

## CAPÍTULO 1

# Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Para hacer un desarrollo de esta materia lo más autocontenido posible, únicamente presupondremos conocido:

- Los conceptos y terminología básicos sobre conjuntos ( $\in, \subseteq, \cup, \cap, \emptyset, \forall, \exists$ , producto cartesiano de un número finito de conjuntos,  $\dots$ )
- De los conjuntos numéricos  $\mathbb{N}$  (números naturales),  $\mathbb{Z}$  (números enteros),  $\mathbb{Q}$  (números racionales) y  $\mathbb{R}$  (números reales), las operaciones *suma* y *producto* en cada uno de ellos, sus propiedades básicas y la relación usual de orden entre sus elementos.

### 1. Definición de cuerpo

Comenzaremos por repasar las propiedades que cada uno de los cuatro conjuntos numéricos indicados verifican para las operaciones *suma* y *producto*. En particular, si  $A$  representa cualquiera de los conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$ , para la suma se verifica:

- La suma de dos elementos de  $A$  es de nuevo un elemento de  $A$ , es decir:

$$a + a' \in A \quad \forall a, a' \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *la suma en  $A$  es una operación binaria interna*.

- El orden en que efectuamos la suma de dos elementos, no varía el resultado, es decir:

$$a + a' = a' + a \quad \forall a, a' \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *la suma en  $A$  es conmutativa*.

- La suma de tres elementos no varía con independencia de cómo los agrupemos para realizarla, es decir:

$$(a + a') + a'' = a + (a' + a'') \quad \forall a, a', a'' \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *la suma en  $A$  es asociativa* y, como consecuencia de esta propiedad, la suma de estos tres elementos se representará simplemente por  $a + a' + a''$ .

- En  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ , así como en  $\mathbb{N}$  cuando se considera al 0 como un número natural, hay un elemento, que es el 0, cuya suma con cualquier otro da este otro como resultado, es decir:

$$\exists 0 \in A \quad / \quad a + 0 = a = 0 + a \quad \forall a \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que 0 *es elemento neutro para la suma en  $A$* .

La siguiente propiedad se cumple en  $\mathbb{Z}$ , en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  pero no se cumple en  $\mathbb{N}$ :

$$\forall a \in A, \exists (-a) \in A \quad / \quad a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

es decir, para todo elemento de  $A$  existe otro cuya suma con él da el neutro de la suma. A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *todo elemento de  $A$ , con  $A$  cualquiera de los conjuntos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$ , tiene opuesto, o simétrico para la suma, en  $A$* .

Igualmente, si  $A$  representa a cualquiera de los conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$ , para el producto se verifica:

- El producto de dos elementos de  $A$  es de nuevo un elemento de  $A$ , es decir:

$$a \cdot a' \in A \quad \forall a, a' \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *el producto en  $A$  es una operación binaria interna*. Normalmente simplificamos la notación y escribimos  $aa'$  en lugar de  $a \cdot a'$ .

- El orden en que efectuamos el producto de dos elementos no varía el resultado, es decir:

$$aa' = a'a \quad \forall a, a' \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *el producto en  $A$  es conmutativo*.

- El producto de tres elementos no varía con independencia de cómo los agrupemos para realizarlo, es decir:

$$(aa')a'' = a(a'a'') \quad \forall a, a', a'' \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *el producto en  $A$  es asociativo* y, como consecuencia de esta propiedad, el producto de estos tres elementos se representará simplemente por  $aa'a''$ .

- Hay un elemento, que es el 1, cuyo producto con cualquier otro da este otro como resultado, es decir:

$$\exists 1 \in A \quad / \quad a1 = a = 1a \quad \forall a \in A$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que 1 *es elemento neutro para el producto en  $A$* .

- El producto, en relación con la suma, verifica las siguientes propiedades:

$$a(a' + a'') = (aa') + (aa'') \quad \text{y} \quad (a' + a'')a = (a'a) + (a''a) \quad \forall a, a', a'' \in A$$

A estas propiedades normalmente nos referimos diciendo que *el producto en  $A$  es distributivo por ambos lados respecto a la suma* y, para evitar el uso excesivo de paréntesis, convenimos en priorizar el producto sobre la suma, de modo que escribimos  $aa' + aa''$  en lugar de  $(aa') + (aa'')$  y  $a'a + a''a$  en lugar de  $(a'a) + (a''a)$ .

La siguiente propiedad se cumple en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  pero no se cumple en  $\mathbb{N}$  ni en  $\mathbb{Z}$ :

$$\forall a \in A^* = A - \{0\} \quad , \quad \exists a^{-1} \in A^* = A - \{0\} \quad / \quad aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

A esta propiedad normalmente nos referimos diciendo que *todo elemento distinto del neutro de la suma de  $A$  (o simplemente no nulo si este neutro se representa por 0), con  $A$  cualquiera de los conjuntos  $\mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$  tiene inverso, o simétrico para el producto*.

En la segunda parte de la asignatura estudiaremos propiedades de conjuntos no vacíos con una o más operaciones binarias internas verificando algunas de estas propiedades. En este momento, nos vamos a centrar en conjuntos no vacíos con dos operaciones binarias internas que verifiquen las mismas propiedades que hemos indicado para  $\mathbb{Q}$  y para  $\mathbb{R}$ , esto da lugar a la denominada estructura de *cuerpo*.

**Definición 1.1.** Un *cuerpo* es un conjunto no vacío, junto con dos operaciones binarias internas que habitualmente denominamos suma y producto, y representamos por  $+$  y  $\cdot$ , respectivamente, y que verifican las siguientes propiedades:

- conmutatividad de la suma y el producto.
- asociatividad de la suma y el producto.

- existe elemento neutro para la suma y elemento neutro para el producto.
- todo elemento tiene opuesto y todo elemento distinto del neutro de la suma tiene inverso.
- el producto es distributivo por ambos lados respecto a la suma.

Habitualmente, para referirnos a esta estructura, diremos que  $(K, +, \cdot)$  es un cuerpo, o simplemente que  $K$  es un cuerpo, sobreentendiendo en este caso la notación  $+$  y  $\cdot$  para las correspondientes operaciones. A los elementos del conjunto  $K$  los representaremos normalmente por letras minúsculas, bien latinas o bien griegas, y los denominaremos *escalares*.

### **Ejemplos 1.2.**

1. El conjunto  $K = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ , para las operaciones dadas en las tablas siguientes, es un cuerpo al que normalmente representaremos por  $\mathbb{Z}_2$ :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$		·	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	y	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$		$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

2. El conjunto  $K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ , para las operaciones dadas en las tablas siguientes, es un cuerpo al que normalmente representaremos por  $\mathbb{Z}_3$ :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	y	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$		$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$		$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

3. El conjunto  $K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ , que igual que en los ejemplos anteriores representaremos normalmente por  $\mathbb{Z}_4$ , NO es un cuerpo para las operaciones dadas en las tablas siguientes:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$		·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	y	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$		$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$		$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$		$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

4. El subconjunto de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Q}\}$ , es un cuerpo para la suma y producto de sus elementos como números reales.

**Consecuencias 1.3.** En un cuerpo  $K$  se verifica:

- 1) El elemento neutro para cada operación es único. Como consecuencia, al neutro de la suma lo representaremos por 0 y al del producto por 1.
- 2) El opuesto de cualquier elemento  $a \in K$  es único y lo representaremos por  $-a$ . Asimismo, una composición del tipo  $b + (-a)$  se representará simplemente por  $b - a$ . Además  $-(-a) = a$ .
- 3) El inverso de un elemento no nulo  $a \in K$  es único y lo representaremos por  $a^{-1}$ . Además  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
- 4)  $a0 = 0 \ \forall a \in K$ .
- 5)  $ab = 0 \implies a = 0 \text{ o } b = 0$ .
- 6)  $\forall a, b \in K$ , con  $a \neq 0 \neq b$ , entonces  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ .
- 7)  $\forall a, b \in K$  se verifica  $(-a)b = -(ab) = a(-b)$  y  $(-a)(-b) = ab$ .
- 8) Todo elemento no nulo es simplificable para el producto, es decir:

$$ab = ac \text{ y } a \neq 0 \implies b = c$$

- 9) Si los neutros de ambas operaciones coinciden, entonces  $K$  se reduce a un solo elemento.

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Si  $e_1$  y  $e_2$  son neutros de  $K$  para la suma, entonces:

$$e_1 + e_2 = \begin{cases} e_1 & \text{por ser } e_2 \text{ neutro} \\ e_2 & \text{por ser } e_1 \text{ neutro} \end{cases}$$

luego  $e_1 = e_2$ . Respecto al producto se razona de forma análoga.

- 2) Si  $a_1$  y  $a_2$  son opuestos de  $a \in K$ , entonces, haciendo uso de la propiedad asociativa de la suma, se tiene:

$$a_1 + a + a_2 = \begin{cases} (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2 & \text{por ser } a_1 \text{ opuesto de } a \text{ y } 0 \text{ neutro} \\ a_1 + (a + a_2) = a_1 + 0 = a_1 & \text{por ser } a_2 \text{ opuesto de } a \text{ y } 0 \text{ neutro} \end{cases}$$

luego  $a_1 = a_2$ . Además, de  $(-a) + a = 0 = a + (-a)$  se deduce que  $a$  es opuesto de  $-a$ , por lo que  $a = -(-a)$ .

- 3) Se razona de forma análoga al apartado anterior.

4) Si consideramos el elemento de  $K$ ,  $a(0 + 0)$ , se tiene:

$$a(0 + 0) = \begin{cases} a0 + a0 & \text{por distributividad del producto respecto a la suma} \\ a0 & \text{puesto que } 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

en consecuencia  $a0 + a0 = a0$  y considerando ahora el opuesto de  $a0$ ,  $-(a0)$ , y haciendo uso de la asociatividad de la suma, se tiene:

$$a0 + a0 = a0 \implies a0 + a0 - (a0) = a0 - (a0) \implies a0 = 0$$

5) Si  $ab = 0$  y suponemos  $a \neq 0$ , entonces  $a$  tiene inverso y, haciendo uso de la propiedad asociativa del producto y del apartado anterior, se tiene:

$$a^{-1}ab = \begin{cases} (a^{-1}a)b = 1b = b \\ a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0 \end{cases}$$

en consecuencia  $b = 0$ . De igual manera, si suponemos  $ab = 0$  y  $b \neq 0$ , se llega a que  $a = 0$ .

6) Si  $a \neq 0 \neq b$ , por el apartado anterior se tiene  $ab \neq 0$  y por consiguiente  $ab$  tiene inverso y se tiene:

$$\begin{aligned} (ab)^{-1}(ab) &= 1 \implies (ab)^{-1}(ab)b^{-1} = 1b^{-1} = b^{-1} \implies \\ \implies (ab)^{-1}a &= b^{-1} \implies (ab)^{-1}aa^{-1} = b^{-1}a^{-1} \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \end{aligned}$$

lo que, junto con la conmutatividad del producto, justifica las igualdades buscadas.

7) Para justificar que  $(-a)b$  es el opuesto de  $ab$ , basta ver que  $(-a)b + ab = 0$ . Pero, haciendo uso de la distributividad del producto respecto a la suma, así como de uno de los apartados anteriores, se tiene:

$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$

La igualdad  $-(ab) = a(-b)$  es análoga. Igualmente se tiene:

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$$

8) Por ser  $a \neq 0$ ,  $a$  tiene inverso, y entonces:

$$ab = ac \implies a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \implies (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \implies 1b = 1c \implies b = c$$

9) Si suponemos que ambos neutros coinciden, es decir  $0 = 1$ , entonces  $\forall a \in K$ , se tiene que  $a = a1 = a0 = 0$ , por lo que  $K = \{0\}$ .

□

**Definición** 2.1. Una *ecuación lineal* sobre el cuerpo  $K$ , es una expresión del tipo siguiente:

donde  $n$  es un entero positivo,  $(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \in K^{n+1}$  y  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  representa la  $n$ -tupla de las denominadas *incógnitas* de la ecuación. Si para algún  $i$  se verifica que  $a_i = 0$ , diremos que la incógnita  $x_i$  *no aparece* en la ecuación y normalmente omitiremos el término  $a_i x_i$  de ella.

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n & = & b^1 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n & = & b^2 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n & = & b^m \end{array} \right.$$
[illegible]

**Definición 2.2.** Si un SEL tiene alguna solución se dice que es *compatible* y en caso contrario se dice que es *incompatible*. Asimismo, si es compatible y sólo tiene una solución, se dice que es *compatible determinado*, y si tiene más de una solución, se dice que es *compatible indeterminado*.

**Definición 2.3.** Un SEL cuyos términos independientes son todos nulos, se denomina *homogéneo*. Es inmediato que un SEL homogéneo es compatible puesto que al menos la  $n$ -tupla  $(0, 0, \dots, 0) \in K^n$  es una solución.

**Definición 2.4.** Un SEL, diremos que tiene *forma escalonada*, si las posibles ecuaciones en las que no aparecen incógnitas están al final y además, la primera incógnita que aparece en cada ecuación, que denominaremos *incógnita principal*, es posterior a la primera incógnita que aparece en cada una de las ecuaciones anteriores y no aparece en las ecuaciones posteriores.

**Ejemplo 2.5.** Los siguientes sistemas sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  tienen forma escalonada:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_4 = 6 \end{cases} \quad \text{y las incógnitas principales son } x_1, x_3 \text{ y } x_4. \\
 2. \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{y las incógnitas principales son } x_1, x_2 \text{ y } x_4.
 \end{aligned}$$

**Definición 2.6.** Un SEL, diremos que tiene *forma escalonada reducida* si tiene forma escalonada y las incógnitas principales tienen coeficiente 1 y aparecen solamente una vez.

**Ejemplo 2.7.** Los siguientes sistemas sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  tienen forma escalonada reducida:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \begin{cases} x_1 + 5x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_4 = -3 \end{cases} \quad \text{y las incógnitas principales son } x_1, x_2 \text{ y } x_4. \\
 2. \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_5 = 3 \\ x_3 - x_5 = 5 \\ x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{y las incógnitas principales son } x_1, x_3 \text{ y } x_4.
 \end{aligned}$$



### 3. Equivalencia de sistemas

**Proposición 3.1.** Cualquiera de las siguientes operaciones transforma un SEL en otro sobre el mismo cuerpo, con el mismo número de ecuaciones y de incógnitas, y con el mismo conjunto de soluciones:

- 1) Permutar dos ecuaciones.
- 2) Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo, es decir, multiplicar todos los coeficientes y el término independiente de una ecuación por un mismo escalar no nulo.
- 3) Sumarle a una ecuación otra ecuación multiplicada por un escalar, es decir, a cada coeficiente y al término independiente de una ecuación, sumarle su correspondiente de otra determinada ecuación, multiplicados éstos por un mismo escalar.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $S$  el siguiente SEL sobre un cuerpo  $K$ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n & = & b^1 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n & = & b^2 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n & = & b^m \end{array} \right.$$

Es inmediato que cualquiera de las operaciones descritas, transforma  $S$  en otro SEL,  $S'$ , sobre el mismo cuerpo y mantiene el número de ecuaciones y de incógnitas. Pretendemos pues demostrar que si  $S$  es incompatible, entonces  $S'$  también lo es, y que si  $S$  es compatible, entonces  $S'$  también lo es y  $S$  y  $S'$  tienen el mismo conjunto de soluciones. Según la operación realizada se tiene:

- 1) En este caso es consecuencia inmediata de la definición de solución de un SEL.
- 2) Si  $S'$  resulta de multiplicar la  $i$ -ésima ecuación de  $S$  por el escalar no nulo  $a$ , entonces  $S'$  es el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a a_1^i x_1 + a a_2^i x_2 + \cdots + a a_n^i x_n & = & a b^i \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n & = & b^m \end{array} \right.$$

Por consiguiente tenemos:

- Si  $S$  es incompatible,  $S'$  también lo es ya que si  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$  fuese solución de  $S'$ , se cumpliría:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 \alpha_1 + a_2^1 \alpha_2 + \dots + a_n^1 \alpha_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ aa_1^i \alpha_1 + aa_2^i \alpha_2 + \dots + aa_n^i \alpha_n & = & ab^i \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m \alpha_1 + a_2^m \alpha_2 + \dots + a_n^m \alpha_n & = & b^m \end{array} \right.$$

Pero, de acuerdo con una de las consecuencias vistas de la definición de cuerpo, puesto que  $a \neq 0$ , de la  $i$ -ésima de estas igualdades se deduce:

$$\begin{aligned} aa_1^i \alpha_1 + aa_2^i \alpha_2 + \dots + aa_n^i \alpha_n = ab^i &\Rightarrow a(a_1^i \alpha_1 + a_2^i \alpha_2 + \dots + a_n^i \alpha_n) = ab^i \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1^i \alpha_1 + a_2^i \alpha_2 + \dots + a_n^i \alpha_n = b^i \end{aligned}$$

lo que supondría que  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  también sería solución de  $S$ , en contra de que  $S$  es incompatible.

- Si  $S$  es compatible y  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$  es una solución de  $S$ , entonces

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 \alpha_1 + a_2^1 \alpha_2 + \dots + a_n^1 \alpha_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^i \alpha_1 + a_2^i \alpha_2 + \dots + a_n^i \alpha_n & = & b^i \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m \alpha_1 + a_2^m \alpha_2 + \dots + a_n^m \alpha_n & = & b^m \end{array} \right.$$

y en consecuencia, multiplicando por  $a$  la  $i$ -ésima de estas igualdades, se tiene

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 \alpha_1 + a_2^1 \alpha_2 + \dots + a_n^1 \alpha_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ aa_1^i \alpha_1 + aa_2^i \alpha_2 + \dots + aa_n^i \alpha_n & = & ab^i \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m \alpha_1 + a_2^m \alpha_2 + \dots + a_n^m \alpha_n & = & b^m \end{array} \right.$$

por lo que  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$  también es solución de  $S'$  y  $S'$  es así compatible. Además, este razonamiento demuestra a su vez que toda solución de  $S$  lo es de  $S'$  y,

puesto que antes hemos justificado que toda solución de  $S'$  es también solución de  $S$ , tenemos así que  $S$  y  $S'$  tienen el mismo conjunto de soluciones.

- 3) Supongamos que  $S'$  resulta de sumarle a la ecuación  $i$ -ésima de  $S$  la  $j$ -ésima, con  $i \neq j$ , multiplicada por el escalar  $a \in K$ . Haciendo uso del primer apartado, supondremos  $i < j$  y tenemos así el sistema  $S$ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \cdots + a_n^i x_n & = & b^i \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^j x_1 + a_2^j x_2 + \cdots + a_n^j x_n & = & b^j \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n & = & b^m \end{array} \right.$$

y su transformado  $S'$  será:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ (a_1^i + aa_1^j)x_1 + (a_2^i + aa_2^j)x_2 + \cdots + (a_n^i + aa_n^j)x_n & = & b^i + ab^j \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^j x_1 + a_2^j x_2 + \cdots + a_n^j x_n & = & b^j \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n & = & b^m \end{array} \right.$$

Por consiguiente tenemos:

- Si  $S$  es incompatible,  $S'$  también lo es ya que si  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$  fuese solución de  $S'$ , se cumpliría:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 \alpha_1 + a_2^1 \alpha_2 + \cdots + a_n^1 \alpha_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ (a_1^i + aa_1^j)\alpha_1 + (a_2^i + aa_2^j)\alpha_2 + \cdots + (a_n^i + aa_n^j)\alpha_n & = & b^i + ab^j \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^j \alpha_1 + a_2^j \alpha_2 + \cdots + a_n^j \alpha_n & = & b^j \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m \alpha_1 + a_2^m \alpha_2 + \cdots + a_n^m \alpha_n & = & b^m \end{array} \right.$$

Pero de la  $i$ -ésima de estas igualdades se tiene:

$$\begin{aligned} & (a_1^i + aa_1^j)\alpha_1 + (a_2^i + aa_2^j)\alpha_2 + \cdots + (a_n^i + aa_n^j)\alpha_n = b^i + ab^j \Rightarrow \\ \Rightarrow & a_1^i\alpha_1 + a_2^i\alpha_2 + \cdots + a_n^i\alpha_n + a\underbrace{\left(a_1^j\alpha_1 + a_2^j\alpha_2 + \cdots + a_n^j\alpha_n\right)}_{=b^j} = b^i + ab^j \Rightarrow \\ \Rightarrow & a_1^i\alpha_1 + a_2^i\alpha_2 + \cdots + a_n^i\alpha_n = b^i \end{aligned}$$

lo que supondría que  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  también sería solución de  $S$ , en contra de que  $S$  es incompatible.

- Si  $S$  es compatible y  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$  es una solución de  $S$ , entonces

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 \alpha_1 + a_2^1 \alpha_2 + \cdots + a_n^1 \alpha_n & = & b^1 \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^i \alpha_1 + a_2^i \alpha_2 + \cdots + a_n^i \alpha_n & = & b^i \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^j \alpha_1 + a_2^j \alpha_2 + \cdots + a_n^j \alpha_n & = & b^j \\ \dots\dots\dots & & \dots \\ a_1^m \alpha_1 + a_2^m \alpha_2 + \cdots + a_n^m \alpha_n & = & b^m \end{array} \right.$$

y en consecuencia, sumándole a la  $i$ -ésima de estas igualdades, la  $j$ -ésima multiplicada por  $a$ , y operando en  $K$ , se tiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1^1 \alpha_1 + a_2^1 \alpha_2 + \cdots + a_n^1 \alpha_n & = & b^1 \\ \dots & & \dots \\ (a_1^i + aa_1^j) \alpha_1 + (a_2^i + aa_2^j) \alpha_2 + \cdots + (a_n^i + aa_n^j) \alpha_n & = & b^i + ab^j \\ \dots & & \dots \\ a_1^j \alpha_1 + a_2^j \alpha_2 + \cdots + a_n^j \alpha_n & = & b^j \\ \dots & & \dots \\ a_1^m \alpha_1 + a_2^m \alpha_2 + \cdots + a_n^m \alpha_n & = & b^m \end{array} \right.$$

por lo que  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$  también es solución de  $S'$  y  $S'$  es así compatible. Además, este razonamiento demuestra a su vez que toda solución de  $S$  lo es de  $S'$  y, puesto que antes hemos justificado que toda solución de  $S'$  es también solución de  $S$ , tenemos así que  $S$  y  $S'$  tienen el mismo conjunto de soluciones.

☐

**Definición 3.2.** Las operaciones descritas en la proposición anterior, 3.1, se denominan *operaciones elementales fila* y, para referirnos a ellas, utilizaremos la siguiente notación:

- 1)  $F_{i,j}$ , con  $i \neq j$ , representará la operación elemental fila consistente en permutar las ecuaciones  $i$ -ésima y  $j$ -ésima.
- 2)  $aF_i$  representará la operación elemental fila consistente en multiplicar la ecuación  $i$ -ésima por el escalar no nulo  $a$ , es decir, multiplicar todos los coeficientes y el término independiente de la ecuación  $i$ -ésima por el escalar no nulo  $a$ .
- 3)  $F_i + aF_j$  representará la operación elemental fila consistente en sumarle a la ecuación  $i$ -ésima la ecuación  $j$ -ésima, con  $i \neq j$ , multiplicada por el escalar  $a$ , es decir, a cada coeficiente y al término independiente de la ecuación  $i$ -ésima, sumarle su correspondiente de la  $j$ -ésima ecuación, multiplicados éstos por el escalar  $a$ .

**Proposición 3.3.** Si el SEL  $S'$  es el transformado del  $S$  mediante una secuencia de operaciones elementales fila, entonces es también posible transformar  $S'$  en  $S$  mediante la aplicación de otra secuencia de operaciones elementales fila.

DEMOSTRACIÓN. Bastará comprobar que si a un sistema le aplicamos una operación elemental fila, hay otra operación elemental fila que nos lo transforma de nuevo en el sistema inicial. Según el tipo de operación, se tiene:

- Si  $S'$  se obtiene a partir de  $S$  por aplicación de la operación elemental fila  $F_{i,j}$ ,  $S$  se obtiene de nuevo a partir de  $S'$  por aplicación de la misma operación elemental fila.
- Si  $S'$  se obtiene a partir de  $S$  por aplicación de la operación elemental fila  $aF_i$ ,  $S$  se obtiene de nuevo a partir de  $S'$  por aplicación de la operación elemental  $a^{-1}F_i$  (notemos que  $a$  es un elemento no nulo de  $K$ ).
- Si  $S'$  se obtiene a partir de  $S$  por aplicación de la operación elemental fila  $F_i + aF_j$ ,  $S$  se obtiene de nuevo a partir de  $S'$  por aplicación de la operación elemental  $F_i + (-a)F_j$ , que indistintamente representaremos por  $F_i - aF_j$ .

□

**Definición 3.4.** Un SEL  $S'$ , se dice que es *equivalente* al SEL  $S$ , si es posible obtenerlo a partir de  $S$ , por aplicación de alguna secuencia de operaciones elementales fila. Es evidente que si  $S'$  es equivalente a  $S$  y  $S''$  lo es a  $S'$ , se tiene que  $S''$  es equivalente a  $S$ . Por otro lado, la proposición anterior, 3.3, nos garantiza que si  $S'$  es equivalente a  $S$ , entonces  $S$  lo es a  $S'$  y es por ello que, en este caso, simplemente diremos que los sistemas  $S$  y  $S'$  son *equivalentes*. Notemos además que de 3.1,

página 9, se deduce que dos sistemas equivalentes, son sistemas sobre el mismo cuerpo, tienen el mismo número de ecuaciones y de incógnitas, y además tienen el mismo conjunto de soluciones.

#### 4. Métodos de Gauss y de Gauss-Jordan

Los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan, nos proporcionan en primer lugar un mecanismo para transformar un SEL en otro equivalente en forma escalonada y escalonada reducida, respectivamente. Por otro lado, partiendo de un sistema en forma escalonada o escalonada reducida, nos permiten caracterizar su carácter compatible o no y, caso de serlo, cómo obtener su conjunto de soluciones.

##### Descripción del método de Gauss:

**I.-** En primer lugar, el método de Gauss nos garantiza que todo SEL es equivalente a otro en forma escalonada. Para ello basta realizar, sobre un SEL, las siguientes operaciones elementales fila, aplicadas en el orden que a continuación se indica:

- 1) Se permutan, si es necesario, dos ecuaciones para asegurar que la primera incógnita que aparece en alguna ecuación del sistema, lo haga en la primera ecuación.
- 2) El objetivo ahora es conseguir que la incógnita a la que nos hemos referido en el paso anterior, no aparezca en las ecuaciones siguientes. Para ello, si suponemos que su coeficiente en esta primera ecuación es  $c_1 \neq 0$ , y su coeficiente en la  $i$ -ésima ecuación, para cada  $i > 1$ , es  $c_i$ , entonces, realizando las operaciones elementales fila  $F_i + (-c_i c_1^{-1})F_1 = F_i - c_i c_1^{-1}F_1$ , se obtiene un sistema equivalente que cumple la condición buscada.
- 3) Se realizan ahora los mismos pasos anteriores pero a partir de la segunda ecuación, y así sucesivamente hasta agotar las incógnitas que aparecen en el sistema.

##### Ejemplo 4.1.

1. Aplicar el método de Gauss al siguiente SEL sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \end{array} \right. \xRightarrow{F_{1,2}} \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{F_3 - F_1} \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \\ F_3 + 3F_2 & \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & 12x_3 & - & 4x_4 & = & 6 \end{array} \right. \end{aligned}$$

2. Aplicar el método de Gauss al siguiente SEL sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}_3$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cccc} \bar{2}x & + & y & + & z & = & \bar{0} \\ x & + & \bar{2}y & + & z & = & \bar{1} \end{array} \right. \xRightarrow{F_2 + F_1} \left\{ \begin{array}{cccc} \bar{2}x & + & y & + & z & = & \bar{0} \\ & & & & \bar{2}z & = & \bar{1} \end{array} \right. \end{aligned}$$

**II.-** Partiendo ahora de un sistema en forma escalonada (notemos que un SEL puede ser equivalente a distintos sistemas en forma escalonada), estaremos en una de las dos situaciones siguientes:

a) Si el sistema tiene alguna ecuación de la forma  $0 = b$ , con  $b$  un escalar no nulo, entonces este sistema es obviamente incompatible.

**Ejemplo 4.2.** El siguiente SEL sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  es incompatible:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & y & - & z & = & 1 \\ 6x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \xRightarrow{F_{1,2}} \left\{ \begin{array}{cccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & z & = & 1 \\ 6x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{F_3 - 3F_1 \text{ y } F_4 - 6F_1} \left\{ \begin{array}{cccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & y & + & z & = & 0 \\ 2y & - & 4z & = & -2 \\ 5y & - & 5z & = & -6 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{F_3 - 2F_2 \text{ y } F_4 - 5F_2} \left\{ \begin{array}{cccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & y & + & z & = & 0 \\ & & - & 6z & = & -2 \\ & & & - & 10z & = & -6 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{F_4 - \frac{10}{6}F_3} \left\{ \begin{array}{cccc} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & y & + & z & = & 0 \\ & & - & 6z & = & -2 \\ & & & 0 & = & \frac{-8}{3} \end{array} \right.$$

b) Si el sistema no tiene ninguna ecuación de la forma  $0 = b$ , con  $b$  un escalar no nulo, vamos a ver que el sistema es compatible y cómo obtener su conjunto de soluciones. Para ello distinguiremos los dos casos siguientes:

- Todas las incógnitas del sistema son incógnitas principales: En este caso, por sustitución progresiva de abajo a arriba, entre las ecuaciones no nulas, se obtienen sucesivamente las componentes de una solución del sistema. Esto justifica que el sistema es compatible y además, en este caso, es evidente que la solución es única y por tanto el sistema es compatible determinado.

**Ejemplo 4.3.** El siguiente SEL sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  es compatible determinado:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x & - & 4y & - & z & = & 2 \\ - & x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & 2z & = & 3 \end{array} \right. \xRightarrow{F_2 + F_1 \text{ y } F_3 - F_1} \left\{ \begin{array}{rclcl} x & - & 4y & - & z & = & 2 \\ - & y & - & 2z & = & 3 \\ 4y & + & 3z & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{F_3 + 4F_2} \left\{ \begin{array}{rclcl} x & - & 4y & - & z & = & 2 \\ - & y & - & 2z & = & 3 \\ - & 5z & = & 13 \end{array} \right.$$

- De la última ecuación se deduce que  $z = \frac{-13}{5}$ .
- De la penúltima ecuación, sustituyendo el valor obtenido para  $z$ , se tiene que  $-y - 2(\frac{-13}{5}) = 3$ , de donde  $y = \frac{11}{5}$ .
- De la primera ecuación, sustituyendo los valores hallados para  $z$  y para  $y$ , se tiene que  $x - 4\frac{11}{5} - \frac{-13}{5} = 2$ , de donde  $x = \frac{41}{5}$ .

En consecuencia  $(\frac{41}{5}, \frac{11}{5}, \frac{-13}{5}) \in \mathbb{R}^3$  es la única solución del sistema.

- Existen incógnitas del sistema que no son incógnitas principales: En este caso, si a cada una de estas incógnitas no principales le asignamos un elemento de  $K$ , procediendo igual que antes, por sustitución progresiva de abajo a arriba, entre las ecuaciones no nulas, se obtiene, de cada ecuación, el elemento de  $K$  que, sustituyendo su incógnita principal, verifica la correspondiente igualdad en  $K$ . Obtenemos así, para cada asignación de elementos de  $K$  a las incógnitas no principales, una solución del sistema, lo que nos permite expresar el conjunto de soluciones del sistema en función de tantos parámetros como incógnitas no principales tiene el sistema, recorriendo éstos el cuerpo  $K$ . Además, puesto que según hemos indicado en 1.4, página 7,  $K$  tiene más de un elemento, hay por tanto más de una posible asignación de elementos de  $K$  a estos parámetros, lo que justifica que el sistema es compatible indeterminado.



**Ejemplo 4.4.** El siguiente SEL sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  es compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & = 2 \\ x_1 & & + & x_3 - x_4 = 6 \\ & x_2 & - & x_3 - x_4 = 5 \end{array} \right. \xRightarrow{F_2 - F_1} \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & = 2 \\ & - & x_2 & + x_3 - x_4 = 4 \\ & & x_2 & - x_3 - x_4 = 5 \end{array} \right.$$

$$\xRightarrow{F_3 + F_2} \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & = 2 \\ & - & x_2 & + x_3 - x_4 = 4 \\ & & & - 2x_4 = 9 \end{array} \right.$$

Las incógnitas principales son  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_4$ , por consiguiente, asignando a  $x_3$  el parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se tiene:

- De la última ecuación se deduce que  $x_4 = \frac{-9}{2}$ .
- De la penúltima ecuación, sustituyendo el valor obtenido para  $x_4$ , se tiene que  $-x_2 + \lambda - (\frac{-9}{2}) = 4$ , de donde  $x_2 = \frac{1}{2} + \lambda$ .
- De la primera ecuación, sustituyendo los valores hallados para  $x_4$  y para  $x_2$ , se tiene que  $x_1 + (\frac{1}{2} + \lambda) = 2$ , de donde  $x_1 = \frac{3}{2} - \lambda$ .

En consecuencia el conjunto de soluciones del sistema es  $\left\{ \left( \frac{3}{2} - \lambda, \frac{1}{2} + \lambda, \lambda, \frac{-9}{2} \right) / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ .

**Definición 4.5.** El mecanismo descrito para la obtención del conjunto de soluciones de un sistema en forma escalonada, compatible, se denomina *método de sustitución hacia atrás*. Asimismo, el número de incógnitas no principales es referido a menudo como *grados de libertad del sistema*.

Descripción del método de Gauss-Jordan:

**I.-** En primer lugar el método de Gauss-Jordan nos garantiza que todo SEL es equivalente a otro en forma escalonada reducida. Para ello, se transforma en primer lugar, mediante el método de Gauss, en otro equivalente en forma escalonada, luego se procede del modo siguiente:

- 1) Mediante adecuadas operaciones elementales fila del tipo  $c^{-1}F_i$ , se transforma el sistema en otro equivalente en el que cada incógnita principal tiene coeficiente 1.
- 2) Veamos ahora cómo conseguir que las incógnitas principales aparezcan sólo una vez. Obviamente, puesto que el sistema está en forma escalonada, la primera incógnita principal sólo aparece en la primera ecuación. Supongamos que la incógnita principal de la segunda ecuación, que ya no aparece en las ecuaciones siguientes, tiene coeficiente  $c$  en la primera ecuación, entonces, la operación elemental fila  $F_1 + (-c)F_2 = F_1 - cF_2$  transforma el sistema en otro equivalente en el que las incógnitas principales de la primera y segunda ecuaciones aparecen sólo una vez. De forma análoga, si la incógnita principal de la tercera ecuación,

que ya no aparece en las ecuaciones siguientes, tiene coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  en la primera y segunda ecuaciones, respectivamente, entonces, la aplicación de las operaciones elementales fila  $F_1 + (-c_1)F_3 = F_1 - c_1F_3$  y  $F_2 + (-c_2)F_3 = F_2 - c_2F_3$ , transforman el sistema en otro equivalente en el cual las incógnitas principales de la primera, segunda y tercera ecuaciones aparecen sólo una vez. El proceso se sigue hasta agotar todas las incógnitas principales.

**Ejemplo 4.6.** Partiendo de la forma escalonada obtenida para los SEL del ejemplo 4.1, página 14, y continuando la aplicación del método de Gauss-Jordan, transformamos estos sistemas en otros equivalentes en forma escalonada reducida:

1. Sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & 12x_3 & - & 4x_4 & = & 6 \end{array} \right. \xRightarrow{\frac{1}{12}F_3} \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \\ \xRightarrow{F_1 - 2F_2} \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & & - & 7x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ \\ \xRightarrow{F_1 + 7F_3 \text{ y } F_2 - 3F_3} \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & & & & + & \frac{2}{3}x_4 & = & \frac{1}{2} \\ & x_2 & & & & & & = & \frac{1}{2} \\ & & & & x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

2. Sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}_3$ :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{cccc} \bar{2}x & + & y & + & z & = & \bar{0} \\ & & & & \bar{2}z & = & \bar{1} \end{array} \right. \xRightarrow{\bar{2}F_2} \left\{ \begin{array}{cccc} \bar{2}x & + & y & + & z & = & \bar{0} \\ & & & & z & = & \bar{2} \end{array} \right. \\ \\ \xRightarrow{F_1 + \bar{2}F_2} \left\{ \begin{array}{cccc} \bar{2}x & + & y & & & = & \bar{1} \\ & & & & z & = & \bar{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

**II.-** Partiendo ahora de un sistema en forma escalonada reducida, de acuerdo con lo visto en el método de Gauss, sabemos que es compatible si y sólo si no tiene ecuaciones del tipo  $0 = b$ , con  $b$  un escalar no nulo, y además, si es compatible se tiene:

- a) Si todas las incógnitas del sistema son incógnitas principales, sabemos que el sistema es compatible determinado y es evidente que el proceso descrito nos proporciona directamente cuál es su única solución.

**Ejemplo 4.7.** Considerando la forma escalonada obtenida para el SEL del ejemplo 4.3, página 16, aplicando el método de Gauss-Jordan lo transformamos en otro equivalente en forma escalonada reducida:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cccc} x & - & 4y & - & z & = & 2 \\ & & - & y & - & 2z & = & 3 \\ & & & & - & 5z & = & 13 \end{array} \right. \xRightarrow{(-1)F_2 \text{ y } (\frac{-1}{5})F_3} \left\{ \begin{array}{cccc} x & - & 4y & - & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & -3 \\ & & & & z & = & \frac{-13}{5} \end{array} \right. \\ & \xRightarrow{F_1 + 4F_2} \left\{ \begin{array}{ccc} x & + & 7z & = & -10 \\ & y & + & 2z & = & -3 \\ & & z & = & \frac{-13}{5} \end{array} \right. \xRightarrow{F_1 - 7F_3 \text{ y } F_2 - 2F_3} \left\{ \begin{array}{ccc} x & & & = & \frac{41}{5} \\ & y & & = & \frac{11}{5} \\ & & z & = & \frac{-13}{5} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Obteniéndose directamente la única solución del sistema,  $(\frac{41}{5}, \frac{11}{5}, \frac{-13}{5}) \in \mathbb{R}^3$ .

- b) Si existen incógnitas del sistema que no son incógnitas principales, sabemos que el sistema es compatible indeterminado y, asignando a cada una de ellas, tal y como hemos indicado antes, un parámetro que recorre  $K$ , entonces cada incógnita principal queda directamente expresada en función de los parámetros asignados al resto de incógnitas de la única ecuación en la que aparece, obteniéndose así directamente el conjunto de soluciones del sistema, en función de estos parámetros.

**Ejemplo 4.8.** Considerando la forma escalonada obtenida para el SEL del ejemplo 4.4, página 16, aplicando el método de Gauss-Jordan lo transformamos en otro equivalente en forma escalonada reducida:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & & = & 2 \\ & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & & & - & 2x_4 & = & 9 \end{array} \right. \\ & \xRightarrow{(-1)F_2 \text{ y } (\frac{-1}{2})F_3} \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ & & & & & x_4 & = & \frac{-9}{2} \end{array} \right. \\ & \xRightarrow{F_1 - F_2} \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & & + & x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ & & & & & x_4 & = & \frac{-9}{2} \end{array} \right. \\ & \xRightarrow{F_1 + F_3 \text{ y } F_2 - F_3} \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & & + & x_3 & & = & \frac{3}{2} \\ & x_2 & - & x_3 & & = & \frac{1}{2} \\ & & & & x_4 & = & \frac{-9}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Las incógnitas principales son  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_4$ , por consiguiente, asignando a  $x_3$  el parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , directamente se obtienen las incógnitas principales en función de este parámetro, es decir:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \lambda, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \lambda, \quad x_4 = \frac{-9}{2}$$

En consecuencia el conjunto de soluciones del sistema es  $\left\{ \left( \frac{3}{2} - \lambda, \frac{1}{2} + \lambda, \lambda, \frac{-9}{2} \right) / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ .

## 5. Matrices sobre un cuerpo

Notemos en primer lugar, que los métodos que hemos descrito para el estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, métodos de Gauss y Gauss-Jordan, se basan en la aplicación, a un SEL, de adecuadas operaciones elementales fila, y éstas vienen determinadas por los coeficientes del sistema y la transformación que en cada caso se pretende conseguir. Este hecho nos lleva a introducir, en este apartado, las denominadas *matrices sobre un cuerpo*, así como algunas operaciones con ellas, ya que nos permitirán, entre otras cosas, adoptar una notación más cómoda para efectuar los procesos vistos de estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

**Definición** 5.1. Consideremos el producto cartesiano  $K^m \times \dots \times K^m$ , donde  $K$  es un cuerpo y  $m$  y  $n$  son enteros positivos. Llamaremos *matriz sobre  $K$* , con  $m$  filas y  $n$  columnas, a todo elemento  $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in K^m \times \dots \times K^m$  para el que, si para cada  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ , se tiene  $c_j = (a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^m) \in K^m$ , adoptamos la notación siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{bmatrix} = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

Dicho menos formalmente, es una distribución de  $m \times n$  elementos de  $K$  ordenados en  $m$  filas y  $n$  columnas. Además, si  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ , entonces  $C_j(A) = (a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^m) \in K^m$ , con  $1 \leq j \leq n$ , se denomina  $j$ -ésima columna de  $A$  y, análogamente,  $F_i(A) = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i) \in K^n$ , con  $1 \leq i \leq m$ , se denomina  $i$ -ésima fila de  $A$ . Asimismo, al elemento de  $a_j^i \in K$  se le denomina término en la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz  $A$ .

Al conjunto de todas las matrices con  $m$  filas y  $n$  columnas, sobre el cuerpo  $K$ , lo representaremos por  $M_{m \times n}(K)$ . Asimismo, una matriz para la que  $m = n$  diremos que es *cuadrada* y al conjunto  $M_{n \times n}(K)$  lo representaremos simplemente por  $M_n(K)$ .

**Nota 5.2.** Si  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y  $B = [b_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ , es evidente que  $A = B$  si y sólo si  $a_j^i = b_j^i$  para todo  $i$ , con  $1 \leq i \leq m$ , y todo  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ .

**Definición 5.3.** Si  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ , entonces definimos la *matriz traspuesta* de  $A$ , que representamos por  $A^T$ , según:

$$A^T = [c_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad \text{donde} \quad c_j^i = a_i^j \quad \forall i \text{ y } \forall j$$

Obviamente  $A^T \in M_{n \times m}(K)$  y además,  $(A^T)^T = A$ .

**Definición 5.4.** Considerando el elemento neutro de  $K$  para la suma, 0, y para el producto, 1, podemos definir las matrices siguientes:

- $O_{m,n} = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ , donde  $a_j^i = 0 \quad \forall i \text{ y } \forall j$ . A esta matriz la denominaremos *matriz nula* y si su tamaño no comporta ambigüedad, la representaremos simplemente por  $O$ .
- $I_n = [\delta_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ , donde  $\delta_j^i$ , denominada *delta de Kronecker*, se define según:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A esta matriz la denominaremos *matriz identidad*.

**Definición 5.5.** Teniendo en cuenta las operaciones  $+$  y  $\cdot$  del cuerpo  $K$ , definimos las siguientes operaciones con matrices:

- Si  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y  $B = [b_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ , definimos la *matriz suma* de  $A$  y  $B$ , según:

$$A + B = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} + [b_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = [c_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad \text{donde} \quad c_j^i = a_j^i + b_j^i$$

Obviamente  $A + B \in M_{m \times n}(K)$ , lo que expresaremos diciendo que *la suma en  $M_{m \times n}(K)$  es una operación binaria interna*.

- Si  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y  $a \in K$ , definimos el *producto del escalar  $a$  por la matriz  $A$* ,  $aA$ , según:

$$aA = a [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = [c_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad \text{donde} \quad c_j^i = aa_j^i$$

Obviamente  $aA \in M_{m \times n}(K)$ .

- Si  $A = [a_{ij}^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y  $B = [b_{ij}^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(K)$ , definimos el producto de la matriz  $A$  por la matriz  $B$ ,  $AB$ , según:

$$AB = [a_{ij}^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} [b_{ij}^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} = [c_{ij}^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t} \quad \text{donde} \quad c_j^i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i b_j^k$$

Obviamente  $AB \in M_{m \times t}(K)$ .

**Proposición 5.6.** Las operaciones anteriores verifican las propiedades siguientes:

- 1)  $A+B = B+A$  con  $A, B \in M_{m \times n}(K)$ . A esta propiedad nos referiremos diciendo que la *suma en  $M_{m \times n}(K)$  es conmutativa*.
- 2)  $(A+B)+C = A+(B+C)$  con  $A, B, C \in M_{m \times n}(K)$ . A esta propiedad nos referiremos diciendo que la *suma en  $M_{m \times n}(K)$  es asociativa* y normalmente omitiremos el uso del paréntesis y escribiremos simplemente  $A+B+C$ .
- 3)  $A+O_{m,n} = A = O_{m,n}+A$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $O_{m,n}$  la correspondiente matriz nula. A esta propiedad nos referiremos diciendo que  $O_{m,n}$  es *elemento neutro para la suma en  $M_{m \times n}(K)$* .
- 4)  $A+(-1)A = O_{m,n} = (-1)A+A$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $O_{m,n}$  la correspondiente matriz nula. A la matriz  $(-1)A$  la representaremos simplemente por  $-A$  y la denominaremos *matriz opuesta de  $A$* . Asimismo, para expresar una suma del tipo  $B+(-A)$ , escribiremos simplemente  $B-A$ .
- 5)  $a(A+B) = aA+aB$  con  $A, B \in M_{m \times n}(K)$  y  $a \in K$ .
- 6)  $(a+b)A = aA+bA$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $a, b \in K$ .
- 7)  $(ab)A = a(bA)$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $a, b \in K$ . En consecuencia, normalmente omitiremos el uso del paréntesis y escribiremos simplemente  $abA$ .
- 8)  $1A = A$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $1$  el neutro del producto de  $K$ .
- 9)  $(AB)C = A(BC)$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B \in M_{n \times t}(K)$  y  $C \in M_{t \times q}(K)$ . En consecuencia, normalmente omitiremos el uso del paréntesis y escribiremos simplemente  $ABC$ .
- 10)  $A(B+C) = AB+AC$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B, C \in M_{n \times t}(K)$ .
- 11)  $(A+B)C = AC+BC$  con  $A, B \in M_{m \times n}(K)$ ,  $C \in M_{n \times t}(K)$ .
- 12)  $AO_{n,t} = O_{m,t} = O_{m,n}B$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $B \in M_{n \times t}(K)$ .
- 13)  $AI_n = A = I_m A$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$ .
- 14)  $(aA)B = a(AB) = A(aB)$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B \in M_{n \times t}(K)$  y  $a \in K$ .
- 15)  $(AB)^T = B^T A^T$  con  $A \in M_{m \times n}(K)$  y  $B \in M_{n \times t}(K)$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Es consecuencia inmediata de la conmutatividad de la suma en  $K$ .
- 2) Es consecuencia inmediata de la asociatividad de la suma en  $K$ .
- 3) Es consecuencia inmediata de la definición de neutro para la suma en  $K$ .
- 4) Es consecuencia inmediata de que en  $K$  se cumple  $(-1)a = -(1a) = -a$  y la definición de opuesto de un elemento en  $K$ .
- 5) Es consecuencia inmediata de la distributividad del producto respecto a la suma en  $K$ .
- 6) Es consecuencia inmediata de la distributividad del producto respecto a la suma en  $K$ .
- 7) Es consecuencia inmediata de la asociatividad del producto en  $K$ .
- 8) Es consecuencia inmediata de la definición de neutro para el producto en  $K$ .
- 9) Supongamos que  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B = [b_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(K)$  y  $C = [c_j^i]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq q} \in M_{t \times q}(K)$ . Supongamos asimismo:

- $AB = [d_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t} \in M_{m \times t}(K)$  donde  $d_j^i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i b_j^k$
- $(AB)C = [e_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq q} \in M_{m \times q}(K)$  donde  $e_j^i = \sum_{1 \leq k' \leq t} d_{k'}^i c_j^{k'}$
- $BC = [f_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q} \in M_{n \times q}(K)$  donde  $f_j^i = \sum_{1 \leq k' \leq t} b_{k'}^i c_j^{k'}$
- $A(BC) = [g_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq q} \in M_{m \times q}(K)$  donde  $g_j^i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i f_j^k$

Pero, haciendo uso de las propiedades de la suma y producto en  $K$ , se tiene:

$$e_j^i = \sum_{1 \leq k' \leq t} d_{k'}^i c_j^{k'} = \sum_{1 \leq k' \leq t} \left( \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i b_{k'}^k \right) c_j^{k'} = \dots = \sum_{1 \leq k' \leq t, 1 \leq k \leq n} a_k^i b_{k'}^k c_j^{k'}$$

$$g_j^i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i f_j^k = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i \left( \sum_{1 \leq k' \leq t} b_{k'}^k c_j^{k'} \right) = \dots = \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq k' \leq t} a_k^i b_{k'}^k c_j^{k'}$$

- 10) Supongamos que  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B = [b_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(K)$  y  $C = [c_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(K)$ . De acuerdo con las definiciones de suma y producto de matrices, para justificar la igualdad  $A(B + C) = AB + AC$ , basta tener en cuenta que:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i (b_j^k + c_j^k) = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i b_j^k + \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i c_j^k$$

- 11) Se justifica de modo análogo a la anterior.
- 12) Es consecuencia inmediata de la definición de producto de matrices y de que en  $K$  se verifica  $a0 = 0 = 0a$ .

- 13) Supongamos  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y sea  $I_n = [\delta_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ , donde  $\delta_j^i$  es la delta de Kronecker, entonces, el término en la fila  $i$  y columna  $j$  de  $AI_n$  es  $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i \delta_j^k = a_j^i$ .

La igualdad  $I_m A = A$  se demuestra de forma análoga.

- 14) Supongamos  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B = [b_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(K)$  y  $a \in K$ , entonces el término en la fila  $i$  y columna  $j$  de cada una de las matrices  $(aA)B$ ,  $a(AB)$  y  $A(aB)$ , es:

- de  $(aA)B$  es:  $\sum_{1 \leq k \leq n} (aa_k^i) b_j^k$
- de  $a(AB)$  es:  $a \left( \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i b_j^k \right)$
- de  $A(aB)$  es:  $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i (ab_j^k)$

De donde, usando las propiedades de  $K$ , se tiene de forma inmediata que las tres matrices coinciden.

- 15) Supongamos  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y  $B = [b_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(K)$ , entonces:

- $AB = [d_j^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq t} \in M_{m \times t}(K)$  donde  $d_j^i = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i b_j^k$
- $(AB)^T = [d_j^i]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq m} \in M_{t \times m}(K)$  donde  $d_j^i = d_i^j$
- $A^T = [a_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in M_{n \times m}(K)$  donde  $a_j^i = a_i^j$
- $B^T = [b_j^i]_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n} \in M_{t \times n}(K)$  donde  $b_j^i = b_i^j$

Entonces  $B^T A^T \in M_{t \times m}(K)$  y su término en la fila  $i$  y columna  $j$  es:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} b_k^i a_j^k = \sum_{1 \leq k \leq n} b_i^k a_k^j = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k^j b_i^k = d_i^j = d_j^i$$

por lo que  $(AB)^T = B^T A^T$ .

□

**Definición** 5.7. Si  $A \in M_n(K)$  es tal que  $\exists B \in M_n(K)$  verificando que  $AB = I_n = BA$ , entonces se dice que  $A$  es *inversible* o *regular*. Al conjunto de las matrices inversibles de  $M_n(K)$  lo representaremos por  $GL(n, K)$ .

**Proposición** 5.8. Si  $A \in GL(n, K)$ , entonces  $A$  es simplificable por ambos lados para el producto de matrices, es decir, se cumplen las implicaciones siguientes:

$$AB_1 = AB_2 \quad \text{con } B_1, B_2 \in M_{n \times t}(K) \Rightarrow B_1 = B_2$$

$$B_1 A = B_2 A \quad \text{con } B_1, B_2 \in M_{m \times n}(K) \Rightarrow B_1 = B_2$$



DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso de las propiedades anteriores, se tiene:

$$AB_1 = AB_2 \Rightarrow A^{-1}AB_1 = A^{-1}AB_2 \Rightarrow I_n B_1 = I_n B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$$

La otra implicación se demuestra de modo análogo. □

**Definición 5.9.** Si  $A \in GL(n, K)$ , entonces la proposición anterior nos justifica que existe una única matriz  $B \in M_n(K)$  tal que  $AB = I_n = BA$ . A esta matriz la denominaremos *inversa* de  $A$  y la representaremos por  $A^{-1}$ .

**Proposición 5.10.** Si  $A \in GL(n, K)$ , entonces:

- 1)  $A^{-1} \in GL(n, K)$  con  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- 2)  $A^T \in GL(n, K)$  con  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- 3) Si también se tiene  $B \in GL(n, K)$ , entonces  $AB \in GL(n, K)$  con  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) De acuerdo con la definición anterior, es consecuencia inmediata de la definición de matriz inversible y de que  $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$ .
- 2) Análogamente, basta tener en cuenta que:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n \quad \text{y} \quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

- 3) Análogamente, basta tener en cuenta que:

$$ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \quad \text{y} \quad B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

□

**Definición 5.11.** Sea  $A = [a_{ij}^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y sean  $m_1, m_2, \dots, m_r$  y  $n_1, n_2, \dots, n_s$  enteros positivos verificando  $m_1 + m_2 + \dots + m_r = m$  y  $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$ . Si consideramos la siguiente partición de la matriz  $A$  en submatrices:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_s^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_s^2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_1^r & A_2^r & \cdots & A_s^r \end{array} \right]$$

donde, para cada  $p$ , con  $1 \leq p \leq r$  y cada  $q$ , con  $1 \leq q \leq s$ , se tiene:

$$A_q^p = [a_{ij}^i]_{m_1 + \dots + m_{p-1} + 1 \leq i \leq m_1 + \dots + m_{p-1} + m_p, \quad n_1 + \dots + n_{q-1} + 1 \leq j \leq n_1 + \dots + n_{q-1} + n_q} \in M_{m_p \times n_q}(K)$$

diremos que  $A$  ha quedado estructurada en  $r \times s$  bloques, con secuencia  $(m_1, m_2, \dots, m_r)$  para las filas y  $(n_1, n_2, \dots, n_s)$  para las columnas.

**Ejemplo 5.12.**

$$\begin{array}{ccc}
 a) \left[ \begin{array}{cc|cc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & 
 b) \left[ \begin{array}{c|c|ccc} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & 
 c) \left[ \begin{array}{c|c|cc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Estas son tres posibles estructuras por bloques de la misma matriz, en particular:

- a) Es una estructura en  $3 \times 3$  bloques, con secuencia  $(2, 1, 2)$  para las filas y  $(2, 1, 2)$  para las columnas.
- b) Es una estructura en  $2 \times 3$  bloques, con secuencia  $(3, 2)$  para las filas y  $(1, 1, 3)$  para las columnas.
- c) Es una estructura en  $3 \times 4$  bloques, con secuencia  $(1, 2, 2)$  para las filas y  $(1, 1, 2, 1)$  para las columnas.

**Nota 5.13.** Si  $A = [a_{ij}^i]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$  y  $B = [b_{ij}^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t} \in M_{n \times t}(K)$  están estructuradas por bloques de manera que la secuencia de columnas para  $A$  coincide con la de filas para  $B$ , en particular si suponemos:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_s^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_s^2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_1^r & A_2^r & \cdots & A_s^r \end{array} \right] \quad \text{con} \quad \begin{cases} \text{secuencia de filas: } (m_1, \dots, m_r) \\ \text{secuencia de columnas: } (n_1, \dots, n_s) \end{cases}$$

$$B = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_d^1 \\ \hline B_1^2 & B_2^2 & \cdots & B_d^2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_1^s & B_2^s & \cdots & B_d^s \end{array} \right] \quad \text{con} \quad \begin{cases} \text{secuencia de filas: } (n_1, \dots, n_s) \\ \text{secuencia de columnas: } (t_1, \dots, t_d) \end{cases}$$

Puesto que para cada  $p$ , con  $1 \leq p \leq r$ , cada  $k$ , con  $1 \leq k \leq s$  y cada  $q$ , con  $1 \leq q \leq d$ , se tiene  $A_k^p \in M_{m_p \times n_k}(K)$  y  $B_q^k \in M_{n_k \times t_q}(K)$ , es evidente que los productos  $A_k^p B_q^k$  tienen sentido y se verifica que  $A_k^p B_q^k \in M_{m_p \times t_q}(K)$  y  $\sum_{1 \leq k \leq s} A_k^p B_q^k \in M_{m_p \times t_q}(K)$ . Además, teniendo en cuenta la definición de producto de matrices, se puede demostrar que la siguiente matriz es una estructura por bloques del

producto  $AB$ , en particular, en  $r \times t$  bloques, con secuencia  $(m_1, \dots, m_r)$  para las filas y  $(t_1, \dots, t_d)$  para las columnas:

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^1 B_1^k & \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^1 B_2^k & \cdots & \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^1 B_t^k \\ \hline \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^2 B_1^k & \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^2 B_2^k & \cdots & \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^2 B_t^k \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^r B_1^k & \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^r B_2^k & \cdots & \sum_{1 \leq k \leq s} A_k^r B_t^k \end{array} \right]$$

en este caso, diremos que hemos realizado un *producto de matrices por bloques*. Notemos que, para realizar el producto  $AB$  por bloques, es necesario que la estructura de bloques utilizada para  $A$  y para  $B$  verifique que las secuencia de columnas de  $A$  coincida con la de filas de  $B$ .

**Ejemplos 5.14.**

1. Multiplicar por bloques las siguientes matrices reales, para la partición por bloques indicada:

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad ; \quad B = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ -2 & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & 3 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{array} \right]$$

Con la partición por bloques indicada las matrices  $A$  y  $B$  quedan de la forma siguiente:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ \hline A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{array} \right] \quad ; \quad B = \left[ \begin{array}{c} B_1^1 \\ \hline B_1^2 \\ \hline B_1^3 \end{array} \right]$$

Multiplicando  $A$  por  $B$  por bloques, se tiene:

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ \hline A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} B_1^1 \\ \hline B_1^2 \\ \hline B_1^3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{A_1^1 B_1^1 + A_2^1 B_1^2 + A_3^1 B_1^3}{\frac{A_1^2 B_1^1 + A_2^2 B_1^2 + A_3^2 B_1^3}{\frac{A_1^3 B_1^1 + A_2^3 B_1^2 + A_3^3 B_1^3}}} \end{array} \right] = \dots$$

$$\dots = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \hline \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -3 & 1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \hline \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -3 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2. En las matrices siguientes, obtener un partición que nos permita multiplicarlas por bloques y realizar su producto por bloques:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Interesa establecer particiones de  $A$  y  $B$  de manera que aparezcan bloques nulos, por ejemplo:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad ; \quad B = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

De este modo se tiene:

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} B_1^1 & B_2^1 \\ \hline B_1^2 & B_2^2 \end{array} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} A_1^1 B_1^1 + A_2^1 B_1^2 & A_1^1 B_2^1 + A_2^1 B_2^2 \\ \hline A_1^2 B_1^1 + A_2^2 B_1^2 & A_1^2 B_2^1 + A_2^2 B_2^2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_1^1 B_1^1 & O \\ \hline O & A_2^2 B_2^2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

## 6. Matrices elementales

Pretendemos ahora formalizar, en términos de operaciones con matrices, el hecho de aplicar sobre las filas de una matriz, las mismas operaciones elementales fila que hemos descrito en 3.2 para sistemas de ecuaciones lineales.

**Definición 6.1.** Para todo entero positivo  $n$ , definimos las siguientes matrices, denominadas *matrices elementales*:

- 1)  $E^r(a) \in M_n(K)$  representará la matriz que resulta de multiplicar, la  $r$ -ésima fila de la matriz identidad  $I_n$ , por el escalar no nulo  $a$ , es decir,  $E^r(a) = [\alpha_j^i]_{1 \leq i, j \leq n}$ , donde:

$$\alpha_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq r \\ a & \text{si } i = j = r \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

- 2)  $E_s^r(a) \in M_n(K)$ , con  $r \neq s$ , representará la matriz que resulta de sumarle, a la  $r$ -ésima fila de la matriz identidad  $I_n$ , la  $s$ -ésima fila, con  $r \neq s$ , multiplicada por el escalar  $a$ , es decir,  $E_s^r(a) = [\beta_j^i]_{1 \leq i, j \leq n}$ , donde:

$$\beta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ a & \text{si } i = r \text{ y } j = s \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

- 3)  $E^{r,s} \in M_n(K)$ , con  $r \neq s$ , representará la matriz que resulta de permutar las filas  $r$ -ésima y  $s$ -ésima de la matriz identidad  $I_n$ , es decir,  $E^{r,s} = [\gamma_j^i]_{1 \leq i, j \leq n}$ , donde:

$$\gamma_j^i = \begin{cases} 1 & \text{en los casos } \begin{cases} i = r \text{ y } j = s \\ i = s \text{ y } j = r \\ i = j \neq r, s \end{cases} \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases}$$

**Proposición 6.2.** Si  $E \in M_n(K)$  es una matriz elemental y  $A \in M_{n \times t}(K)$ , entonces la matriz  $EA \in M_{n \times t}(K)$  es la matriz que se obtiene de aplicar a  $A$  la misma operación elemental fila aplicada a  $I_n$  para obtener  $E$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la matriz  $A = [a_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t}$ , y sea  $EA = [c_j^i]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t}$ . Analizaremos cómo es esta matriz según el tipo de matriz elemental  $E$ .

- 1) Supongamos  $E = E^r(a) = [\alpha_j^i]_{1 \leq i, j \leq n}$ , entonces, teniendo en cuenta que  $\alpha_k^i = 0$  si  $i \neq k$ , se tiene:

$$c_j^i = \sum_{1 \leq k \leq n} \alpha_k^i a_j^k = \alpha_i^i a_j^i = \begin{cases} a_j^i & \text{si } i \neq r \text{ ya que } \alpha_i^i = 1 \text{ si } i \neq r \\ a a_j^r & \text{si } i = r \text{ ya que } \alpha_r^r = a \end{cases}$$

Es decir, la fila  $r$ -ésima del producto  $EA$  es la de  $A$  multiplicada por  $a$ , y el resto de filas coinciden con las de  $A$ .

- 2) Supongamos  $E = E_s^r(a) = [\beta_j^i]_{1 \leq i, j \leq n}$ , con  $r \neq s$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} - \text{ Si } i = r: \quad c_j^r &= \sum_{1 \leq k \leq n} \beta_k^r a_j^k = \beta_r^r a_j^r + \beta_s^r a_j^s = a_j^r + a a_j^s \\ - \text{ Si } i \neq r: \quad c_j^i &= \sum_{1 \leq k \leq n} \beta_k^i a_j^k = \beta_i^i a_j^i = a_j^i \end{aligned}$$

Es decir, la fila  $r$ -ésima del producto  $EA$  es la suma de la  $r$ -ésima fila de  $A$  más la  $s$ -ésima fila multiplicada por  $a$ , y el resto de filas coinciden con las de  $A$ .

- 3) Supongamos  $E = E^{r,s}$ , con  $r \neq s$ , entonces, haciendo uso de lo que ya hemos justificado para los otros dos tipos de matrices elementales, veamos en primer lugar que se cumple la siguiente igualdad:

$$E^{r,s} = E^r(-1)E_s^r(-1)E_r^s(1)E_s^r(-1)$$

En efecto, si  $f^i$ , con  $1 \leq i \leq n$ , representa la fila  $i$ -ésima de la matriz identidad,  $I_n$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} - \text{ en } E_s^r(-1) = E_s^r(-1)I_n, \text{ la fila } &\begin{cases} r\text{-ésima es: } f^r - f^s \\ s\text{-ésima es: } f^s \\ i\text{-ésima, con } i \neq r, s, \text{ es: } f^i \end{cases} \\ - \text{ en } E_r^s(1)E_s^r(-1), \text{ la fila } &\begin{cases} r\text{-ésima es: } f^r - f^s \\ s\text{-ésima es: } f^s + f^r - f^s = f^r \\ i\text{-ésima, con } i \neq r, s, \text{ es: } f^i \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{- en } E_s^r(-1)E_r^s(1)E_s^r(-1), \text{ la fila } \begin{cases} r\text{-ésima es: } f^r - f^s - f^r = -f^s \\ s\text{-ésima es: } f^r \\ i\text{-ésima, con } i \neq r, s, \text{ es: } f^i \end{cases} \\
 & \text{- en } E^r(-1)E_s^r(-1)E_r^s(1)E_s^r(-1), \text{ la fila } \begin{cases} r\text{-ésima es: } f^s \\ s\text{-ésima es: } f^r \\ i\text{-ésima, con } i \neq r, s, \text{ es: } f^i \end{cases}
 \end{aligned}$$

Por lo que se tiene la igualdad  $E^{r,s} = E^r(-1)E_s^r(-1)E_r^s(1)E_s^r(-1)$  y, en consecuencia,  $E^{r,s}A = E^r(-1)E_s^r(-1)E_r^s(1)E_s^r(-1)A$ , por lo que, razonando para  $A$  de igual manera a como lo acabamos de hacer partiendo de la matriz identidad, se obtiene que  $E^{r,s}A$  es la matriz que resulta de permutar las filas  $r$ -ésima y  $s$ -ésima en la matriz  $A$ .

□

**Nota 6.3.** Según hemos visto en la demostración de la proposición anterior, 6.2, las matrices elementales del tipo  $E^{r,s}$ , con  $r \neq s$ , es posible expresarlas como producto de matrices elementales de los otros dos tipos, en particular hemos visto la siguiente igualdad:

$$E^{r,s} = E^r(-1)E_s^r(-1)E_r^s(1)E_s^r(-1)$$

**Corolario 6.4.** Las matrices elementales son matrices inversibles y su inversa es también una matriz elemental.

**DEMOSTRACIÓN.** Haciendo uso de la proposición anterior, 6.2, es inmediato que, teniendo en cuenta los distintos tipos de matrices elementales, se tiene:

$$E^r(a)E^r(a^{-1}) = I_n = E^r(a^{-1})E^r(a)$$

$$E_s^r(a)E_s^r(-a) = I_n = E_s^r(-a)E_s^r(a)$$

$$E^{r,s}E^{r,s} = I_n = E^{r,s}E^{r,s}$$

Por lo que:

$$E^r(a) \in GL(n, K) \quad \text{con} \quad (E^r(a))^{-1} = E^r(a^{-1})$$

$$E_s^r(a) \in GL(n, K) \quad \text{con} \quad (E_s^r(a))^{-1} = E_s^r(-a)$$

$$E^{r,s}(a) \in GL(n, K) \quad \text{con} \quad (E^{r,s})^{-1} = E^{r,s}$$

□

## 7. Representación matricial de un sistema

Consideremos el siguiente sistema,  $S$ , de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas sobre  $K$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n & = & b^1 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n & = & b^2 \\ \cdots & & \cdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n & = & b^m \end{array} \right.$$

A partir de este sistema vamos a considerar las matrices siguientes:

- $A = \begin{bmatrix} a_j^i \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{m \times n}(K)$ , denominada *matriz de coeficientes* del sistema.
- $B = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}(K)$ , denominada *matriz de términos independientes* del sistema.
- $[A|B] = \begin{bmatrix} c_j^i \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n+1} \in M_{m \times (n+1)}(K)$ , denominada *matriz ampliada* del sistema, y donde para todo  $i$  se tiene que  $c_j^i = a_j^i$ , para todo  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ , y  $c_{n+1}^i = b^i$ . Es decir,  $[A|B]$  es una matriz con  $m$  filas y  $n + 1$  columnas, de modo que las primeras  $n$  columnas coinciden con las de  $A$  y la  $(n + 1)$ -ésima coincide con la única columna de  $B$ .
- Y por analogía, consideraremos  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , que denominamos *matriz de las incógnitas* del sistema.

Haciendo uso de las operaciones definidas con matrices y sus propiedades, es inmediato que las dos siguientes expresiones representan al sistema  $S$ :

- $x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \cdots + x_n C_n(A) = B$ , donde cada  $C_j(A)$  representa la  $j$ -ésima columna de  $A$ .
- $AX = B$

Y las soluciones del sistema son los elementos  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$ , que cumplen las siguientes condiciones equivalentes:



$$\blacksquare \alpha_1 C_1(A) + \alpha_2 C_2(A) + \cdots + \alpha_n C_n(A) = B$$

$$\blacksquare A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B$$

Asimismo, si  $AX = B$  y  $A'X = B'$  son sistemas equivalentes, entonces, de acuerdo con la proposición 6.2, página 30, existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t$  de manera que  $A' = E_1 E_2 \cdots E_t A$  y  $B' = E_1 E_2 \cdots E_t B$ .

### **Ejemplos 7.1.**

1. La representación matricial, del tipo  $AX = B$ , del sistema inicial del ejemplo 4.2, página 15, es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y éste ha sido transformado, por el método de Gauss, en el siguiente sistema en forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$$

Las matrices ampliadas de ambos sistemas son, respectivamente:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] ; \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-8}{3} \end{array} \right]$$

Recordemos finalmente que, tal y como se vio en 4.2, página 15, se trata de un SEL incompatible puesto que en el sistema equivalente en forma escalonada que hemos obtenido, está la ecuación  $0 = \frac{-8}{3}$ . En términos de la representación matricial de este sistema, esto se evidencia con la existencia de una fila, en la matriz ampliada del sistema en forma escalonada, en la que todos los términos son 0 salvo el último que es no nulo.

2. La representación matricial, del tipo  $AX = B$ , del sistema inicial del ejemplo 4.3, página 16, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y éste ha sido transformado, por el método de Gauss, en el siguiente sistema en forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}$$

y posteriormente, en 4.7, página 19, usando el método de Gauss-Jordan, lo hemos transformado en el siguiente sistema equivalente, en forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{5} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{-13}{5} \end{bmatrix}$$

Las matrices ampliadas de estos sistemas son, respectivamente:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] ; \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 13 \end{array} \right] ; \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{5} \end{array} \right]$$

Recordemos finalmente que, tal y como se vio en 4.3 y en 4.7, páginas 16 y 19, se trata de un SEL compatible, puesto que no tiene ecuaciones del tipo  $0 = b$ , con  $b$  un escalar no nulo, lo que, en términos de las matrices asociadas al sistema equivalente en forma escalonada y escalonada reducida, se evidencia en que en las correspondientes matrices ampliadas no hay filas donde el único término no nulo sea el de la columna de los términos independientes. Asimismo, sabemos que tiene una única solución,  $(\frac{41}{5}, \frac{11}{5}, \frac{-13}{5})$ , que además queda directamente determinada a partir de la última columna de la matriz ampliada del sistema equivalente en forma escalonada reducida.

Por otro lado, si consideramos la representación matricial de un SEL usando las columnas de su matriz de coeficientes, deducimos también que:

$$\frac{41}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{11}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-13}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. La representación matricial, del tipo  $AX = B$ , del sistema inicial del ejemplo 4.4, página 16, es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y éste ha sido transformado, por el método de Gauss, en el siguiente sistema en forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

y posteriormente, en 4.8, página 19, usando el método de Gauss-Jordan, lo hemos transformado en el siguiente sistema equivalente, en forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Las matrices ampliadas de estos sistemas son, respectivamente:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right] ; \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 9 \end{array} \right] ; \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{array} \right]$$

Recordemos finalmente que, tal y como se vio en 4.4 y en 4.8, páginas 16 y 19, se trata de un SEL compatible, puesto que no tiene ecuaciones del tipo  $0 = b$ , con  $b$  un escalar no nulo, lo que, en términos de las matrices asociadas al sistema equivalente en forma escalonada y escalonada reducida, se evidencia en que en las correspondientes matrices ampliadas no hay filas donde el único término no nulo sea el de la columna de los términos independientes. Asimismo, sabemos que es indeterminado porque no todas las incógnitas son principales, además, asignando a la única incógnita no principal,  $x_3$ , el parámetro  $\lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y expresando las incógnitas principales en función de este parámetro, se tiene:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \lambda \\ x_2 = \frac{1}{2} + \lambda \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = -\frac{9}{2} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

lo que nos da directamente que el conjunto de soluciones es  $\left\{(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{1}{2} + \lambda, \lambda, \frac{-9}{2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ , como ya vimos en 4.8, y que, utilizando notación matricial, puede también expresarse de la forma siguiente, denominada *forma matricial parametrizada*:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{-9}{2} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por otro lado, si consideramos la representación matricial de un SEL usando las columnas de su matriz de coeficientes, deducimos también que:

$$\left(\frac{3}{2} - \lambda\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{-9}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

## 8. La forma escalonada reducida de una matriz

**Definición 8.1.** Sea  $A \in M_{m \times n}(K)$ , con  $m$  y  $n$  enteros positivos, diremos que:

- $A$  tiene *forma escalonada*, si el SEL homogéneo  $AX = O$  tiene forma escalonada.
- $A$  tiene *forma escalonada reducida*, si el SEL homogéneo  $AX = O$  tiene forma escalonada reducida. Notemos que, en este caso, las columnas correspondientes a las incógnitas principales tendrán exactamente un término igual a 1, que denominaremos *pivote*, y los demás términos serán 0.

**Proposición 8.2.** Para toda matriz  $A \in M_{m \times n}(K)$ , con  $m$  y  $n$  enteros positivos, existe una única matriz,  $R \in M_{m \times n}(K)$ , que tiene forma escalonada reducida y se obtiene a partir de  $A$  mediante operaciones elementales fila. A la matriz  $R$  la denominaremos *la forma escalonada reducida* (FER) de  $A$ , y la representaremos por  $Fer(A)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La existencia de  $R$  está garantizada por aplicación del método de Gauss-Jordan al SEL  $AX = O$ , siendo  $R$  la matriz de coeficientes del sistema equivalente, en forma escalonada reducida, que se obtiene.

Respecto a la unicidad, supongamos que  $R_1$  y  $R_2$  son matrices en las condiciones del enunciado y veamos que necesariamente  $R_1 = R_2$ . De acuerdo con 3.1, página 9, los sistemas homogéneos  $AX = O$ ,  $R_1X = O$  y  $R_2X = O$  tienen el mismo número de ecuaciones, de incógnitas y el mismo conjunto de soluciones, ya que las operaciones elementales fila que transforman  $A$  en  $R_1$  o en  $R_2$ , no afectan a los

términos independientes al ser todos 0. Justificaremos en primer lugar que los sistemas  $R_1X = O$  y  $R_2X = O$  tienen las mismas incógnitas principales. Supongamos pues que  $x_i$  es incógnita principal de  $R_1X = O$ , por lo que la única ecuación de este sistema en la que aparece  $x_i$  será de la forma:

$$x_i + b_{i+1}x_{i+1} + \cdots + b_nx_n = 0$$

de donde se deduce que  $R_1X = O$  no puede tener ninguna solución de la forma  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ , y por lo tanto tampoco  $R_2X = O$ .

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $x_i$  no es incógnita principal del sistema  $R_2X = O$ , se verifica entonces una de las dos condiciones siguientes:

- $x_i$  no aparece en el sistema  $R_2X = O$ . En este caso  $(0, \dots, 0, \alpha_i = 1, 0, \dots, 0)$  es solución de  $R_2X = O$ , lo que hemos visto que no es posible.
- $x_i$  aparece en el sistema  $R_2X = O$  y por tanto lo hará en alguna ecuación de la forma siguiente, donde  $j < i$ :

$$x_j + \cdots + c_ix_i + \cdots + c_nx_n = 0$$

pero en este caso, el cálculo de soluciones que proporciona el método de Gauss-Jordan nos garantiza que  $R_2X = O$  tiene alguna solución del tipo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ , lo que hemos visto que no es posible.

En orden a justificar la igualdad de matrices  $R_1 = R_2$ , veamos que los sistemas  $R_1X = O$  y  $R_2X = O$  tienen exactamente las mismas ecuaciones, y en el mismo orden. En efecto, si  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ , con  $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$  son las incógnitas principales de ambos sistemas, entonces, por un lado se tiene que ambos sistemas tienen  $m - r$  ecuaciones del tipo  $0 = 0$  y éstas quedan al final, y por otro, para cada  $k$ , con  $1 \leq k \leq r$ , la  $k$ -ésima ecuación de uno y otro sistema es de la forma siguiente:

$$x_{i_k} + b_{t_1}x_{t_1} + \cdots + b_{t_s}x_{t_s} = 0 \quad \text{en } R_1X = O$$

$$x_{i_k} + c_{t_1}x_{t_1} + \cdots + c_{t_s}x_{t_s} = 0 \quad \text{en } R_2X = O$$

donde  $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_s}$  son las incógnitas no principales de ambos sistemas, posteriores a  $x_{i_k}$ , es decir, que se verifica  $i_k < t_1 < t_2 < \cdots < t_s$ . Entonces, de acuerdo con el método de Gauss-Jordan para la obtención del conjunto de soluciones, y teniendo en cuenta que ambos sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones, se tiene que, asignando a  $x_{t_1}$  el elemento  $1 \in K$  y  $0 \in K$  a todas las demás incógnitas no principales del sistema ( $x_{t_2}, \dots, x_{t_s}$  y también a todas las anteriores a  $x_{i_k}$ ), se obtiene

una solución de ambos sistemas,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  que cumplirá:

$$\alpha_{i_k} + b_{t_1} = 0 \quad \text{en } R_1 X = O$$

$$\alpha_{i_k} + c_{t_1} = 0 \quad \text{en } R_2 X = O$$

de donde se obtiene que  $b_{t_1} = c_{t_1}$ . Asignando ahora a  $x_{t_2}$  el elemento  $1 \in K$  y  $0 \in K$  a todas las demás incógnitas no principales del sistema, se obtiene que  $b_{t_2} = c_{t_2}$ , y procediendo de forma análoga con el resto de incógnitas, se justifica que la  $k$ -ésima ecuación de ambos sistemas es la misma.  $\square$

**Corolario 8.3.** Si  $M \in M_{m \times n}(K)$ , con  $m$  y  $n$  enteros positivos, es una matriz de la forma  $M = [M_1 | M_2]$ , con  $M_1 \in M_{m \times t}(K)$  y  $M_2 \in M_{m \times (n-t)}(K)$ , donde  $0 < t \leq n$ , entonces la forma escalonada reducida de  $M$ ,  $Fer(M)$ , es de la forma  $Fer(M) = [Fer(M_1) | M'_2]$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Basta tener en cuenta la obtención de la FER de una matriz que nos proporciona el método de Gauss-Jordan.  $\square$

**Nota 8.4.** De este corolario se deduce que si  $AX = B$  es un SEL, entonces se tiene  $Fer([A|B]) = [Fer(A)|B']$ , los sistemas  $AX = B$  y  $Fer(A)X = B'$  son equivalentes y este último está en forma escalonada reducida.

**Ejemplos 8.5.**

1. Obtener la forma escalonada reducida de la siguiente matriz  $M$ ,  $Fer(M)$ :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{F_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{F_3 - 3F_1 \text{ y } F_4 - 6F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \xRightarrow{F_3 - 2F_2 \text{ y } F_4 - 5F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{F_4 - \frac{10}{6}F_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \xRightarrow{\frac{-1}{6}F_3 \text{ y } \frac{-3}{8}F_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow \\ F_1 + F_2 & & F_1 - 2F_3 \text{ y } F_2 - F_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = Fer(M) \\ F_1 - (\frac{1}{3})F_4 \text{ y } F_2 + (\frac{1}{3})F_4 \text{ y } F_3 - (\frac{1}{3})F_4 & & \end{array}$$

Notemos finalmente que la matriz  $M$  es de la forma  $M = [A|B]$ , donde  $A$  y  $B$  son, respectivamente, la matriz de coeficientes y la matriz de términos independientes del SEL del ejemplo 4.2, página 15, es decir,  $M$  es su matriz ampliada, y se cumple que  $Fer(M) = [Fer(A)|B']$ , y se tiene que los sistemas  $AX = B$  y  $Fer(A)X = B'$  son equivalentes.

2. Obtener la forma escalonada reducida de la siguiente matriz  $M$ ,  $Fer(M)$ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ F_2 + F_1 \text{ y } F_3 - F_1 & & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 13 \end{bmatrix} & \Rightarrow \\ F_3 + 4F_2 & & (-1)F_2 \text{ y } (-\frac{1}{5})F_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{5} \end{bmatrix} & \Rightarrow \\ F_1 + 4F_2 & & F_1 - 7F_3 \text{ y } F_2 - 2F_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{5} \end{bmatrix} = Fer(M)$$

Notemos finalmente que la matriz  $M$  es de la forma  $M = [A|B]$ , donde  $A$  y  $B$  son, respectivamente, la matriz de coeficientes y la matriz de términos independientes del SEL del ejemplo 4.3, página 16, es decir,  $M$  es su matriz ampliada, y se cumple que  $Fer(M) = [Fer(A)|B']$ , y se tiene que los sistemas  $AX = B$  y  $Fer(A)X = B'$  son equivalentes.

3. Obtener la forma escalonada reducida de la siguiente matriz  $M$ ,  $Fer(M)$ :

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xRightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\
 &\xRightarrow{F_3 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 9 \end{bmatrix} \xRightarrow{(-1)F_2 \text{ y } (\frac{-1}{2})F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix} \\
 &\xRightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix} \xRightarrow{F_1 + F_3 \text{ y } F_2 - F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix} = Fer(M)
 \end{aligned}$$

Notemos finalmente que la matriz  $M$  es de la forma  $M = [A|B]$ , donde  $A$  y  $B$  son, respectivamente, la matriz de coeficientes y la matriz de términos independientes del SEL del ejemplo 4.4, página 16, es decir,  $M$  es su matriz ampliada, y se cumple que  $Fer(M) = [Fer(A)|B']$ , y se tiene que los sistemas  $AX = B$  y  $Fer(A)X = B'$  son equivalentes.

**Nota 8.6.** En los ejemplos anteriores, se han indicado las operaciones elementales fila que hemos ido realizando para transformar cada una de las matrices  $M$  en su correspondiente forma escalonada reducida,  $Fer(M)$ . Estas operaciones nos permiten asimismo, obtener una secuencia de matrices elementales,  $E_1, E_2, \dots, E_t$ , que nos proporcionan una relación entre  $M$  y  $Fer(M)$ , en particular, una relación del tipo  $Fer(M) = E_1 E_2 \cdots E_t M$ . En cada uno de los ejemplos anteriores, se tiene:

1.  $Fer(M) = E_4^3(\frac{-1}{3}) E_4^2(\frac{1}{3}) E_4^1(\frac{-1}{3}) E_3^2(-1) E_3^1(-2) E_2^1(1) E^4(\frac{-3}{8}) E^3(\frac{-1}{6}) E_3^4(\frac{-10}{6}) E_2^4(-5) E_2^3(-2) E_1^4(-6) E_1^3(-3) E^{1,2} M$ .
2.  $Fer(M) = E_3^2(-2) E_3^1(-7) E_2^1(4) E^3(\frac{-1}{5}) E^2(-1) E_2^3(4) E_1^3(-1) E_1^2(1) M$ .
3.  $Fer(M) = E_3^2(-1) E_3^1(1) E_2^1(-1) E^3(\frac{-1}{2}) E^2(-1) E_2^3(1) E_1^2(-1) M$ .

**Nota 8.7.** Tal y como se indicó en 8.4, página 38, y se ha puesto de manifiesto en los ejemplos anteriores, 8.5, si  $AX = B$  es un SEL entonces  $Fer([A|B]) = [Fer(A)|B']$  y los sistemas  $AX = B$  y  $Fer(A)X = B'$  son equivalentes. Por consiguiente, si nuestro propósito es sólo clasificar, y resolver en su caso, un SEL, *no necesitamos conocer el proceso* de transformación de su matriz ampliada en su



correspondiente forma escalonada reducida, *sino simplemente conocer su forma escalonada reducida*. En este sentido, hay algunos programas informáticos, que nos proporcionan herramientas útiles para el cálculo de la forma escalonada reducida de una matriz. En particular, el programa "DERIVE", nos permite calcular la forma escalonada reducida de una matriz mediante la instrucción ROW\_\_REDUCE.

## 9. Rango de una matriz. Teorema de Rouché-Frobenius

**Definición 9.1.** Si  $A \in M_{m \times n}(K)$ , con  $m$  y  $n$  enteros positivos, llamaremos *rango de  $A$* , y lo representaremos por  $rgA$ , al número de filas no nulas de  $Fer(A)$ . Obviamente el rango de  $A$  coincide asimismo con el número de pivotes de  $Fer(A)$  y con el número de incógnitas principales del SEL homogéneo  $Fer(A)X = O$ , además,  $rgA \leq m, n$ .

### Ejemplos 9.2.

$$1. \text{ Si } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } rgM = 4 \text{ ya que } Fer(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2. \text{ Si } M = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ entonces } rgM = 3 \text{ ya que } Fer(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{5} \end{bmatrix}.$$

$$3. \text{ Si } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ entonces } rgM = 3 \text{ ya que } Fer(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}.$$

**Nota 9.3.** De la definición de rango de una matriz, y teniendo en cuenta el corolario 8.3, página 38, es inmediato que si  $M = [M_1|M_2] \in M_{m \times n}(K)$ , con  $M_1 \in M_{m \times t}(K)$  y  $M_2 \in M_{m \times (n-t)}(K)$ , donde  $0 < t \leq n$ , entonces  $rgM_1 \leq rgM$ . En particular, el rango de la matriz de coeficientes de un SEL será siempre menor o igual que el de su correspondiente matriz ampliada.

En el siguiente resultado caracterizamos si un SEL es o no compatible y, caso de serlo, si es o no determinado, en términos del rango de su matriz de coeficientes y de su matriz ampliada.

**Teorema 9.4.** (*Rouché-Frobenius*) Sea  $AX = B$  un sistema con  $m$  ecuaciones lineales y  $n$  incógnitas sobre  $K$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos. Entonces:

- 1)  $AX = B$  es compatible si y sólo si  $rgA = rg[A|B]$ .
- 2)  $AX = B$  es compatible determinado si y sólo si  $rgA = rg[A|B] = n$ .

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta la nota 8.4, página 38, si  $Fer([A|B]) = [Fer(A)|B']$ , sabemos que los sistemas  $AX = B$  y  $Fer(A)X = B'$  son equivalentes y este último está en forma escalonada reducida. Además, considerando las caracterizaciones vistas en los métodos de Gauss y Gauss-Jordan, se tiene:

- 1)  $AX = B$  es compatible  $\iff Fer(A)X = B'$  es compatible  $\iff Fer(A)X = B'$  no tiene ecuaciones de la forma  $0 = b$ , con  $b$  un escalar no nulo  $\iff [Fer(A)|B'] = Fer([A|B])$  no tiene filas de la forma  $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$   $\iff$  el número de filas no nulas de  $[Fer(A)|B'] = Fer([A|B])$  y de  $Fer(A)$  es el mismo  $\iff rg[A|B] = rgA$
- 2)  $AX = B$  es compatible determinado  $\iff Fer(A)X = B'$  es compatible determinado  $\iff Fer(A)X = B'$  es compatible y todas sus incógnitas son principales  $\iff rg[A|B] = rgA$  y el número de pivotes es  $n$   $\iff rg[A|B] = rgA = n$

□

## 10. Caracterización de matrices inversibles

Pretendemos a continuación, ver una serie de condiciones que caracterizan a las matrices inversibles, cuya definición se dio en 5.7, página 24.

**Proposición 10.1.** Para una matriz cuadrada  $A \in M_n(K)$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1)  $A$  es inversible.
- 2) Todo SEL de la forma  $AX = B$  es compatible determinado.
- 3)  $rgA = n$ .
- 4)  $Fer(A) = I_n$ .
- 5)  $A$  es producto de matrices elementales.

DEMOSTRACIÓN.

1)  $\implies$  2): Si  $A$  es inversible, entonces se tiene:

$$AX = B \implies A^{-1}AX = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B \in M_{n \times 1}(K)$$

por lo que el SEL  $AX = B$  tiene obviamente solución y ésta es única.

2)  $\implies$  3): En particular el sistema  $AX = O$  es compatible y determinado, y del teorema de Rouché-

Frobenius deducimos que  $rgA = n$ .

3)  $\implies$  4): Si  $rgA = n$ , la matriz  $Fer(A)$  tiene  $n$  pivotes por lo que necesariamente  $Fer(A) = I_n$ .

4)  $\implies$  5): Si  $Fer(A) = I_n$ , entonces existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t$  de manera que  $I_n = E_1 E_2 \cdots E_t A$ . Haciendo uso del corolario 6.4, página 31, se tiene  $A = E_t^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$  y que  $A$  es producto de matrices elementales.

5)  $\implies$  1): Es consecuencia del corolario 6.4, página 31, y de que el producto de matrices inversibles es de nuevo una matriz inversible.

□

**Corolario** 10.2. Si  $C, A \in M_n(K)$  verifican que  $CA = I_n$ , entonces  $C$  y  $A$  son inversibles y  $C = A^{-1}$ .

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que  $A$  es inversible, para ello, de acuerdo con la proposición anterior, 10.1, basta justificar que todo SEL de la forma  $AX = B$  es compatible determinado, lo cual es cierto ya que:

$$AX = B \implies CAX = CB \implies I_n X = CB \implies X = CB$$

por consiguiente  $A$  es inversible y existe  $A^{-1} \in M_n(K)$  tal que  $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ , y de aquí se tiene:

$$CA = I_n \implies CAA^{-1} = I_n A^{-1} \implies C = A^{-1}$$

lo que demuestra que  $C$  también es inversible y la igualdad  $C = A^{-1}$ .

□

**Nota** 10.3. De las dos demostraciones anteriores se deduce que si  $A \in M_n(K)$  es inversible, existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t$  de manera que  $I_n = E_1 E_2 \cdots E_t A$ , y de aquí se tiene que  $A^{-1} = E_1 E_2 \cdots E_t$ . Por consiguiente, de acuerdo con la proposición 6.2, página 30, y ya que  $E_1 E_2 \cdots E_t = E_1 E_2 \cdots E_t I_n$ , para calcular la matriz  $A^{-1}$  basta realizar sobre la matriz identidad las mismas operaciones elementales fila que hemos utilizado para transformar  $A$  en  $I_n$ . En consecuencia, para calcular  $A^{-1}$  se puede proceder considerando que:

$$Fer([A|I_n]) = [Fer(A)|A^{-1}] = [I_n|A^{-1}]$$

**Ejemplos 10.4.**

1. Para comprobar si la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ , es inversible y, caso de serlo, calcular su inversa, calculamos en primer lugar la forma escalonada reducida de la matriz  $M = [A|I_n]$ , que es:

$$Fer(M) = [Fer(A)|A'] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

Por consiguiente  $A$  es inversible y  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

2. Para comprobar si la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ , es inversible y, caso de serlo, calcular su inversa, calculamos en primer lugar la forma escalonada reducida de la matriz  $M = [A|I_n]$ , que es:

$$Fer(M) = [Fer(A)|A'] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right]$$

Por consiguiente  $A$  no es inversible ya que  $rg A = 2$ .