria:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Si A es ortogonal, entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

- Matrices **normales**, una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si $AA^T = A^T A$. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Entonces:}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que $AA^T = A^T A$, la matriz es normal.

Operaciones con matrices

Suma de matrices:

La suma de dos matrices es otra matriz que resulta de sumar los elementos que corresponden a la misma fila y a la misma columna. Ambas matrices deben ser del mismo orden

$$A=(a_{ij}), B=(b_{ij}) \in M_{m,n}; A+B=C=(c_{ij}) \in M_{m,n} \text{ tal que } c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

El grupo abeliano ($M_{m,n}, +$):

El par $(M_{m,n}, +)$ donde $M_{m,n}$ es el conjunto de matrices de orden (m, n) y $+$ es la operación suma de matrices, es grupo abeliano, donde:

- La matriz nula de orden (m, n) es el elemento neutro.
- La matriz opuesta de A , es el elemento opuesto de la matriz A .

Producto de un elemento de K por una matriz:

El producto de una matriz por un escalar es otra matriz que resulta de multiplicar el escalar por cada uno de los elementos de la matriz.

$$\text{Dados } A=(a_{ij}) \in M_{m,n} \text{ y } \alpha \in K \quad \rightarrow \alpha A=(\alpha a_{ij})$$

$$4 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Ejercicio:

Determinense dos matrices, X e Y , cuadradas y de orden 2, que verifiquen el sistema lineal:

$$2X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{Siendo } X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}, \text{ resulta:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_{11} - 5y_{11} = 1 \\ 2x_{12} - 5y_{12} = -2 \\ 2x_{21} - 5y_{21} = 0 \\ 2x_{22} - 5y_{22} = 1 \\ -x_{11} + 3y_{11} = 2 \\ -x_{12} + 3y_{12} = 1 \\ -x_{21} + 3y_{21} = 3 \\ -x_{22} + 3y_{22} = 0 \end{array} \right.$$

resolviendo este sistema tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

El espacio vectorial $M_{m,n}(K)$:

El producto de un elemento de K por una matriz es una operación externa

$$f: K \times M_{m,n} \rightarrow M_{m,n}$$

que verifica las propiedades de una ley externa de los espacios vectoriales. $M_{m,n}(K)$ es un espacio vectorial con las operaciones suma de matrices y producto de un elemento de K por una matriz.

El conjunto de las matrices que van teniendo 1 en un elemento y los demás cero de forma alternativa en todos los a_{ij} , es una base del espacio vectorial, llamada **base natural** o **canónica**.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensión de $M_{m,n}(K)$ es $m \cdot n$.

El conjunto M_n de matrices cuadradas de orden n es un K espacio vectorial de dimensión n^2 .

Producto de matrices:

Dadas dos matrices sobre el mismo cuerpo K :

$$A=(a_{ij}) \in M_{m,n}, \quad B=(b_{ij}) \in M_{n,p}$$

La primera con el mismo número de columnas que filas la segunda, se define matriz producto de A y B ($A \times B$) a la matriz $C=(c_{ij}) \in M_{m,p}$ (de orden m, p) tal que:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+ \dots +a_{in}b_{nj} \text{ para todo } i=1, \dots, m; j=1, \dots, p.$$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (2 \cdot -2) + (3 \cdot 4) + (-2 \cdot 5) & (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (-2 \cdot -2) & (2 \cdot -1) + (3 \cdot 1) + (-2 \cdot 4) \\ (-1 \cdot -2) + (0 \cdot 4) + (-3 \cdot 5) & (-1 \cdot 3) + (0 \cdot 2) + (-3 \cdot -2) & (-1 \cdot -1) + (0 \cdot 1) + (-3 \cdot 4) \\ (4 \cdot -2) + (5 \cdot 4) + (2 \cdot 5) & (4 \cdot 3) + (5 \cdot 2) + (2 \cdot -2) & (4 \cdot -1) + (5 \cdot 1) + (2 \cdot 4) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 16 & -7 \\ -13 & 3 & -11 \\ 22 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, de las dos últimas, no se puede hacer la multiplicación de la segunda por la primera (el número de columnas de la primera deber ser igual al numero de filas de la segunda).

Propiedades del producto de matrices:

- **asociativa:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- **elemento neutro:** es la matriz identidad de orden n . $A_{n \times p} \cdot I_n = A_{n \times p}$
- **no conmutativa:** $A \cdot B$ suele ser distinto de $B \cdot A$, para poder multiplicar $A \cdot B$ y $B \cdot A$ las matrices deben ser:
 - Cuadradas, o bien
 - el número de filas y columnas debe ser inverso.

Trasposición de matrices:

La traspuesta de la matriz $A \in M_{m \times n}$ es la matriz $A^t \in M_{n \times m}$, que se obtiene cambiando filas por columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Si A es una matriz simétrica, entonces $A = A^t$.

El anillo de las matrices cuadradas de orden n :

El producto de matrices es una operación interna sólo en el conjunto M_n de matrices cuadradas de orden n .

La estructura algebraica $(M_n, +, \cdot)$ donde $+$ es la suma de matrices y \cdot el producto es un "Anillo unitario"; donde el elemento unidad es la matriz unidad del mismo orden, I_n .

Matrices inversibles o regulares:

Una matriz cuadrada de tamaño n sobre un cuerpo K se llama *regular* o *invertible* si en el anillo $(M_n, +, \cdot)$ tiene elemento inverso. Es decir:

$$A = (a_{ij}) \in M_n$$

$$A \text{ regular} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in M_n \text{ tal que } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Esta matriz A^{-1} se llama *Matriz inversa* de A .

El conjunto de las matrices regulares de orden n , MR_n tiene con la suma y producto estructura de cuerpo. $(MR_n, +, \cdot)$

Ejemplo:

$$\text{Supongamos } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Entonces:}$$

calculamos $A \cdot B$:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -10 + 10 \\ 3 - 3 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

luego $B \cdot A$:

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & 15 - 15 \\ -2 + 2 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que $AB = BA = I$, A y B son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

Cambio de base en un espacio vectorial:

Sea E un K -espacio vectorial de dimensión n y sean

$$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}; B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

bases de E , donde los vectores de B_2 en B_1 son:

$$v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n$$

$$v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n$$

:

$$v_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

Sea un vector $u \in E$ que en cada base tiene de coordenadas:

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ en la base } B_1$$

$$u = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ en la base } B_2$$

La relación entre ambos sistemas de coordenadas es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Esta expresión se llama ecuación matricial del cambio de base.

De forma simplificada:

U_{B_1} = matriz columna que expresa las coordenadas de u en B_1 .

U_{B_2} = matriz columna que expresa las coordenadas de u en B_2 .

M_{B_2, B_1} = matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B_2 en B_1 (matriz de paso).

Será: $U_{B_1} = M_{B_2, B_1} \cdot U_{B_2}$

Dado que la matriz M_{B_2, B_1} es regular, tiene inversa y se verifica:

$$M_{B_2, B_1}^{-1} = M_{B_1, B_2}$$

y de esto la otra expresión del cambio de base:

$$U_{B_2} = M_{B_2, B_1}^{-1} \cdot U_{B_1}$$

Ejemplo:

Sean $\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces $B_1 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es la base canónica en \mathbb{R}^2 . Sean

$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Como \bar{v}_1 y \bar{v}_2 son linealmente independientes $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ es

una segunda base de \mathbb{R}^2 . Sea $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un vector en \mathbb{R}^2 . Esto significa que

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2$$

Es decir, \bar{x} está escrito en términos de la base B_1 . Con objeto de recalcar este hecho, se escribe

$$(\bar{x})_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Como B_2 es otra base de \mathbb{R}^2 , existen escalares c_1 y c_2 tales que

$$\bar{x} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2$$

Una vez que se ha determinado estos escalares, se escribe

$$(\bar{x})_{B_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

a fin de identificar que ahora \bar{x} está expresado en términos de los vectores de B_2 . Para hallar los números c_1 y c_2 , los vectores de la base original (\bar{u}_1 y \bar{u}_2) se escriben en términos de los vectores de la nueva base (\bar{v}_1 y \bar{v}_2). Es fácil verificar que

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \bar{v}_1 - \frac{3}{5} \bar{v}_2$$

$$\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \bar{v}_1 + \frac{1}{5} \bar{v}_2$$

Es decir,

$$(\bar{u}_1)_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{5} \end{bmatrix} \text{ y } (\bar{u}_2)_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{5}{1} \\ \frac{5}{5} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 = x_1 \left(\frac{2}{5} \bar{v}_1 - \frac{3}{5} \bar{v}_2 \right) + x_2 \left(\frac{1}{5} \bar{v}_1 + \frac{1}{5} \bar{v}_2 \right) = \\ &\left(\frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \right) \bar{v}_1 + \left(-\frac{3}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \right) \bar{v}_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \\ c_2 &= -\frac{3}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \end{aligned}$$

o bien

$$(\bar{x})_{B_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \\ -\frac{3}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si $(\bar{x})_{B_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, entonces

$$(\bar{x})_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$\frac{2}{5} \bar{v}_1 - \frac{13}{5} \bar{v}_2 = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{13}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{26}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\bar{u}_1 - 4\bar{u}_2$$

La matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ recibe el nombre de **matriz de transición** de B_1 a B_2 , y se ha mostrado que $(\bar{x})_{B_2} = A(\bar{x})_{B_1}$.

Procedimiento para hallar la matriz de transición de la base canónica a la base $B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$

1. Escribir la matriz C cuyas columnas son $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$
2. Calcular C^{-1} . Esta es la matriz de transición requerida.

Rango de una matriz:

Dada una matriz $A=(a_{ij})$ con $a_{ij} \in K$, se llama:

Rango de las filas de la matriz el rango de los vectores fila de la matriz, o el mayor número de vectores fila que son linealmente independientes.

Rango de las columnas de la matriz el rango de los vectores columna, o el mayor número de vectores columna que son linealmente independientes.

Para cualquier matriz, el rango de sus filas es igual al rango de sus columnas y se llama **rango de la matriz**.

Proposición Una matriz cuadrada de orden n es regular si, y solo si, su rango es n .

Operaciones elementales en una matriz:

Las operaciones en un sistema de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

- Permuta entre sí dos vectores cualesquiera.
- Sustituir uno de ellos por el mismo más una combinación lineal de los restantes
 $u_i \rightarrow u_i + \alpha u_1 + \dots + \alpha u_n$ ($\alpha_j =$ escalares)
- Multiplicar uno de ellos por un escalar.

Se llaman **operaciones elementales**, y el sistema obtenido al realizarlas es equivalente al primero.

Si se efectúan estas operaciones en las filas (o columnas) de una matriz se obtendrá otra con el mismo rango.

Cálculo del rango de una matriz:

Existen distintos procedimientos, entre ellos:

- Calculándose el máximo número de filas (o columnas) independientes mediante la propia definición de sistema libre o ligado de vectores.
- Mediante transformaciones elementales en las filas (o columnas) de la matriz eligiendo un 1 en la matriz y haciendo cero los elementos de su misma fila o columna.

Ejemplo:

Calcular el rango de las matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

mediante operaciones elementales:

$$\text{a) Matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Se procederá utilizando los vectores fila de la matriz. Se elige el elemento $a_{11}=1$, y se intentan hacer 0 los elementos de la misma columna que son $a_{21}=2$ y el $a_{31}=3$.

Para hacer 0 el a_{21} se sustituye la 2ª fila por ella misma menos 2 veces la primera.

Para hacer 0 el a_{31} se sustituye la 3ª fila por ella misma menos 3 veces la primera.

$$\text{Quedará: } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

En la segunda fila se elige el elemento $a_{22}=-2$ y se hace 1 dividiendo por -2 la segunda fila. Quedará:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

El elemento $a_{32}=-4$ se hace 0 substituyendo la 3ª fila por ella misma mas 4 veces la segunda.

Se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y se ve claramente que el $r(A)=2$ (por hacerse 0 la tercera fila completa).

b) Eligiendo el elemento $a_{11}=1$ y haciendo ceros los elementos de la columna primera.

Se substituye: 2ª fila por 2ª fila + 1ª fila
 3ª fila por 3ª fila - 2.(1ª fila)
 4ª fila por 4ª fila + 4.(1ª fila)

Queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & -7 & 2 & -16 \\ 0 & -6 & 10 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

Se elige ahora el elemento $a_{22}=2$ y se hacen cero los elementos de la 2ª columna situados debajo.

Se substituye: 3ª fila por 3ª fila - 4.(2ª fila)
 4ª fila por 4ª fila + 3.(2ª fila)

Queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & -10 & -24 \\ 0 & 0 & 19 & 10 & 24 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas filas son iguales y al eliminarle la última, el rango de la que se obtiene es 3. Luego

$$r(B)=3.$$

3) Mediante determinantes. El cálculo de determinantes ofrece una técnica muy operativa para hallar el rango de una matriz. (véase *Página 27, Capítulo 3*)

Cálculo de la matriz inversa mediante transformaciones elementales:

Puede calcularse la matriz inversa de una matriz dada A:

Se escribe la matriz A y a su derecha la matriz unidad I, con lo que se obtiene la matriz $[A/I]$ de doble número de columnas y en ella se realizan sucesivas operaciones elementales sobre sus filas hasta conseguir la matriz $[I, B]$ (transforman A en la unidad I). La matriz B será la inversa de A.

Método de Gauss

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A^{-1} , seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. Construir la matriz $n \times 2n$ $M = (A:I)$ esto es, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.

Paso 2. Se deja tal y como está la primera fila de M , y debajo del primer término de la diagonal principal, a_{11} , que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Consideremos una matriz 3×3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$$M = (A : I) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Paso 2.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & : & a_{11}0 - a_{21}1 & a_{11}1 - a_{21}0 & a_{11}0 - a_{21}0 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & : & a_{11}1 - a_{31}1 & a_{11}0 - a_{31}0 & a_{11}1 - a_{31}0 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es igual que el anterior, pero esta vez se coge como pivote el segundo término de la diagonal principal. Al llegar al último término de la diagonal, se procede igual que antes, pero poniendo los ceros encima del nuevo pivote. Se observa que al coger como pivote el último término de la diagonal, la matriz A se transforma en una matriz triangular.

Una vez realizados todos los pasos, la mitad izquierda de la matriz M se convierte en una matriz diagonal. En este momento hay que proceder a transformar, si es que no lo está, la mitad izquierda en la matriz identidad, dividiendo si fuera necesario las filas de M por un escalar.

Ejemplo:

Supongamos que queremos encontrar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Primero construimos la matriz $M = (A:I)$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2 \cdot 0 & 3-2 \cdot 2 & : & 0-2 & 1-2 \cdot 0 & 0 \\ 0 & 1-4 \cdot 0 & 8-4 \cdot 2 & : & 0-4 & 0 & 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ luego se coge como pivote } a_{22} = -1,$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 - (-1) & : & 4 - (-2) & 0 - 1 & -1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim$$

La mitad izquierda de M está en forma triangular, por consiguiente, A es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad A de M , la operación habría terminado (A no es invertible). A continuación, cogemos como pivote a_{33} , ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Ya que la matriz colocada en la mitad izquierda es diagonal, no hay que operar más. Transformamos la matriz diagonal en una matriz identidad; para ello hay que dividir la segunda fila entre -1:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

La matriz que ha quedado en la mitad derecha de M es precisamente la matriz inversa de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar si el resultado es correcto, se procede a multiplicar AA^{-1} , teniendo que dar como resultado la matriz identidad I .

Comprobación:

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Utilización del Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Este proceso se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea el sistema,

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2 \end{array} \right\}$$

su matriz ampliada asociada es

$$\begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 5 & -1 & : & -4 \\ 3 & -2 & -1 & : & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos por el método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la x , la segunda a los de la y , la tercera a los de la z y la cuarta a los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 5 & -1 & : & -4 \\ 3 & -2 & -1 & : & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -10 \\ 0 & -8 & -4 & : & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -10 \\ 0 & 0 & -28 & : & -84 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -10 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

De este modo, el sistema tiene la solución única

$$x = 2, y = -1, z = 3.$$

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices, aplicando el método de Gauss u otros, es una de las múltiples aplicaciones que tienen éstas.

Ejercicio: resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices

Hallar el valor de x , y , z , t en los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando matrices:

$$\begin{array}{l} a) \quad \left. \begin{array}{l} x + y - 2z + 4t = 5 \\ 2x + 2y - 3z + t = 3 \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{array} \right\} \quad b) \quad \left. \begin{array}{l} x + y - 2z + 3t = 4 \\ 2x + 3y - 3z + t = 3 \\ 5x + 7y + 4z + t = 5 \end{array} \right\}$$

a) La matriz M asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & : & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & : & -14 \end{pmatrix}$$

La tercera fila se suprime, puesto que es múltiplo de la segunda y resultaría una fila nula. Así, el sistema queda formado por dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & : & -14 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es compatible e indeterminado, esto es, tiene infinitas soluciones.

$$x = -9 - y + 10t$$

$$z = 7t - 7 \quad \text{ó} \quad (-9 - y + 10t, y, 7t - 7, t).$$

Dependiendo de qué valores se escojan para y y t , salen distintos resultados. Así, para $y = t = 0$ tendremos la solución del sistema

$$x = -9, y = 0, z = -7, t = 0.$$

b) La matriz M asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & : & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & : & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & : & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & : & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & : & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & : & -15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & : & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & : & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & -5 \end{pmatrix}$$

No hay necesidad de continuar calculando nada más, puesto que la matriz escalonada ya nos indica que el sistema es incompatible (SI), es decir, que no tiene solución. Específicamente, la tercera fila de la matriz escalonada corresponde a la ecuación

$$0x + 0y + 0z + 0t = -5$$

obteniendo como resultado $0 = -5$, que es absurdo. Por lo tanto, decimos que no tiene solución.

Capítulo 3. Determinante de una matriz cuadrada

Conceptos previos

- **Concepto de Matriz.**
- **Tipos y propiedades.**

Estos conceptos se han estudiado en el capítulo 2.

Concepto y propiedades

Definición:

Sea $(a_{ij}) = A$, una matriz cuadrada de orden n sobre un cuerpo K . Se llama **determinante** de A el escalar que resulta de sumar algebraicamente $n!$ sumandos, de tal forma que cada sumando es el producto de n factores siendo cada factor un elemento de la matriz perteneciente a fila y columna distinta de los restantes. Cada sumando estará afectado del signo $+$ o $-$, según que la permutación que indica las filas y la que indica las columnas sean del mismo o distinto orden respectivamente. Se designa $|A|$.

Así, si $n = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

El sumando $a_{11}a_{22}$ está precedido del signo $+$, porque las permutaciones que indican filas y columnas: 1,1 y 2,2 son del mismo orden. El sumando $a_{12}a_{21}$ está precedido del signo $-$, porque las permutaciones ahora: 1,2 y 2,1 son de distinto orden.

Si $n = 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Para evitar memorizar la fórmula usaremos una regla mnemotécnica. Vamos a calcular el determinante de la matriz A ,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

se escribirán las tres primeras filas igual que están, y debajo se repetirán la primera y la segunda, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego se multiplican entre sí los números de la diagonal del 3 (3.-1.0 mas grandes), los de la diagonal paralela inferior (4.9.0), y los de la inferior a esta (1.0.0), sumándose los tres productos obtenidos. Se hace lo mismo con las tres diagonales secundarias (la que

empieza en el 0 del vértice superior derecho y las dos paralelas por debajo), y el resultado se resta del obtenido anteriormente. Es decir:

$$[3.(-1).0+4.9.0+1.0.0]-[0.(-1).1+0.9.3+0.0.4]=0$$

El resultado de este determinante es: 0.

Consecuencias:

- El determinante de una matriz unidad es siempre el elemento unidad del cuerpo al que pertenecen los elementos de la matriz. $|I| = 1$
- El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal.
- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal.

Propiedades:

- El determinante de una matriz cuadrada A es igual al determinante de su traspuesta.
- Si se permutan entre si dos líneas (filas o columnas) paralelas, el determinante cambia de signo.
- Si en una línea, se multiplican todos los elementos por un mismo escalar α , el determinante queda multiplicado por α .
- Si en una matriz se expresa una de sus líneas como suma de dos nuevas, el determinante es igual a la suma de los dos determinantes que se obtienen de sustituir la línea por cada una de las líneas sumandos.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_1+b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_2+b_2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_n+b_n & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_n & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- El determinante de una matriz cuadrada es nulo si, y solo si, los vectores que indican las filas (o las columnas) son linealmente dependientes. En particular:
 - Si existe una línea con todos ceros, el determinante es cero.
 - Si existe una línea combinación lineal de otras paralelas, el determinante es cero.
 - Si dos filas o columnas son iguales, el determinante es cero.
- Si en una matriz se sustituye una línea por ella misma más una combinación lineal de otras paralelas, el determinante de la matriz obtenida coincide con el de la primera matriz.
- El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es igual al producto de los elementos situados en su diagonal.

Menor complementario y adjunto

Menor complementario y adjunto de un elemento:

Se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} de la matriz $A = (a_{ij})$, de orden n , el determinante de orden $n - 1$ que resulta de eliminar en A la fila i y la columna j , sin alterar las demás. Se denomina Δ_{ij} y como se deduce de la definición no depende del valor del elemento sino de su posición en la matriz.

Se llama **adjunto** del elemento a_{ij} al menor complementario si $i + j = \text{par}$, y al menor complementario cambiado de signo si $i + j = \text{impar}$. Se designa por A_{ij} y será:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

Propiedad: La suma de los productos de los elementos de una línea de un determinante por los adjuntos de una paralela, es cero.

$$a_{r1}A_{k1} + a_{r2}A_{k2} + \dots + a_{rn}A_{kn} = 0$$

Ejemplo: Cálculo del adjunto de A.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los cofactores de los nueve elementos de A son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

el adjunto de A, será:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, dada una matriz de orden **n** su determinante es la suma de los productos de todas las permutaciones de los coeficientes.

Dado un conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$, una permutación de N es una reordenación de sus elementos sin repetirlos ni eliminarlos.

Dada una permutación σ de N, $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ una inversión es cualquier pareja con $i < j$ tal que $\sigma_i > \sigma_j$. El signo $\epsilon(\sigma)$ de la permutación σ es:

$\epsilon(\sigma) = 1$ si σ tiene un número par de inversiones.

$\epsilon(\sigma) = -1$ si σ tiene un número impar de inversiones.

Ejemplo: Mirar las inversiones de la permutación $\sigma = \{4, 2, 1, 5, 3\}$.

Hay que mirar cuántos números mayores tiene cada uno delante:

1 → **2** (el 2 y el 4)

2 → **1** (el 4)

3 → **2** (el 5 y el 4)

4 → **0**

5 → **0**

$$2+1+2+0+0=5$$

Total **5** inversiones, por tanto $\epsilon(\sigma)$ es negativo.

Ejercicio:

Hallar el signo del término $a_{12} a_{21} a_{34} a_{43} a_{55}$ que aparece en el desarrollo de un determinante de orden cinco:

Solución:

Consideramos la permutación 1, 2, 3, 4, 5; que indica las filas a las que pertenece los elementos del producto; esta permutación no tiene inversiones respecto a la principal, que es ella misma, luego la permutación es par.

Consideramos ahora la permutación 2, 1, 4, 3, 5; que respecto de la principal tiene dos inversiones:

$$1 \rightarrow 1 \quad (\text{el } 2)$$

$$2 \rightarrow 0$$

$$3 \rightarrow 1 \quad (\text{el } 4)$$

$$4 \rightarrow 0$$

$$5 \rightarrow 0$$

la permutación es par.

Como ambas son de la misma paridad; el signo es *más*.

Menor complementario y adjunto de un menor de una matriz

Es una generalización de los conceptos anteriores.

Se llama menor complementario de un menor de orden p , de una matriz cuadrada de orden n , al determinante de orden $n - p$ que resulta de eliminar en A las filas y columnas a las que pertenece el menor.

El adjunto del menor será el menor complementario con el mismo o distinto signo según que la suma de los números que indican las filas y columnas que ocupa el menor sea par o impar respectivamente.

Cálculo práctico de determinantes

Existen varios métodos de cálculo, aparte de la definición.

1. *Mediante aplicación de las propiedades.* Consiste en aplicar reiteradamente y de forma acertada las distintas propiedades para obtener determinantes más sencillos de calcular de algunas matrices específicas (triangular, diagonal, etc.).

Para ello se elige en una fila o columna un elemento pivote y se hacen ceros los elementos de su misma columna, hasta conseguir, procediendo repetidas veces, un determinante conocido.

2. *Desarrollar por los elementos de una línea.* El determinante de una matriz A es igual a los elementos de una línea, por sus adjuntos correspondientes.

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

De esta forma, se reduce a calcular determinantes de un orden menos.

Determinante de orden arbitrario

Sea $A = (a_{nn})$ una matriz de orden arbitrario $n \times n$ (siendo n un número par). Para calcular el $\det(A)$ se procede de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \dots \dots$$

$$- a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Los signos se van alternando según la posición que ocupen las entradas del determinante. Es decir:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ejemplo:

Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Si observamos la matriz, podemos ver que en la tercera columna hay dos ceros. Así pues, si cogemos las entradas de la tercera columna para calcular el determinante, nos ahorraremos calcular dos determinantes, ya que el producto de un determinante por cero es cero.

$$\det(A) = -1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1(-12 + 0 - 4 - 16 - 3) + 3(15 + 0 + 2 + 20 - 2 - 0) = -1(-35) + 3(35) = 35 + 105 = 140$$

3. *Desarrollar por los menores de un conjunto de líneas paralelas* (Regla de Laplace). El determinante de una matriz cuadrada A de orden n , es igual a la suma de todos los productos posibles de los menores de orden p ($p < n$) que se pueden formar con p filas (o columnas) prefijadas, por sus correspondientes adjuntos.

Determinante de Vandermonde

Se denomina así al siguiente determinante:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

y su valor es: $D_n = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^n (a_j - a_i)$, (donde \prod significa “producto”).

Ejemplo: Resolver el determinante Δ_4 y generalizar la expresión para Δ_n :

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}; \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

Cálculo de Δ_4 :

Tomamos $a_{11}=1$ como pivote y hacemos ceros los restantes elementos de la primera columna. Para ello se sustituye:

$$\begin{array}{l} 2^{\text{a}} \text{ fila por } 2^{\text{a}} \text{ fila} - a \cdot (1^{\text{a}} \text{ fila}) \\ 2^{\text{a}} \text{ fila por } 3^{\text{a}} \text{ fila} - a \cdot (2^{\text{a}} \text{ fila}) \\ 2^{\text{a}} \text{ fila por } 4^{\text{a}} \text{ fila} - a \cdot (3^{\text{a}} \text{ fila}) \end{array}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ba & c^2-ca & d^2-da \\ 0 & b^3-b^2a & c^3-c^2a & d^3-d^2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}$$

Sacando $(b-a)$ de la 1ª columna, $(c-a)$ de la 2ª y $(d-a)$ de la 3ª:

$$\Delta_4 = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

Procediendo igual en el determinante (que es Δ_3), es decir, tomando el $a_{11}=1$ como pivote y haciendo ceros los elementos restantes de la 1ª columna

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-cb & d^2-db \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(c-b) & d(d-b) \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-d)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = \\ &= (b-a)(c-a)(d-a)(c-d)(d-b)(d-c) \end{aligned}$$

En el caso de Δ_n será:

$$\Delta_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}).$$

Caracterización de las matrices regulares

Una matriz cuadrada es **regular** si, y solo si, su determinante es distinto de cero. Es decir, dada una matriz cuadrada de orden n :

$$A \in M_n ; A \text{ regular} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

En caso contrario se dice **singular**.

Matriz Inversa

Cálculo de la matriz inversa mediante determinantes

Sea A una matriz regular ($|A| \neq 0$). Llamando:

\bar{A} = Matriz adjunta de A (matriz que resulta de sustituir en A cada elemento por su adjunto).

Se verifica

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\bar{A})^t$$

Esta fórmula ofrece los pasos a seguir para calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada regular A :

Se calcula la matriz adjunta de A .

Se halla la traspuesta de la matriz adjunta.

Se calcula el determinante de A .

Se divide cada elemento de la matriz \bar{A}^t por el valor $|A|$.

ADVERTENCIA

Algunos autores denominan **matriz adjunta** a la *traspuesta* de la matriz que resulta de sustituir cada elemento de la matriz por su adjunto, con lo cual en esta formula, resultaría la matriz inversa igual al cociente de la matriz adjunta por el determinante de la matriz.

Ejemplos: Cálculo de la matriz inversa

Calcular, por la propiedad anterior, la inversa de las siguientes matrices:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Primero hallaremos el determinante de la matriz A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \text{ como el determinante es cero, no existe la inversa de la matriz A.}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

El siguiente paso es hallar el adjunto de la matriz B y su *traspuesta*, así pues, los cofactores de los cuatro elementos de B son:

$$B_{11} = 5 \quad B_{12} = -2$$

$$B_{21} = 1 \quad B_{22} = 3$$

y el adjunto de B, y su traspuesto serán:

$$= \bar{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, (\bar{B})^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aplicando la propiedad:} \quad B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\bar{B})^T$$

$$B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/17 & 1/17 \\ -2/17 & 3/17 \end{pmatrix}.$$

b) Empezaremos por hallar el *det A*,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 12 = -26.$$

Los cofactores de los nueve elementos de A son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

La traspuesta de la matriz de los cofactores anteriores proporciona el adjunto traspuesto de A:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la propiedad de la matriz inversa obtenemos A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A) = \frac{1}{-26} \begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \text{simplificando,}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/13 & 4/13 & 5/13 \\ -2/13 & 1/13 & -2/13 \\ 1/13 & -1/26 & -11/26 \end{pmatrix}$$

Rango de una Matriz

Definición:

El rango de una matriz es el mayor de los órdenes de sus menores no nulos.

Rango de una matriz mediante determinantes

Esta definición permite calcular el rango de una matriz hallando todos sus menores y observando cual o cuales son los de mayor orden, no nulos. Para ello es conveniente seguir el siguiente camino que simplificará el proceso.

Primero es aconsejable observar si hay líneas iguales a otras, o combinación lineal de varias paralelas. En este caso se eliminan, obteniendo matrices más simples.

Después se toma un menor de orden 2 no nulo (si es que el rango es al menos 2) y se le amplía con una fila fija y se forman los determinantes de tercer orden resultantes de ampliar las columnas una a una. Si todos son cero el rango de la matriz es 2. Si alguno de tercer orden es distinto de cero, se amplía éste de la misma forma y así sucesivamente.

Ejemplos:

a) Sea la matriz A una matriz de orden tres. Hallar el rango (A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como A es una matriz cuadrada de orden tres, como máximo el rango (A) puede valer tres. Calcularemos primero el determinante o determinantes de las submatrices de orden dos de A. Así pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Ya que el resultado es cero, probaremos con todas las submatrices de A hasta encontrar una cuyo determinante no sea cero. Si no encontramos ninguna, el rango $(A) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-15) = 2 + 15 = 17 \neq 0.$$

Puesto que el resultado de calcular el determinante de esta submatriz de A no es nulo, podemos afirmar de momento que el rango $(A) = 2$.

Añadimos ahora una columna y una fila más para ver si el rango puede ser tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 15 - 0 - 24 + 2 = 17 \neq 0.$$

Dado que el determinante de A no es nulo y a su vez es de orden tres, el rango $(A) = 3$.

No necesariamente para poder calcular el rango de una matriz, ésta tiene que ser cuadrada. Así, en el siguiente ejemplo:

b) Calcular el rango de la matriz B de orden 3×4 .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$$

Como hay una determinante de orden dos no nulo, el rango de la matriz B es mayor o igual que 2. Calculamos a continuación los determinantes de orden superior:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 2 + 4 + 4 - 2 = 0.$$

Probamos con un segundo determinante de orden tres:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 0 + 0 + 12 + 1 = 3 \neq 0.$$

Así pues, como hay un determinante de orden tres que no es nulo, el rango $(B) = 3$. Un rango mayor que 3 no se puede hallar, ya que no se puede formar un determinante de orden 4. Recuérdese que para poder calcular el determinante de una matriz o de una submatriz, éstas tienen que ser cuadradas.

Aplicaciones de los determinantes

En el tema de matrices y su aplicación a los sistemas de ecuaciones lineales, se vio cómo resolverlas mediante el teorema de Gauss (*página 18, capítulo 2*). Con los determinantes, y aplicando la regla de Cramer, veremos otra manera de calcular los sistemas de ecuaciones lineales

Determinante de la matriz producto de otras dos

El determinante de la matriz producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices factores.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Consecuencia:

Recordando que $|A| = |A^t|$ se verifica:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |A^t| \cdot |B^t| = |A^t \cdot B^t|$$

Es decir, el determinante del producto de dos matrices es igual al del producto de sus traspuestas.

Regla de Cramer

Los pasos a seguir para calcular los sistemas de ecuaciones según la regla de Cramer son los siguientes:

1. Hallar la matriz ampliada $(A:b)$ asociada al sistema de ecuaciones, esto es: que la primera columna esté formada por las entradas de los coeficientes de la primera incógnita de las ecuaciones; que la segunda columna la formen las de la segunda incógnita, y así hasta llegar a la última columna, que estará constituida por las entradas de los términos independientes de las ecuaciones.

2. Calcular el determinante de A .

3. Aplicar la regla de Cramer, que consiste en:

a) ir sustituyendo la primera columna del $\det(A)$ por los términos independientes;

b) dividir el resultado de este determinante entre el $\det(A)$ para hallar el valor de la primera incógnita;

c) continuar sustituyendo los términos independientes en las distintas columnas para hallar el resto de las incógnitas.

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \\ x + 5y = 3 \end{array} \right\}$$

Encontrar el valor de x e y mediante la regla de Cramer. Empezaremos con el primer paso, que consiste en hallar la matriz ampliada $(A:b)$ asociada al sistema de ecuaciones lineales:

$$A:b = \begin{pmatrix} x & y & b \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

El segundo paso es calcular el determinante de A . Así pues:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

Y el tercero y último paso consiste en calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & y \\ 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{5+6}{17} = \frac{11}{17}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} x & b \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{9-1}{17} = \frac{8}{17}.$$

[Error en x , valor de $x = (-5+6)/17 = 1/17$].

Polinomio característico

Consideremos una matriz n -cuadrada arbitraria:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz $(A - \lambda \cdot I_n)$, donde I_n es la matriz identidad n -cuadrada y λ un escalar indeterminado, se denomina matriz característica de A :

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante, $\det(A - \lambda \cdot I_n)$, que es un polinomio en λ , recibe el nombre de polinomio característico de A . Asimismo, llamamos a

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

ecuación característica de A .

Ejemplo:

Hallar la matriz característica y el polinomio característico de la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz característica será $(A - \lambda \cdot I_n)$. Luego:

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 0 - \lambda \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico,

$$\det(A - \lambda I_n) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(0 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda + 4.$$

Así pues, el polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda + 4$.

Valores propios y vectores propios

Sea A una matriz n -cuadrada sobre un cuerpo K . Un escalar $\lambda \in K^n$ se denomina un valor propio de A si existe un vector (columna) no nulo $v \in K^n$ para el que

$$Av = \lambda v$$

Todo vector que satisfaga esta relación se llama vector propio de A perteneciente al valor propio λ . Los términos valor característico y vector característico (o autovalor y autovector) se utilizan con frecuencia en lugar de valor propio y vector propio.

Ejemplo:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ y sean } v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Entonces}$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4v_1.$$

y

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1v_2$$

Así pues, v_1 y v_2 son vectores propios de A pertenecientes, respectivamente, a los valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ de A .