

Fundamentos Matemáticos de la Informática II  
Ejercicios

**Hoja 4 - Espacios vectoriales**

- Sea  $\mathbb{R}^+$  el conjunto de los números reales positivos. Probar que  $(\mathbb{R}^+, *, 1)$ , con  $*$  :  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ;  $u * v = uv$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con la ley de composición externa  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ;  $\lambda \cdot v = v^\lambda$ .
- Sea  $n$  un entero positivo. Determinar si  $V$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  en cada uno de los siguientes casos:
 

a) $V = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \geq 0\}$	c) $V = \{(a_1, \dots, a_n) : \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$
b) $V = \{(a_1, \dots, a_n) : \sum_{i=1}^n a_i = 0\}$	d) $V = \{(a_1, \dots, a_n) : \max\{ a_i \}_{i=1}^n \leq 1\}$
- Determinar en cada uno de los siguientes casos si el vector  $v$  pertenece al subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  generado por  $F$ .
 

a) $v = (5, 2, -3), F = \{(1, 1, -1), (2, -1, 0)\}$	c) $v = (-1, 2, 1), F = \{(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 0, -1)\}$
b) $v = (-2, 0, -1), F = \{(1, 1, -1), (2, -1, 0)\}$	d) $v = (-1, -1, -1), F = \{(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 0, -1)\}$
- Considérense los subespacios  $U = \mathcal{V}\{(1, -1, 0, 1), (0, 3, 0, 4)\}$ ,  $V = \mathcal{V}\{(2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1)\}$  y  $W = \mathcal{V}\{(1, 0, -1, 2), (-1, 1, 0, 1), (2, 2, -4, 10)\}$  de  $\mathbb{R}^4$ .  
Calcular una expresión paramétrica para los vectores y un sistema generador de los siguientes subespacios:
 

a) $U \cap V$	c) $V \cap W$	e) $U \cap W$	g) $U \cap V \cap W$
b) $U + V$	d) $V + W$	f) $U + W$	h) $U + V + W$
- Calcular una sistema generador de los siguientes subespacios vectoriales.
 

a) $V = \{(\lambda + 2\mu + 3\theta, \lambda - \mu, -\lambda - \theta) : \lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .	b) $W = \{(\lambda + \theta, \lambda - 2\mu + \theta, -\lambda - \mu + \theta) : \lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$
c) $U = \{(\lambda + \mu + 2\theta, 2\lambda - \mu + \theta, \mu + \theta, \lambda + \theta) : \lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$	d) $X = \{(\lambda + \mu - \theta, \lambda - \mu, \mu + \theta, \lambda + \mu + \theta) : \lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

 Determinar si los vectores  $(5, -1, -1)$  y  $(0, 0, -1)$  pertenecen a  $V$ .
- Determinar si los siguientes conjuntos de vectores constituyen un sistema libre. En caso negativo, eliminar algún/os vector/es de manera que es sistema resultante genere el mismo subespacio y sí sea libre.
 

a) $\{x^3, x - 2, x^4 - 1\} \subseteq \mathbb{R}[x]$	c) $\{(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, -2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
b) $\{2x^2 - 1, -x^2 + 2, -5\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$	d) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
- Calcular una base del subespacio que generan las siguientes familias de vectores.
 

a) $\{(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$	c) $\{(2, 2, -1, 0), (1, 1, 2, -1), (1, 2, -2, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
b) $\{(1, i, 1 + i), (1, 0, 0), (2i, 1, 1 - i)\} \subseteq \mathbb{C}^3$	d) $\{(3, 6, 1, 0), (1, 0, -1, 2), (2, 3, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
- Probar que el sistema  $F$  es libre y completarlo hasta obtener una base del espacio correspondiente en cada uno de los siguientes casos.

- a)  $F = \{(2, 1, -1), (1, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$       c)  $F = \{(1, -1, 2, 1), (0, 1, -1, 2), (2, 0, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$   
 b)  $F = \{x - 1, (x - 1)^2\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$       d)  $F = \{x^3 - 1, x^2 + 2, 1\} \subseteq \mathbb{R}_4[x]$

9. Probar que la aplicación

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2y - x \end{array}$$

no es lineal.

10. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $f(x, y, z) = (2x + y, -z, 0)$ .

- a) Probar que  $f$  es lineal.  
 b) Calcular el  $\text{Ker } f$  y hallar una base de dicho subespacio.  
 c) ¿Pertenece  $(6, -2, 0)$  a  $\text{Ker } f$ ?  
 d) Hallar el rango de  $f$ .

11. Probar que cada una de las siguientes es una aplicación lineal y calcular el núcleo y la imagen de cada una de ellas:

- a)  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a + bx + cx^2 & \longmapsto & a - b + (c - b)i \end{array}$       c)  $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (a + b, a + c, b + c) \end{array}$   
 b)  $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p(x) & \longmapsto & (p(0), p(1), p(2)) \end{array}$       d)  $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (a - b, b - c, c - a, 3a - 2b - c) \end{array}$

12. Probar que si  $f : V \longrightarrow V'$  y  $g : V' \longrightarrow V''$  son aplicaciones lineales, entonces la composición  $g \circ f$  también es una aplicación lineal, y que si  $f$  es una aplicación lineal biyectiva entonces su inversa  $f^{-1}$  también es una aplicación lineal.

13. Probar que si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita y  $f : V \longrightarrow V'$  es una aplicación lineal, entonces  $\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$ .

14. Sean  $V$  y  $V'$  dos  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, y  $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  y  $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$  bases de  $V$  y  $V'$  respectivamente. Sea  $f : V \longrightarrow V'$  la (única) aplicación lineal tal que  $f(u_1) = w_1 + w_2 + 2w_3$ ,  $f(u_2) = 2w_1 + 2w_2 + 4w_3$ ,  $f(u_3) = -w_2 + w_3$ ,  $f(u_4) = 2w_1 + 3w_2 + 3w_3$ ,  $f(u_5) = w_1 - w_2 + 4w_3$ .

- a) Expresar la imagen por  $f$  de un vector  $v \in V$  cualquiera.  
 b) Determinar  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$ , y calcular sus dimensiones.

15. ¿Existe una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(1, 1, 0) = (1, 0)$ ,  $f(1, 1, 1) = (1, -1)$ ,  $f(-1, 0, 1) = (-1, -2)$ ? En caso afirmativo, ¿es única?

16. Construir una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  cuya imagen esté generada por los vectores  $(2, 0, 1)$  y  $(-1, 3, 1)$ .

17. Construir una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que su núcleo esté generado por los vectores  $(-1, 0, 0, 1)$  y  $(1, 3, 2, 0)$ , y su imagen por los vectores  $(1, 1, 1)$  y  $(0, -2, 1)$ .

18. Construir una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

- a)  $f(1, 0, 0)$  es proporcional al vector  $(0, 0, 1)$   
 b)  $f \circ f = f$   
 c)  $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0\}$

¿Es  $f$  la única aplicación lineal que verifica (a), (b) y (c)?

19. Sean  $V$  y  $V'$  dos espacios vectoriales de dimensión  $n$  y  $f : V \longrightarrow V'$  una aplicación lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a)  $f$  es un isomorfismo;  
 b)  $f$  es un epimorfismo;  
 c)  $f$  es un monomorfismo.