

## Tema 5

# Matrices

A lo largo de este tema,  $K$  será un cuerpo.

### 1. Matrices

(1.1) Sean  $n$  y  $m$  enteros positivos. Un *matriz* de tamaño  $n \times m$  (o de  $n$  filas y  $m$  columnas) con coeficientes en  $K$  es una aplicación

$$\begin{aligned} A: \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} &\longrightarrow K \\ (i, j) &\longmapsto A(i, j). \end{aligned}$$

Al escalar  $A(i, j)$  se le llama coeficiente de la  $i$ -ésima fila,  $j$ -ésima columna de la matriz  $A$ . Siguiendo esta nomenclatura, también se suele representar la matriz  $A$  de forma esquemática por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

donde  $a_{ij} = A(i, j)$  para  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq m$ , o más brevemente, por  $A = (a_{ij})$

Al conjunto de las matrices de tamaño  $n \times m$  con coeficientes en  $K$  se le denota por  $M_{n \times m}(K)$ .

(1.2) Sean  $n$ ,  $m$  y  $l$  enteros positivos. Se pueden definir las operaciones siguientes:

(1.2.1) suma de matrices

$$\begin{aligned} +: M_{n \times m}(K) \times M_{n \times m}(K) &\longrightarrow M_{n \times m}(K) \\ (A, B) &\longmapsto A + B = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j; \\ A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \end{aligned}$$

(1.2.2) producto de un escalar por una matriz

$$\begin{aligned} \cdot: K \times M_{n \times m}(K) &\longrightarrow M_{n \times m}(K) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda \cdot A = (d_{ij}), \quad d_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall i, j; \\ A = (a_{ij}) \end{aligned}$$

**(1.2.3)** producto de matrices

$$\begin{aligned} * : M_{n \times m}(K) \times M_{m \times l}(K) &\longrightarrow M_{n \times l}(K) \\ (A, B) &\longmapsto A * B = (e_{ik}), \quad e_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \quad \forall i, k; \\ A = (a_{ij}), B = (b_{jk}) & \end{aligned}$$

El conjunto  $M_{n \times m}(K)$  es un  $K$ -espacio vectorial con la suma de matrices y el producto por escalares definido de esa manera. Además, el conjunto  $\{E_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ , donde

$$E_{ij} = (e_{kl}) \in M_{n \times m}(K), \quad e_{kl} = \begin{cases} 1, & k = i \text{ y } l = j; \\ 0, & k \neq i \text{ o } l \neq j \end{cases}$$

es una base de  $M_{n \times m}(K)$ , con lo que  $\dim_K M_{n \times m}(K) = nm$ .

**(1.3)** Sea  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ . Se llama *matriz transpuesta* de  $A$ , y se denota por  $A^t$ , a la matriz  $A^t = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$  cuyos coeficientes son  $b_{ij} = a_{ji}$  para  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq n$ .

Para cada entero positivo  $n$  se denota por  $I_n$  a la matriz de tamaño  $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es una especie de elemento neutro para el producto de matrices, porque si  $A \in M_{n \times m}(K)$ , entonces  $I_n * A = A$  y  $A * I_m = A$ .

**(1.4)** Una matriz se dice que es *cuadrada* si tiene el mismo número de filas que de columnas. El conjunto de matrices cuadradas de tamaño  $n \times n$  con coeficientes en  $K$  se denota por  $M_n(K)$ .

Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  se dice que

**(1.4.1)** es *diagonal* si  $a_{ij} = 0$  siempre que  $i \neq j$ ;

**(1.4.2)** es *simétrica* si  $a_{ij} = a_{ji}$  para cualesquiera  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , o equivalentemente, si  $A^t = A$ ;

**(1.4.3)** es *antisimétrica* si  $a_{ij} = -a_{ji}$  para cualesquiera  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , o equivalentemente, si  $A^t = -A$ ;

**(1.4.4)** es *triangular superior* si  $a_{ij} = 0$  para  $1 \leq j < i \leq n$ ;

**(1.4.5)** es *triangular inferior* si  $a_{ij} = 0$  para  $1 \leq i < j \leq n$ ;

**(1.4.6)** es *invertible* si existe otra matriz en  $M_n(K)$ , a la que llamamos *inversa* de  $A$  y denotamos por  $A^{-1}$ , tal que

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_n.$$

**(1.5)** Si  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  es una matriz invertible y  $A^{-1} = (b_{ij})$  es su inversa, entonces, para cada  $i, k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k; \\ 0, & \text{si } i \neq k, \end{cases}$$

Por lo tanto, la  $k$ -ésima columna de la matriz  $A^{-1}$  es solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = 1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

## 2. Matriz asociada a una aplicación lineal

**(2.1)** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Si  $v \in V$ , se llaman *coordenadas de  $V$  en la base  $B$*  a los (únicos) escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  tales que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

**(2.2)** Sean  $V$  y  $V'$   $K$ -espacios vectoriales de dimensiones  $m$  y  $n$ ,  $f : V \rightarrow V'$  una aplicación lineal y  $B = \{v_1, \dots, v_m\}$  y  $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$  bases de  $V$  y  $V'$ . Si para  $1 \leq i \leq m$  llamamos  $a_{1i}, \dots, a_{ni}$  a las coordenadas de  $f(v_i)$  en la base  $B'$  (o sea,  $f(v_i) = a_{1i}u_1 + \cdots + a_{ni}u_n$ ) entonces si  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  son las coordenadas de  $v \in V$  en la base  $B$  se tiene que

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_m f(v_m) \\ &= \lambda_1 (a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n) + \cdots + \lambda_m (a_{1m}u_1 + \cdots + a_{nm}u_n) \\ &= (a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1m}\lambda_m)u_1 + \cdots + (a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nm}\lambda_m)u_n, \end{aligned}$$

esto es, las coordenadas de  $f(v)$  en la base  $B'$  son  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Se llama *matriz asociada a la aplicación lineal  $f$  respecto a las bases  $B$  y  $B'$* , y se denota por  $M_B^{B'}(f)$ , a la matriz de tamaño  $n \times m$  cuya  $i$ -ésima columna está formada por las coordenadas del vector  $f(v_i)$  en la base  $B'$  para  $1 \leq i \leq m$ .

Esta matriz sirve para, conocidas las coordenadas  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  de un vector  $v \in V$  en la base  $B$ , calcular las coordenadas  $\mu_1, \dots, \mu_n$  de  $f(v)$  en la base  $B'$  multiplicando

$$M_B^{B'}(f) * \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

**(2.3) Ejemplo.** Sean  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $V' = \mathbb{R}^2$  y

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\longmapsto f(a, b, c) = (a - b, 3a - b + 2c). \end{aligned}$$

Consideremos las bases  $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  y  $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$  respectivamente. La matriz asociada a  $f$  respecto a dichas bases es

$$M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cuando se cambian las bases, cambia la matriz asociada aunque la aplicación sea la misma. Consideremos ahora las bases  $B'' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  y  $B''' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ . La matriz asociada a  $f$  respecto a estas nuevas bases es

$$M_{B''}^{B'''}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**(2.4)** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $B$  y  $B'$  bases de  $V$ . Se llama *matriz de cambio de base* de  $B$  a  $B'$  a la matriz  $M_B^{B'}(id_V)$  asociada a la aplicación lineal identidad  $id_V : V \rightarrow V$  respecto a las bases  $B$  y  $B'$ .

La matriz de cambio de base sirve para, conocidas las coordenadas  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de un vector  $v \in V$  en la base  $B$ , calcular las coordenadas  $\mu_1, \dots, \mu_n$  del mismo vector  $v$  en la base  $B'$  multiplicando

$$M_B^{B'}(id_V) * \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

### 3. Propiedades de las matrices asociadas

**(3.1)** Sean  $V, V'$  y  $V''$  tres  $K$ -espacios vectoriales de dimensiones  $m, n$  y  $l$  y sean  $B, B'$  y  $B''$  bases de  $V, V'$  y  $V''$  respectivamente.

**(3.1.1)** Si  $f, g : V \rightarrow V'$  son aplicaciones lineales, entonces

$$M_B^{B'}(f + g) = M_B^{B'}(f) + M_B^{B'}(g).$$

**(3.1.2)** Si  $\lambda \in K$  y  $f : V \rightarrow V'$  es una aplicación lineal, entonces

$$M_B^{B'}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M_B^{B'}(f).$$

**(3.1.3)** Si  $f : V \rightarrow V'$  y  $g : V' \rightarrow V''$  son aplicaciones lineales, entonces

$$M_B^{B''}(g \circ f) = M_{B'}^{B''}(g) * M_B^{B'}(f).$$

**(3.1.4)** Si  $f : V \rightarrow V'$  es un isomorfismo, entonces  $M_B^{B'}(f)$  es una matriz inversible y su inversa es

$$(M_B^{B'}(f))^{-1} = M_{B'}^B(f^{-1}).$$

**(3.2)** Como consecuencia de (3.1.1) y (3.1.2), si  $V$  y  $V'$  son  $K$ -espacios vectoriales de dimensiones  $m$  y  $n$  con bases  $B = \{v_1, \dots, v_m\}$  y  $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(V, V') &\longrightarrow M_{n \times m}(K) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = M_B^{B'}(f) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

Además  $\varphi$  es un isomorfismo:

**(3.2.1)**  $\varphi$  es sobreyectiva, porque si  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ , entonces la aplicación  $f : V \rightarrow V'$  que al vector  $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$  le asigna el vector  $f(v) = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$ , donde  $\mu_i = a_{i1} \lambda_1 + \cdots + a_{im} \lambda_m$  para  $1 \leq i \leq n$ , es lineal y  $\varphi(f) = A$ ;

**(3.2.2)**  $\varphi$  es inyectiva porque si  $f \in \text{Ker} \varphi$ , entonces  $\varphi(f) = M_B^{B'}(f) = 0$ , o lo que es lo mismo,  $f(v_i) = 0u_1 + \cdots + 0u_n = 0$  para  $1 \leq i \leq m$ , de donde se sigue que  $f$  es la aplicación lineal cero.

Luego  $\mathcal{L}(V, V')$  es isomorfo a  $M_{n \times m}(K)$ , y eso implica que

$$\dim_K \mathcal{L}(V, V') = \dim_K M_{n \times m}(K) = nm.$$

**(3.3)** Si  $n$  es un entero positivo, se llama *grupo lineal general* y se denota por  $GL_n(K)$  al conjunto de las matrices  $A \in M_n(K)$  que son inversibles.

Como su nombre indica,  $GL_n(K)$  es un grupo con el producto de matrices. Además,  $GL_n(K)$  no es abeliano para  $n > 1$ .

**(3.4)** Sean  $n$  y  $m$  enteros positivos y sea  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ . Se llama *rango* de  $A$  a la dimensión del subespacio vectorial de  $K^n$  generado por las columnas de  $A$ , o equivalentemente (aunque la equivalencia no es trivial) a la dimensión del subespacio vectorial de  $K^m$  generado por las filas de  $A$ .

Si  $A$  es la matriz asociada a una aplicación lineal  $f : V \rightarrow V'$  respecto a un par de bases, entonces el rango de  $A$  coincide con el rango de  $f$ , esto es, con la dimensión del subespacio  $\text{Im} f$ .