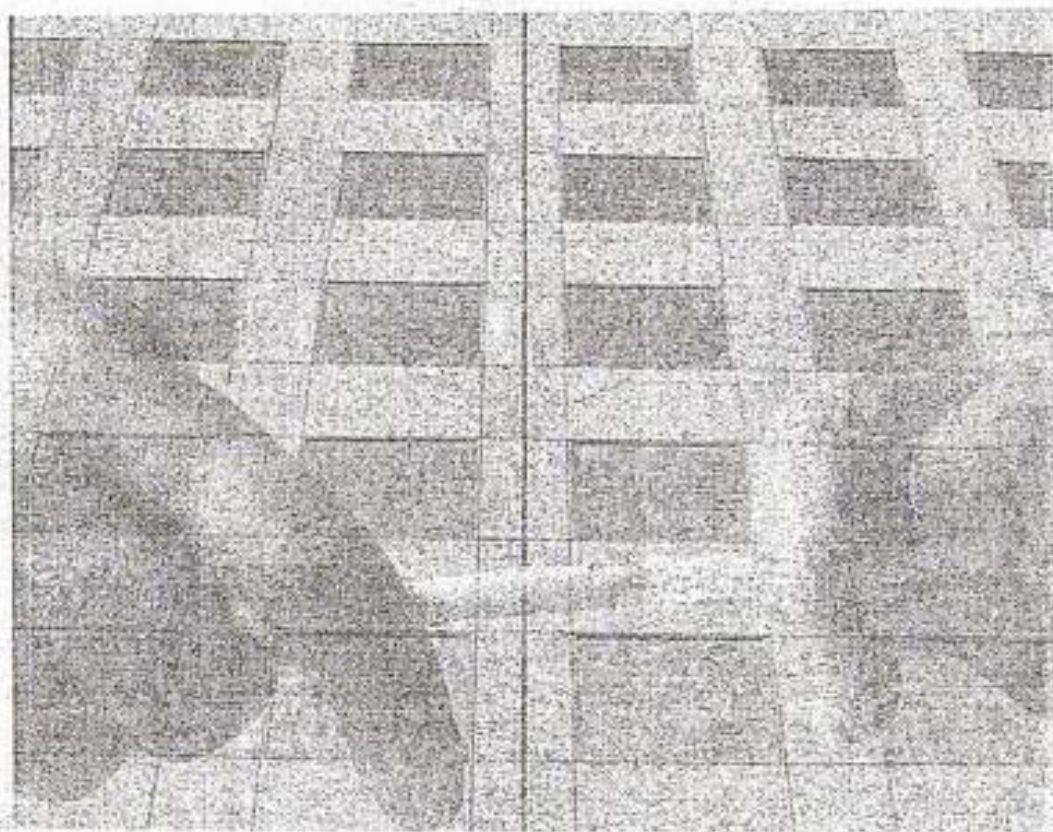


Prácticas de administración de empresas

Eduardo Pérez Gorostegui

RÁMIDE



Índice

Presentación	13
--------------------	----

PARTE PRIMERA

La dirección de empresas y la toma de decisiones

1. La decisión empresarial	17
1.1. Criterios de decisión en ambiente de incertidumbre y teoría de los juegos de estrategia	17
1.2. Probabilidad y riesgo	36
1.3. El análisis bayesiano	46
1.4. La determinación del grado de confianza	51
1.5. La teoría de la información	55
2. Instrumentos de planificación, programación y control	61
2.1. Los árboles de decisión y el valor esperado de la información perfecta	61
2.2. La programación lineal	86
2.3. El método PERT en certeza y los gráficos de Gantt	102
2.4. El método PERT en incertidumbre	127

PARTE SEGUNDA

Finanzas

3. Introducción a las decisiones financieras	141
3.1. El balance: conceptos básicos	141
3.2. Factores de los que depende el precio de la acción. Las decisiones financieras de la empresa	145

Índice

3.3. La medida de la rentabilidad	147
3.4. La estructura económico-financiera, el fondo de maniobra y el período medio de maduración	158
3.5. Los ratios como instrumento de análisis de la estructura económico-financiera de la empresa	179
4. Análisis y evaluación de inversiones	193
4.1. Variables fundamentales que definen un plan de inversión	193
4.2. Métodos estáticos de selección de inversiones	205
4.3. Métodos dinámicos de selección de inversiones	214
4.4. El VAN y el TIR en algunos casos especiales	236
4.5. Relaciones entre el VAN y el TIR	249
4.6. La rentabilidad requerida y la diferencia de riesgo entre las inversiones mutuamente excluyentes	269
4.7. La relación entre el plazo de recuperación simple y los criterios VAN y TIR cuando los flujos de caja son constantes y la duración de la inversión es ilimitada	286
5. Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento sobre la rentabilidad y el riesgo de la empresa	289
5.1. El apalancamiento y el punto muerto	289
5.2. Endeudamiento y rentabilidad	304
5.3. La probabilidad de insolvencia	313
5.4. El presupuesto de tesorería	315
6. El coste del capital y la valoración de empresas	321
6.1. El coste de los préstamos y empréstitos y el cálculo de una cuota de amortización constante	321
6.2. El efecto de los impuestos y de la inflación	328
6.3. El coste del crédito comercial	331
6.4. El coste del capital obtenido mediante la emisión de acciones	336
6.5. El coste de la autofinanciación y las decisiones de distribución de dividendos	339
6.6. El coste medio ponderado del capital	340
6.7. El coste del capital y la selección de inversiones. El coste de oportunidad del capital	343
6.8. Valoración de empresas	344
PARTE TERCERA	
Producción	
7. La función productiva de la empresa y el proceso de producción	355
7.1. La primera decisión: producir o comprar	355
7.2. Los costes de producción y su control	357
7.3. La medida de la productividad	362
7.4. Los bienes de equipo	374

8. La capacidad de producción	395
8.1. La capacidad de las instalaciones	395
8.2. La localización de las instalaciones	397
8.3. La programación de la producción	402
8.4. La planificación y control de las actividades productivas	413
9. Los inventarios	423
9.1. Modelos deterministas	423
9.2. Modelo probabilístico	428
10. El factor humano en la producción	431
10.1. Sistemas de remuneración por incentivos	431
 PARTE CUARTA Marketing 	
11. El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercado-técnico	443
11.1. Introducción	443
11.2. La función de demanda a corto plazo y sus elasticidades. La optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo	445
11.3. El control del presupuesto mercadotécnico	475
11.4. Estimación y previsión de la demanda	483
11.5. La previsión de cuotas de mercado y las cadenas de Markow	495
12. Investigación de mercados, segmentación y experimentación comercial	505
12.1. Sistemas de afijación en investigación de mercados	505
12.2. Métodos de segmentación de mercados	509
12.3. La experimentación comercial	527
13. El producto y el precio	537
13.1. El posicionamiento de marcas	537
13.2. La creación de nuevos productos	543
13.3. La decisión de determinación de precios y sus limitaciones	549
13.4. Algunos métodos de determinación de precios	552
13.5. Diferenciación y discriminación de precios	563
13.6. Canal de distribución y precios	568

14. Comunicación y distribución	571
14.1. La publicidad	571
14.2. La venta personal	583

PRUEBAS OBJETIVAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. Pruebas de las dos primeras partes	599
1.1. Primera prueba	599
I. Enunciados	599
II. Respuestas correctas	604
1.2. Segunda prueba	604
I. Enunciados	604
II. Respuestas correctas	609
1.3. Tercera prueba	610
I. Enunciados	610
II. Respuestas correctas	615
1.4. Cuarta prueba	615
I. Enunciados	615
II. Respuestas correctas	620
2. Pruebas de las dos últimas partes	621
2.1. Quinta prueba	621
I. Enunciados	621
II. Respuestas correctas	627
2.2. Sexta prueba	627
I. Enunciados	627
II. Respuestas correctas	633
2.3. Séptima prueba	633
I. Enunciados	633
II. Respuestas correctas	639
2.4. Octava prueba	639
I. Enunciados	639
II. Respuestas correctas	645
Apéndice de tablas estadísticas	647

Presentación

La Economía de la Empresa constituye una disciplina que no puede limitarse a los contenidos abstractos, sino que ha de incorporar elementos prácticos y casos concretos.

Este libro contiene más de trescientos setenta problemas, ejercicios y casos precisos para completar con material práctico una Introducción a la Economía de la Empresa. Por ello, los títulos de sus partes y capítulos coinciden con los que, en los manuales al uso, tienen las distintas materias cuyo contenido precisa de la realización de prácticas para conseguir una adecuada comprensión y aprendizaje de las mismas.

Como es propio de la metodología docente de la enseñanza a distancia, a la que el libro se adapta, se ha procurado que, a pesar de su vinculación a otro manual*, quien tenga una formación mínima, como la que se exige para iniciar estudios universitarios en nuestro país, pueda seguir las explicaciones de este libro y conseguir una comprensión adecuada sin necesidad de acudir previamente a dicho manual ni a ninguna otra fuente.

No se trata de una colección de problemas que no se pueden comprender sin haber estudiado antes otro libro de naturaleza conceptual o teórica, sino de un manual de prácticas en el que, cuando se plantea un nuevo concepto, éste se explica en la resolución del mismo problema en el que surge y, a menos de que se trate de un concepto muy sencillo, a continuación se incluye, como mínimo, otro problema semejante, en cuya resolución ya no se realizan tales explicaciones, para que el lector pueda comprobar, resolviéndolo por sí mismo,

* En concreto a nuestro manual *Introducción a la Administración de Empresas*, CEURA, Madrid, 1998.

Presentación

su nivel de comprensión. Consecuentemente, en cada problema se presupone el adecuado conocimiento del contenido de los problemas anteriores.

Ello permite al estudiante a distancia y al autodidacta seguir las explicaciones de otros manuales con cierta independencia, sin necesidad de acompañar el estudio de la parte práctica al ritmo seguido en la parte puramente conceptual.

Al final del libro se han recogido ocho pruebas objetivas de veinte preguntas cada una, que también ayudarán al lector a comprobar su nivel de asimilación.

En el apartado de agradecimientos hemos de manifestar nuestra gratitud a Manuel Pacheco, Irene Saavedra, Pilar Segura y Beatriz Rodrigo, excelentes compañeros y profesores de la Universidad Nacional de Educación a Distancia —que comparten nuestra responsabilidad en la asignatura de Introducción a la Economía de la Empresa—, por su apoyo, su colaboración y su aliento. También manifestamos nuestra gratitud a la joven profesora Victoria Fernández de Tejada, incorporada recientemente al equipo, quien nos ayudó considerablemente en la composición y preparación del texto.

En cualquier caso, evidentemente, la responsabilidad corresponde íntegramente al autor. Es ilusorio pensar que un trabajo, cualquiera que sea, es perfecto; todos son mejorables incluso después de varias revisiones, y éste ha de ser objeto de muchas. Pero nos sentiremos ampliamente recompensados sí, como es nuestro deseo, resulta útil tanto a nuestros estudiantes como a compañeros en la profesión docente y a profesionales de la empresa. Con su crítica lo mejoraremos.

Madrid, junio de 1998.

EDUARDO PÉREZ GOROSTEGUI

PARTE PRIMERA

La dirección de empresas y la toma de decisiones

1

La decisión empresarial

1.1. CRITERIOS DE DECISIÓN EN AMBIENTE DE INCERTIDUMBRE Y TEORÍA DE LOS JUEGOS DE ESTRATEGIA

Problema

1

El criterio de Laplace

Bunederssa es una empresa dedicada a la fabricación y venta de aparatos electrodomésticos, que se encuentra estudiando el lanzamiento de su nueva marca de refrigerador Frigox para competir con la empresa Munedirsa, que elabora otra marca dirigida al mismo segmento del mercado. El beneficio anual de Bunederssa depende de su estrategia de marketing y de la que siga Munedirsa. Aquella puede seleccionar la estrategia A, B o C, y ésta puede elegir entre las estrategias X, Y y Z. Bunederssa ignora las probabilidades de que Munedirsa elija la estrategia X, la Y o la Z, por lo cual se encuentra en situación de incertidumbre para decidir, pero conoce los beneficios anuales que se derivarían para ella de cada una de sus estrategias en función de cuál fuera la que eligiera su competidora, y son los que, en millones de unidades monetarias (u.m.), se recogen en la tabla 1.1 (matriz de decisión).

TABLA 1.1

		Estrategia de Munedirsa (en millones de u.m.)		
		X	Y	Z
Estrategia de Bunederssa	A	100	150	170
	B	130	160	160
	C	136	140	150

La interpretación de esta tabla es muy simple. Así, si Bunederssa elige la estrategia B, ganará 130 millones de u.m. si Munedirsa selecciona la X, 160 millones de u.m. si ésta elige la Y y 160 millones de u.m. si se decide por la Z.

Se desea saber cuál es la estrategia preferible para Bunederssa siguiendo el criterio de Laplace.

RESOLUCIÓN

Tradicionalmente se distinguen tres situaciones o ambientes de decisión:

- El ambiente de certeza, en el cual se conoce el resultado de cada una de las estrategias de decisión con total seguridad.
- El ambiente de riesgo, en el que se conocen los posibles resultados de cada estrategia, o alternativa, con sus respectivas probabilidades, en cuyo caso son aplicables técnicas como la de la esperanza matemática de cada estrategia, y es posible el cálculo, también, de su varianza asociada.
- El ambiente de incertidumbre, que puede ser estructurada o no estructurada. En la incertidumbre estructurada se conocen los resultados posibles de cada estrategia, aunque no sus probabilidades.

Así, en el presente caso, Bunederssa sabe que de la estrategia A pueden derivarse los resultados 100, 150 ó 170 millones de u.m., aunque no conoce las probabilidades que tiene cada uno de ellos. Sabe también, aunque no puede asignar las probabilidades, que, si sigue la estrategia B, puede obtener los resultados 130 y 160 millones de u.m. y que, si se decide por la estrategia C, los resultados pueden ser 136, 140 ó 150. En situación de incertidumbre no estructurada no se conocen ni siquiera los resultados posibles de cada estrategia.

El criterio de Laplace, como los que son objeto de estudio en los problemas siguientes, es aplicable en situación de incertidumbre estructurada. Este criterio parte de la consideración de que, ante la ignorancia de las probabilidades que tienen los distintos resultados posibles, lo más adecuado es asignarles la misma probabilidad a todos ellos, lo cual conduce, a su vez, a tomar, como resultado esperado, la media aritmética de dichos resultados posibles. Así, si sigue la estrategia A, suponiendo, como lo hace el criterio de Laplace, que existe la misma probabilidad de que Munedirsa siga la estrategia X, la Y o la Z (1/3), el resultado esperado será la media aritmética de los tres resultados posibles; es decir:

$$R_A = 100(1/3) + 150(1/3) + 170(1/3) = \frac{100 + 150 + 170}{3} = 140 \text{ millones de u.m.}$$

Del mismo modo, en cuanto a la estrategia *B*, se obtiene:

$$R_B = \frac{130 + 160 + 160}{3} = 150 \text{ millones de u.m.}$$

Y, en relación a la *C*:

$$R_C = \frac{136 + 140 + 150}{3} = 142 \text{ millones de u.m.}$$

**Problema
2**

El criterio de Wald

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Bunederssa, del problema anterior, siguiendo el criterio de Wald?

RESOLUCIÓN

El criterio de Wald es el que adopta aquella persona pesimista que supone que lo que ocurrirá es lo peor que pueda sucederle y elige aquella estrategia a la que le corresponde el mejor entre los peores resultados posibles. Así, en este caso, si se elige la alternativa *A*, el menor resultado es el correspondiente a la estrategia *X* de Munedirsá (100 millones de u.m.). Del mismo modo, si se elige la alternativa *B* y ocurre lo peor que puede suceder (que Munedirsá elija la estrategia *X*), se obtendrá un beneficio anual de 130 millones de u.m., y si se elige la opción *C*, el mínimo resultado anual es de 136 millones de u.m. Con un criterio prudente, basado en garantizarse un beneficio tan elevado como sea posible (criterio *maximin* o de Wald), Bunederssa elegiría la alternativa *C*, a la que le corresponde el máximo entre los mínimos, con lo cual puede tener la seguridad de que su beneficio anual no será inferior a 136 millones de u.m.

**Problema
3**

El criterio optimista

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Bunederssa, de los problemas anteriores, según el criterio optimista?

RESOLUCIÓN

El criterio optimista es el que sigue aquella persona que elige la alternativa a la que le corresponde el mejor resultado posible. En la tabla 1.2 se recogen los mayores beneficios que puede conseguir Bunederssa bajo cada una de sus alternativas de acción.

TABLA 1.2

Estrategias	Máximo beneficio
A	170
B	160
C	150

Dado que el máximo beneficio posible es el correspondiente a la estrategia A, la mejor decisión según el criterio *maximax* es elegir esta alternativa.

Problema
4

El criterio de Hurwicz

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Bunederssa, de los problemas anteriores, según el criterio de optimismo parcial de Hurwicz para un coeficiente de optimismo del 60 por 100?

RESOLUCIÓN

El criterio de Hurwicz pondera, en cada estrategia, el mejor resultado con un coeficiente de optimismo, α , y el peor resultado con un coeficiente de pesimismo ($1 - \alpha$). Los decisores más optimistas asignarán valores más elevados a α , de modo que, cuando α toma el máximo valor que puede alcanzar, es decir, la unidad (el 100 por 100), el criterio resultante es el *maximax*. El valor asignado a α será tanto más pequeño cuanto más pesimista sea el decisor, de modo que cuando este coeficiente adopta el mínimo valor que puede tomar, es decir, cuando $\alpha = 0$, el criterio resultante es el de Wald.

Los cálculos necesarios en el presente caso ($\alpha = 60$ por 100 = 0,60) se efectúan en la tabla 1.3.

La estrategia preferible, según el criterio de optimismo parcial de Hurwicz, para un $\alpha = 0,60$, es la B, a la que le corresponde el mayor resultado de ponderar los beneficios correspondientes al mejor y al peor de los casos.

TABLA 1.3

Estrategias	Máximos (M_i)	Mínimos (m_i)	$H_i = aM_i + (1 - a)m_i =$ $= 0,6M_i + 0,4m_i$
A	170	100	142
B	160	130	148
C	150	136	144,4

Problema
5
El criterio de Savage

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Bunederssa, de los problemas anteriores, según el criterio del mínimo pesar de Savage?

RESOLUCIÓN

Si Bunederssa se decidiera por la alternativa A y Munedirsá eligiera la estrategia X, aquélla ganaría 100 millones de u.m. y se arrepentiría de no haber elegido la alternativa C, a la que le hubiera correspondido un beneficio de 136 millones de u.m. Su «pesar» sería de $136 - 100 = 36$ millones. Si, por el contrario, hubiera elegido la alternativa B, su «pesar» sería sólo de 6 millones ($136 - 130$). Si la estrategia elegida por Munedirsá fuera la Y, Bunederssa no tendría pesar alguno si hubiera elegido la estrategia B, pero sus pesares serían de 10 y 20 millones de u.m., respectivamente, si hubiera seleccionado las estrategias A y C. Del mismo modo se calculan los pesares asociados a la decisión Z de Munedirsá; es decir, restando los términos de esa columna respecto al mayor de ellos. En la tabla 1.4 (matriz de pesares) se recogen los resultados obtenidos y el valor del mayor de los pesares asociados a cada estrategia.

TABLA 1.4

	X	Y	Z	Máximo pesar
A	36	10	0	36
B	6	0	10	10
C	0	20	20	20

Siguiendo el criterio de Savage, la decisión óptima es elegir la alternativa *B*, a la que le corresponde el menor entre los máximos pesares posibles. Con ello el decisor se asegura de que su pesar (es decir, lo que deja de ganar por no acertar) nunca superará los 10 millones de u.m.

Problema
6

Juego de suma nula

Si el beneficio anual que obtendrá Bunederssa con su nueva marca Frigox coincide con la reducción de beneficios de la empresa Munedirsa, que, hasta ahora, era la única que operaba en este segmento del mercado, ¿cuál será la solución del juego de competencia suponiendo que el ganador sigue la estrategia maximin y que el perdedor sigue el criterio minimax?

RESOLUCIÓN

En los problemas anteriores se hacía abstracción del proceso decisional de Munedirsa (*M*) y se planteaba aisladamente el problema de Bunederssa (*B*). Para *B*, las posibles decisiones de *M* son «estados de la naturaleza», o situaciones de las que depende el resultado de su decisión y en las que no puede incidir. Del mismo modo, para *M*, las alternativas de *B* son estados de la naturaleza.

Dado que lo que un jugador (*B*) gana lo pierde el otro (*M*), se trata de un juego de suma nula en el que el saldo neto, para el conjunto de los jugadores, vale cero.

En la tabla 1.5 se recoge la matriz de decisión junto con los mínimos resultados correspondientes a las estrategias de *B* y los máximos que se pueden derivar de las alternativas de *M*.

Con un criterio prudente, *M* puede actuar limitando su pérdida de beneficios máxima (criterio minimax) y seguir la estrategia *X*, con la que se asegura de que no tendrá una pérdida superior a 136 millones de u.m. Con el mismo criterio prudente, basado en garantizarse un beneficio anual tan elevado como sea posible (criterio maximin) *B* optaría por la estrategia *C*, con la que se aseguraría de que su beneficio no fuera inferior a 136 millones de u.m. Si los dos jugadores actúan de este modo, la solución del juego es que la empresa *B* gana, y la *M* pierde, 136 millones de u.m. de beneficio anual.

TABLA 1.5

		Estrategias de M			Mínimos
		X	Y	Z	
Estrategias de B	A	100	150	170	100
	B	130	160	160	130
	C	136	140	150	136
Máximos		136 Minimax	160	170	

Maximin

Problema
7
Criterios de decisión en situación de Incertidumbre

Plastuned es una empresa dedicada a la fabricación de diversos plásticos que va a crear una nueva fábrica dedicada a la producción de un nuevo material que sustituye, con ventajas de peso y de resistencia a la corrosión, a varios metales empleados en la industria del automóvil. Las alternativas de decisión existentes son:

- A) Construir una fábrica intensiva en mano de obra.
- B) Construir una fábrica intensiva en equipos de producción y con escasa necesidad de mano de obra.
- C) Construir una fábrica medianamente intensiva en mano de obra y en equipos de producción.

El criterio de decisión es minimizar los costes de producción, y éstos dependen de la evolución de los costes de la mano de obra y de los de mantenimiento y reparación ($M + R$) de los delicados equipos de producción que son necesarios si no se utiliza intensivamente el factor trabajo. Existen, por consiguiente, cuatro situaciones, o estados de la naturaleza, posibles:

- I: Mano de obra barata y costes de $M + R$ bajos.
- II: Mano de obra barata y costes de $M + R$ elevados.
- III: Mano de obra cara y costes de $M + R$ bajos.
- IV: Mano de obra cara y costes de $M + R$ elevados.

Tras los diversos estudios realizados, se estima que los costes globales del proyecto en cuestión, según cual sea la alternativa elegida y el estado del mundo o de la naturaleza que se presente, son los de la tabla 1.6 (en millones de u.m.).

TABLA 1.6

		Estados de la naturaleza			
		I	II	III	IV
Estrategias	A	100	110	300	310
	B	90	400	100	410
	C	95	550	105	460

Se desea saber si existe alguna estrategia dominada y determinar las estrategias preferibles según los distintos criterios de decisión aplicables en situación de incertidumbre.

RESOLUCIÓN

Evidentemente, la alternativa *C* es una estrategia dominada que nunca debería ser seleccionada. Si el estado de la naturaleza fuera el I, la mejor alternativa sería la *B*, a la que le corresponde el menor de los costes. Si se diera la situación II, la mejor estrategia sería la *A*, y la *B* sería la preferible si se presentara el estado III. De forma semejante, la alternativa *A* es la preferible si la situación que se produce es la IV. Por consiguiente, la alternativa *C* no es preferible en ninguno de los casos (está dominada por la *B*) y ha de ser eliminada en el análisis, por lo cual la nueva matriz de decisión es la de la tabla 1.7.

TABLA 1.7

		Estados de la naturaleza			
		I	II	III	IV
Estrategias	A	100	110	300	310
	B	90	400	100	410

Entre estas dos alternativas, *A* y *B*, no existen relaciones de dominio.

En cuanto a la determinación de la alternativa óptima, teniendo siempre en cuenta que, en este caso, no se trata de maximizar los resultados, sino de minimizar los costes, los criterios aplicables son los siguientes:

- Criterio de Laplace, o de igual verosimilitud. La alternativa óptima será aquella a la que le corresponda el menor coste medio (\bar{C}_j), siendo los costes medios de las dos estrategias (o costes esperados en situación de igual verosimilitud) los siguientes:

$$\bar{C}_A = \frac{100 + 110 + 300 + 310}{4} = 205 \text{ millones de u.m.}$$

$$\bar{C}_B = \frac{90 + 400 + 100 + 410}{4} = 250 \text{ millones de u.m.}$$

Por tanto, según el criterio de Laplace, la estrategia óptima es construir una fábrica intensiva en mano de obra (alternativa A).

- b) Criterio optimista o, en este caso, *minimin*. En la tabla 1.8 se recogen, en millones de u.m., los costes mínimos bajo cada estrategia (así como los máximos, que serán útiles en la aplicación del criterio pesimista).

TABLA 1.8

		Mínimo coste (m_i)	Máximo coste (M_i)
Estrategias	A	100	310
	B	90	410

Según el criterio optimista, la estrategia preferible es la de construir una fábrica intensiva en equipos de producción (B), a la que le corresponde el mínimo de los costes posibles.

- c) Criterio pesimista o, en este caso, *maximax*. Según la tabla 1.8 anterior, la decisión óptima es construir una fábrica intensiva en mano de obra (alternativa A), pues, con ello, se asegura que los costes no superarán los 310 millones de u.m.
- d) Criterio de optimismo parcial de Hurwicz. Dado que el enunciado del problema no indica cuál es el coeficiente de optimismo, α , que ha de aplicarse al mejor de los resultados (es decir, al menor de los costes), habrá de calcularse para qué valores de α es preferible una u otra alternativa. Los coeficientes de optimismo para los cuales es preferible la primera estrategia que la segunda serán los valores de α para los cuales se cumple que:

$$H_A = 100\alpha + 310(1 - \alpha) < 90\alpha + 410(1 - \alpha) = H_B$$

En este caso, una estrategia, i , es tanto mejor cuanto menor sea el valor de H_i . Es decir, que A será preferible a B cuando:

$$310 - 210\alpha < 410 - 320\alpha \rightarrow 110\alpha < 100 \rightarrow \alpha < 0,9091$$

La opción A es preferible a la B para coeficientes de optimismo inferiores al 90,91 por 100; es decir, para los comprendidos entre 0 y 0,9091. Para coe-

Prácticas de administración de empresas

ficientes de optimismo superiores a 0,9091 e inferiores o iguales al 100 por 100, es preferible la estrategia B. Ambas alternativas son indiferentes cuando $\alpha = 0,9091$.

Por otra parte, cuando $\alpha = 0$ (criterio pesimista), se obtiene:

$$H_A = 310$$

y

$$H_B = 410$$

y cuando $\alpha = 1$ (criterio optimista):

$$H_A = 100$$

y

$$H_B = 90$$

Estos resultados se han sintetizado en la figura 1.1.

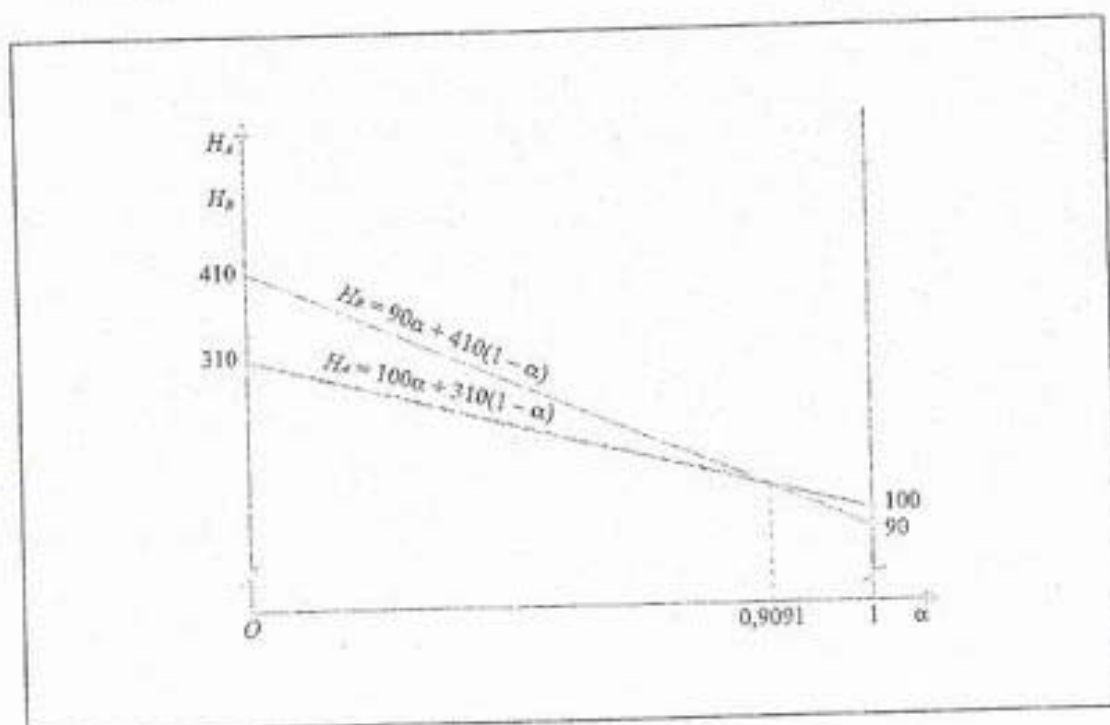


Figura 1.1.

- e) Criterio del mínimo pesar de Savage. Bajo cada estrategia y cada estado de la naturaleza, el pesar es la diferencia entre el coste que corresponde en cada caso y el mínimo correspondiente a ese estado. Así se ha formado la matriz de pesares de la tabla 1.9.

El máximo pesar de cada alternativa es, aquí, el máximo sobrecoste en el que se puede incurrir por no acertar en la decisión. El mínimo, entre los máximos pesares, corresponde a la decisión de construir la fábrica intensiva en mano de obra (A), que será la preferible bajo este criterio.

TABLA 1.9

		Estados de la naturaleza				Máximo pesar
		I	II	III	IV	
Estrategias	A	10	0	200	0	200
	B	0	290	0	100	290

**Problema
8**
Criterios de decisión en situación de incertidumbre

En la matriz de decisión de la tabla 1.10 se recogen los resultados asociados a cada una de las estrategias (E_1 , E_2 y E_3) que puede seguir la empresa Cre-tuned, según cual sea el estado de la naturaleza (S_1 , S_2 o S_3) que se presente:

TABLA 1.10

		Estados de la naturaleza		
		S_1	S_2	S_3
Estrategias	E_1	100	110	140
	E_2	90	130	120
	E_3	110	120	116

Se desea saber si hay alguna estrategia dominada y cuál es la alternativa preferible, según los diferentes criterios de decisión aplicables en situación de incertidumbre, si la empresa desea obtener un resultado tan elevado como sea posible.

RESOLUCIÓN

En la tabla 1.11 se señala la alternativa preferible bajo cada estado de la naturaleza.

TABLA 1.11

Estado	Estrategia óptima
S_1	E_3
S_2	E_2
S_3	E_1

No hay ninguna alternativa de decisión que no sea idónea en algún caso, por lo cual no existe ninguna estrategia dominada.

En cuanto a la determinación de la alternativa óptima, los criterios son los siguientes:

- a) Criterio de Laplace. Denominando \bar{R}_i al resultado medio derivado de la estrategia S_i , se obtiene:

$$\bar{R}_1 = \frac{100 + 110 + 140}{3} = 116,67$$

$$\bar{R}_2 = \frac{90 + 130 + 120}{3} = 113,33$$

$$\bar{R}_3 = \frac{110 + 120 + 106}{3} = 112$$

Dado que se trata de un caso de maximización, la estrategia óptima, siguiendo el criterio de Laplace, es la E_1 .

- b) Criterio optimista. La estrategia a la que le corresponde el máximo resultado posible (140) es la E_1 . Ésta es, por tanto, la mejor alternativa según el criterio *maximax*.
- c) Criterio pesimista o de Wald. Bajo la estrategia E_1 el mínimo resultado es 100, en tanto que 90 es el mínimo correspondiente a la alternativa E_2 y 110 el que corresponde a la E_3 . Por consiguiente, el mayor de los mínimos (110) se obtiene con la estrategia E_3 , y ésta es la alternativa preferible según el criterio de Wald.
- d) Criterio de Hurwicz. En la tabla 1.12 se recogen los resultados máximos y mínimos que pueden obtenerse bajo cada una de las alternativas de decisión y el valor de la H correspondiente a cada una de ellas según el valor del coeficiente de optimismo, α .

TABLA 1.12

Estrategia (E_i)	Máximo (M_i)	Mínimo (m_i)	$H_i = \alpha M_i + (1 - \alpha)m_i$
E_1	140	100	$\alpha 140 + (1 - \alpha)100$
E_2	130	90	$\alpha 130 + (1 - \alpha)90$
E_3	120	110	$\alpha 120 + (1 - \alpha)110$

Es decir:

$$H_1 = \alpha 140 + (1 - \alpha)100 = 40\alpha + 100$$

$$H_2 = \alpha 130 + (1 - \alpha)90 = 40\alpha + 90$$

$$H_3 = \alpha 120 + (1 - \alpha)110 = 10\alpha + 110$$

Dado que, para cualquier valor de α comprendido entre 0 y 1, H_1 es mayor que H_2 , según este criterio la estrategia E_1 es siempre preferible a la E_2 .

— E_1 será preferible a E_3 para aquellos valores de α tales que:

$$H_1 > H_3 \rightarrow 40\alpha + 100 > 10\alpha + 110 \rightarrow 30\alpha > 10 \rightarrow \alpha > 1/3$$

La estrategia E_1 es mejor que la E_3 para valores de α comprendidos entre 1/3 y la unidad.

— E_2 será preferible a E_3 para los valores de α tales que:

$$H_2 > H_3 \rightarrow 40\alpha + 90 > 10\alpha + 110 \rightarrow 30\alpha > 20 \rightarrow \alpha > 2/3$$

La estrategia E_2 es mejor que la E_3 para valores de α comprendidos entre 2/3 y la unidad.

Por otra parte, cuando $\alpha = 0$ (criterio pesimista):

$$H_1 = 100$$

$$H_2 = 90$$

$$H_3 = 110$$

y, cuando $\alpha = 1$ (criterio optimista):

$$H_1 = 140$$

$$H_2 = 130$$

$$H_3 = 120$$

Estos resultados se han sintetizado en la figura 1.2, en la que se observa que, según el criterio de Hurwicz, para valores de α comprendidos entre 0 y $1/3$ es preferible la estrategia H_3 y a partir de este coeficiente de optimismo la estrategia preferible es la H_1 . Si se aplica este criterio de optimismo parcial, la estrategia H_2 no es aplicable cualquiera que sea el coeficiente de optimismo que se considere adecuado.

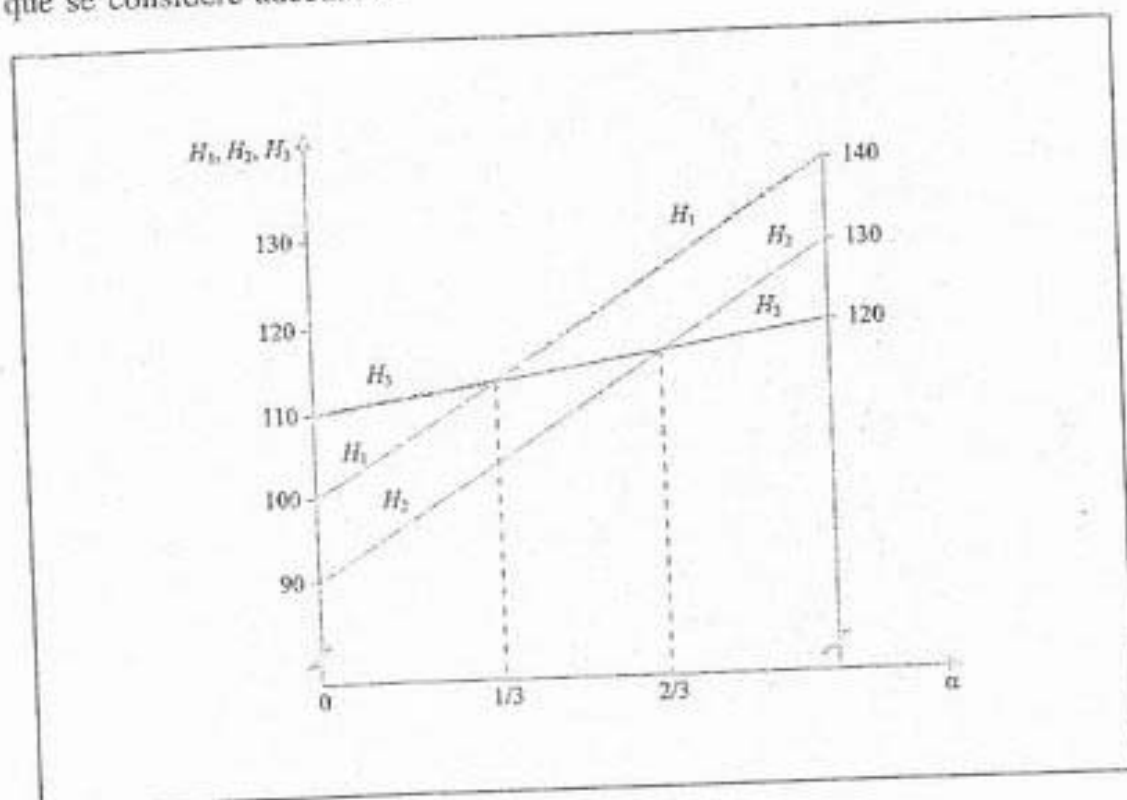


Figura 1.2.

- e) Criterio de Savage. En la tabla 1.13 se recoge la matriz de pesares correspondiente a este caso:

TABLA 1.13

		Estados de la naturaleza			Máximo pesar
		S_1	S_2	S_3	
Estrategias	E_1	10	20	0	20
	E_2	20	0	20	20
	E_3	0	10	24	24

Según este criterio de limitación del máximo pesar, las estrategias E_1 y E_2 son igualmente preferibles sobre la estrategia E_3 .

Problema
9
Juego de suma nula

Suponiendo que S_1 , S_2 y S_3 fueran estrategias que puede elegir el decisor B y que los resultados recogidos en la matriz de decisión del enunciado del problema anterior fueran las pérdidas experimentadas por este decisor y las ganancias obtenidas por el jugador A (Cretuned, que puede elegir entre las estrategias E_1 , E_2 y E_3), se desea saber cuál es la solución del juego.

RESOLUCIÓN

En la resolución del problema anterior se comprobó que ninguna de las estrategias de A está dominada. En cuanto a B , en la tabla 1.14 se recogen las mejores estrategias para cada alternativa elegida por A .

TABLA 1.14

Alternativa	Estrategia óptima de B
E_1	S_1
E_2	S_1
E_3	S_1

Las estrategias S_2 y S_3 , de B , se encuentran dominadas por la alternativa S_1 . Cualquiera que sea la decisión de A , la mejor elección de B es la estrategia S_1 , con la que consigue la menor pérdida posible en cada caso. Por tanto, B se decidirá por la alternativa S_1 y, como A sabe que B actuará de este modo, elegirá la estrategia que le proporcione la mayor ganancia bajo esa elección de B ; es decir, la estrategia E_3 . Con ello, la solución del juego es que A gana, y B pierde, 110.

Problema
10
Criterios de decisión en situación de incertidumbre

En la matriz de decisión de la tabla 1.15 se recogen los resultados asociados a cada una de las estrategias (E_1 , E_2 y E_3) que puede seguir la empresa Unedecisa, según cual sea el estado de la naturaleza (S_1 , S_2 o S_3) que se presente.

TABLA 1.15

		Estados de la naturaleza		
		S_1	S_2	S_3
Estrategias	E_1	220	200	290
	E_2	250	175	240
	E_3	240	220	230

Tales resultados son tanto más adversos a Unedecisa cuanto mayores son sus valores. Se desea saber si hay alguna estrategia dominada y cuál es la alternativa preferible según los distintos criterios de decisión aplicables en situación de incertidumbre.

RESOLUCIÓN

En este caso la empresa trata de obtener un resultado lo más pequeño posible. Las estrategias óptimas bajo cada uno de los estados se recogen en la tabla 1.16.

TABLA 1.16

Estado	Estrategia óptima
S_1	E_1
S_2	E_2
S_3	E_3

Evidentemente, en este caso ninguna estrategia está dominada.

En la tabla 1.17 se recogen los datos precisos para resolver el problema de acuerdo con los criterios de Laplace, optimista, pesimista y de Hurwicz.

TABLA 1.17

Estrategia (E_i)	Laplace	Máximo (M_i)	Mínimo (m_i)	$H_i = \alpha m_i + (1 - \alpha)M_i$
E_1	243,3	290	200	$H_1 = \alpha 200 + (1 - \alpha)290 = 290 - 90\alpha$
E_2	221,6	250	175	$H_2 = \alpha 175 + (1 - \alpha)250 = 250 - 75\alpha$
E_3	230	240	220	$H_3 = \alpha 220 + (1 - \alpha)240 = 240 - 20\alpha$

Partiendo del criterio de Laplace, la mejor estrategia es la E_2 .

Según el criterio optimista (*minimin*, en este caso), la estrategia óptima es la E_2 .

De acuerdo con el criterio pesimista (*minimax*, en esta ocasión) la alternativa preferible es la E_3 . En cuanto al criterio de Hurwicz, se tiene que:

— La estrategia E_1 será preferible a la E_2 para los valores de α tales que:

$$H_1 < H_2$$

Es decir:

$$290 - 90\alpha < 250 - 75\alpha \rightarrow 40 < 15\alpha \rightarrow \alpha > 2,67$$

E_1 sería preferible a E_2 para valores de α superiores a 2,67, pero este coeficiente sólo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 1. Por consiguiente, la estrategia E_1 nunca es preferible a la E_2 , de acuerdo con este criterio. Dicho de otro modo, para cualquier valor admisible de α , E_2 es mejor que E_1 .

— La estrategia E_2 será preferible a la E_3 para los valores de α tales que:

$$H_2 < H_3$$

O, lo que es lo mismo:

$$250 - 75\alpha < 240 - 20\alpha \rightarrow 10 < 55\alpha \rightarrow \alpha > 0,1818$$

Para los valores de α comprendidos entre 0 y 0,1818 es preferible la estrategia E_3 . A partir de este valor del coeficiente de optimismo, y hasta la unidad, es preferible la alternativa E_2 .

Por otra parte, cuando $\alpha = 0$ (criterio pesimista):

$$H_1 = 290$$

$$H_2 = 250$$

$$H_3 = 240$$

Y cuando $\alpha = 1$ (criterio optimista):

$$H_1 = 200$$

$$H_2 = 175$$

$$H_3 = 220$$

Los resultados obtenidos se han representado en la figura 1.3, en la que se observa que, según este criterio, la alternativa E_1 no es preferible en ningún caso, que la E_3 es la mejor para el decisor que aplica un coeficiente de optimismo inferior al 18,18 por 100 y que, a partir de este valor del coeficiente, es preferible la estrategia E_2 .

En cuanto al criterio de Savage, en la tabla 1.18 se recoge la matriz de pesares.

TABLA 1.18

		Estados de la naturaleza			Máximos pesares
		S_1	S_2	S_3	
Estrategias	E_1	0	25	60	60
	E_2	30	0	10	30
	E_3	20	45	0	45

La estrategia óptima, según el criterio de Savage, es la E_2 , a la que le corresponde el mínimo entre los máximos pesares en los que se puede incurrir.

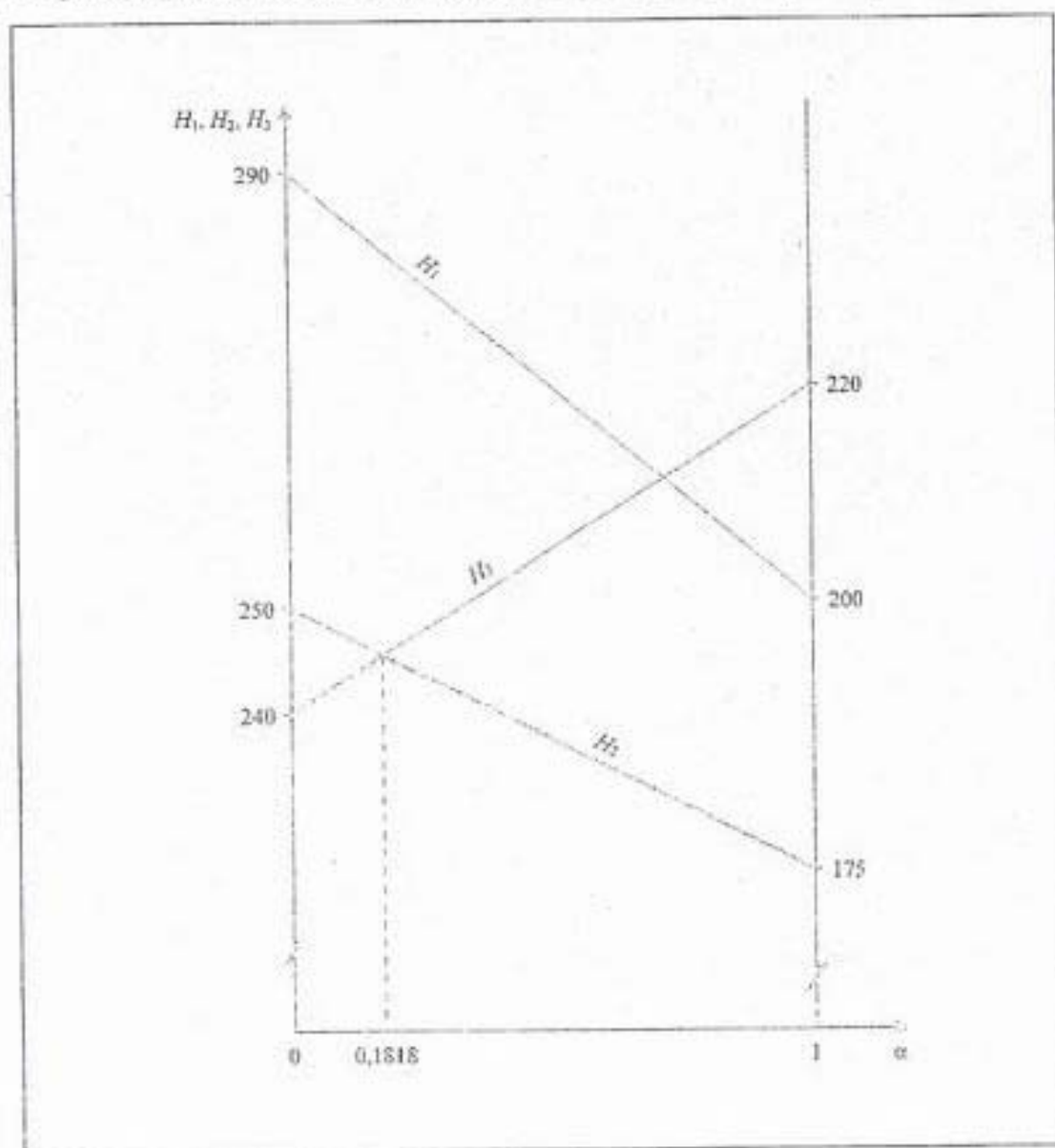


Figura 1.3.

Problema
11
Juego de suma nula

En la siguiente matriz, P es el perdedor y G es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.19

		Estrategias de P		
		X	Y	Z
Estrategias de G	A	-100	50	20
	B	100	-50	-20
	C	20	-20	-10

RESOLUCIÓN

Cuando, como en este caso, las columnas se corresponden con las posibles decisiones del perdedor y las filas con las del ganador, la técnica más sencilla para encontrar un punto de silla es determinar un número que sea el menor de su fila y el mayor de su columna. En la fila A el menor número es -100 (G pierde y P gana 100), pero no es el mayor de su columna. En la fila B , el número más bajo es -50 (G pierde y P gana 50), pero tampoco es el mayor de su columna. Finalmente, en la fila C , el menor número es -20 (G pierde y P gana 20), pero tampoco éste es el mayor de su columna. Por consiguiente, no existe ningún punto de silla.

Problema
12
Juego de suma nula

En la siguiente matriz, P es el perdedor y G es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.20

		Estrategias de P		
		X	Y	Z
Estrategias de G	A	0	150	120
	B	200	50	80
	C	120	80	90

RESOLUCIÓN

No hay ningún punto de silla porque no existe ningún número que sea el mínimo de su fila y el máximo de su columna.

1.2. PROBABILIDAD Y RIESGO

Problema

13

Probabilidad y riesgo

Se desea determinar:

- La probabilidad de obtener una bola blanca en una extracción al azar efectuada en una urna en la que existen 4 bolas blancas y 6 bolas negras.
- La probabilidad de que no se obtenga una bola blanca en la extracción del apartado a).
- La probabilidad de obtener un 6 al lanzar un dado trucado de seis caras que fue lanzado 10.000 veces y en 4.000 ocasiones se obtuvo un 6.
- La probabilidad de obtener, al lanzar una vez una moneda y un dado perfectos, una cara y un 3.
- La probabilidad de que, en dos extracciones sucesivas sin reemplazamiento, de una urna que tiene 3 bolas blancas y 2 negras, la primera y la segunda bolas sean negras.
- La probabilidad de que, en el lanzamiento de un dado perfecto, se obtenga un 1, un 2 o un 3.
- La probabilidad de que, en el lanzamiento del apartado d), se obtenga una cara en la moneda o un 3 en el dado, o ambos.
- La distribución de probabilidad de la suma de puntos obtenida al extraer una bola de una urna y otra de otra, sabiendo que en cada urna hay una bola en la que figura un 3, otra en la que figura un 4 y otra en la que figura un 5.
- La esperanza matemática del resultado de las extracciones del apartado h).
- La dispersión de los valores posibles resultantes en las extracciones de los apartados h) e i) en torno a su valor esperado.
- La probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos en las extracciones a que se refieren los tres apartados anteriores sea igual a 7, sabiendo que ya se ha efectuado la extracción de la primera urna y el resultado obtenido ha sido de 4.

RESOLUCIÓN

a) Conforme a la *definición clásica* de probabilidad, o *definición de Laplace*, si, de un total de n casos posibles, todos igualmente factibles, un suceso S puede presentarse en h de los casos, la probabilidad de ocurrencia de ese suceso, $P(S)$, es el cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles:

$$P(S) = \frac{h}{n}$$

Así, la probabilidad de obtener una bola blanca, $P(B)$, en una extracción al azar efectuada en una urna en la que existen 4 bolas blancas ($h = 4$) de un total de 10 bolas ($n = 10$) es:

$$P(B) = \frac{4}{10} = 0,4 = 40 \text{ por } 100$$

Si este experimento se efectuara muchas veces, se observaría una tendencia a que en el 40 por 100 de los casos apareciera una bola blanca.

b) Dado que o se obtiene una bola negra o se obtiene una blanca, y que tales sucesos son mutuamente excluyentes (si sólo se extrae una bola, no puede ser blanca y negra a la vez), habrá de cumplirse que

$$P(B) + P(N) = 1 = 100 \text{ por } 100$$

y la probabilidad de obtener una bola negra es:

$$P(N) = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6 = 60 \text{ por } 100$$

lo cual también se demuestra calculando el cociente entre los casos favorables a este suceso (6) y el total de casos posibles (10):

$$P(N) = \frac{6}{10} = 0,6 = 60 \text{ por } 100$$

c) Según la *concepción frecuencial* u *objetivista* de la probabilidad, como probabilidad estimada, o *probabilidad empírica*, de un suceso, se toma la *frecuencia relativa* de la aparición del suceso cuando el número de observaciones es muy grande. La probabilidad en sí es el *límite* de la frecuencia relativa cuando el número de observaciones crece indefinidamente. En este caso, el dado

trucado fue lanzado 10.000 veces y en 4.000 ocasiones se obtuvo un 6, por lo cual la frecuencia relativa de este suceso, por la que se estima su probabilidad, es:

$$P(6) = \frac{4.000}{10.000} = 0,4 = 40 \text{ por } 100$$

d) El resultado que se obtenga en la caída de la moneda y lo que resulte en el lanzamiento del dado son sucesos *independientes* entre sí. La probabilidad de que se produzca un suceso *compuesto* de dos sucesos independientes es el producto de sus probabilidades. En este caso, la probabilidad de que en la moneda resulte cara ($P(C)$) es $1/2$, y la probabilidad de que en el dado resulte un 3 ($P(3)$) vale $1/6$. Por consiguiente, la probabilidad de que se produzcan ambos sucesos (es decir, de que se produzca el suceso compuesto) vale:

$$P(C \cap 3) = P(C) \cdot P(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

como también se puede observar aplicando el concepto tradicional de probabilidad (X = cruz):

Resultados posibles

C1	C4	X1	X4
C2	C5	X2	X5
C3	C6	X3	X6

$$h = 1$$

$$n = 12$$

$$P(C \cap 3) = \frac{1}{12}$$

e) Sea N_1 el suceso de que «la primera bola extraída sea negra» y N_2 el suceso de que «la segunda bola extraída sea negra», siendo las extracciones sin reemplazamiento. Evidentemente, la probabilidad de N_2 dependerá de cuáles sean las bolas que queden en la urna tras la primera extracción; por tanto, estos sucesos son *dependientes*. Si S y T son sucesos dependientes, la probabilidad del suceso compuesto vale:

$$P(S \cap T) = P(T)P(S/T) = P(S)P(T/S)$$

donde $P(S/T)$ es la probabilidad de S *condicionada* a T , es decir, la probabili-

dad de que ocurra S dado que ha ocurrido T (del mismo modo, $P(T|S)$ es la probabilidad de que ocurra T dado que ha ocurrido S). En este caso,

$$P(N_1) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

mientras que

$$P(N_2|N_1) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

pues si en la primera extracción resulta una bola negra, dado que no se reemplaza, en la segunda sólo quedará otra bola negra. La probabilidad del suceso compuesto será:

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

f) Se trata de sucesos *mutuamente excluyentes*; la ocurrencia de uno cualquiera de ellos imposibilita la ocurrencia de los otros. Si S y T son mutuamente excluyentes, obviamente:

$$P(S \cap T) = 0$$

y la probabilidad de que ocurra uno cualquiera de ellos es:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T)$$

En este caso:

$$P(1 \cup 2 \cup 3) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

como también puede comprobarse acudiendo a la definición clásica de probabilidad:

$$h = 3$$

$$n = 6$$

$$\frac{h}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

g) En este caso, la obtención de una cara en la moneda y que resulte un 3 en el dado no son sucesos *mutuamente excluyentes*, sino que, como se obtuvo en el apartado d),

$$P(C \cap 3) = \frac{1}{12} \neq 0$$

Si los sucesos S y T no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que se produzca uno de ellos o ambos es (véase figura 2.1):

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$$

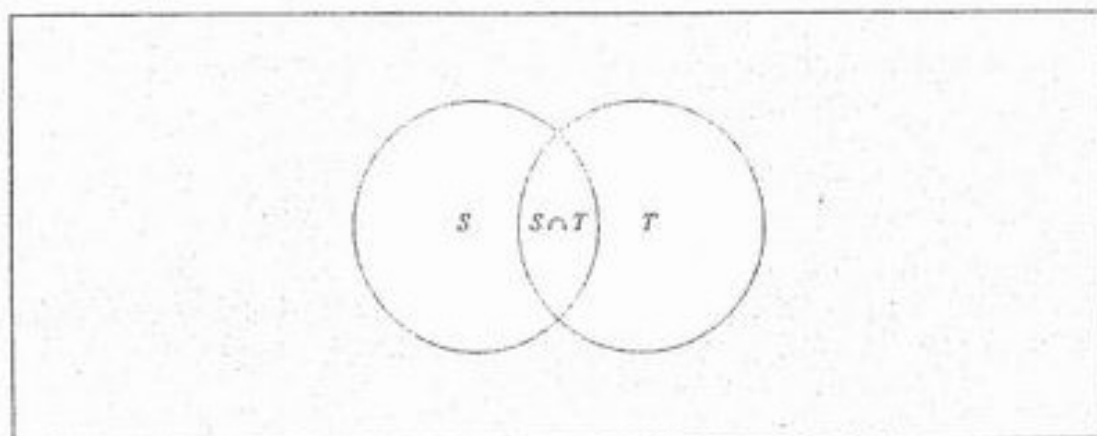


Figura 1.4.

En este caso:

$$P(C \cup 3) = P(C) + P(3) - P(C \cap 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

lo cual también se puede comprobar, a la vista de la tabla del apartado d), mediante la aplicación del concepto clásico de probabilidad:

$$h = 7$$

$$n = 12$$

$$\frac{h}{n} = \frac{7}{12}$$

h) Una *distribución de probabilidad* es una relación de los valores posibles resultantes del experimento en cuestión, junto con sus probabilidades.

En este caso, los nueve sucesos compuestos posibles son:

Suceso	Primera urna	Segunda urna	Resultado total
1. ^o	3	3	6
2. ^o	3	4	7
3. ^o	3	5	8
4. ^o	4	3	7
5. ^o	4	4	8
6. ^o	4	5	9
7. ^o	5	3	8
8. ^o	5	4	9
9. ^o	5	5	10

Por consiguiente, conforme al concepto de probabilidad de Laplace, los valores probables de la suma de puntos, y sus probabilidades respectivas, son los siguientes:

Valores probables	Probabilidades
6	1/9
7	2/9
8	3/9
9	2/9
10	1/9

Tal es, por tanto, la distribución de probabilidad de la *variable aleatoria* «suma de puntos».

i) La *esperanza matemática*, E , o *valor esperado*, de una variable aleatoria se determina sumando los productos entre sus valores probables y sus probabilidades. En este caso, la esperanza matemática de la variable aleatoria «suma de puntos» (SP) es:

$$E(SP) = 6 \frac{1}{9} + 7 \frac{2}{9} + 8 \frac{3}{9} + 9 \frac{2}{9} + 10 \frac{1}{9} = 8 \text{ puntos}$$

No se sabe si el resultado será 6, 7, 8, 9 ó 10 puntos, pero el valor esperado de la variable, o media, es de 8 puntos. En la figura 1.5 se ha representado la distribución de probabilidad de esta variable mediante un histograma y se ha señalado su esperanza matemática.

j) Un coeficiente que mide la dispersión media de los valores de la variable respecto de su valor esperado es la desviación absoluta media (DA), que se

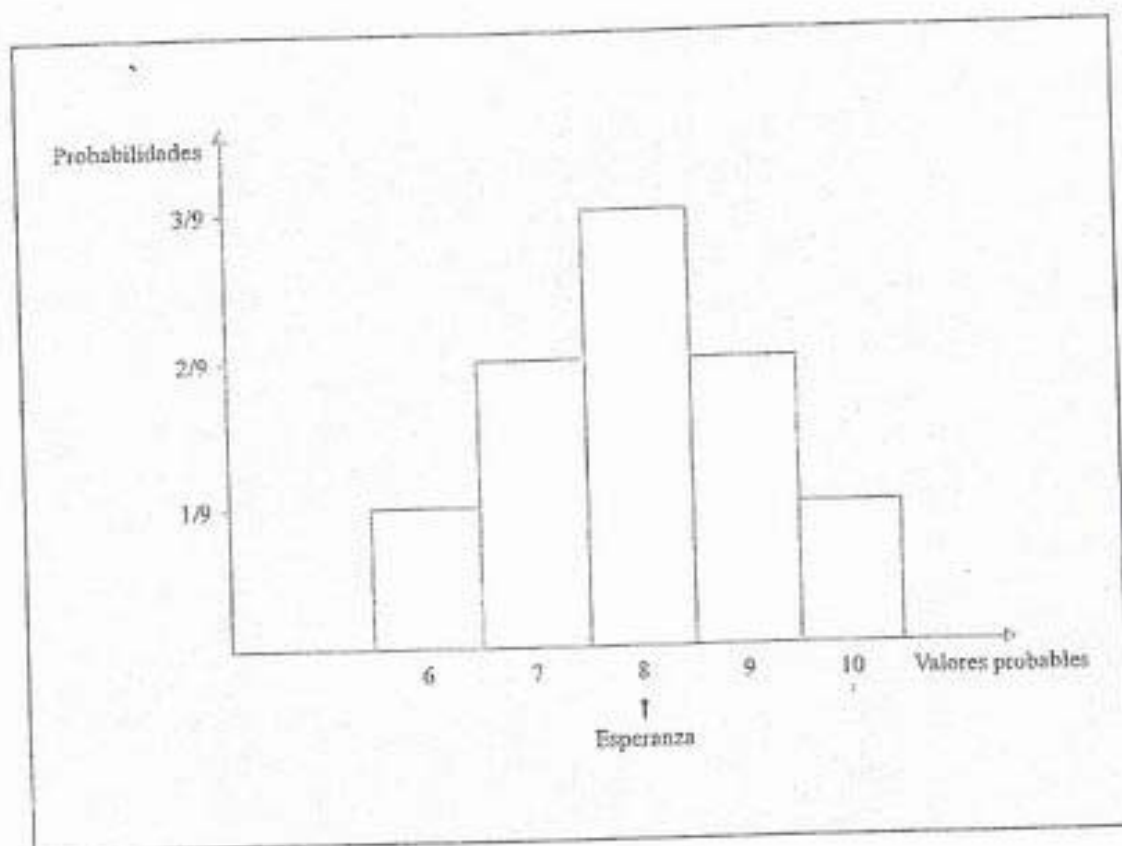


Figura 1.5.

calcula sumando los productos entre las desviaciones absolutas de los valores posibles, respecto al valor esperado, y las probabilidades de que esas desviaciones se produzcan, es decir, las probabilidades de que ocurran los respectivos valores de la variable. Esto es, siendo X_i uno de los n valores que puede tomar la variable X ($i = 1, 2, \dots, n$), y $E(X)$ su valor esperado:

$$DA(X) = \sum_{i=1}^n |X_i - E(X)| P(X_i)$$

$DA(X)$ es, por tanto, el valor esperado de la desviación absoluta de la variable respecto a su media. En este caso:

$$DA(SP) = |6 - 8| \frac{1}{9} + |7 - 8| \frac{2}{9} + |8 - 8| \frac{3}{9} + |9 - 8| \frac{2}{9} +$$

$$+ |10 - 8| \frac{1}{9} = 0,8\bar{8} \text{ puntos}$$

Pero más habitual es la utilización de la varianza, σ^2 , que es el valor esperado del cuadrado de la desviación de la variable respecto a su media:

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^n [X_i - E(X)]^2 P(X_i)$$

Es decir:

$$\begin{aligned}\sigma^2(SP) &= (6-8)^2 \frac{1}{9} + (7-8)^2 \frac{2}{9} + (8-8)^2 \frac{3}{9} + (9-8)^2 \frac{2}{9} + (10-8)^2 \frac{1}{9} = \\ &= 1,6\bar{6} \text{ (puntos)}^2\end{aligned}$$

Otra medida de dispersión es la desviación típica, que es la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma(SP) = (1,6\bar{6})^{1/2} = 1,2909 \text{ puntos}$$

Se denomina coeficiente de variación, CV, al tanto por uno que la desviación típica de la variable representa respecto a su esperanza matemática:

$$CV(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$$

Se trata de una medida relativa de dispersión que, en este caso, vale:

$$CV(SP) = \frac{1,2909}{8} = 0,1614 = 16,14 \text{ por } 100$$

k) Con esta información, los sucesos compuestos posibles ya sólo son tres:

Suceso	Primera urna	Segunda urna	Resultado total
1	4	3	7
2	4	4	8
3	4	5	9

Por consiguiente, la distribución de probabilidad condicionada a que el resultado de la primera urna, R_1 , sea 4 es la siguiente:

i	Valores probables (SP_i)	Probabilidades ($P(SP = SP_i / R_1 = 4)$)
1	7	1/3
2	8	1/3
3	9	1/3

La probabilidad de obtener siete puntos ha pasado, de valer $2/9$ (probabilidad a priori), a valer $1/3$ (probabilidad a posteriori o revisada).

Para obtener las probabilidades *revisadas* modificando las probabilidades a priori a la luz de la información proporcionada por el acaecimiento de un nuevo suceso, T , puede aplicarse el teorema de Bayes, al que se hará referencia próximamente.

Problema
14

Diversificación y riesgo

Se están creando tres nuevas empresas, cada una de las cuales va a realizar el lanzamiento de un nuevo producto. Se considera que los resultados obtenidos por las distintas empresas son independientes entre sí. La probabilidad de que un nuevo producto tenga éxito es de un 50 por 100 y, en ese caso, los propietarios de la empresa pueden vender en 50 millones de unidades monetarias cada acción con la que participan en la misma. Si el producto de una empresa no tiene éxito, esa empresa quiebra, sus acciones dejan de tener valor alguno y sus accionistas pierden, por cada acción, los 15 millones que tuvieron que pagar para adquirirla. Una persona que dispone de 45 millones se plantea las dos alternativas extremas: invertir su dinero en la adquisición de tres acciones de una sola empresa o adquirir una acción de cada empresa. ¿Qué opción es preferible?

RESOLUCIÓN

Si invirtiera en una sola empresa, la distribución de probabilidad de su beneficio sería la siguiente:

Valores probables	Probabilidades
105	0,5
-45	0,5

Pues, si la empresa tuviera éxito, ganaría 35 millones por cada acción (la diferencia entre los 50 millones en los que la vendería y los 15 que tendría que pagar por ella). Por tanto, con tres acciones ganaría 105:

$$35 \times 3 = 105 \text{ millones u.m.}$$

Por el contrario, si la empresa en cuestión no tuviera éxito perdería los 45 millones que cuestan las tres acciones. Por otra parte, la probabilidad de que un producto tenga éxito es de un 50 por 100, por lo que también vale el 50 por 100 la probabilidad de que no lo tenga.

Por consiguiente, el beneficio esperado será:

$$E(B) = 105 \times 0,5 + (-45) \times 0,5 = 30 \text{ millones u.m.}$$

y la varianza del beneficio vale:

$$\sigma^2(B) = (105 - 30)^2 0,5 + (-45 - 30)^2 0,5 = 5.625 \text{ (millones u.m.)}^2$$

siendo su desviación típica:

$$\sigma(B) = 5.625^{1/2} = 75 \text{ millones u.m.}$$

Si repartiera su capital entre las tres empresas, los diversos casos posibles son los que se recogen en la tabla 1.21, en la que E significa «éxito» y F «fracaso».

TABLA 1.21

Casos	Empresa I	Empresa II	Empresa III	Beneficio
1	E	E	E	105
2	E	E	F	55
3	E	F	E	55
4	E	F	F	5
5	F	E	E	55
6	F	E	F	5
7	F	F	E	5
8	F	F	F	-45

Los ocho casos tienen la misma probabilidad ($1/8 = 0,125$). Por ejemplo, la probabilidad de que la primera tenga éxito, la segunda fracase y la tercera tenga éxito vale:

$$0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125 \text{ por 1}$$

Por consiguiente, la distribución de probabilidad del beneficio es, en este caso, la siguiente:

Valores probables	Probabilidades
105	0,125
55	0,375
5	0,375
-45	0,125

De donde se deduce que la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica del beneficio valen:

$$E(B) = 105 \times 0,125 + 55 \times 0,375 + 5 \times 0,375 - 45 \times 0,125 = 30 \text{ millones u.m.}$$

$$\sigma^2(B) = (105 - 30)^2 0,125 + (55 - 30)^2 0,375 + (5 - 30)^2 0,375 + (-45 - 30)^2 0,125 = 1.875 \text{ (millones u.m.)}^2$$

$$\sigma(B) = 1.875^{1/2} = 43,3 \text{ millones u.m.}$$

Es preferible diversificar (repartir el presupuesto entre las tres empresas), pues, con ello, se tiene el mismo beneficio esperado con un riesgo muy inferior que en la otra alternativa.

1.3. EL ANÁLISIS BAYESIANO

Problema 15

El análisis bayesiano

Hace siglos se hundieron en cierta zona del mar Mediterráneo tres buques iguales, cada uno de los cuales tenía dos compartimientos. En cada compartimiento del buque I había un cargamento de oro; el buque II tenía un cargamento de plata en cada compartimiento; y el III tenía un cargamento de oro en un compartimiento y en el otro uno de plata. Hace unos meses unos aventureros crearon la empresa Tesoruned, S. A., para tratar de encontrar uno de estos buques. Esta empresa ganará 90 millones de unidades monetarias (u.m.) por cada cargamento de oro que encuentre y 30 millones de u.m. por cada cargamento de plata. Recientemente, ha encontrado uno de los buques, y se desea conocer:

- La ganancia esperada antes de abrir el buque.
- La probabilidad de que el otro compartimiento tenga oro tras abrir uno de ellos y encontrar plata.
- La ganancia esperada tras hacer el descubrimiento del apartado b).
- Las distribuciones de probabilidad del beneficio y su desviación típica antes y después del descubrimiento de la plata.

RESOLUCIÓN

a) Evidentemente, a priori, sin más información, la probabilidad de que sea el buque I, $P(I)$, es la misma que la de que sea el II o la de que sea el III:

$$P(I) = P(II) = P(III) = \frac{1}{3}$$

El beneficio que se derivará si es el I el que se encontró será:

$$B_I = 90 + 90 = 180 \text{ millones de u.m.}$$

Del mismo modo, si hubiera sido el II obtendría:

$$B_{II} = 30 + 30 = 60 \text{ millones de u.m.}$$

y si hubiera sido el III:

$$B_{III} = 90 + 30 = 120 \text{ millones de u.m.}$$

El beneficio esperado, o esperanza matemática de la variable aleatoria «beneficio» es:

$$\begin{aligned} E(B) &= B_I P(I) + B_{II} P(II) + B_{III} P(III) = \\ &= 180 \frac{1}{3} + 60 \frac{1}{3} + 120 \frac{1}{3} = 120 \text{ millones de u.m.} \end{aligned}$$

b) Como se señaló en un ejercicio anterior, para obtener las probabilidades *revisadas* modificando las probabilidades a priori a la luz de la información proporcionada por el acaecimiento de un nuevo suceso, T , puede aplicarse el teorema de Bayes, que establece que, siendo S_1, S_2, \dots, S_n sucesos mutuamente excluyentes:

$$P(S_i/T) = \frac{P(S_i \cap T)}{P(T)} = \frac{P(S_i)P(T/S_i)}{\sum_{j=1}^n P(S_j)P(T/S_j)}$$

Este teorema se deduce del teorema de la probabilidad del suceso compuesto:

$$\begin{aligned} P(S_i \cap T) &= P(S_i)P(T/S_i) = P(T)P(S_i/T) \Rightarrow P(S_i/T) = \\ &= \frac{P(S_i \cap T)}{P(T)} = \frac{P(S_i)P(T/S_i)}{P(T)} \end{aligned}$$

y del hecho de que, si T puede producirse si acaece S_1 , o si acaece S_2 , ..., o si acaece S_n , siendo estos sucesos (S_1, S_2, \dots, S_n) mutuamente excluyentes (figura 1.6):

$$\begin{aligned} T &= (S_1 \cap T) \cup (S_2 \cap T) \cup \dots \cup (S_n \cap T) \rightarrow \\ \rightarrow P(T) &= P(S_1 \cap T) + P(S_2 \cap T) + \dots + P(S_n \cap T) = \\ &= \sum_{j=1}^n P(S_j \cap T) = \sum_{j=1}^n P(S_j)P(T|S_j) \end{aligned}$$

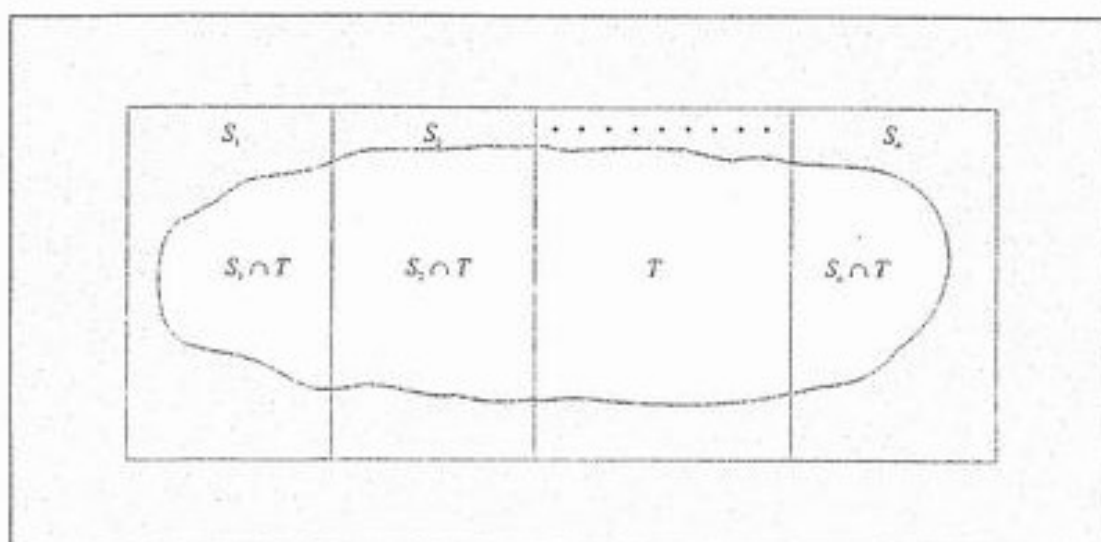


Figura 1.6.

El teorema de Bayes permite revisar las probabilidades a priori a la luz de la información proporcionada por el acaecimiento de un nuevo suceso, que, en este caso, es el suceso «encontrar plata al abrir un compartimiento del buque» (suceso p). Se trata, en este caso, de determinar la probabilidad de que el otro compartimiento tenga oro tras abrir uno de ellos y encontrar plata, es decir, la probabilidad de que el buque sea el III habida cuenta de que se ha producido p , o, lo que es lo mismo, la probabilidad $P(\text{III}/p)$.

Según el teorema de Bayes:

$$P(\text{III}/p) = \frac{P(\text{III} \cap p)}{P(p)}$$

donde:

$$P(\text{III} \cap p) = P(\text{III})P(p/\text{III})$$

$$P(p) = P(\text{I})P(p/\text{I}) + P(\text{II})P(p/\text{II}) + P(\text{III})P(p/\text{III})$$

Según se señaló en el apartado a), las probabilidades a priori son:

$$P(\text{I}) = P(\text{II}) = P(\text{III}) = \frac{1}{3}$$

En cuanto a las probabilidades condicionadas, adviértase que:

— Si el buque en cuestión fuera el I, la probabilidad de encontrar plata al abrir un compartimiento en él sería nula, pues este buque sólo contiene oro:

$$P(p/\text{I}) = 0$$

— El buque II sólo tiene plata, por lo que la probabilidad de encontrar plata en el buque hallado, condicionada dicha probabilidad a que se tratara del buque II, vale:

$$P(p/\text{II}) = 1$$

— El buque III tiene un compartimiento con plata y otro con oro. La probabilidad de encontrar en él plata al abrir un compartimiento será igual a 1/2:

$$P(p/\text{III}) = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente:

$$P(\text{III} \cap p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(p) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad «revisada», o probabilidad a posteriori, vale:

$$P(\text{III}/p) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

c) El beneficio esperado tras el descubrimiento de plata en un compartimiento será:

$$E(B/p) = B_{\text{I}}P(\text{I}/p) + B_{\text{II}}P(\text{II}/p) + B_{\text{III}}P(\text{III}/p)$$

Pero, si se ha encontrado plata, no puede tratarse del buque I; sólo puede ser el II o el III:

$$P(I/p) = 0$$

$$P(II/p) = 1 - P(III/p) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

o bien:

$$P(II/p) = \frac{P(II \cap p)}{P(p)} = \frac{P(II)P(p/II)}{P(p)} = \frac{(1/3)1}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente:

$$E(B/p) = 180 \cdot 0 + 60(2/3) + 120(1/3) = 80 \text{ millones de u.m.}$$

d) En las figuras 1.7 y 1.8 se encuentran representadas las distribuciones de probabilidad del beneficio antes y después del descubrimiento de la plata.

Antes del descubrimiento de la plata, la desviación típica del beneficio era:

$$\begin{aligned}\sigma(B) &= [(60 - 120)^2(1/3) + (120 - 120)^2(1/3) + (180 - 120)^2(1/3)]^{1/2} = \\ &= 48,99 \text{ millones de u.m.}\end{aligned}$$

Tras el descubrimiento, pasa a ser:

$$\sigma(B/p) = [(60 - 80)^2(2/3) + (120 - 80)^2(1/3)]^{1/2} = 28,28 \text{ millones de u.m.}$$

Con la nueva información se produce una reducción de la dispersión de los valores de la variable en torno a su media.

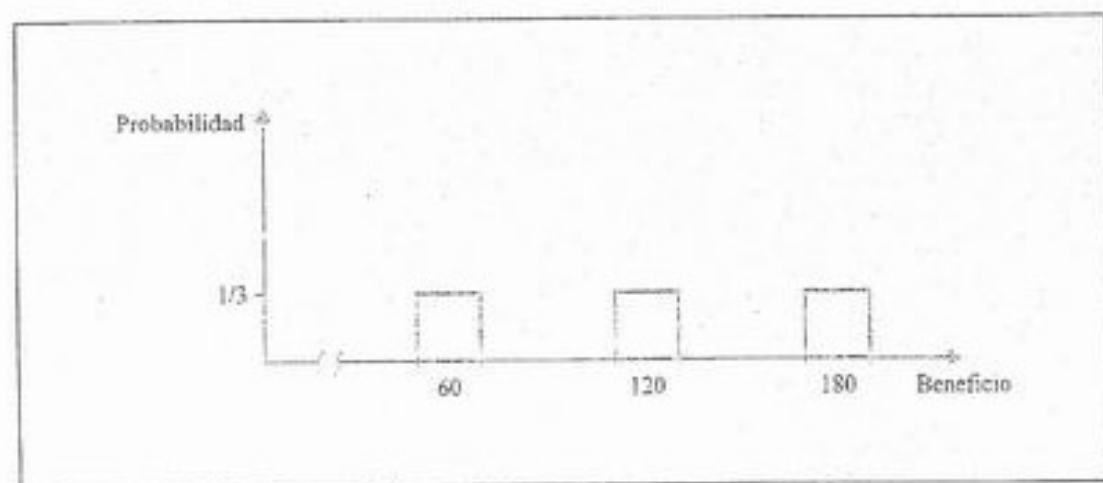


Figura 1.7.—Distribución de probabilidad a priori.

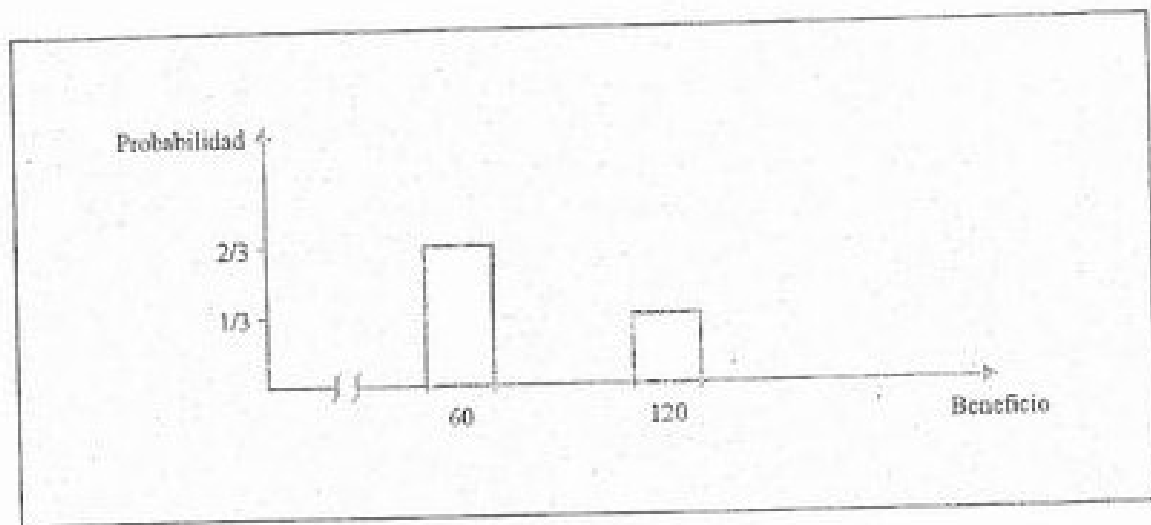


Figura 1.8.—Distribución de probabilidad «revisada».

1.4. LA DETERMINACIÓN DEL GRADO DE CONFIANZA

Problema 16

La determinación del grado de confianza

Cierto proceso de fabricación consta de innumerables fases, cuyas duraciones son variables aleatorias independientes entre sí y cuyas distribuciones de probabilidad tienen medias y varianzas finitas. La duración del proceso es la suma de las duraciones de tales fases; por consiguiente, dicha duración es una variable aleatoria. Respecto a esta variable se estima que tiene un valor esperado de 500 días con una desviación típica de 100 días. Se desea calcular la probabilidad de que la duración del proyecto no sea superior a 620 días y la duración con la que se debe comprometer la empresa de forma que exista un 97,5 por 100 de probabilidades de cumplir su compromiso.

RESOLUCIÓN

El teorema central del límite establece que, si una variable aleatoria está formada por la suma de una sucesión de infinitas variables aleatorias independientes entre sí y que tienen medias y desviaciones típicas finitas, aquella variable seguirá una distribución normal. Este teorema puede aplicarse con razonable aproximación siempre que el número de variables sea suficientemente elevado. En este caso, consideraremos que es aplicable y que la duración del proceso sigue una distribución normal.

La distribución de probabilidad normal es una distribución continua en la que, por tanto, la variable puede tomar infinitos valores. La probabilidad de que tome cualquiera de ellos es un infinitésimo, pero la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre dos extremos, cualesquiera que sean, es un valor finito. En este caso, se desea determinar la probabilidad de que la variable normal «duración del proyecto», D , tome un valor no superior a 620 días:

$$P(D \leq 620)$$

Si la variable X sigue una distribución normal con media $E(X)$ y desviación típica $\sigma(X)$, entonces la variable

$$\xi = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

seguirá una distribución normal con media $E(\xi) = 0$ y desviación típica $\sigma(\xi) = 1$, y esta distribución normal tipificada (es decir, en número de desviaciones típicas respecto a la media) está tabulada. En el apéndice de tablas estadísticas se recogen las probabilidades de que esta variable se encuentre entre 0 y z . Así, consultando las tablas, se observa, por ejemplo, que la probabilidad de que ξ se encuentre entre 0 y z (área sombreada bajo la «campana de Gauss», o representación de esta distribución normal) toma, para $z = 1,23$, un valor igual a 0,3907. El área total existente bajo la curva es la probabilidad

$$P(-\infty \leq \xi \leq \infty)$$

y, evidentemente, esta probabilidad es igual a la unidad (100 por 100). Dado que la curva es simétrica, si se desea conocer el área de la cola derecha de la campana situada a partir de $z = 1,23$, es decir, la probabilidad de que ξ sea mayor que 1,23, basta hacer:

$$P(\xi > 1,23) = 0,5 - P(0 \leq \xi \leq 1,23) = 0,5 - 0,3907 = 0,1093$$

Para resolver el problema planteado en este apartado, basta observar que, de la expresión de ξ , se deduce que:

$$X = \xi \cdot \sigma(X) + E(X)$$

Es decir, en este caso,

$$D = \xi \cdot \sigma(D) + E(D) = \xi \cdot 100 + 500$$

y, por tanto,

$$P(D \leq 620) = P(\xi 100 + 500 \leq 620) = P\left(\xi \leq \frac{620 - 500}{100}\right) = P\left(\xi \leq 1,20\right)$$

Se desea conocer el área existente bajo la curva de Gauss que existe a la izquierda del valor $z = 1,20$. Esta área será la suma de la existente entre $z = -\infty$ y $z = 0$ (que valdrá 0,5, dada la simetría de la distribución y el hecho de que el área total es igual a 1) y la que hay entre $z = 0$ y $z = 1,20$. Es decir:

$$P(\xi \leq 1,20) = P(-\infty \leq \xi \leq 0) + P(0 \leq \xi \leq 1,20) = 0,5 + P(0 \leq \xi \leq 1,20)$$

y, según las tablas,

$$P(0 \leq \xi \leq 1,20) = 0,3849$$

Por tanto, la probabilidad es:

$$P(D \leq 620) = P(\xi \leq 1,20) = 0,5 + 0,3849 = 0,8849 = 88,49 \text{ por } 100$$

Se desea, también, conocer el valor D^* tal que:

$$P(D \leq D^*) = 0,975 \text{ por } 1$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} P(\xi 100 + 500 \leq D^*) = 0,975 &\rightarrow P\left(\xi \leq \frac{D^* - 500}{100}\right) = \\ &= 0,975 \rightarrow 0,5 + P\left(0 \leq \xi \leq \frac{D^* - 500}{100}\right) = \\ &= 0,975 \rightarrow P\left(0 \leq \xi \leq \frac{D^* - 500}{100}\right) = 0,475 \end{aligned}$$

En las tablas se observa que:

$$P(0 \leq \xi \leq 1,96) = 0,475$$

Por tanto,

$$\frac{D^* - 500}{100} = 1,96 \rightarrow D^* = 696 \text{ días}$$

Para tener un nivel de confianza de, al menos, el 97,5 por 100 de que cumplirá su compromiso, ha de comprometerse en una duración no inferior a 696 días.

Problema
17

La determinación del grado de confianza

El grupo de empresas Multiunedgrup es propietario de cincuenta empresas situadas en distintos lugares y sectores y que funcionan independientemente, por lo que puede considerarse que sus beneficios son variables aleatorias independientes entre sí. Se estima, además, que los beneficios de las distintas empresas siguen distribuciones normales y que en veinte de ellas el beneficio esperado es de 15 millones de u.m., que en otras veinte es de 30 millones de u.m. y que en las otras diez vale 40 millones, con unas desviaciones típicas del beneficio de 20 millones en diez empresas, 25 millones en otras diez y 30 millones en las treinta empresas restantes. Se desea saber la probabilidad de que el beneficio del grupo sea superior a 1.603 millones de u.m.

RESOLUCIÓN

Considerando que el número de variables aleatorias (beneficios de las empresas) que integran la variable «beneficio del grupo» es suficientemente elevado, cabe aplicar el teorema central del límite y estimar que «el beneficio del grupo» seguirá una distribución de probabilidad normal.

La esperanza matemática de una variable X formada por la suma de n variables aleatorias (X_1, X_2, \dots, X_n) es igual a la suma de los valores esperados de estas n variables:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \rightarrow \\ \rightarrow E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \end{aligned}$$

Además, si dichas variables aleatorias son independientes entre sí, su varianza es igual a la suma de las varianzas de las variables que la forman:

$$\sigma^2(X) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)$$

Por tanto, su desviación típica valdrá:

$$\sigma(X) = [\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)]^{1/2}$$

En este caso, los parámetros correspondientes a la variable «beneficios del grupo», B , serán:

$$E(B) = 20 \cdot 15 + 20 \cdot 30 + 10 \cdot 40 = 1.300 \text{ millones de u.m.}$$

$$\sigma^2(B) = 20^2 \cdot 10 + 25^2 \cdot 10 + 30^2 \cdot 30 = 37.250 \text{ (millones de u.m.)}^2$$

$$\sigma(B) = 37.250^{1/2} = 193 \text{ millones de u.m.}$$

Se desea conocer la probabilidad de que el beneficio del grupo sea superior a 1.603 millones de u.m.; es decir, siendo ξ la variable que sigue una distribución normal de esperanza matemática nula y desviación típica unitaria (variable normal tipificada):

$$\begin{aligned} P(B > 1.603) &= P(193\xi + 1.300 > 1.603) = P\left(\xi > \frac{1.603 - 1.300}{193}\right) = \\ &= P(\xi > 1,57) = 0,5 - P(0 \leq \xi \leq 1,57) \end{aligned}$$

En las tablas del apéndice se observa que

$$\begin{aligned} P(0 \leq \xi \leq 1,57) &= 0,4418 = 44,18 \text{ por } 100 \Rightarrow P(B > 1.603) = 0,5 - 0,4418 = \\ &= 0,0582 = 5,82 \text{ por } 100 \end{aligned}$$

Se estima que existe una probabilidad del 5,82 por 100 de que el grupo obtenga unos beneficios superiores a 1.603 millones de u.m.

1.5. LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Problema 18

La teoría de la información

¿Cuál es la entropía asociada al lanzamiento de una moneda perfecta?

RESOLUCIÓN

En teoría de la información como medida de la cantidad de información asociada a un suceso, h , se utiliza el logaritmo del recíproco de su probabilidad, P :

$$h(P) = \log (1/P) = -\log (P)$$

Habitualmente, se toman logaritmos binarios. Por ejemplo, la información asociada a obtener «cara» (suceso C) al lanzar una moneda vale un «bit»:

$$h(1/2) = -\log_2 (1/2) = 1 \text{ bit}$$

y, evidentemente, también valdrá un bit la información derivada de obtener «cruz» (suceso X) en el lanzamiento, pues la probabilidad de este suceso también vale un medio.

También es evidente que antes del lanzamiento de la moneda no es posible saber si saldrá cara o si saldrá cruz. No obstante, la *esperanza matemática del valor de la información*, también denominada *entropía*, H , será igual al primer valor probable (valor de la información si se da el primer caso: cara) por su probabilidad (0,5), más el segundo valor probable (valor de la información si se da el segundo caso: cruz) por su probabilidad (0,5). Es decir:

$$H = P_C h(P_C) + P_X h(P_X) = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 = 1 \text{ bit}$$

Por consiguiente, la entropía asociada al lanzamiento de una moneda perfecta vale 1 bit. En realidad, en este caso, es seguro que se obtendrá 1 bit de información en el lanzamiento, pues ésta es la información asociada tanto a la obtención de cara como a la obtención de cruz.

Problema
19

La teoría de la información

Supongamos que, en relación a la moneda del problema anterior, que creíamos perfecta, alguien nos da el siguiente mensaje: «la moneda no es perfecta, sino que existe una probabilidad del 25 por 100 de que salga cara». ¿Cuánto vale ahora la entropía?

RESOLUCIÓN

Denominando Q a las nuevas probabilidades derivadas del mensaje, en este caso la información derivada del suceso «obtener cara» vale:

$$h(Q_c) = \log_2 (1/0,25) = \log_2 (4) = 2 \text{ bits}$$

siendo la de «obtener cruz»:

$$h(Q_x) = \log_2 (1/0,75) = \log_2 (1,33) = 0,415 \text{ bits}$$

Como puede observarse, y es razonable, la información que se derivaría de un suceso es tanto mayor cuanto menos probable es ese suceso. En los extremos, el acaecimiento de un suceso que era seguro que iba a producirse (probabilidad igual a la unidad) no proporciona ninguna información (ya se sabía que se produciría):

$$h(1) = \log_2 (1/1) = 0$$

en tanto que la información derivada del acaecimiento de un suceso imposible es infinita:

$$h(0) = \log_2 (1/0) = \infty$$

La entropía, o información esperada, en el caso de la moneda imperfecta será:

$$H = Q_c h(Q_c) + Q_x h(Q_x) = 0,25 \times 2 + 0,75 \times 0,415 = 0,81125 \text{ bits}$$

Al tenerse más información que en el problema anterior (gracias al contenido informativo del mensaje), la información esperada del lanzamiento de la moneda (la entropía o desorden del sistema) es menor.

Problema 20

La teoría de la información

¿Cuál es la información de canal, o información esperada, del mensaje a que se refiere el problema anterior?

RESOLUCIÓN

Si se obtuviera cara, la modificación en la información que habría provocado el mensaje sería:

$$\begin{aligned} h(P_c) - h(Q_c) &= -\log_2 (P_c) + \log_2 (Q_c) = \log_2 (Q_c/P_c) = \\ &= 1 - 2 = -1 = \log_2 (0,25/0,5) \end{aligned}$$

Si, por el contrario, se obtuviera cruz:

$$\begin{aligned} h(P_x) - h(Q_x) &= -\log_2 (P_x) + \log_2 (Q_x) = \log_2 (Q_x/P_x) = 1 - 0,415 = \\ &= 0,585 = \log_2 (0,75/0,5) \end{aligned}$$

Los valores probables de la información del mensaje son -1 (con una probabilidad del 25 por 100, pues ésta es ahora la probabilidad de que salga cara) y $0,585$ (con una probabilidad del 75 por 100). Por tanto, la información de canal, o valor esperado de la información del mensaje, vale:

$$\begin{aligned} I(Q : P) &= Q_c \log_2 (Q_c/P_c) + Q_x \log_2 (Q_x/P_x) = 0,25(-1) + 0,75 \times 0,585 = \\ &= 0,18875 \text{ bits} \end{aligned}$$

**Problema
21**

La teoría de la información

Como se verá en el caso del cuarto problema del próximo capítulo, la probabilidad a priori de encontrar agua en el subsuelo de un terreno era el 60 por 100, siendo del 40 por 100 la de no encontrarla. Utilizando el análisis bayesiano se dedujo que tras utilizar un detector de agua y que éste señala que la había, la probabilidad de que la hubiera pasaba a ser del 87,0968 por 100, siendo del 12,9032 por 100 la de que no hubiera agua. Se desea conocer la entropía antes de utilizar el detector, y después de utilizarlo y que señale que hay agua, así como la información de canal del mensaje del detector.

RESOLUCIÓN

Siendo A el suceso «que haya agua» y NA el suceso «que no haya agua», antes de utilizar el detector los cálculos son los siguientes:

$$\begin{aligned} H &= P_A h(P_A) + P_{NA} h(P_{NA}) = 0,6 \log_2 (1/0,6) + 0,4 \log_2 (1/0,4) = \\ &= 0,6 \times 0,737 + 0,41 \times 1,322 = 0,9710 \text{ bits} \end{aligned}$$

Tras la información del detector, introduciendo las nuevas probabilidades, se obtiene:

$$H' = Q_A h(Q_A) + Q_{NA} h(Q_{NA}) = 0,871 \log_2 (1/0,871) + 0,129 \log_2 (1/0,129) = \\ = 0,871 \times 0,1993 + 0,129 \times 2,9546 = 0,5547 \text{ bits}$$

En cuanto a la información de canal, los resultados son los siguientes:

$$I(Q : P) = Q_A \log_2 (Q_A/P_A) + Q_{NA} \log_2 (Q_{NA}/P_{NA}) = \\ = 0,871 \log_2 (0,871/0,6) + 0,129 \log_2 (0,129/0,4) = \\ = 0,871 \times 0,5377 + 0,129 \times (-1,6326) = 0,2577 \text{ bits}$$

**Problema
22**

La teoría de la información

¿Cuál es la entropía asociada al lanzamiento de una moneda perfecta, si la información se mide en nits?

RESOLUCIÓN

Cuando se utilizan logaritmos neperianos la información se mide en nits:

$$h(P_c) = h(P_s) = -\ln (1/2) = 0,6931 \text{ nits} \\ H = P_{cb}(P_c) + P_s h(P_s) = 0,5 \cdot 0,6931 + 0,5 \cdot 0,6931 = 0,6931 \text{ nits}$$

**Problema
23**

La teoría de la información

En principio pensábamos que una moneda era perfecta, pero recibimos un mensaje que dice que existe una probabilidad del 25 por 100 de que salga cara. Si la información se mide en nits, ¿cuál es la información de canal de ese mensaje?

RESOLUCIÓN

$$I(Q : P) = Q_c \ln \left[\frac{Q_c}{P_c} \right] + Q_s \ln \left[\frac{Q_s}{P_s} \right] = 0,25 \ln \left[\frac{0,25}{0,5} \right] + 0,75 \ln \left[\frac{0,75}{0,5} \right] = 0,13 \text{ nits}$$

2

Instrumentos de planificación, programación y control

2.1. LOS ÁRBOLES DE DECISIÓN Y EL VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN PERFECTA

Problema 1

Los árboles de decisión

El señor Fruned echó instancias para efectuar dos oposiciones a la Administración del Estado, cada una de las cuales consta de dos exámenes, y, desde que lo hizo, ha venido estudiando las dos. Para mañana tiene convocado, a la misma hora, el primer ejercicio de estas dos oposiciones. Si aprobara la oposición al cuerpo de la Administración X ganaría 100.000 u.m. mensuales; si aprobara la oposición al cuerpo Y ganaría mensualmente 150.000 u.m. Basándose en el nivel de conocimientos que considera que tiene y en el que estima que tienen otros opositores a los que conoce, considera que tiene una probabilidad del 70 por 100 de aprobar el primer ejercicio de la oposición al cuerpo X y un 40 por 100 de superar con éxito el segundo. En cuanto a la oposición al cuerpo Y, estima en un 40 por 100 la probabilidad de aprobar el primer ejercicio y en un 50 por 100 la de superar el segundo. En cualquiera de las dos oposiciones, si no supera el primer ejercicio ya no puede presentarse al segundo y suspende la oposición. Dado que mañana no puede acudir a la realización de los primeros ejercicios de las dos oposiciones, ¿a cuál deberá asistir si desea maximizar su ganancia mensual esperada?

RESOLUCIÓN

Un árbol de decisión es un grafo orientado que representa un proceso de decisión mediante *nudos* (o vértices) y *ramas* (o aristas). Hay dos tipos de nudos: decisionales y aleatorios. Los *nudos decisionales* representan situaciones en las que el decisor ha de tomar una decisión. Cada rama que parte de un nudo deci-

sional representa una de las alternativas de decisión. Los nudos aleatorios representan situaciones en las que el decisor se enfrenta a distintos sucesos o estados de la naturaleza entre los que él no puede elegir. Cada rama que parte de un nudo aleatorio representa uno de los sucesos o estados de la naturaleza que pueden acontecer. Cuando se puede asignar la probabilidad de cada suceso, ésta se coloca sobre la rama que lo representa. Dado que ha de haber una rama para cada suceso posible, la suma de las probabilidades situadas en las ramas que parten de cada nudo aleatorio ha de totalizar la unidad (el 100 por 100). A los nudos decisionales se les representa con cuadrados y a los aleatorios con círculos.

En la figura 2.1 se ha representado el árbol de decisión correspondiente al presente caso. El primer nudo es siempre decisional: representa la decisión inicial que ha de tomar el decisor; en este caso, ha de decidir entre acudir al primer ejercicio de la oposición al cuerpo X (alternativa representada por la rama X) o al de la oposición al cuerpo Y (rama Y). Si se decide por presentarse a la oposición al cuerpo X, pasará a colocarse en el nudo 2, que representa la situación en la cual puede ocurrir que supere el primer ejercicio de esta oposición (rama $S1X$) o que no lo apruebe ($N1X$). Dado que la probabilidad de que lo apruebe es de un 70 por 100, la de que no lo apruebe será del 30 por 100. Si es este último el suceso que se presenta ($N1X$), no ganará mensualmente nada; es decir, el resultado asociado al camino (o sucesión de ramas) $X - N1X$

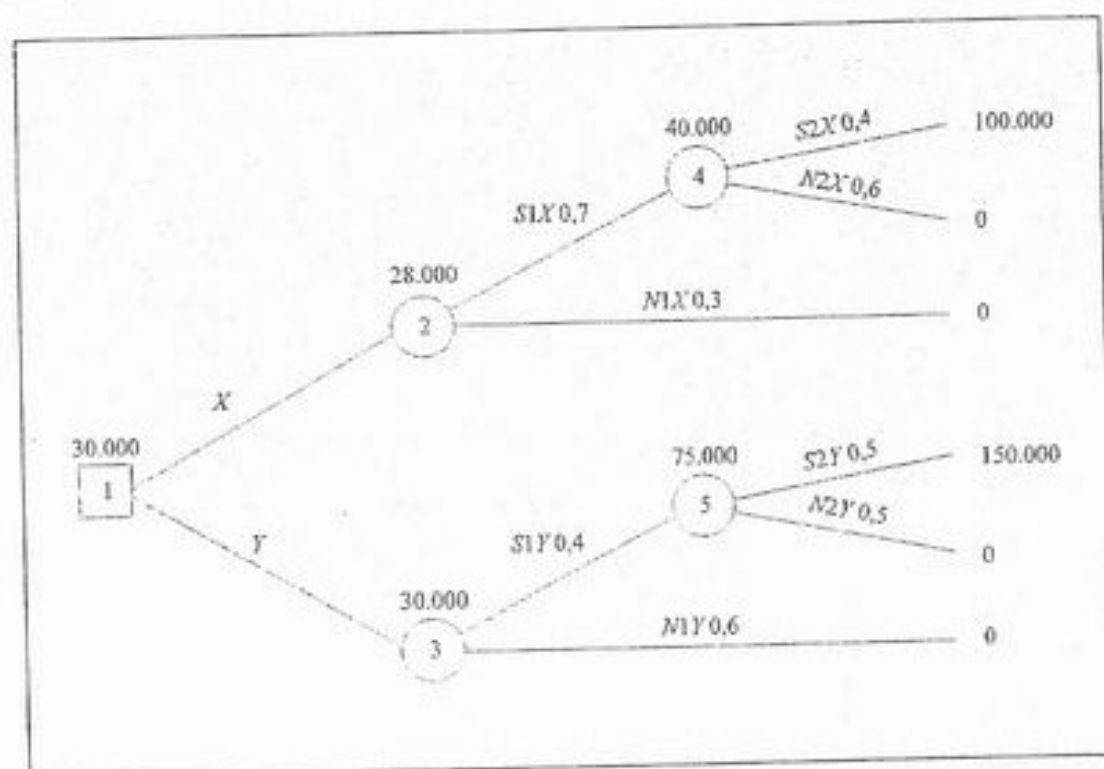


Figura 2.1.

es 0. Si se da el suceso $S1X$, el decisor pasará a colocarse en el nudo 4, que representa la situación en la que puede ocurrir que supere el segundo examen de esta oposición (suceso representado por la rama $S2X$) o que no lo supere ($N2X$). Dado que la probabilidad de superarlo es de un 40 por 100, la de que no lo supere será del 60 por 100. Si aconteciera el suceso $N2X$, no ganaría mensualmente nada (el resultado asociado al camino $X - S1X - N2X$ es 0). Si aconteciera el suceso $S2X$, ganaría 100.000 u.m. mensuales; es decir, el resultado asociado al camino «elegir acudir a la oposición X , aprobar el primer ejercicio de esta oposición y aprobar el segundo ejercicio de la misma» (camino $X - S1X - S2X$) es de 100.000 u.m.

Del mismo modo se han representado los sucesivos estados y sucesos que se pueden derivar de la decisión consistente en acudir a la oposición al cuerpo Y (decisión representada por la rama Y del árbol).

Una vez representados los nudos y ramas, con sus probabilidades, así como los resultados asociados a cada camino, se procede de derecha a izquierda para determinar el valor asociado a cada nudo o vértice. El valor asociado a un nudo aleatorio es la esperanza matemática de los valores situados al final de las ramas que parten de él. Así, el decisor situado en el nudo 4 (es decir, aquel que se decidió por la oposición X , aprobó el primer ejercicio de la misma y ahora no sabe si aprobará o no el segundo) ignora si superará el segundo ejercicio, con lo que obtendría una ganancia mensual de 100.000 u.m., o si lo suspenderá, con lo que no ganaría nada, pero estima en un 40 por 100 la probabilidad de que acontezca el primer suceso y en un 60 por 100 la de que se produzca el segundo. Por tanto, la ganancia esperada (valor esperado de la ganancia, o esperanza matemática de la misma) del decisor situado en el vértice 4 es:

$$V_4 = 100.000 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6 = 40.000 \text{ u.m.}$$

Tal será, por consiguiente, el valor asociado al nudo 4, que se ha de situar junto a él en el árbol. Del mismo modo, el decisor situado en el nudo 2 (es decir, aquel que ya se ha decidido por la oposición X pero que todavía no se ha presentado al primer examen) ignora si aprobará el primer ejercicio, con lo que obtendría una ganancia mensual esperada de 40.000 u.m., o si no lo superará, con lo que su ganancia mensual sería nula. Dado que el primer suceso ($S1X$) tiene una probabilidad del 70 por 100, la probabilidad del segundo ($N1X$) será del 30 por 100, y el valor esperado asociado al nudo 2 será igual a 28.000 u.m.:

$$V_2 = 40.000 \cdot 0,7 + 0 \cdot 0,3 = 28.000 \text{ u.m.}$$

Del mismo modo, procediendo de derecha a izquierda, se calculan V_5 y V_3 :

$$V_5 = 150.000 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 75.000 \text{ u.m.}$$

$$V_3 = 75.000 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,6 = 30.000 \text{ u.m.}$$

El valor asociado a cualquier nudo decisional es igual al mayor de los valores asociados a los nudos en los que tienen destino ramas que parten de él. Así, el decisor situado en el nudo decisional 1 puede elegir la alternativa «presentarse al primer ejercicio de la oposición al cuerpo X» (opción representada por la rama X) o por la de «presentarse al primer ejercicio de la oposición al cuerpo Y» (rama Y). Si elige la opción X, tendrá una ganancia mensual esperada de 28.000 u.m., mientras que si elige la Y su esperanza de ganancia mensual será de 30.000 u.m. Si el decisor sigue el criterio de elegir la opción a la que le corresponda la mayor ganancia mensual esperada, se decidirá por asistir a la oposición al cuerpo Y y el valor asociado al nudo 1 será:

$$V_1 = 30.000 \text{ u.m.}$$

**Problema
2**

Los árboles de decisión

¿A qué oposición ha de acudir el señor Fruned, al que se refiere el problema anterior, si su objetivo es maximizar la probabilidad de obtener alguna ganancia mensual? ¿Cuál es la desviación típica de la ganancia mensual bajo cada una de las alternativas de decisión?

RESOLUCIÓN

Si se decide por la alternativa X, la probabilidad de obtener alguna ganancia mensual (es decir, la de obtener 100.000 u.m. mensuales) será la probabilidad de aprobar el primero y el segundo ejercicios de la misma; es decir, la probabilidad de que se produzca el suceso compuesto «aprobar el primer ejercicio y, luego, aprobar el segundo» (suceso $S1X \cap S2X$):

$$P(S1X \cap S2X) = P(S1X)P(S2X/S1X)$$

donde:

$P(S1X)$: Probabilidad de aprobar el primer ejercicio de la oposición al cuerpo X = 70 por 100.

$P(S2X/S1X)$: Probabilidad de aprobar el segundo ejercicio de la oposición al cuerpo X habiendo aprobado el primero (si no se aprueba el primero no es posible presentarse al segundo, por lo cual el suceso $S2X$ depende del $S1X$) = 40 por 100.

Por consiguiente:

$$P(S1X \cap S2X) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28 = 28 \text{ por } 100$$

Del mismo modo se obtienen:

— La probabilidad de aprobar el primer ejercicio de la oposición al cuerpo X y suspender el segundo:

$$P(S1X \cap N2X) = P(S1X)P(N2X/S1X) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42 = 42 \text{ por } 100$$

— La probabilidad de aprobar el primer ejercicio y el segundo de la oposición al cuerpo Y (es decir, la probabilidad de obtener alguna ganancia mensual si acude a esta oposición):

$$P(S1Y \cap S2Y) = P(S1Y)P(S2Y/S1Y) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,20 = 20 \text{ por } 100$$

— La probabilidad de aprobar el primer ejercicio de la oposición al cuerpo Y y suspender el segundo:

$$P(S1Y \cap N2Y) = P(S1Y)P(N2Y/S1Y) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,20 = 20 \text{ por } 100$$

Por consiguiente, el árbol de decisión también puede disponerse conforme a la figura 2.2.

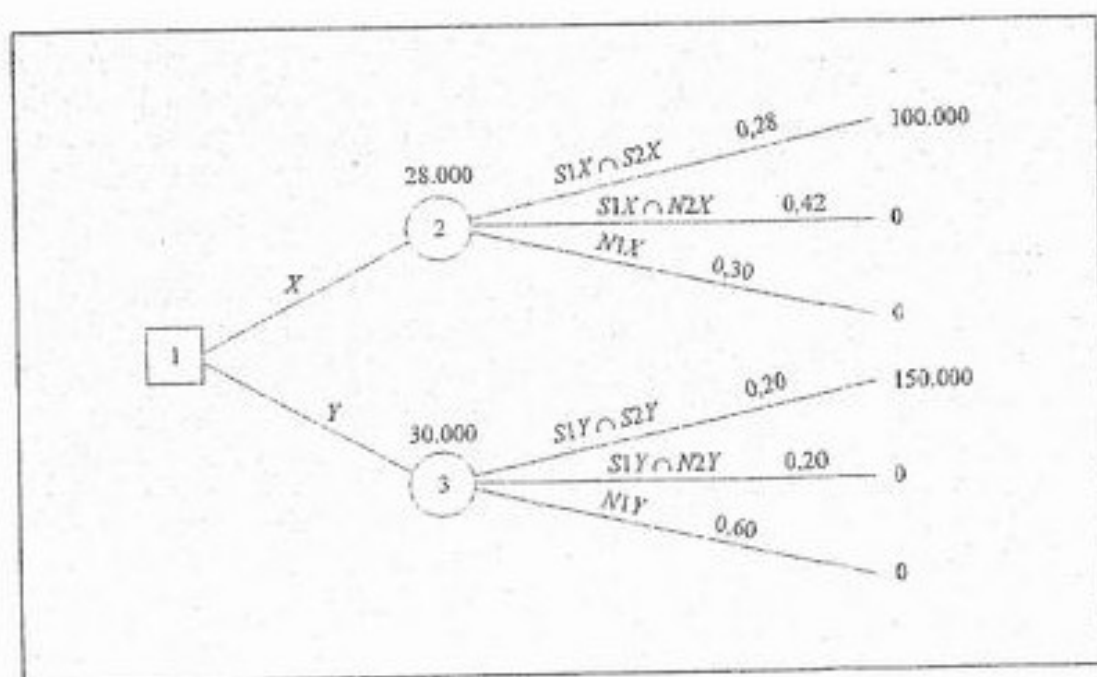


Figura 2.2.

Si el señor Fruned se decide por la alternativa «opositar al cuerpo X», tendrá, según sus estimaciones:

- Una probabilidad del 28 por 100 de aprobar los dos ejercicios, con lo que obtendría una ganancia mensual.
- Una probabilidad del 42 por 100 de aprobar el primer ejercicio y suspender el segundo, en cuyo caso no obtendría ninguna ganancia.
- Una probabilidad del 30 por 100 de suspender el primer ejercicio, en cuyo caso tampoco obtendría ganancia alguna.

Por tanto, decidiéndose por la alternativa X, la probabilidad de ganar algo es del 28 por 100 y la de no ganar nada es del 72 por 100:

$$1 - 0,28 = 0,72 = 72 \text{ por } 100$$

$$P[(S1X \cap N2X) \cup N1X] = 0,42 + 0,3 = 0,72 = 72 \text{ por } 100$$

Del mismo modo, si se decide por la oposición al cuerpo Y, tendrá una probabilidad del 20 por 100 de ganar algo (probabilidad del suceso «aprobar el primer ejercicio y el segundo», $P(S1Y \cap S2Y)$) y una probabilidad del 80 por 100 de no ganar nada (probabilidad de que «apruebe el primero y no el segundo o de que no apruebe el primero», $P[(S1Y \cap N2Y) \cup N1Y] = 0,2 + 0,6 = 0,8 = 80 \text{ por } 100$).

Si el objetivo del señor Fruned es maximizar la probabilidad de ganar algo, se decidirá por la oposición al cuerpo X, en la cual dicha probabilidad es del 28 por 100 frente al 20 por 100 correspondiente a la oposición Y.

Las distribuciones de probabilidad de las ganancias correspondientes a las dos oposiciones se recogen en la tabla 2.1.

TABLA 2.1

Opciones	Valores probables	Probabilidades
X	100.000	0,28
	0	0,72
Y	150.000	0,20
	0	0,80

Dado que, bajo la opción X, la esperanza matemática de la ganancia vale 28.000, su desviación típica será:

$$\sigma_x = [(100.000 - 28.000)^2 0,28 + (0 - 28.000)^2 0,72]^{1/2} = 44.899,89 \text{ u.m.}$$

En cuanto a la opción Y, la esperanza matemática valía 30.000 y la desviación típica será igual a:

$$\sigma_Y = [(150.000 - 30.000)^2 0,20 + (0 - 30.000)^2 0,80]^{1/2} = 60.000 \text{ u.m.}$$

La dispersión de los valores posibles de la variable «ganancia mensual», en relación a su media, es mayor en la opción Y que en la alternativa X.

Problema

3

Los árboles de decisión

A una persona se le ofrece la posibilidad de elegir entre dos juegos, A y B. En el juego A se lanza una moneda perfecta y, si sale cara, el jugador puede elegir entre la urna 1, que tiene tres bolas blancas y una negra, y la urna 2, que tiene dos bolas blancas y una negra. Si el jugador elige la urna 1 y, al realizar la extracción, sale bola blanca se le entregan 100 u.m.; si sale negra se le entregan 400 u.m. Si la urna elegida es la 2 y sale bola blanca, se le dan 210 u.m., mientras que si se extrae una bola negra se le entregan 270 u.m. Si el resultado del lanzamiento de la moneda es cruz, el jugador puede elegir entre la urna 3, que tiene tres bolas blancas y dos negras, y la urna 4, que contiene dos bolas blancas y cuatro negras. Si elige la urna 3 y de la extracción resulta una bola blanca, se le entregan 150 u.m., mientras que si sale una bola negra se le dan 250. Si eligió jugar con la urna 4, se le entregan 300 u.m. si de la extracción resulta una bola blanca, y 120 si se saca una bola negra.

El juego B consiste en lanzar un dado perfecto. Si el resultado es un número par, se le entregan 210 u.m., y si es impar, se le entregan 190.

Se desea saber las opciones que debe elegir esta persona en los dos casos siguientes:

- Cuando el objetivo del jugador es maximizar la esperanza matemática del resultado.
- Cuando el objetivo del jugador es maximizar la probabilidad de obtener más de 205 u.m.

RESOLUCIÓN

a) El árbol de decisión correspondiente a este caso se ha representado en la figura 2.3. La simbología empleada es la siguiente:

- A: Elegir juego A.
- B: Elegir juego B.
- C: Obtener cara al lanzar la moneda.

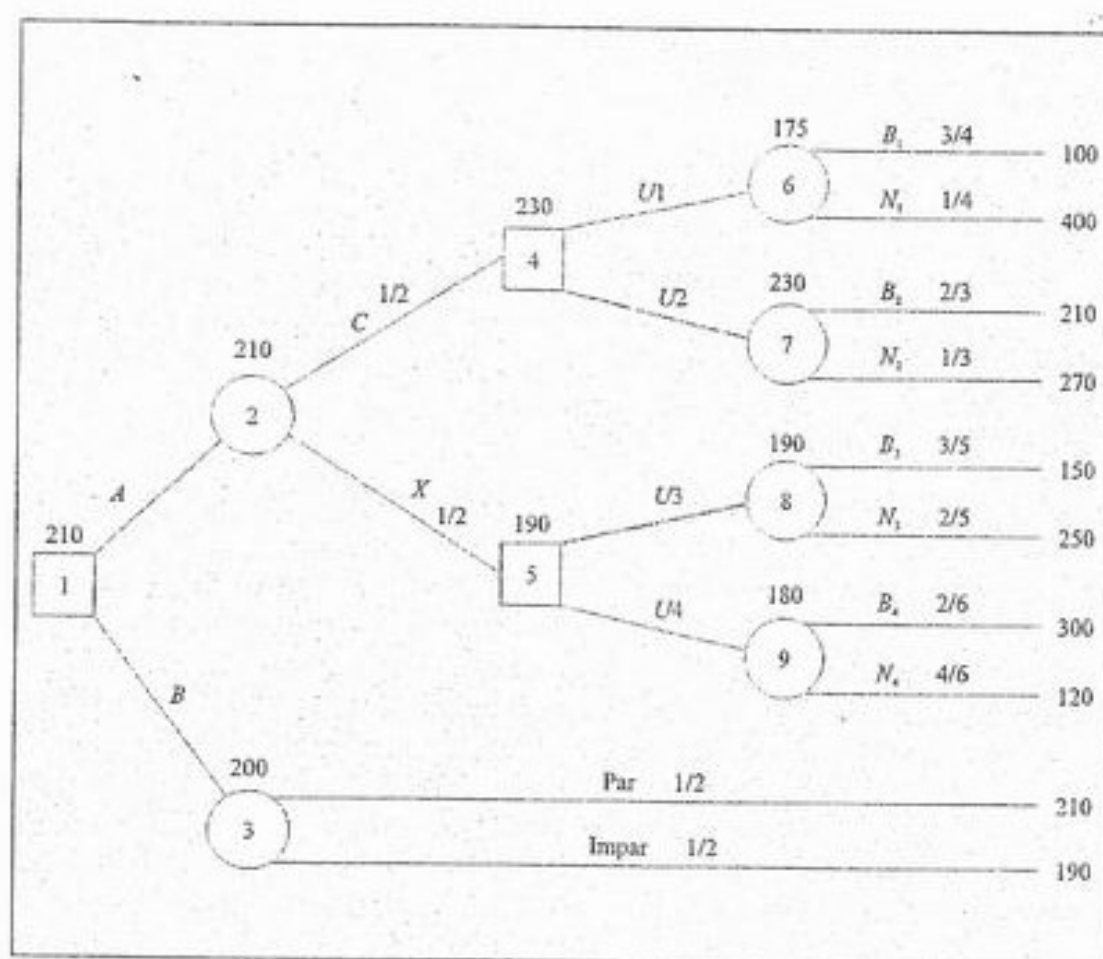


Figura 2.3.

- X: Obtener cruz al lanzar la moneda.
- U1: Elegir la urna 1.
- U2: Elegir la urna 2.
- U3: Elegir la urna 3.
- U4: Elegir la urna 4.
- B_i : Obtener una bola blanca al realizar la extracción de la urna correspondiente, i .
- N_i : Obtener una bola negra al efectuar la extracción de la urna correspondiente, i .
- Par: Obtener un número par al lanzar el dado.
- Impar: Obtener un número impar en el lanzamiento del dado.

Las probabilidades situadas sobre las ramas que parten de nudos aleatorios se obtienen como cociente entre el número de casos favorables y el de casos posibles. Así, es evidente que, en el lanzamiento de la moneda:

$$P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$$

La probabilidad de obtener una bola blanca en la urna 1, que tiene 3 bolas blancas y una negra, será:

$$P(B_1) = \frac{3}{4}$$

y la de obtener una bola negra en la extracción de dicha urna valdrá:

$$P(N_1) = \frac{1}{4}$$

Del mismo modo se han calculado las probabilidades de B_2, N_2, B_3, N_3, B_4 y N_4 .

Dado que un dado tiene tres caras con números pares y otras tres con números impares, y que el dado es perfecto:

$$P(\text{Par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Impar}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Una vez incorporados los valores correspondientes a cada uno de los caminos en el árbol, se procede, de derecha a izquierda, calculando los valores asociados a los nudos. Así, en cuanto a los vértices aleatorios 6, 7, 8 y 9, se obtiene:

$$V_6 = 100(3/4) + 400(1/4) = 175 \text{ u.m.}$$

$$V_7 = 210(2/3) + 270(1/3) = 230 \text{ u.m.}$$

$$V_8 = 150(3/5) + 250(2/5) = 190 \text{ u.m.}$$

$$V_9 = 300(2/6) + 120(4/6) = 180 \text{ u.m.}$$

El inversor situado en el nudo 4 (es decir, aquel que se decidió por el juego A y que, en el lanzamiento de la moneda, obtuvo cara) puede elegir entre la urna 1, que le proporciona un resultado medio de 175, o la urna 2, con la que su esperanza de resultado es de 230. Siguiendo el criterio de maximizar su esperanza matemática, elegirá la alternativa U2 y el valor asociado al nudo 4 será 230. Por la misma razón, el valor asociado al nudo 5 es 190.

Si el jugador elige el juego A, su esperanza matemática será la del nudo 2, es decir:

$$V_2 = 230(1/2) + 190(1/2) = 210 \text{ u.m.}$$

Si eligiera la alternativa *B*, su esperanza sería el valor asociado al nudo 3, o, lo que es lo mismo,

$$V_3 = 210(1/2) + 190(1/2) = 200 \text{ u.m.}$$

Si el objetivo de este decisor es maximizar la esperanza matemática de su resultado, elegirá la alternativa *A*. Si, luego, en el lanzamiento de la moneda, se obtiene cara, elegirá la alternativa *U2* ($V_7 = 230 > 175 = V_6$); si se obtiene cruz, seleccionará la alternativa *U3*.

b) Si el objetivo del jugador es maximizar la probabilidad de obtener más de 205 u.m., es evidente que:

- Si el decisor llegara a situarse en el nudo 4 (es decir, si eligiera el juego *A* y al lanzar la moneda se obtuviera cara), elegiría la segunda urna, con lo cual la probabilidad de obtener más de 205 u.m. sería igual a la unidad (sería un suceso seguro).
- Si el decisor se encuentra en el nudo 5, elegirá la urna 3, pues, con ello, la probabilidad de obtener más de 205 u.m. es de $2/5$, en tanto que si elige la alternativa *U4*, dicha probabilidad sólo será de $2/6$.
- El inversor situado en el nudo 2 tiene un 50 por 100 de probabilidades de llegar a estar situado en el nudo 4 (y, con ello, poder elegir *U2* y tener la seguridad de conseguir un resultado superior a 205 u.m.) y otro 50 por 100 de pasar al nudo 5 (y así poder elegir la alternativa *U3*, con la que obtiene una probabilidad de $2/5$ de superar el resultado deseado). Por consiguiente, la probabilidad de sobrepasar las 205 u.m. eligiendo la alternativa *A* es de:

$$(1/2)1 + (1/2)(2/5) = 0,7 = 70 \text{ por } 100$$

- El decisor que elige la alternativa *B* tiene una probabilidad del 50 por 100 de obtener un resultado superior a 205 u.m.

Por tanto, si lo que se desea es maximizar la probabilidad de obtener más de 205 u.m., ha de elegirse la misma secuencia de decisiones que la seleccionada en el apartado a), cuando se trataba de maximizar la esperanza de ganancia; es decir, se ha de elegir el juego *A* y luego, si se obtiene una cara, se elige la urna 2, y si resulta cruz, se elige la urna 3.

Problema
4

La incorporación del análisis bayesiano en los árboles de decisión y el valor esperado de la información

Don Bunedzio está pensando en adquirir un terreno, que venden barato (en 100.000 u.m.), por no tener pozo de agua, para luego construir el pozo y revenderlo en 200.000 u.m. Su idea se basa en las estimaciones de un grupo de expertos que le aseguraron que hay una probabilidad del 60 por 100 de que, si se excava en una pequeña porción de tierra localizada en ese terreno, se encontrará agua. Por consiguiente, existe una probabilidad, a priori, del 40 por 100 de que el terreno no tenga agua, y, si así fuera, don Bunedzio estima que podría revenderlo por 90.000 u.m. Ante este riesgo, este señor está pensando en, antes de comprarlo, alquilar, por 10.000 u.m., un aparato detector de aguas subterráneas que, aunque no tiene una fiabilidad absoluta, señala que hay agua en el 90 por 100 de los casos en los que realmente la hay (equivocándose en el 10 por 100 restante) y en el 20 por 100 de los casos en los que no la hay (acertando en el 80 por 100 restante). Siendo el coste de la excavación de 57.000 u.m., se desea saber:

- La secuencia de decisiones óptima si el objetivo de don Bunedzio es maximizar el beneficio esperado con la operación.
- El valor esperado de la información perfecta para este decisor antes de utilizar el detector y después de emplearlo, suponiendo que dicho aparato haya indicado que hay agua.
- El valor esperado de la información del detector antes de alquilarlo.

RESOLUCIÓN

a) En la figura 2.4 se recoge el árbol correspondiente a este caso. En él se han utilizado los siguientes símbolos:

- A es el suceso «hay agua».
- NA significa «no hay agua».
- DA representa el suceso «el detector señala que hay agua».
- DN corresponde al evento «el detector indica que no hay agua».

La primera decisión que ha de tomar el decisor es la de utilizar, o no, el detector. Si decide no utilizarlo, luego habrá de decidir si compra o no el terreno. Si no lo compra, su beneficio será nulo; pero si lo compra, el beneficio dependerá de que haya agua o no la haya. Si la hay, ganará 43.000 u.m.:

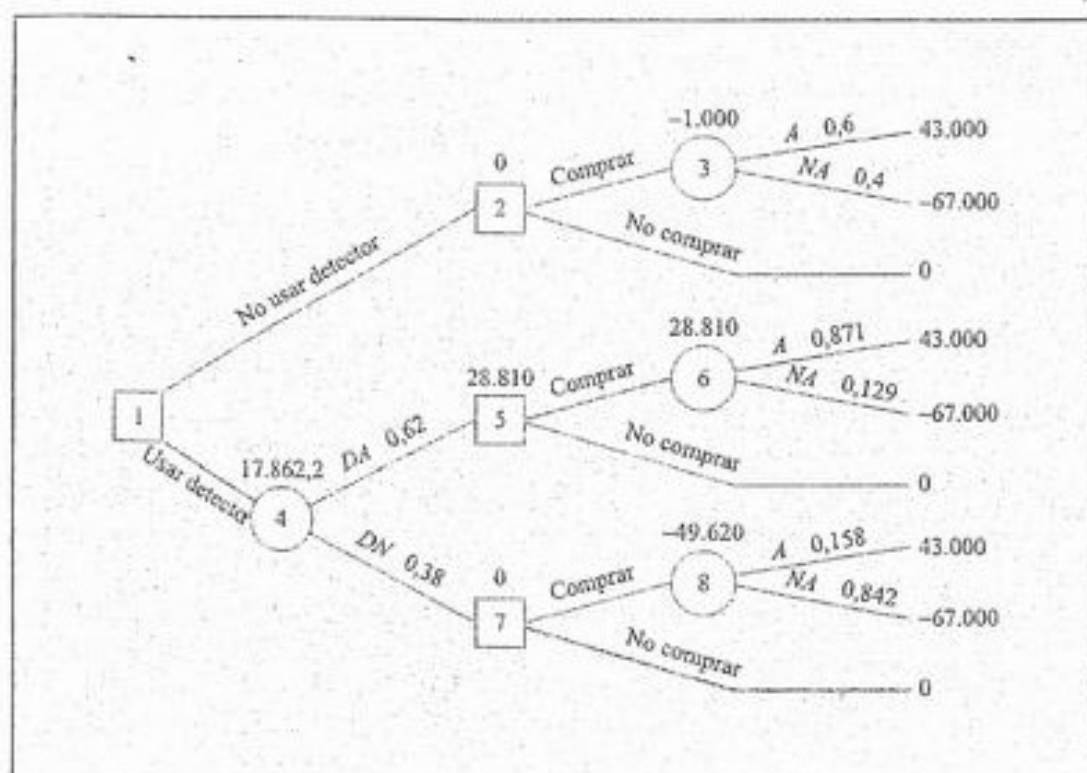


Figura 2.4.

Precio de venta del terreno - Precio de compra - Coste de la excavación = $200.000 - 100.000 - 57.000 = 43.000$ u.m.

Por el contrario, en el caso de que compre el terreno y al excavarlo resulte que no hay agua, perderá 67.000 u.m.:

$$90.000 - 100.000 - 57.000 = -67.000 \text{ u.m.}$$

Dado que, con la información existente si no se usa el detector, la probabilidad de que haya agua es del 60 por 100, siendo del 40 por 100 la de que no la haya, la esperanza de beneficio será:

$$V_3 = 43.000 \cdot 0,6 + (-67.000)0,4 = -1.000$$

Por tanto, con ese nivel de información, la decisión óptima es no comprar el terreno.

Al margen del coste de su alquiler, los resultados asociados a los caminos que parten de la decisión de utilizar el detector son los mismos que si no se utiliza; es decir, 0 si no se compra el terreno, 43.000 si se compra y hay agua

y -67.000 si se adquiere y, tras la excavación, resulta que no la hay. Pero las probabilidades de que exista agua y de que no la haya serán diferentes según la información proporcionada por el detector.

Las probabilidades de los distintos sucesos se determinan aplicando el teorema de Bayes. Así:

— La probabilidad de que el detector indique que hay agua es

$$P(DA) = P(DA/A)P(A) + P(DA/NA)P(NA)$$

donde $P(A)$ y $P(NA)$ son las probabilidades asignadas a priori de que haya agua y de que no la haya, es decir, el 60 y el 40 por 100, respectivamente. $P(DA/A)$ es la probabilidad de que el detector indique que hay agua si realmente la hay, es decir, aplicando la concepción frecuencial de probabilidad, el 90 por 100. De forma semejante, la probabilidad de que el detector señale que hay agua cuando no la hay en realidad vale, según el enunciado:

$$P(DA/NA) = 0,2 = 20 \text{ por } 100$$

Por consiguiente:

$$P(DA) = 0,9 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,62 = 62 \text{ por } 100$$

— La probabilidad de que el detector indique que no hay agua es:

$$P(DN) = 1 - 0,62 = 0,38 = 38 \text{ por } 100$$

pues o señala que hay agua o señala que no, y por tanto:

$$P(DA \cup DN) = P(DA) + P(DN) = 1 \rightarrow P(DN) = 1 - P(DA)$$

O bien:

$$\begin{aligned} P(DN) &= P(DN/A)P(A) + P(DN/NA)P(NA) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = \\ &= 0,38 = 38 \text{ por } 100 \end{aligned}$$

dado que el detector indica que no hay agua en el 10 por 100 de los casos en los que realmente la hay [$P(DN/A) = 0,1$] y en el 80 por 100 de aquellos en los que no la hay [$P(DN/NA) = 0,8$].

— La probabilidad de que, habiendo señalado el detector que hay agua, la haya en realidad será:

$$P(A/\bar{D}A) = \frac{P(DA/A)P(A)}{P(DA)} = \frac{0,9 \cdot 0,6}{0,62} = 0,870968 = 87,0968 \text{ por } 100$$

- La probabilidad de que, habiendo indicado el detector que hay agua, en realidad no exista valdrá:

$$P(NA/DA) = 1 - 0,870968 = 0,129032 = 12,9032 \text{ por } 100$$

pues, habiéndose producido el suceso DA , luego puede ocurrir o bien A o bien NA , y por tanto:

$$P(A/DA) + P(NA/DA) = 1 \rightarrow P(NA/DA) = 1 - P(A/DA)$$

También puede calcularse del siguiente modo:

$$P(NA/DA) = \frac{P(DA/NA)P(NA)}{P(DA)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,62} = 0,129032 = 12,9032 \text{ por } 100$$

- La probabilidad de que, habiendo señalado el detector que no hay agua, en realidad si la haya será:

$$P(A/DN) = \frac{P(DN/A)P(A)}{P(DN)} = \frac{0,1 \cdot 0,6}{0,38} = 0,157895 = 15,7895 \text{ por } 100$$

- La probabilidad de que, habiendo indicado el detector que no existe agua, no la haya valdrá:

$$\begin{aligned} P(NA/DN) &= 1 - P(A/DN) = \frac{P(DN/NA)P(NA)}{P(DN)} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{0,38} = 0,842105 = \\ &= 84,2105 \text{ por } 100 \end{aligned}$$

Una vez reflejadas estas probabilidades en el árbol y procediendo de la forma habitual, se observa que, si se decide utilizar el detector, habrá un 62 por 100 de probabilidades de tener una esperanza de beneficio de 28.810 u.m. y un 38 por 100 de que el detector señale que no hay agua, no se compre el terreno y el beneficio sea 0. Por consiguiente, el beneficio esperado si se utiliza el detector es, al margen del coste de su alquiler:

$$28.810 \cdot 0,62 + 0 \cdot 0,38 = 17.862,2 \text{ u.m.}$$

En síntesis:

- Si no se utiliza el detector, el beneficio será 0, pues no se adquirirá el terreno.

— La esperanza de beneficio si se aplica el detector es de 17.862,2 u.m. y cuesta 10.000 u.m. alquilarlo. Por tanto, su utilización aporta un beneficio esperado, neto del coste de su alquiler, de 7.862,2 u.m.

En consecuencia, la sucesión de decisiones óptima es usar el detector y comprar el terreno si indica que hay agua, no adquiriéndolo en el caso de que señale que no la hay.

b) Supongamos que, a cambio de cierto importe, este decisor pudiera saber con certeza si hay agua en el terreno o si no la hay. Si su fuente de información le indicara que la hay, obviamente adquiriría el terreno y ganaría 43.000 u.m. Por el contrario, si dicha fuente señalara que no existe agua, no compraría el terreno y su beneficio sería 0. A priori no sabe cuál será la información perfecta, pero, dado que se estima en un 60 por 100 la probabilidad de que haya agua, esa misma será la probabilidad de que la fuente de información indique que la hay y se ganen las 43.000 u.m. Por la misma razón, hay un 40 por 100 de probabilidades de que la fuente señale que no hay agua, no se compre el terreno y el beneficio sea 0. Por consiguiente, el valor esperado de la información perfecta, antes de usar el detector, es:

$$VEIP = 0,6 \cdot 43.000 + 0,4 \cdot 0 = 25.800 \text{ u.m.}$$

Después de utilizar el detector y de que éste haya indicado que hay agua, la probabilidad de que la fuente de la información perfecta señale que realmente la hay vale:

$$P(A/DA) = 0,870968 = 87,0968 \text{ por } 100$$

siendo la de que señale que no existe:

$$P(NA/DA) = 0,129032 = 12,9032 \text{ por } 100$$

Hay un 87,0968 por 100 de probabilidades de que señale que hay agua, se compre el terreno y se ganen 43.000 u.m., y un 12,9032 por 100 de que afirme que no la hay, no se efectúe la compra y no se gane nada. Por tanto, tras la información proporcionada por el detector, el valor esperado de la información perfecta es:

$$VEIP' = 43.000 \cdot 0,870968 + 0 \cdot 0,129032 = 37.451,62 \text{ u.m.}$$

Evidentemente, lo máximo que se podría ganar por la información perfecta, de modo que la esperanza de beneficio neto sea positiva, es su valor esperado.

c) Si no se utilizara el detector, no se compraría el terreno y el beneficio sería nulo. Si se utiliza, la esperanza de beneficio es de 17.862,2 u.m. Por consiguiente, el aumento de esperanza de beneficio que aporta la utilización del detector (es decir, el valor esperado de la información proporcionada por el mismo) es de

$$VEID = 17.862,2 - 0 = 17.862,2 \text{ u.m.}$$

Evidentemente, el importe máximo que se ha de pagar por su empleo, de modo que la esperanza de beneficio neto sea positiva, es este valor esperado. Como, en este caso, su alquiler cuesta 10.000 u.m., la decisión óptima es utilizarlo, con lo cual, el valor esperado *neto de costes* de la información del detector es:

$$VENID = 17.862,2 - 10.000 = 7.862,2 \text{ u.m.}$$

Problema
5

La incorporación del análisis bayesiano en los árboles de decisión y el valor esperado de la información

En Unedtrónica, S. A., saben que, en su departamento de investigación y desarrollo, hay un espía industrial, pues han sido muchas las ocasiones en las que la competencia se les adelantó en el lanzamiento de productos que tenían a punto para ser comercializados. El director de dicho departamento piensa que hay un 90 por 100 de probabilidades de que el espía sea el señor Cagebé, que es un técnico de mucha cualificación y experiencia en la empresa. Si se le despidiera y fuera el espía, Unedtrónica ganaría 1.000.000 de u.m. Si no fuera el espía y se le despidiera, se perdería a un técnico de gran valor y el espía continuaría en la empresa, con lo cual ésta perdería 5.000.000 de u.m.; y si no se le despidiera, el espía continuaría en la empresa y se perderían 3.000.000 de u.m., sea o no culpable el señor Cagebé.

El director del departamento está pensando utilizar un detector de mentiras. Pero esto costaría 50.000 u.m. y, además, sus resultados no serían definitivos, pues sólo detecta al 85 por 100 de los mentirosos y sólo reconoce como fieles a la verdad al 75 por 100 de los que en realidad lo son. ¿Qué debe hacer el director de investigación y desarrollo de Unedtrónica si el objetivo de la empresa es maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el valor esperado de la información proporcionada por la utilización del detector de mentiras?

RESOLUCIÓN

La primera decisión que hay que tomar es la relativa a la utilización o no del detector de mentiras. Si no se utiliza, como puede comprobarse en la parte superior del árbol de la figura 2.5, que ha sido resuelta de la forma habitual, la decisión óptima es despedir al presunto espía.

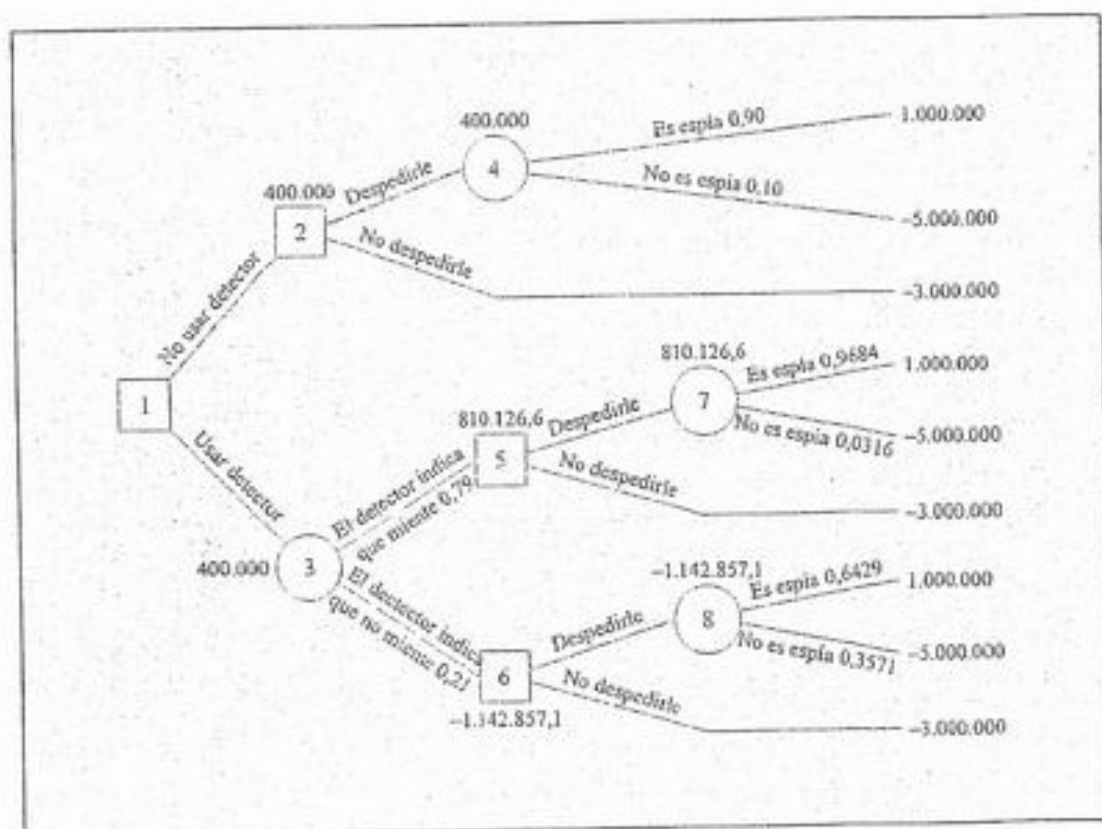


Figura 2.5.

Si se utiliza el detector, éste puede señalar que el señor Cagebé miente o dice la verdad.

Las probabilidades a posteriori, que han de situarse sobre las ramas que parten del nudo 3 y de los que le suceden, se calculan aplicando el teorema de Bayes. Denominemos:

- M al suceso «el detector indica que el señor Cagebé miente».
- NM al suceso «el detector indica que el señor Cagebé no miente».
- E al suceso «el señor Cagebé es el espía».
- NE al suceso «el señor Cagebé no es el espía».

Dado que el detector identifica al 85 por 100 de los mentirosos y que reconoce como fieles a la verdad a sólo el 75 por 100 de los que en realidad lo son, aplicando la concepción frecuentista de la probabilidad resulta obvio que:

$$\begin{aligned}P(M/E) &= 0,85 \\P(NM/E) &= 1 - 0,85 = 0,15 \\P(M/NE) &= 1 - 0,75 = 0,25 \\P(NM/NE) &= 0,75\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Bayes se obtiene que:

$$\begin{aligned}P(M) &= P(M/E)P(E) + P(M/NE)P(NE) = 0,85 \cdot 0,90 + 0,25 \cdot 0,10 = 0,79 \\P(NM) &= P(NM/E)P(E) + P(NM/NE)P(NE) = 0,15 \cdot 0,90 + 0,75 \cdot 0,10 = 0,21 \\[o bien \quad P(NM) &= 1 - P(M) = 1 - 0,79 = 0,21]\end{aligned}$$

$$P(E/M) = \frac{P(M/E)P(E)}{P(M)} = \frac{0,85 \cdot 0,90}{0,79} = 0,9684$$

$$P(NE/M) = \frac{P(M/NE)P(NE)}{P(M)} = \frac{0,25 \cdot 0,10}{0,79} = 0,0316$$

$$[o bien \quad P(NE/M) = 1 - P(E/M) = 1 - 0,9684 = 0,0316]$$

$$P(E/NM) = \frac{P(NM/E)P(E)}{P(NM)} = \frac{0,15 \cdot 0,90}{0,21} = 0,6429$$

$$P(NE/NM) = \frac{P(NM/NE)P(NE)}{P(NM)} = \frac{0,75 \cdot 0,10}{0,21} = 0,3571 = 1 - P(E/NM)$$

Una vez incorporadas estas probabilidades en el árbol de la figura, se calculan los valores asociados a los nudos de la forma habitual, llegándose a la conclusión de que no conviene usar el detector de mentiras, pues no aporta ninguna información y, por tanto, no conviene pagar nada por él. Utilizando el detector, cualesquiera que sean sus resultados, se llega a la misma solución que sin utilizarlo: despedir al presunto espía. El valor esperado de la información de una prueba, como la realizada con el detector de mentiras, es la diferencia entre el beneficio esperado si se realiza la prueba prescindiendo de su coste (400.000 u.m. en este caso) y la ganancia esperada si no se efectúa la misma (400.000 u.m.). Obviamente, dado que, en este caso, la secuencia óptima de decisiones siempre es la misma, con la prueba o sin ella, ésta no proporciona información útil, y su valor (400.000 - 400.000) es nulo.

Problema
6
La incorporación del análisis bayesiano en los árboles de decisión y el valor esperado de la información

Dos amigos geólogos, en una excursión efectuada para recoger muestras de minerales, han detectado, con un instrumental rudimentario, la existencia de una veta subterránea de mineral con contenido metálico. Dados sus conocimientos de la zona y los resultados obtenidos inicialmente, asignan unas probabilidades del 20 por 100 a que el mineral tenga contenido en oro, un 50 por 100 a que contenga otros metales preciosos y un 30 por 100 a que se trate de otros metales carentes de valor. Ante este descubrimiento, han pensado en adquirir el terreno, pero no para explotarlo, lo que les ocasionaría complicaciones que no están dispuestos a asumir, pues les apartarían de su verdadera vocación, sino para efectuar las excavaciones precisas para demostrar la existencia del mineral y, luego, vender el terreno a una compañía minera. Tras las oportunas consultas, saben que el propietario del terreno les cobraría 1.000.000 de u.m. por él y que la compañía minera les pagaría 4.000.000 de u.m. si tuviera oro y 1.500.000 de u.m. si contuviera otros metales preciosos; si el mineral tuviera otros metales carentes de valor, piensan que podrían venderlo en el mismo importe en el que podrían comprarlo. Las excavaciones precisas para llegar a la veta subterránea y demostrar fehacientemente su existencia requerirían 1.000.000 de u.m., pero, antes de adquirir el terreno y efectuarlas, están pensando en utilizar un detector e identificador superficial de metales, de patente extranjera, que, según señala la empresa fabricante, tiene los márgenes de acierto expresados en la tabla 2.2.

TABLA 2.2

Contenido del subsuelo	El detector indicador señala		
	Oro	Otros metales preciosos	Metales sin valor
Oro	0,8	0,15	0,05
Otros metales preciosos	0,1	0,8	0,1
Metales sin valor	0,1	0,1	0,8

Es decir, cuando el subsuelo contiene oro, el detector lo acierta en el 80 por 100 de los casos, mientras que se equivoca señalando que contiene otros metales preciosos en el 15 por 100 de las ocasiones y falla señalando que tiene metales sin valor en el 5 por 100 de los casos. Si el subsuelo contiene otros metales preciosos, el detector señala que tiene oro en el 10 por 100 de los ca-

tos, acertando en el 80 por 100 de las ocasiones y equivocándose, al señalar que tiene metales sin valor, en el 10 por 100 de los casos, etc.

El coste de la utilización de este detector sería de 100.000 u.m., y el objetivo de estos geólogos es maximizar su esperanza de beneficio. Se desea saber:

- La secuencia de decisiones óptima que deben seguir.
- El valor esperado de la información perfecta si no se utiliza el detector de metales.
- El valor esperado de la información perfecta después de haber utilizado el detector, suponiendo que éste hubiera indicado la existencia de oro.
- El valor esperado de la información proporcionada por la utilización del detector.

RESOLUCIÓN

De la forma habitual, se ha construido el árbol de la figura 2.6, en el cual se ha utilizado la simbología de la tabla 2.3.

TABLA 2.3

Símbolo	Suceso que representa
<i>O</i>	El terreno tiene oro.
<i>P</i>	El terreno tiene otros metales preciosos.
<i>M</i>	El terreno tiene metales sin valor.
<i>DO</i>	El detector señala que el terreno tiene oro.
<i>DP</i>	El detector señala que el terreno tiene otros metales preciosos.
<i>DM</i>	El detector señala que el terreno tiene metales sin valor.

Dejando al margen, de momento, el coste de utilización del detector, los beneficios asociados a cada uno de los resultados son la diferencia entre los precios en los que se puede vender el terreno en cada caso y los costes de adquisición del mismo y de efectuar las excavaciones. Así, si el terreno tiene oro, se obtiene:

$$4.000.000 - 1.000.000 - 1.000.000 = 2.000.000 \text{ de u.m.}$$

en tanto que si tiene otros metales preciosos el beneficio es:

$$1.500.000 - 1.000.000 - 1.000.000 = -500.000 \text{ de u.m.}$$

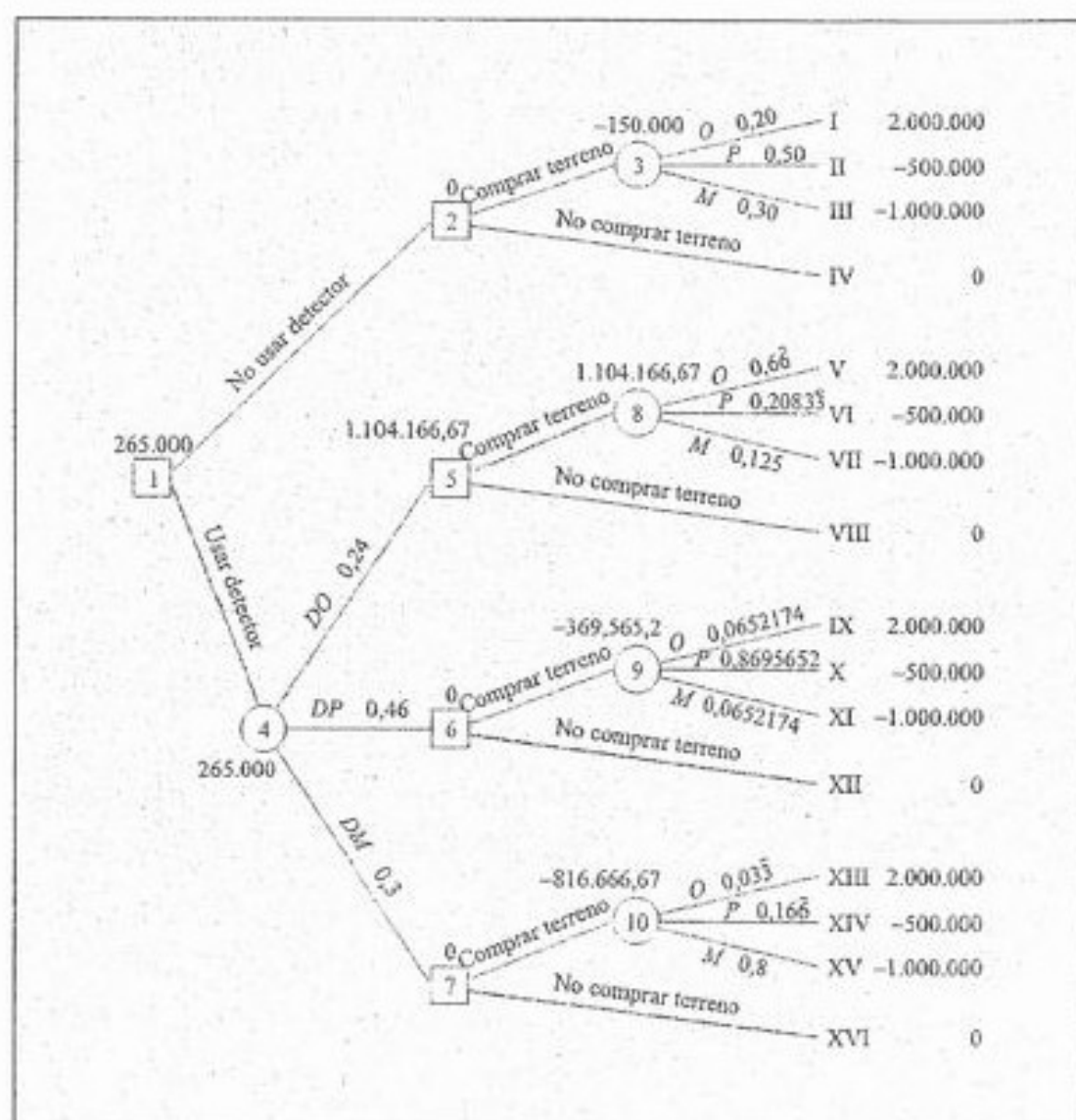


Figura 2.6.

Si no tuviera sino metales sin valor, la ganancia importaría:

$$1.000.000 - 1.000.000 - 1.000.000 = -1.000.000 \text{ de u.m.}$$

Por consiguiente, la esperanza de beneficio existente, si no se efectúa prueba con el detector, es:

$$V_3 = 2.000.000 \cdot 0,2 + (-500.000)0,5 + (-1.000.000)0,3 = -150.000 \text{ u.m.}$$

Con la información existente sin usar el detector, la decisión óptima es no comprar el terreno.

Si se efectuara la prueba con el detector, habrían de modificarse las probabilidades de los sucesos O , P y M según los resultados de la misma. A estos efectos, obsérvese que, según la tabla 3.2:

$$P(DO/O) = 0,8$$

$$P(DO/P) = 0,1$$

$$P(DO/M) = 0,1$$

$$P(DP/O) = 0,15$$

$$P(DP/P) = 0,8$$

$$P(DP/M) = 0,1$$

$$P(DM/O) = 0,05$$

$$P(DM/P) = 0,1$$

$$P(DM/M) = 0,8$$

Aplicando el teorema de Bayes se han calculado las siguientes probabilidades, que, luego, se incorporaron al árbol:

$$\begin{aligned} P(DO) &= P(DO/O) \cdot P(O) + P(DO/P) \cdot P(P) + P(DO/M) \cdot P(M) = \\ &= 0,8 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(DP) &= P(DP/O) \cdot P(O) + P(DP/P) \cdot P(P) + P(DP/M) \cdot P(M) = \\ &= 0,15 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(DM) &= P(DM/O) \cdot P(O) + P(DM/P) \cdot P(P) + P(DM/M) \cdot P(M) = \\ &= 0,05 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,3 \end{aligned}$$

$$P(O/DO) = \frac{P(DO/O) \cdot P(O)}{P(DO)} = \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,24} = 0,6\bar{6}$$

$$P(P/DO) = \frac{P(DO/P) \cdot P(P)}{P(DO)} = \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,24} = 0,208\bar{3}$$

$$P(M/DO) = \frac{P(DO/M) \cdot P(M)}{P(DO)} = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,24} = 0,125$$

$$P(O/DP) = \frac{P(DP/O) \cdot P(O)}{P(DP)} = \frac{0,15 \cdot 0,2}{0,46} = 0,0652174$$

$$P(P/DP) = \frac{P(DP/P) \cdot P(P)}{P(DP)} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,46} = 0,8695652$$

$$P(M/DP) = \frac{P(DP/M) \cdot P(M)}{P(DP)} = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,46} = 0,0652174$$

$$P(O/DM) = \frac{P(DM/O) \cdot P(O)}{P(DM)} = \frac{0,05 \cdot 0,2}{0,3} = 0,03\bar{3}$$

$$P(P/DM) = \frac{P(DM/P) \cdot P(P)}{P(DM)} = \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,3} = 0,16\bar{6}$$

$$P(M/DM) = \frac{P(DM/M) \cdot P(M)}{P(DM)} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{0,3} = 0,8$$

Calculando, después, los valores asociados a los distintos nudos, de la forma habitual, se llega a la conclusión de que, si el objetivo perseguido es maximizar el beneficio, se debe efectuar la prueba con el detector de metales, pues el valor esperado de su información (265.000 u.m.) es superior al coste de su realización (100.000 u.m.). Si el detector indica que hay oro, se deberá comprar el terreno; si indica que hay otros metales, sean preciosos o no, no se deberá comprar.

Obsérvese que, comparando el valor esperado derivado de la utilización del detector (265.000 u.m.) con el coste de dicha utilización (100.000 u.m.), se llega a la misma conclusión que si se deduce ese coste de los beneficios correspondientes a los distintos caminos que parten del empleo del detector. Utilizando este último procedimiento, en los caminos V, IX y XIII figuraría el importe:

$$2.000.000 - 100.000 = 1.900.000$$

siendo el de los caminos VI, X y XIV:

$$-500.000 - 100.000 = -600.000$$

en tanto que a los caminos VII, XI y XV les correspondería la suma:

$$-1.000.000 - 100.000 = -1.100.000$$

y en los denominados VIII, XII y XVI constaría la cuantía:

$$0 - 100.000 = -100.000$$

En tal caso, los valores asociados a los distintos nudos serían, como es obvio, 100.000 u.m. menores que los reflejados en el árbol de la figura, y el del

nudo 4 sería, concretamente, 165.000 u.m.; y, siguiendo el proceso de razonamiento habitual, se llegaría a la misma conclusión en cuanto a la secuencia de decisiones óptimas.

b) Supongamos que alguien tuviera la información perfecta, es decir, que supiera con certeza el contenido del mineral del subsuelo y que estuviera dispuesto, a cambio de cierto importe, a decírselo a los dos geólogos. Si éstos recibieran esa información y ésta fuera la confirmación de que hay oro, comprarían el terreno y ganarían la diferencia entre los 2.000.000 y el importe abonado. Si la información fuera que hay otros metales preciosos, no comprarían el terreno y perderían el importe, H , entregado al informador. Lo mismo ocurriría si su información fuera que sólo hay metales sin valor. A priori, no se sabe cuál sería la respuesta del proveedor de la información perfecta, pero, dado que se asignan unas probabilidades, a los sucesos O , P y M , de 0,20, 0,50 y 0,30, es obvio que también se asignarán unas probabilidades del 20 por 100 a que conteste que hay oro, un 50 por 100 a que hay otros metales preciosos y un 30 por 100 a que hay metales sin valor. Por consiguiente, el resultado neto esperado de la información perfecta será:

$$\begin{aligned} & 0,20(2.000.000 - H) + 0,50(0 - H) + 0,30(0 - H) = \\ & = (0,20 \cdot 2.000.000 + 0,50 \cdot 0 + 0,30 \cdot 0) - H(0,20 + 0,50 + 0,30) = \\ & = (0,20 \cdot 2.000.000 + 0,50 \cdot 0 + 0,30 \cdot 0) - H \end{aligned}$$

El importe situado entre paréntesis es el valor esperado de la información perfecta; es la esperanza matemática de los resultados que se pueden derivar de su obtención, sin tener en cuenta su coste. Lo más que se pagaría por la información perfecta (es decir, el máximo valor admisible de H) sería su valor esperado, que, en este caso, vale $0,2 \cdot 2.000.000 = 400.000$ u.m.

c) Una vez que se ha utilizado el detector y que éste ha indicado la existencia de oro, las probabilidades de los distintos sucesos se han alterado y, al margen del coste de dicha utilización, en el que ya se ha incurrido, el valor esperado de la información perfecta será:

$$0,6\bar{6} \cdot 2.000.000 + 0,2083\bar{3} \cdot 0 + 0,125 \cdot 0 = 1.333.333,3\bar{3} \text{ u.m.}$$

Pues:

- La probabilidad de que la información perfecta sea que hay oro es de un $66,6\bar{6}$ por 100 y, si ésa fuera la información, se compraría el terreno, con lo que se ganarían 2.000.000 de u.m.
- La probabilidad de que la información sea que hay otros metales preciosos es de un $20,83\bar{3}$ por 100 y, si ésa fuera la información, no se compraría el terreno, con lo que el resultado sería nulo.

- La probabilidad de que la información sea que hay metales sin valor es de un 12,5 por 100 y, si ésa fuera la información, tampoco se compraría el terreno, con lo que el resultado sería nulo.

d) El valor esperado de la información de una prueba, como la realizada con el detector, es la diferencia entre el beneficio esperado si se realiza la prueba (prescindiendo de su coste) y la ganancia esperada si no se efectúa la misma. En este caso, el beneficio esperado si se realiza la prueba es de 265.000 u.m., mientras que, si no se realiza, no se compraría el terreno y el beneficio sería nulo. Por consiguiente, el valor esperado de la información de esta prueba es de 265.000 u.m., y éste es el máximo importe que se ha de pagar por ella, pues, si se pagara más, el beneficio esperado neto del proyecto sería negativo e igual a la diferencia entre las 265.000 u.m. y la cantidad abonada.

Problema

7

El valor esperado de la información perfecta

Si se compra un terreno y se descubre oro, se ganan 180.000 u.m., pero si no se descubre oro, se pierden 120.000 u.m. La probabilidad de que no haya oro es del 60 por 100. ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?

RESOLUCIÓN

Si la información perfecta fuera que hay oro, se compraría el terreno y se ganarían 180.000 u.m. La probabilidad de que la información perfecta sea que hay oro es la probabilidad de que haya oro, es decir, el 40 por 100.

Si la información perfecta fuera que no hay oro, no se compraría el terreno y no se ganaría ni perdería nada. La probabilidad de que sea ésa la información es la probabilidad de que no haya oro, es decir, el 60 por 100.

Por tanto, el valor esperado de la información perfecta es 72.000 u.m.:

$$VEIP = 180.000 \cdot 0,40 + 0 \cdot 0,60 = 72.000 \text{ u.m.}$$

Problema

8

El valor esperado de la información perfecta

Si se compra un terreno y se descubre agua subterránea, se ganan 50.000 u.m., pero si no se descubre agua se pierden 20.000 u.m. La probabilidad de que no haya agua es del 60 por 100. ¿Cuál es el límite máximo que se puede pagar por cualquier información relativa a la existencia de agua?

RESOLUCIÓN

El problema pregunta por el valor esperado de la información perfecta.

Si la información perfecta fuera que hay agua, se compraría el terreno y se ganarían 50.000 u.m. La probabilidad de que la información perfecta sea que hay agua es la probabilidad de que haya agua, es decir, el 40 por 100.

Si la información perfecta fuera que no hay agua, no se compraría el terreno y no se ganaría ni perdería nada. La probabilidad de que sea ésta la información es la probabilidad de que no haya agua, es decir, el 60 por 100.

Por tanto, el valor esperado de la información perfecta es 20.000 u.m.:

$$VEIP = 50.000 \cdot 0,40 + 0 \cdot 0,60 = 20.000 \text{ u.m.}$$

2.2. LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Problema
9

Programación lineal. Caso de maximización y programación en números enteros

Un artesano dispone de 6 unidades semanales de mimbre y trabaja 28 horas a la semana en las que se dedica a la fabricación de sombreros y cestos. Cada sombrero requiere 1 unidad de mimbre y 8 horas de trabajo, mientras que cada cesto precisa 2 unidades de mimbre y 7 horas de tiempo disponible. El precio en el que vende un sombrero es de 80 u.m., mientras que el de cada cesto es de 120 u.m. ¿Cuántas unidades de cada producto debe fabricar a la semana si desea maximizar sus ingresos?

RESOLUCIÓN

Si con cada sombrero ingresa 80 u.m., fabricando y vendiendo X_s sombreros cada semana ingresará $80X_s$ u.m. De forma semejante, si fabrica y vende X_c cestos, ingresará $120X_c$ u.m. Sus ingresos semanales totales serán:

$$Z = 80X_s + 120X_c$$

Ésta será, por tanto, la función objetivo a maximizar. Por otra parte, si cada sombrero requiere 1 unidad de mimbre, X_s sombreros requerirán X_s unidades de mimbre. Por la misma razón, X_c unidades semanales de producción de cestos consumirán $2X_c$ unidades de mimbre y, dado que sólo dispone de 6 unidades de este material a la semana, habrá de cumplirse que:

$$X_s + 2X_c \leq 6$$

Por otra parte, dado que las necesidades de horas semanales son de 8 horas por sombrero y de 7 horas por cesto, y que sólo dispone de 28 horas semanales, si fabrica cada semana X_s sombreros y X_c cestos, habrá de cumplirse que:

$$8X_s + 7X_c \leq 28$$

Obviamente, no es posible fabricar cantidades negativas de ningún producto, por lo cual, como en todo modelo de programación lineal:

$$X_s \geq 0$$

$$X_c \geq 0$$

En definitiva, el modelo es:

— Función objetivo:

$$\text{Maximizar: } Z = 80X_s + 120X_c$$

— Restricciones de capacidad:

$$X_s + 2X_c \leq 6$$

$$8X_s + 7X_c \leq 28$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_s, X_c \geq 0$$

El modelo se dice lineal porque lineales son la función objetivo y las restricciones. Para determinar los valores de las variables (X_s y X_c) que optimizan (maximizan, en este caso) la función objetivo, cumpliendo las restricciones, existen diversos algoritmos. Cuando, como en este caso, sólo existen dos variables, puede acudir a la resolución gráfica. Para representar la ecuación

$$X_s + 2X_c = 6$$

lo más sencillo es hacer $X_c = 0$, obteniéndose

$$X_s = 6$$

y, luego, $X_s = 0$, en cuyo caso se obtiene:

$$2X_c = 6 \rightarrow X_c = 3$$

Por consiguiente, la recta $X_s + 2X_c = 6$ pasa por los puntos (0, 6) y (3, 0) de la figura 2.7. Trazando la recta que une estos puntos se obtiene la representación de la ecuación.

Del mismo modo, se ha representado la recta $8X_s + 7X_c = 28$:

$$X_s = 0 \rightarrow 7X_c = 28 \rightarrow X_c = 4$$

$$X_c = 0 \rightarrow 8X_s = 28 \rightarrow X_s = 3,5$$

Obsérvese que sólo se considera el primer cuadrante, dado que las variables no pueden ser negativas ($X_s, X_c \geq 0$).

Los únicos puntos «factibles», es decir, que cumplen las restricciones, son los situados en el área rayada o sobre los segmentos que la delimitan.

Dando a Z un valor arbitrario en la función objetivo, como, por ejemplo, 480, se obtiene la ecuación

$$480 = 80X_s + 120X_c$$

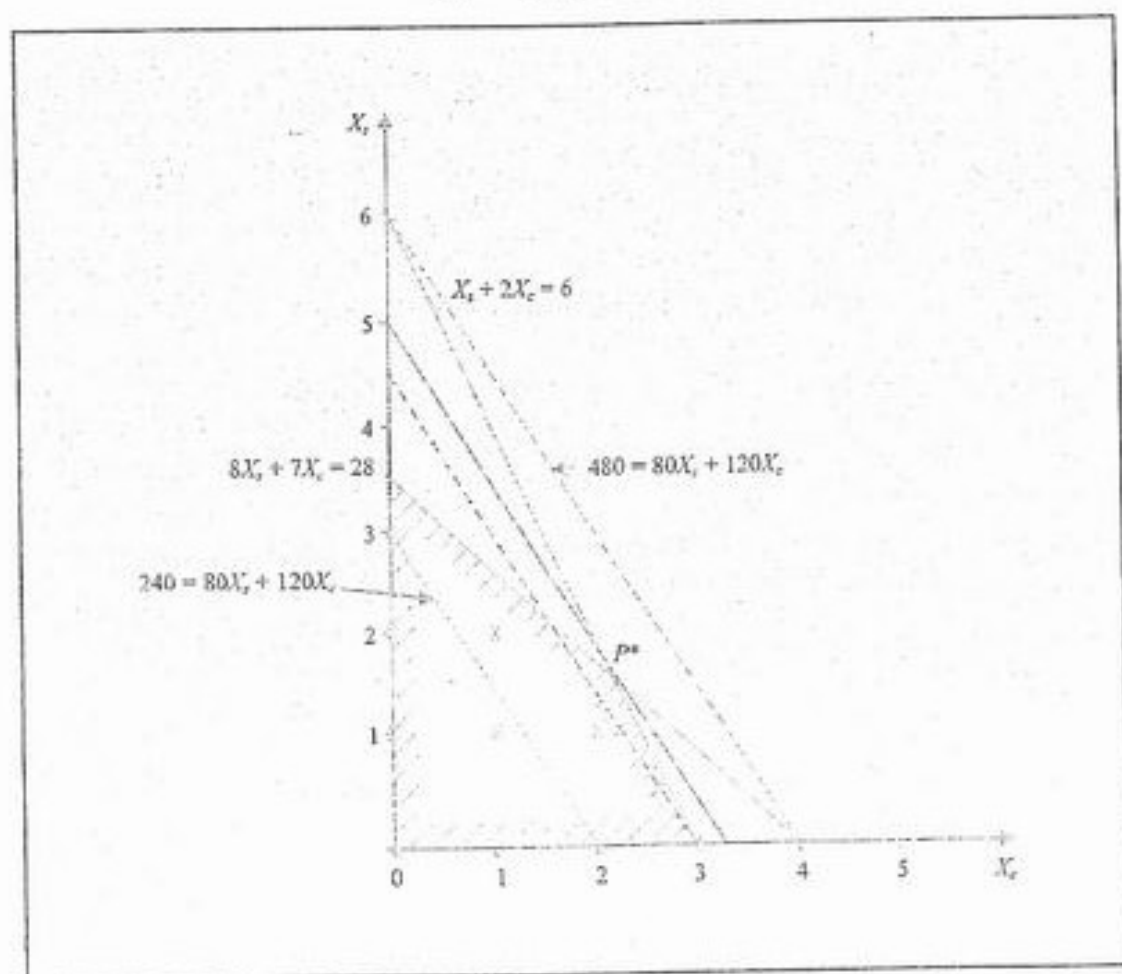


Figura 2.7.

que, del mismo modo, se ha representado en la figura 2.7. Ninguno de sus puntos se encuentra en el área de soluciones factibles. Por tanto, no es posible alcanzar un ingreso nominal de 480 u.m. Tomando otro valor de Z como, por ejemplo, 240, se obtiene la ecuación:

$$240 = 80X_s + 120X_c$$

que también se ha representado en la figura, obteniéndose una paralela a la anterior. A los puntos de las paralelas situados entre ellas les corresponden beneficios comprendidos entre 240 y 480. El máximo beneficio que puede obtenerse es el correspondiente al punto P^* , por el cual pasa una recta paralela a las anteriores y pertenece al área de soluciones factibles. Dado que por ese punto pasan las rectas que tienen las ecuaciones

$$8X_s + 7X_c = 28$$

y

$$X_s + 2X_c = 6$$

basta resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que forman tales ecuaciones, obteniéndose

$$X_s^* = 1,55$$

$$X_c^* = 2,22$$

La solución óptima sería, para la primera semana, fabricar 1 sombrero y el 55,55 por 100 del siguiente, que se terminaría la semana posterior, y 2 cestos y el 22,22 por 100 del siguiente, que también se finalizaría la semana posterior, continuando así la producción.

Si lo que se desea son números enteros de producción (es decir, si X_s y X_c han de ser números enteros), sólo habrán de considerarse los puntos del área de soluciones posibles que representan soluciones enteras. En tal caso, el programa será:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & Z = 80X_s + 120X_c \\ \text{Restricciones:} & X_s + 2X_c \leq 6 \\ & 8X_s + 7X_c \leq 28 \\ & X_s \text{ y } X_c \text{ son variables enteras no negativas.} \end{array}$$

Los puntos del área de soluciones posibles que representan soluciones enteras se han marcado con aspás en la figura. El punto por el que pasa la recta Z más alejada del origen de coordenadas es aquel en el que:

$$X_s^* = 0$$

$$X_c^* = 3$$

Por consiguiente, si sólo se admiten soluciones enteras, la solución óptima es elaborar 3 cestos semanales y ningún sombrero.

Adviértase que la solución entera óptima no es el punto entero más cercano a la solución que es óptima cuando se admiten soluciones fraccionarias.

**Problema
10**

Programación lineal. Caso de minimización

Adheruned, S. A., va a iniciar la fabricación de un nuevo tipo de pegamento que, para tener las características adecuadas de adherencia, ha de incorporar, al menos, 80 g de la sustancia química A y 100 g de la sustancia B, por cada kilogramo de pegamento. Estas sustancias pueden obtenerse a partir de la materia prima X, que cuesta 25 u.m. cada kilogramo, y a partir de la materia Y, que cuesta 30 u.m. por kilogramo. De cada kilogramo de materia X se obtienen 40 g de sustancia A y 20 g de sustancia B, mientras que de cada kilogramo de materia Y se obtienen 20 g de materia A y 50 g de materia B. Se desea plantear y resolver el programa lineal que permite minimizar los costes de esta empresa.

RESOLUCIÓN

Si la empresa utiliza, por cada kilogramo de pegamento, x kilos de materia X e y kilos de materia Y, cada kilogramo de producto le costará:

$$Z = 25x + 30y$$

Tal será la función objetivo a minimizar.

Dado que, por cada kilogramo de las materias X e Y, se extraen 40 y 20 g, respectivamente, de la sustancia A, y dado, además, que cada kilogramo de pegamento ha de incorporar al menos 80 g de esta sustancia, habrá de cumplirse la restricción:

$$40x + 20y \geq 80$$

De forma semejante, en cuanto a la sustancia B, se impone la restricción

$$20x + 50y \geq 100$$

Además, como es obvio, las cantidades utilizadas de X e Y , por cada kilogramo de producto terminado, no pueden ser negativas:

$$x, y \geq 0$$

Por consiguiente, el programa es:

— Función objetivo:

$$\text{Minimizar: } Z = 25x + 30y$$

— Restricciones de composición:

$$40x + 20y \geq 80$$

$$20x + 50y \geq 100$$

— Restricciones de no negatividad:

$$x, y \geq 0$$

Para resolverlo gráficamente, han de seguirse los siguientes pasos:

a) Representar gráficamente, en el primer cuadrante (pues $x, y \geq 0$), las rectas:

$$40x + 20y = 80 \quad (1)$$

$$20x + 50y = 100 \quad (2)$$

b) Determinar el área de las soluciones posibles, que será el área rayada de la figura 2.8.

c) Representar la función $Z = 25x + 30y$ para un valor cualquiera de Z .
Por ejemplo:

$$37,5 = 25x + 30y$$

Evidentemente, ningún punto de esta recta pertenece al área de soluciones posibles, por lo que no es posible tener un coste tan bajo. El mínimo coste posible es el correspondiente a la recta paralela a la anterior que pasa por el punto P^* , es decir, al punto en el que se produce la intersección entre las rectas que tienen como ecuaciones (1) y (2). Resolviendo el sistema formado por tales ecuaciones se obtiene

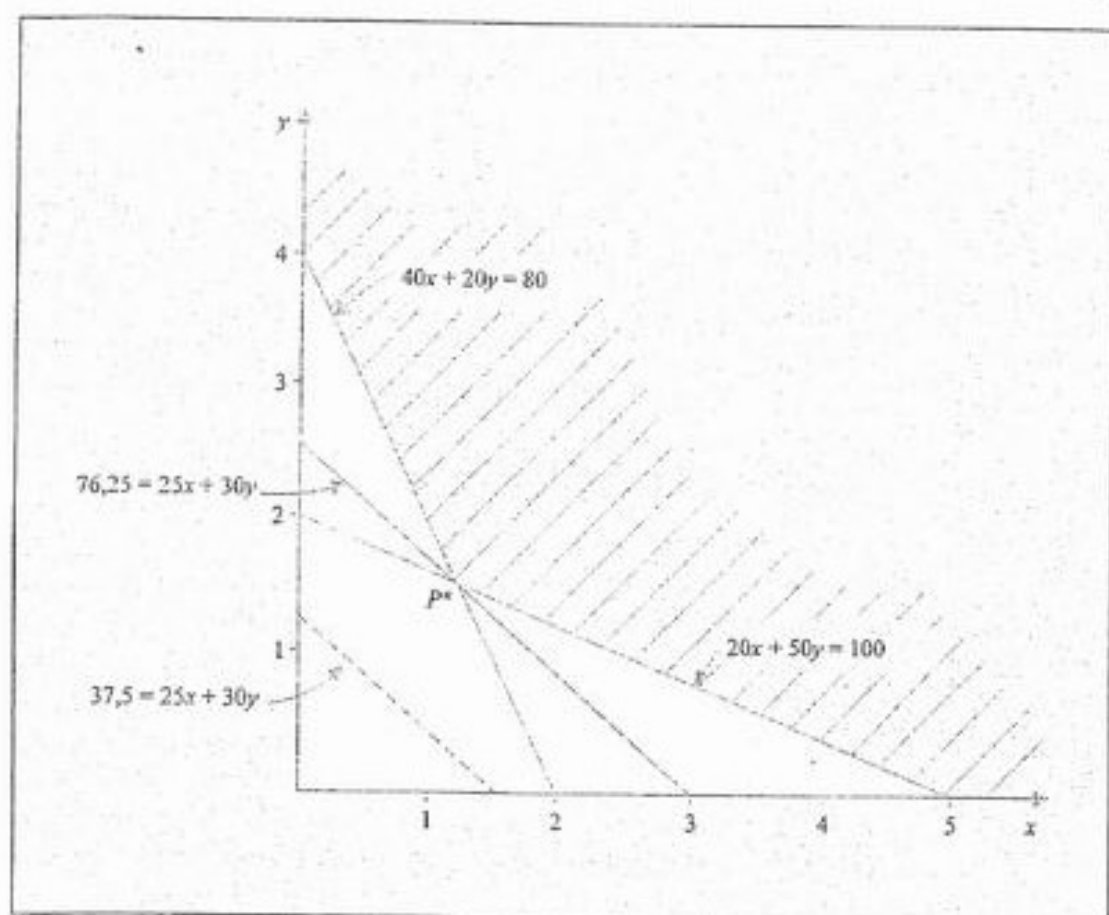


Figura 2.8.

$$x^* = 1,25 \text{ kg}$$

$$y^* = 1,5 \text{ kg}$$

La solución óptima consiste, por tanto, en utilizar 1,25 kg de X y 1,5 kg de Y por cada kilogramo de pegamento. El coste en el que se incurre actuando de ese modo, es decir, el coste mínimo en el que puede incurrirse es

$$Z^* = 25 \cdot 1,25 + 30 \cdot 1,5 = 76,25 \text{ u.m.}$$

**Problema
11**

Programación lineal. Caso de maximización

Para evitar que se emborrache, la mujer del señor Trompuned, que es la que administra los caudales familiares, sólo le da 1.000 pesetas diarias y le propi-

na todo tipo de amenazas y palabras malsonantes si está más de 80 minutos en el bar. A este señor sólo le gustan la cerveza, que cuesta 50 pesetas cada jarra, en la bodega a la que acude, y el whisky, que cuesta 100 pesetas cada copa. Un compañero de copeo, que es químico, le ha dicho que cada jarra de cerveza tiene un contenido alcohólico de 11 unidades, mientras que el de cada copa de whisky es de 14 unidades. Como tarda 5 minutos en tomarse un whisky y 10 minutos en beberse una jarra de cerveza, desea que le digamos cuántas copas de whisky y cuántas cervezas tiene que tomarse de manera que pueda volver a casa, donde le espera su mujer, lo más borracho posible.

RESOLUCIÓN

Denominando X_w al número de copas de whisky y X_c al número de jarras de cerveza, el modelo será:

— Función objetivo:

$$\text{Maximizar: } Z = 14X_w + 11X_c$$

— Restricción financiera:

$$100X_w + 50X_c \leq 1.000$$

— Restricción de tiempo:

$$5X_w + 10X_c \leq 80$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_w, X_c \geq 0$$

En la figura 2.9 se han representado, en el primer cuadrante, las rectas que tienen como ecuaciones:

$$100X_w + 50X_c = 1.000 \quad (1)$$

$$5X_w + 10X_c = 80 \quad (2)$$

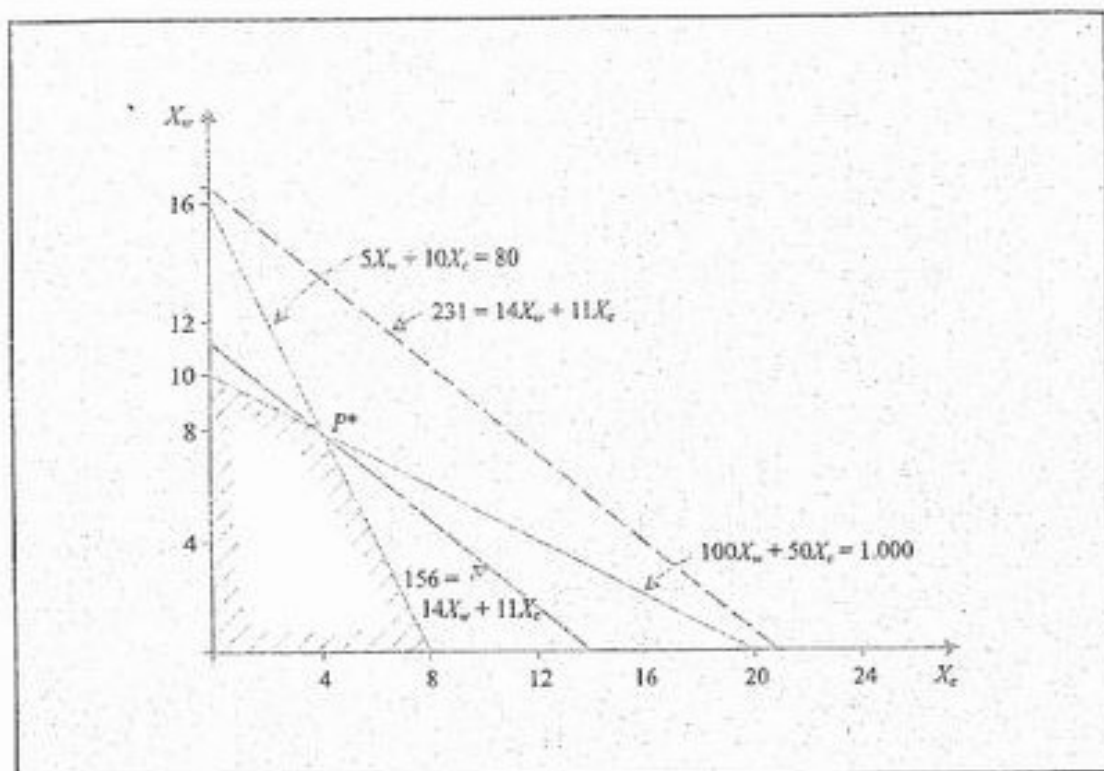


Figura 2.9.

El área de las soluciones posibles es la zona rayada.

Tomando un valor arbitrario para Z , como 231, se ha representado la recta que tiene como ecuación

$$231 = 14X_w + 11X_c$$

Trazando paralelas cada vez más próximas al origen de coordenadas, se observa que la primera que tiene un punto perteneciente al área de soluciones factibles es la que pasa por el punto P^* , que tendrá como coordenadas las resultantes de la resolución del sistema formado por las ecuaciones (1) y (2), es decir:

$$X_w^* = 8 \text{ copas}$$

$$X_c^* = 4 \text{ jarras}$$

El nivel máximo de alcoholización lo conseguirá tomando 8 copas de whisky y 4 jarras de cerveza. Con ello, tomará diariamente 156 unidades de alcohol:

$$14 \cdot 8 + 11 \cdot 4 = 156 \text{ unidades}$$

**Problema
12**
Programación lineal. Caso de minimización

El señor Trompuned, a quien se refiere el caso anterior, enviudó. Sin embargo, dado su nuevo horario de trabajo y la hora a la que cierra su bodega favorita, no puede dedicar a la bebida más de 120 minutos diarios. Su problema ahora es cómo alcanzar, al menos, las 166 unidades de alcohol a partir de las cuales comienza a marearse, sin sobrepasar ese tiempo, de la forma más barata posible.

RESOLUCIÓN

Continuando con la simbología del caso anterior, el modelo será:

— Función objetivo:

$$\text{Minimizar: } Z' = 100X_w + 50X_c$$

— Restricción de nivel de alcohol:

$$14X_w + 11X_c \geq 166$$

— Restricción temporal:

$$5X_w + 10X_c \leq 120$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_w, X_c \geq 0$$

En la figura 2.10 se han representado, en el primer cuadrante, las rectas que tienen por ecuaciones

$$14X_w + 11X_c = 166 \quad (1)$$

y

$$5X_w + 10X_c = 120 \quad (2)$$

El área rayada será la región de soluciones posibles.

Tomando un valor arbitrario para Z , se obtiene la ecuación

$$500 = 100X_w + 50X_c$$

a la que le corresponde la recta dibujada en la figura. La paralela a esta recta que está más cerca del origen de coordenadas y que tiene algún punto perteneciente a la región de soluciones posibles es la solución óptima.

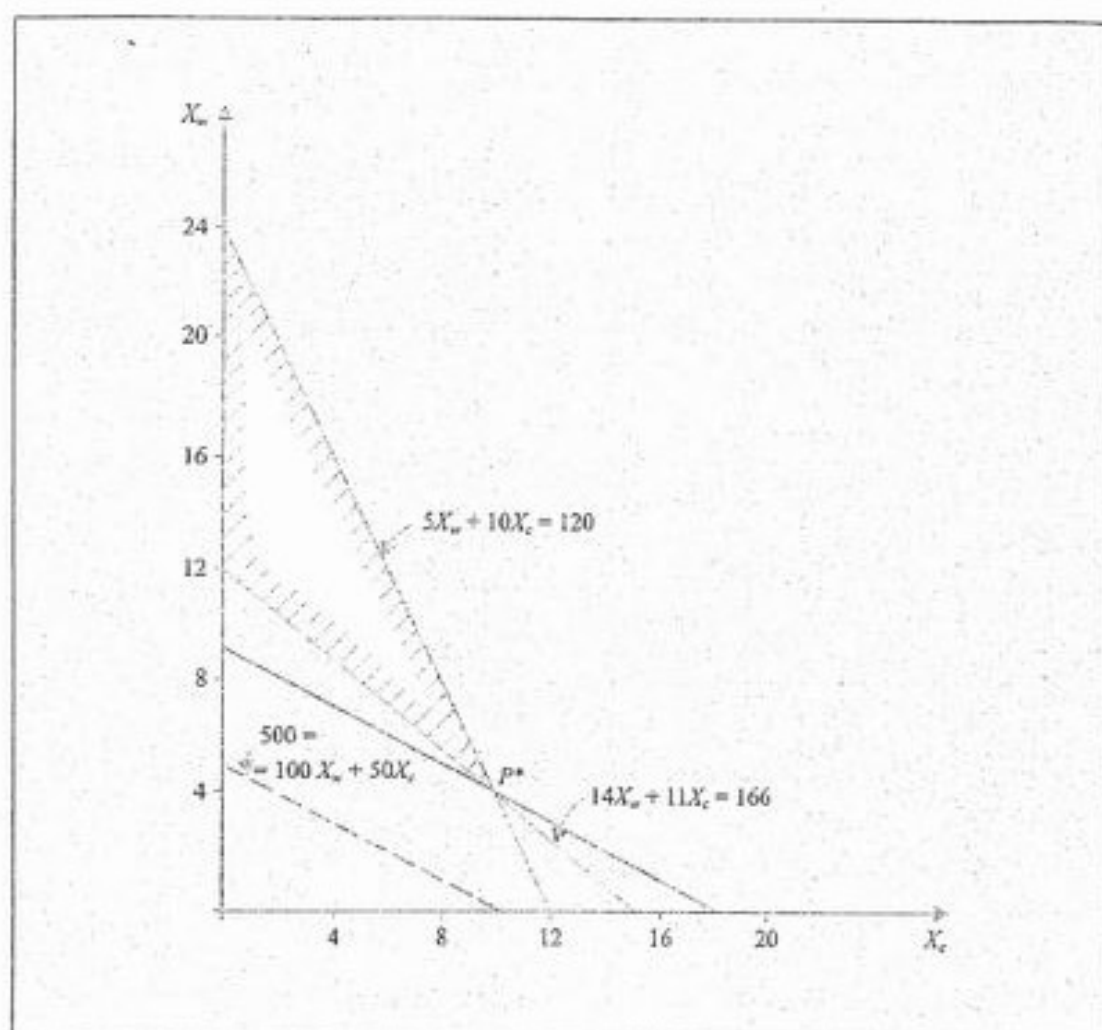


Figura 2.10.

La función objetivo que es tangente al área de soluciones posibles es la que pasa por el punto P^* , en el que se produce la intersección entre las rectas que tienen por ecuaciones (1) y (2). Resolviendo este sistema, se obtiene como solución óptima:

$$X_w^* = 4 \text{ copas}$$

$$X_e^* = 10 \text{ jarras}$$

con ello, el coste total de las 166 unidades de alcohol es de

$$100 \cdot 4 + 50 \cdot 10 = 900 \text{ pesetas}$$

**Problema
13**

Programación lineal. Caso de minimización

¿Cuántas soluciones tiene el siguiente programa lineal?

Minimizar: $Z = 15x + 12y$

$$4x + 8y \geq 44$$

$$5x + 4y \geq 40$$

$$14x + 3y \geq 42$$

$$x, y \geq 0$$

RESOLUCIÓN

En la figura 2.11 se han representado las rectas:

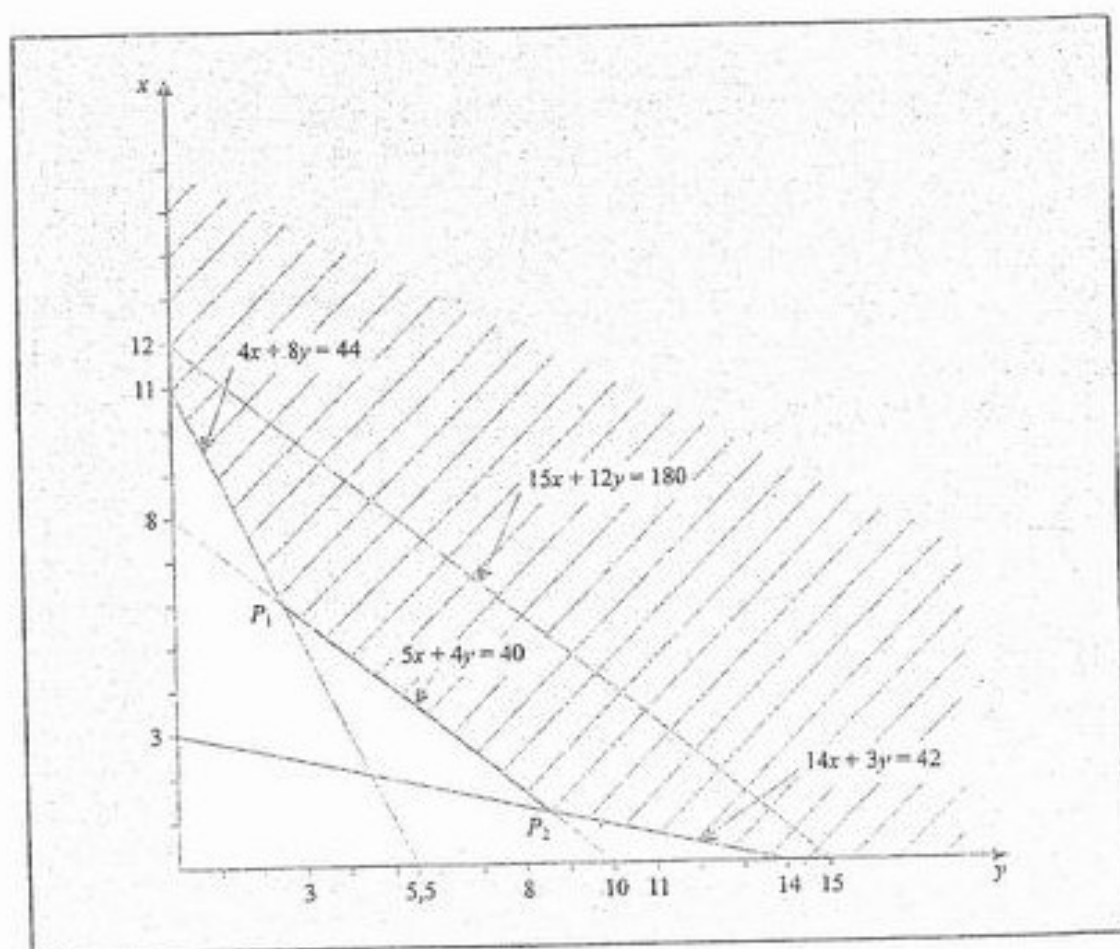


Figura 2.11.

$$4x + 8y = 44$$

$$5x + 4y = 40$$

$$14x + 3y = 42$$

en el primer cuadrante y se ha rayado la región de soluciones posibles. Luego se ha representado la recta correspondiente a la función a minimizar:

$$15x + 12y = 180$$

La paralela a esta recta más próxima al origen de coordenadas que tiene puntos pertenecientes al área de soluciones posibles es la que pasa por los puntos P_1 y P_2 y por todos los comprendidos en el segmento que existe entre estos dos puntos. Por tanto, este programa lineal tiene infinitas soluciones: tantas como puntos existen en ese segmento.

Problema
14

Programación lineal. Caso de minimización

En el programa lineal:

$$\text{Minimizar: } Z = 15x + 15y$$

$$20x + 32y \leq 25$$

$$x + y = 1$$

$$x, y \geq 0$$

¿Cuántas soluciones existen?

RESOLUCIÓN

En la figura 2.12 se han representado las rectas:

$$20x + 32y = 25$$

$$x + y = 1$$

Las únicas soluciones posibles son los puntos del segmento de la recta $x + y = 1$ que se encuentran entre el punto P y la línea de ordenadas.

También se ha representado la recta que se obtiene al igualar la función objetivo a un importe arbitrario, como por ejemplo 16,5:

$$15x + 15y = 16,5$$

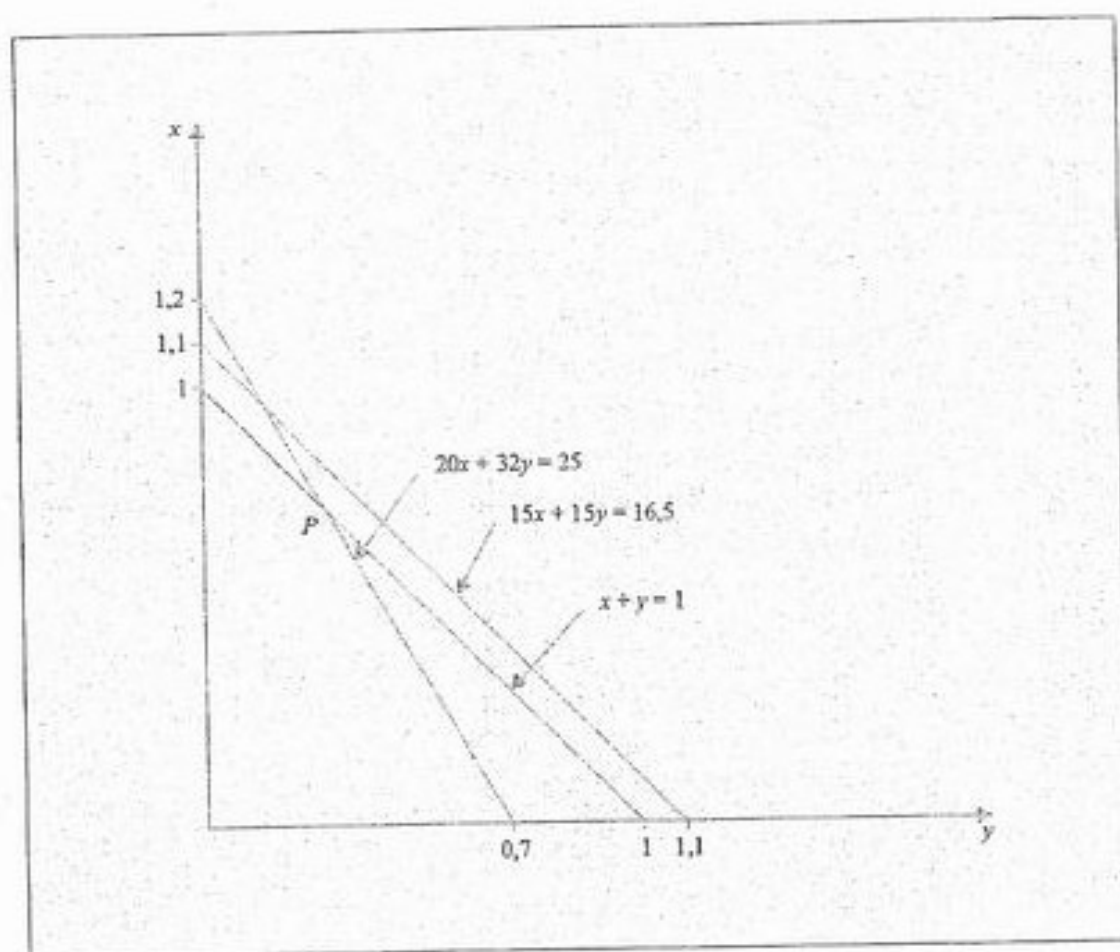


Figura 2.12.

Como puede observarse, esta recta es paralela a la recta

$$x + y = 1$$

pues ambas tienen la misma pendiente.

Por consiguiente, todas las soluciones posibles son igualmente buenas. Todos los puntos del segmento de esta recta comprendidos entre P y el eje de ordenadas constituyen soluciones del programa igualmente buenas. El programa tiene infinitas soluciones.

Problema
15

Programación lineal. Caso de maximización

¿Cuántas soluciones tiene el siguiente programa lineal?

$$\begin{aligned}\text{Maximizar: } Z &= 40x + 25y \\ 70x + 70y &\leq 650 \\ 50x + 75y &\leq 300 \\ 70x + 35y &\leq 280 \\ x, y &\geq 0\end{aligned}$$

RESOLUCIÓN

La tercera inecuación es más restrictiva que la primera. Si aquélla se cumple, ha de cumplirse ésta. Por consiguiente, puede eliminarse la primera restricción.

En la figura 2.13 se han representado en el primer cuadrante las rectas que tienen como ecuaciones:

$$50x + 75y = 300 \quad (1)$$

$$70x + 35y = 280 \quad (2)$$

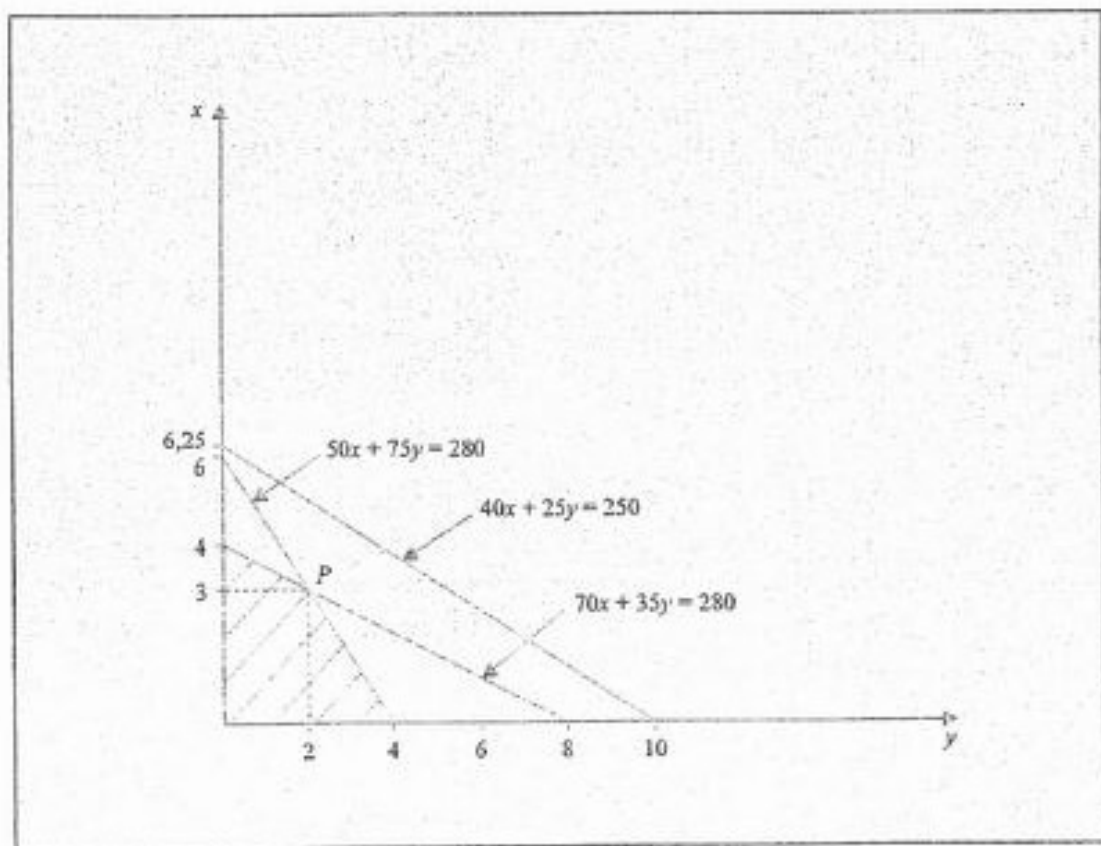


Figura 2.13.

Posteriormente, se ha rayado la región de soluciones posibles y se ha representado la función objetivo para un valor aleatorio de Z , como 250. Como puede observarse, la paralela a esta recta más lejana del origen de coordenadas que tiene algún punto perteneciente a la región de soluciones posibles es la que pasa por el punto P .

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2), se obtiene la solución óptima, que es sólo una. Concretamente:

$$x = 3$$

$$y = 2$$

**Problema
16**

Programación lineal. Caso de maximización

Se desea resolver el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } Z &= 120x + 75y \\ 210x + 210y &\leq 1.950 \\ 50x + 225y &\leq 900 \\ 105x + 210y &\leq 840 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN

Como puede observarse en la figura 2.14, la segunda restricción es más restrictiva que las otras dos. Si se cumple la segunda, se cumplen las otras dos. Por consiguiente, el área de las soluciones posibles es la limitada por la recta correspondiente a la segunda ecuación y por los ejes de coordenadas.

En la figura 2.14 se ha representado también la recta correspondiente a la ecuación que resulta de tomar un valor arbitrario para Z en la función objetivo, como 600. Como puede observarse, la paralela a esta recta más alejada del origen de coordenadas que tiene algún punto perteneciente a la región de soluciones posibles es la que pasa por el punto en el que x vale 6 e y vale 0. Por consiguiente, la solución óptima es:

$$x = 6$$

$$y = 0$$

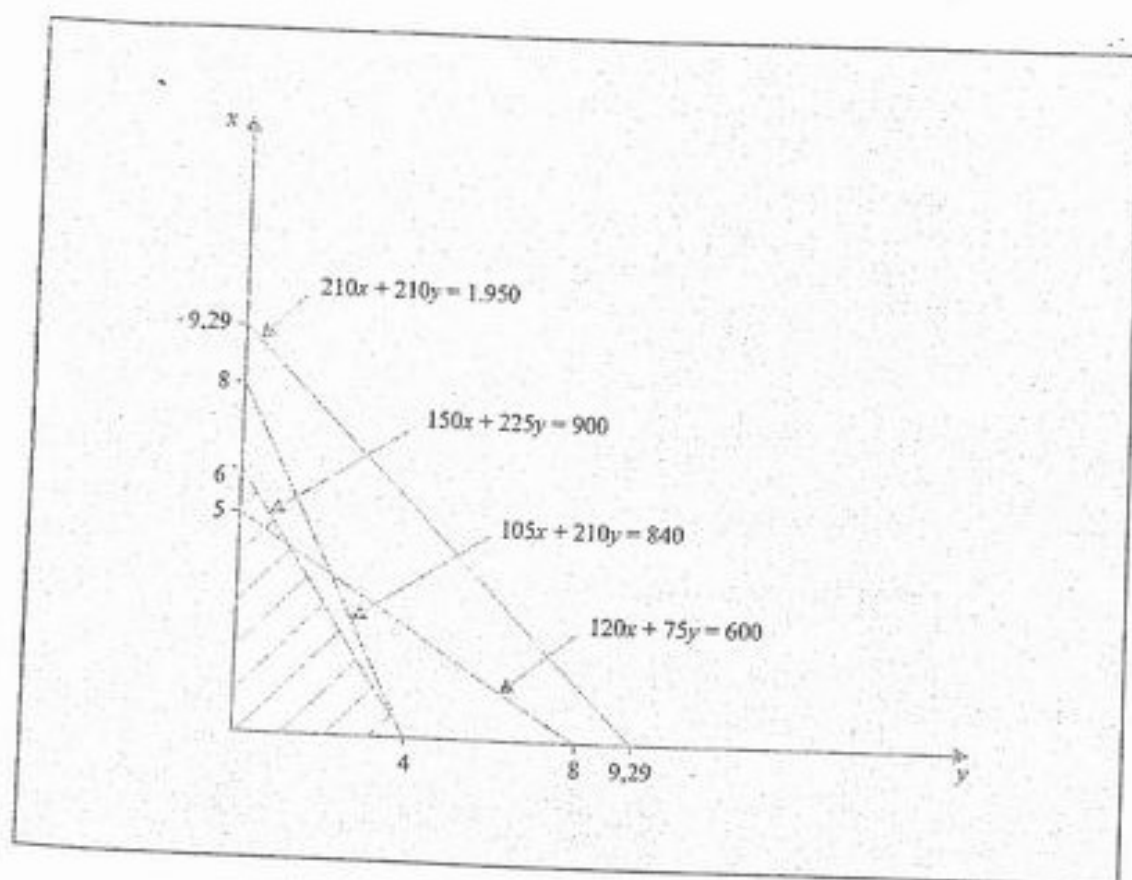


Figura 2.14.

2.3. EL MÉTODO PERT EN CERTEZA Y LOS GRÁFICOS DE GANTT

Problema 17

El método PERT. Representación del grafo

Para que la empresa de asesoramiento fiscal Evasiuned, S. A., pueda comenzar sus actividades, dos obreros, apodados X e Y, han de acondicionar el local que se utilizará como oficina. El obrero X se encargará de efectuar un alisado del piso (operación A), de enmaderarlo (operación B), de lijarlo (operación IC) y de barnizarlo (operación D). Mientras X realiza esas operaciones, independientemente, Y alisará las paredes (operación E) y las pintará (operación F). Cuando ambos hayan concluido esas tareas, y se haya recibido el mobiliario (cuyo transporte es la actividad G), entre los dos se encargarán de colocarlo (operación H) mientras otro obrero, Z, realiza la limpieza del local y del mobiliario (operación I). Se desea representar el grafo PERT de estas operaciones.

RESOLUCIÓN

La sucesión de operaciones del operario X previas a la colocación del mobiliario se pueden representar en el grafo de la figura 2.15.

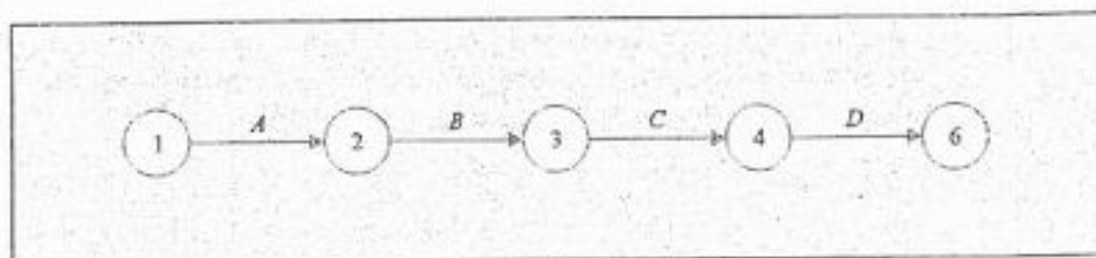


Figura 2.15.

Las flechas indican actividades (A es alisar el piso, B es enmaderarlo, C es lijarlo y D es barnizarlo). Los nudos indican situaciones o estados (el 1 representa la situación de comienzo del trabajo, el 2 representa la situación en la cual ya se ha alisado el piso y se puede proceder a su enmaderado, el 3 refleja la situación en la cual ya se ha terminado la actividad de enmaderado y se puede comenzar la de lijado, y el nudo 4 refleja el estado en el cual ya se ha lijado el piso y se puede barnizar, tras lo cual se llega al nudo 6, en el cual este obrero ya está en disposición de, en colaboración con el otro, pasar a colocar el mobiliario una vez recibido).

De forma semejante se representan las operaciones del obrero Y previas a la colocación del mobiliario (figura 2.16). Obsérvese que el nudo de inicio de este operario es también el nudo 1, pues este nudo representa el estado de comienzo del trabajo y ambos operarios pueden comenzar simultáneamente (en el momento 1, X comienza a alisar el piso e Y empieza a alisar las paredes). Además, el último nudo es también el 6, pues este nudo representa la situación en la cual ambos operarios pueden comenzar conjuntamente a colocar el mobiliario. Dado que, para esto, es preciso que previamente el operario Y haya pasado por la situación en la cual ha finalizado la operación E (alisar las paredes) el nudo que describe esta situación de finalización de E ha de tener una nume-

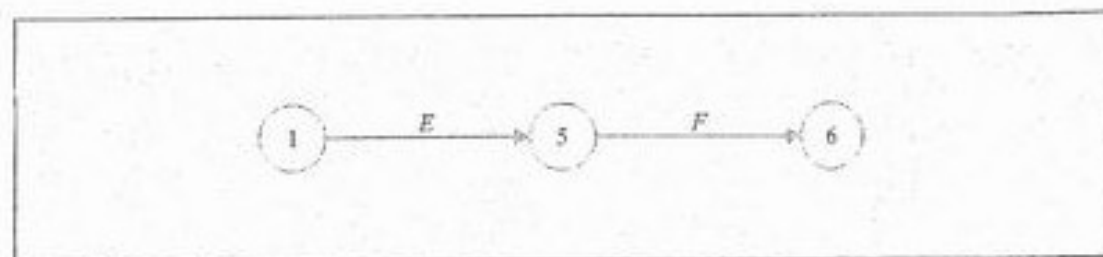


Figura 2.16.

ración anterior (5) que el de la disposición para la colocación del mobiliario (6) (*principio de designación sucesiva* que prohíbe numerar un nudo mientras estén sin numerar nudos de los que parten actividades que terminan en él).

Combinando los dos grafos parciales anteriores e incorporando las actividades de transporte del mobiliario al local (G) que se realiza mientras los dos operarios efectúan las operaciones anteriores de acondicionamiento, así como la posterior colocación del mobiliario (H) y la simultánea limpieza del mobiliario y del local (I), se obtiene el grafo de la figura 2.17.

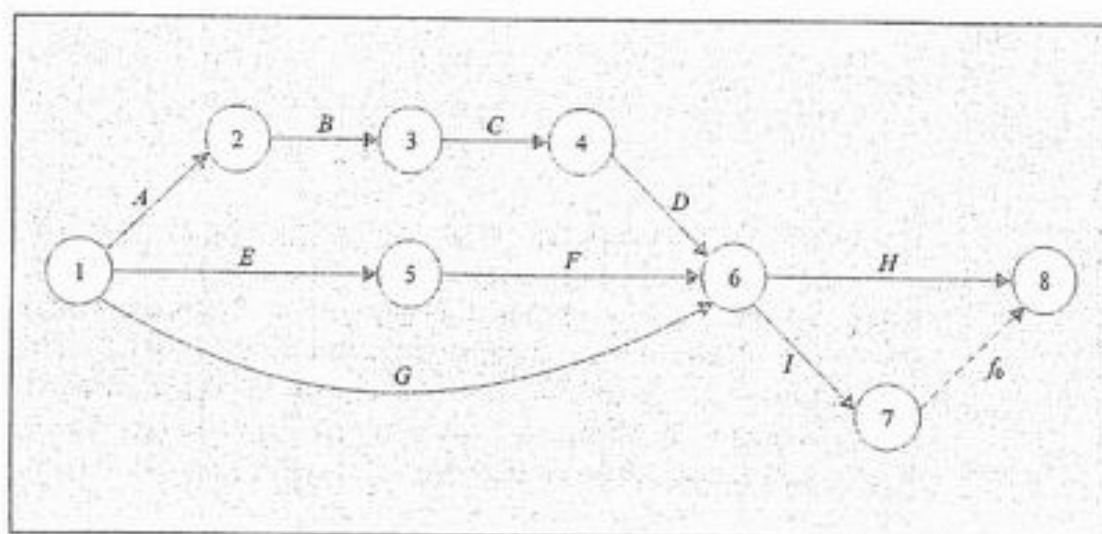


Figura 2.17.

Una vez que X ha completado las actividades A, B, C y D, que Y ha terminado las operaciones E y F, y que se ha recibido el mobiliario (ha finalizado la actividad G), pueden comenzar las actividades de colocación del mobiliario (H) y de limpieza (I), sin que exista ningún orden de precedencia entre H e I. En un grafo PERT no pueden representarse dos flechas que partan del mismo nudo y que tengan también el mismo nudo de destino (*principio de designación unívoca*); es decir, sería incorrecto haber hecho lo representado en la figura 2.18.

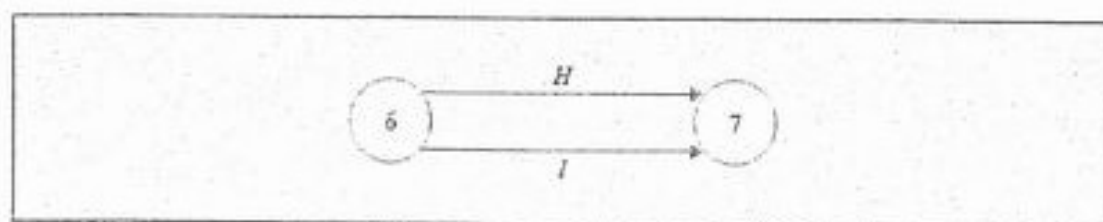


Figura 2.18.

Por ello, se ha acudido a la introducción de la actividad ficticia f_0 . El nudo 7 representa la situación en la que se ha finalizado la limpieza y el nudo 8 refleja aquella en la que se han terminado todas las operaciones y puede comenzar la actividad de la empresa Evasiuned. Dado que sólo existe una situación de comienzo y una situación de finalización del trabajo, no puede existir más de un nudo de origen (el 1) ni más de un nudo final (el 8) (*principio de unicidad del estado inicial y del estado final*).

**Problema
18**

El método PERT. Los tiempos early y el camino crítico

Los operarios X e Y, encargados del acondicionamiento de los locales de Evasiuned, a los que se refería el problema anterior, en base a su amplia experiencia en este tipo de trabajos pueden precisar los tiempos que necesitarán para cada una de las actividades que lo integran y han afirmado que son los de la tabla 2.4.

TABLA 2.4

Actividad	Tiempo necesario (días)
A	3
B	5
C	1
D	1
E	4
F	2
H	2

El transportista del mobiliario se ha comprometido a servirlo al cabo de 12 días y doña Z tardará un día en realizar la limpieza del mobiliario y del local. ¿Cuál es el tiempo mínimo imprescindible para poder alcanzar cada una de las situaciones descritas por los nudos del grafo PERT y para que la empresa pueda comenzar sus actividades? ¿Qué actividades requieren mayor control si no se desea que se retrase la ejecución del trabajo sobre el mínimo imprescindible?

RESOLUCIÓN

Si para realizar la actividad A se requieren 3 días, no se podrá alcanzar la situación descrita por el nudo 2 antes del tercer día contado desde el comienzo de las operaciones (día 0). Dado que la operación B requiere 5 días y que,

para poder efectuarla (enmaderar el piso), previamente hay que terminar la operación A (alisado del piso), la situación descrita por el nudo 3 (en la cual ya se han efectuado las operaciones A y B y puede comenzar la C) no se podrá alcanzar hasta el octavo día. Por consiguiente, el *tiempo early* del nudo 2 es de 3 días y el del nudo 3 de 8 días. El tiempo *early* de un nudo es el tiempo mínimo necesario para alcanzar la situación descrita por ese nudo. Del mismo modo se han calculado los tiempos *early* de los demás nudos en el grafo PERT de la figura 2.19, en el que se ha situado en cada flecha la duración de la actividad que representa.

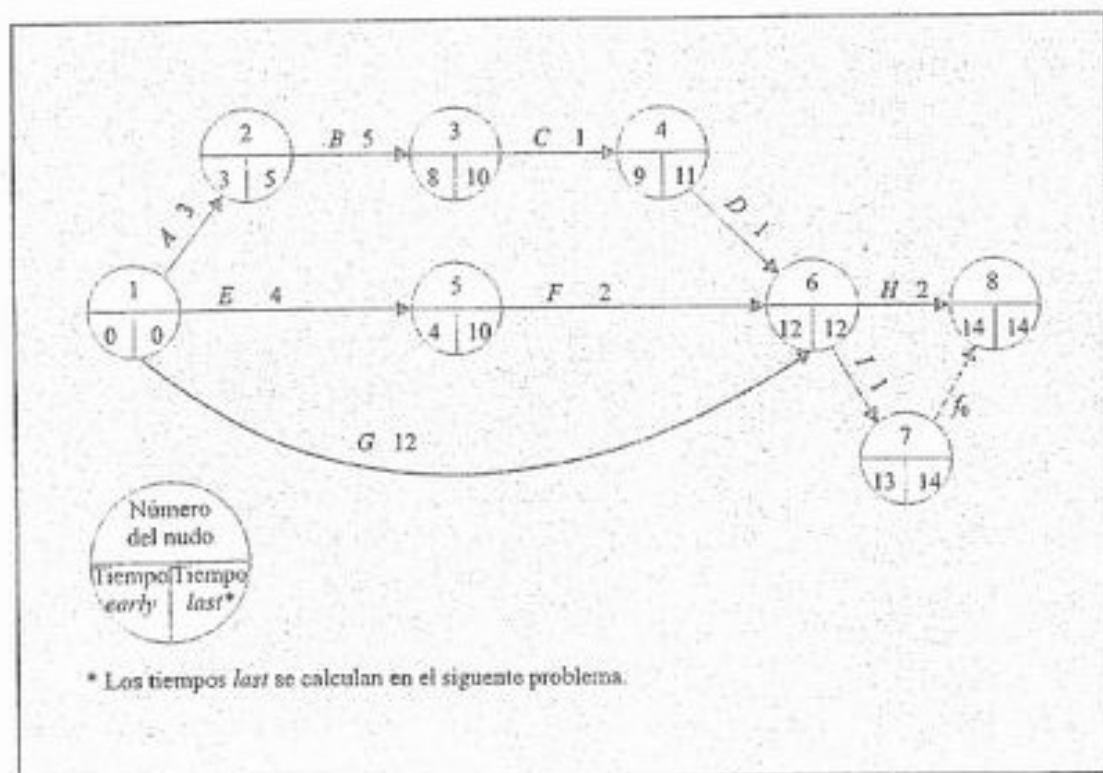


Figura 2.19.

Obsérvese que el nudo 6 representa una situación en la cual el operario X ha terminado de barnizar el piso, el Y ha acabado de pintar las paredes y se ha recibido el mobiliario (ha finalizado la actividad G). Es posible que el décimo día X haya terminado con el trabajo del piso (dedicando 3 días a la actividad A, 5 a la B, 1 a la C y 1 a la D, tal y como está previsto) y que el sexto día Y haya finalizado con las paredes, pero la situación necesaria para iniciar las actividades H (colocar el mobiliario) e I (limpieza del mobiliario y del local) no se alcanzará hasta el duodécimo día, pues son 12 los días que han de transcurrir hasta la recepción del mobiliario. Por consiguiente, el tiempo *early* del nudo

6 es de 12 días. Por la misma razón, el tiempo mínimo necesario para que la empresa pueda iniciar su actividad es de 14 días. Es posible que al cabo de 13 días el local y el mobiliario estén limpios, pero, para colocar este último, son necesarios 2 días contados a partir del duodécimo, por lo cual la situación descrita por el nudo 8 no se alcanza hasta que han transcurrido 14 días. Adviértase que, como es lógico, las actividades ficticias no tienen duración.

De todo lo anterior cabe concluir que *el tiempo early de un nudo es igual a la suma de las duraciones de las actividades del camino (conjunto de actividades sucesivas) más largo que, partiendo del nudo inicial, conduce a ese nudo*. Así, para llegar gráficamente al nudo 6, partiendo del nudo 1, puede seguirse el camino formado por las actividades A, B, C y D, cuya duración total es $3 + 5 + 1 + 1 = 10$, o bien el integrado por las operaciones E y F, cuya duración total vale $4 + 2 = 6$, o por el formado por la actividad G, cuya duración es de 12 días; por tanto, el tiempo *early* del nudo 6 es de 12 días ($12 > 10$ y $12 > 6$).

Dado que tanto X como Y tienen que esperar a que llegue el mobiliario, tienen cierta «holgura» en su trabajo. Aunque X realice sus actividades A, B, C y D en 12 días, en lugar de hacerlo en los 10 previstos, no habrá retraso en la ejecución general del trabajo, pues el mobiliario tarda 12 días en llegar. Por la misma razón tampoco se retrasará la ejecución del trabajo aunque Y tarde 12 días en efectuar las operaciones E y F, y no los 6 días previstos; también Y tiene «holguras» en sus actividades. Sin embargo, si se retrasa la llegada del mobiliario sobre los 12 días previstos, se retrasará el comienzo de las actividades de la empresa (se llegará al nudo 8 después del día 14). De forma semejante, aunque Z se retrase un día en efectuar la limpieza, no se retrasará la finalización del trabajo, pues X e Y necesitan 2 días para colocar el mobiliario. Como I dura menos que H, ha de ser I la que se dirija a la actividad ficticia por el nudo 7.

Por consiguiente, las actividades que requieren mayor control son la G y la H, que son las *actividades críticas*, es decir, aquellas en las que no debe haber retrasos si no se desea que el trabajo general se retrase. El camino formado por estas actividades (la G y la H) es el denominado *camino crítico*. Es el más largo de los caminos que comunican gráficamente el nudo inicial y el final. Por ello, su duración es el tiempo *early* del nudo final; es decir, el tiempo mínimo necesario para completar el trabajo, que, en este caso, es de 14 días.

Problema
19

El método PERT. Los tiempos last

¿Cuáles son los momentos más tardíos en los que es admisible llegar a cada una de las situaciones descritas por los nudos del grafo PERT del problema anterior, de manera que no se retrase la ejecución del trabajo sobre el mínimo imprescindible?

RESOLUCIÓN

A dichos momentos se les denomina *tiempos last* de los nudos. Así, el tiempo *last* del nudo 6 es 12 días, pues, si se llegara más tarde a este nudo, al necesitarse luego 2 días para realizar la actividad *H*, al nudo 8 se llegaría después de 14 días. Sin embargo, el nudo 7 tiene un tiempo *last* de 14 días: aunque se podría llegar a la situación descrita por este nudo al cabo de 13 días, si se llega una vez transcurridos 14 días no se retrasa la ejecución del trabajo.

De ese modo, procediendo de derecha a izquierda, se van determinando los tiempos *last* de los distintos nudos que se recogieron en el gráfico. *El tiempo last de un nudo es la diferencia entre la duración del camino crítico y la duración del camino más largo que conduce, en sentido inverso, del último nudo al nudo en cuestión.* Así, por ejemplo, el camino más largo que conduce, en sentido inverso al de las flechas, del nudo 8 al nudo 5 es el integrado por las actividades *H* y *F*, cuya duración total es de 4 días ($2 + 2$) (el otro camino es el de las actividades *f*, *I* y *F*, cuya duración es de 3 días); deduciendo de la duración del camino crítico (14 días) los 4 días que duran las actividades *H* y *F*, se obtiene el tiempo *last* del nudo 5, que es de 10 días. Obsérvese que, dado que, si se desea realizar el trabajo en el mínimo tiempo preciso, no puede haber retrasos en la ejecución de las actividades críticas, ni en la consecución de las situaciones representadas por los nudos que forman parte del camino crítico, en estos nudos (1, 6 y 8) el tiempo *last* y el *early* coinciden. Obviamente, el primer nudo y el último siempre forman parte del camino crítico y, por tanto, en ellos ambos tiempos siempre coinciden.

Problema 20

El método PERT. Las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades

Se desea determinar las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades del grafo PERT de los problemas anteriores.

RESOLUCIÓN

La oscilación de un nudo es el margen de tiempo existente entre el momento más tarde en el que es admisible llegar al mismo (tiempo *last* de ese nudo) y el momento más pronto en el que es posible llegar (tiempo *early*). Así, la oscilación del nudo 4 vale $11 - 9 = 2$ días, y la del nudo 5 es igual a $10 - 4 = 6$ días. De este modo, a partir del grafo, se han calculado las oscilaciones de la tabla 2.5.

TABLA 2.5

Nudo	1	2	3	4	5	6	7	8
Oscilación	0	2	2	2	6	0	1	0

La holgura de una actividad es el exceso de tiempo sobrante para su ejecución. Así, según los distintos supuestos que se hagan, se distinguen:

- Holgura total, que es el margen sobrante suponiendo que a la situación representada por el nudo de origen se llega lo más pronto posible y que a la del de destino se llega lo más tarde admisible. Es decir, llamando i al nudo de origen, j al de destino, L al tiempo *last* y E al tiempo *early*, la holgura total, H_T , de la actividad que va del nudo i al j , cuya duración es d_{ij} , será:

$$H_T = L_j - E_i - d_{ij}$$

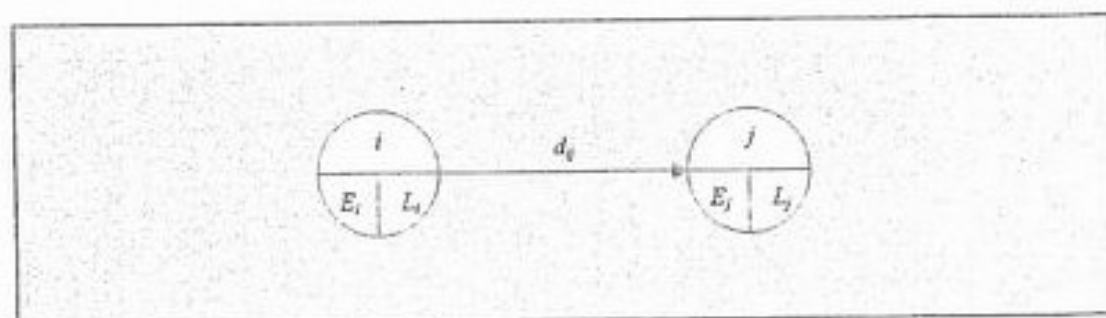


Figura 2.20.

- Holgura libre, H_L , que es el margen sobrante suponiendo que el nudo de origen se alcanza lo más pronto posible y que al de destino se llega también lo más pronto posible; es decir:

$$H_L = E_j - E_i - d_{ij}$$

- Holgura independiente, H_I , que es el margen sobrante suponiendo que al nudo de origen se llega lo más tarde que es admisible y que al de destino se llega lo más pronto posible:

$$H_I = E_j - L_i - d_{ij}$$

Obsérvese que la oscilación del nudo de origen vale:

$$O_i = L_i - E_i$$

y que la del de destino es igual a:

$$O_j = L_j - E_j$$

Por tanto, añadiendo y restando L_j , se obtiene que:

$$H_L = E_j - E_i - d_{ij} = E_j - L_j + L_j - E_i - d_{ij} = E_j - L_j + H_T = H_T - O_j$$

Una vez calculada la holgura total de una actividad y conocida la oscilación del nudo de destino, se obtiene así su holgura libre.

En cuanto a la holgura independiente, sumando y restando E_i , se puede escribir:

$$H_I = E_j - L_i - d_{ij} = E_j - E_i + d_{ij} + E_i - L_i = H_L + E_i - L_i = H_L - O_i$$

Una vez conocidas la holgura libre de una actividad y la oscilación de su nudo de origen, es posible calcular así su holgura independiente.

Los cálculos necesarios en este caso se recogen en la tabla 2.6.

TABLA 2.6

Actividad	$i-j$	L_j	E_i	d_{ij}	$H_T = L_j - E_i - d_{ij}$	O_j	$H_L = H_T - O_j$	O_i	$H_I = H_L - O_i$
A	1-2	5	0	3	2	2	0	0	0
B	2-3	10	3	5	2	2	0	2	-2
C	3-4	11	8	1	2	2	0	2	-2
D	4-6	12	9	1	2	0	2	2	0
E	1-5	10	0	4	6	6	0	0	0
F	5-6	12	4	2	6	0	6	6	0
G	1-6	12	0	12	0	0	0	0	0
H	6-8	14	12	2	0	0	0	0	0
I	6-7	14	12	1	1	1	0	0	0

Como puede observarse, en algunas ocasiones la holgura independiente toma valores negativos, lo cual no refleja sino la imposibilidad de que se produzcan sus supuestos. Por ejemplo, en cuanto a la actividad B, es imposible que, partiendo del nudo de origen lo más tarde admisible (al cabo de 5 días) se llegue al nudo de destino lo más pronto posible (al cabo de 8 días), teniéndose que realizar, entre tanto, una actividad que dura 5 días:

$$E_j - L_i - d_{ij} = 8 - 5 - 5 = -2 \text{ días}$$

En este caso, como en el de la actividad C, no existe tiempo sobrante, sino escasez de tiempo para que se realicen los supuestos.

Adviértase, además, que dada la premura existente en su ejecución, si se quiere evitar que el trabajo se retrase sobre el mínimo previsto, nunca hay hol-

guras en las actividades críticas; en ellas las tres holguras valen cero. Por la misma razón, las oscilaciones de los nudos pertenecientes al camino crítico siempre valen cero; según se señaló anteriormente, en ellos siempre coinciden el tiempo *early* y el *last*, por lo que no existe oscilación.

Problema
21

El método PERT y el gráfico de Gantt

Han transcurrido 6 días desde el comienzo de las operaciones de acondicionamiento del local de Evasiuned, al que se refieren los problemas anteriores, y el operario X ya ha terminado de alisar el piso (operación A) y de enmaderarlo (operación B), mientras que el operario Y terminó de alisar las paredes (operación E) y ha pintado (operación F) la mitad de ellas. El mobiliario se encuentra a mitad de camino entre su origen y el local de Evasiuned. Se desea representar el gráfico de Gantt de este trabajo indicando la situación de las operaciones al final del sexto día de su ejecución.

RESOLUCIÓN

El gráfico de Gantt, que debe su denominación a su creador, Harry L. Gantt, es un sencillo instrumento de control consistente en representar en el eje de abscisas el tiempo o las fechas de realización del trabajo, y en el de ordenadas las actividades que lo integran. Con barras horizontales se reflejan los tiempos precisos para realizar las tareas, siendo la longitud de cada barra directamente proporcional a su duración y comienza en el momento de la iniciación de la tarea que representa, finalizando en el de su terminación. En la figura 2.21 se representa el gráfico de Gantt de este trabajo, partiendo del grafo PERT recogido en la resolución del problema 18.

Un gráfico de Gantt permite controlar visualmente la ejecución del trabajo. Así, en este caso, la recta vertical continua trazada sobre la fecha actual (es decir, al cabo de 6 días desde el comienzo de las operaciones) permite observar los niveles de ejecución en los que se encontrarían las actividades si se hubieran realizado en los tiempos previstos. A medida que va avanzando la ejecución de una actividad se va rayando oblicuamente la barra que la representa. A la vista del gráfico, se observa que el operario X lleva un adelanto de 2 días sobre las fechas previstas (conforme a las previsiones todavía quedarían 2 días para finalizar la operación B y ésta ya se ha terminado) mientras que el operario Y tiene un retraso de un día (al final del sexto día ya debería haber terminado la operación F, que dura 2 días, y sólo ha efectuado la mitad de la misma). Sin embargo, dado que esta actividad no es crítica, este retraso no es preocupante (Y podría tardar 6 días en terminar esta operación sin que se re-

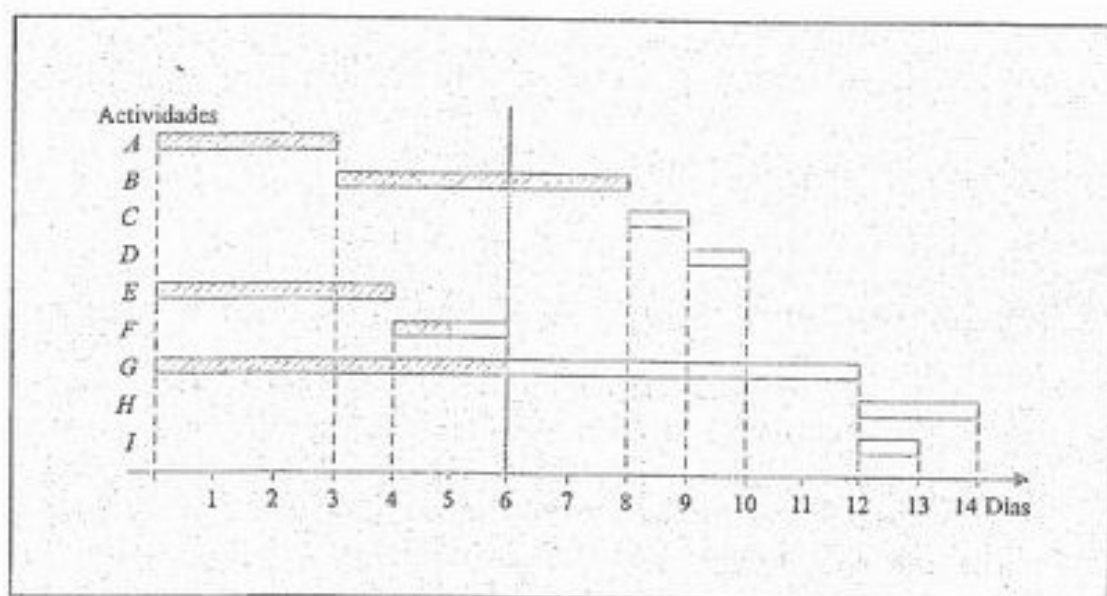


Figura 2.21.

trasara la ejecución del proyecto, dado que ha de esperar a que finalice la actividad *G* para poder iniciar la actividad *H* en unión de *X*).

En cuanto a la actividad crítica *G*, viene desarrollándose conforme a las previsiones.

**Problema
22**

El método PERT. Representación del grafo

Un proyecto consta de seis actividades. Las actividades *C*, *D* y *E* no pueden comenzar hasta que termine la *A*. Además, la actividad *E* no se puede iniciar hasta haberse terminado la *B*. Antes de empezar la *F* han de haberse finalizado las actividades *C*, *D* y *E*. Se desea:

- Representar los grafos parciales.
- Determinar las actividades iniciales y las finales.
- Representar el grafo PERT.

RESOLUCIÓN

a) Según la información del enunciado, pueden representarse los grafos parciales de la figura 2.22.

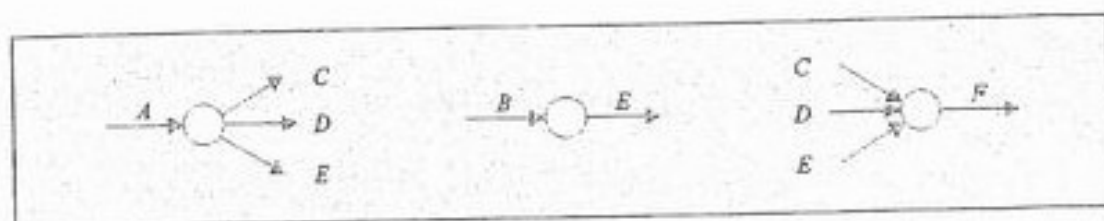


Figura 2.22.

b) Las actividades iniciales son aquellas a las que no precede ninguna, es decir, en este caso, las actividades A y B. Dado que no dice el enunciado que exista ninguna relación de precedencia entre A y B, puede representarse el grafo parcial de la figura 2.23.

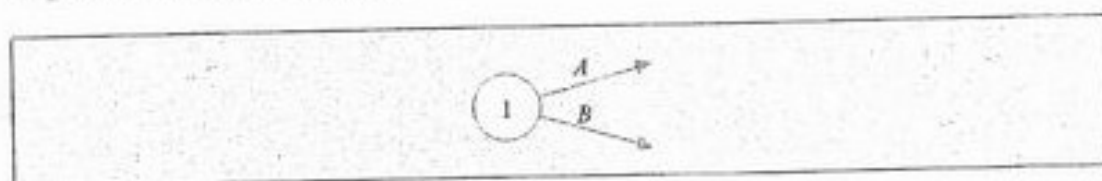


Figura 2.23.

La actividad final es la F, que es la única que no precede a ninguna.

c) De la conjunción de los grafos parciales anteriores resulta el grafo PERT del proceso representado en la figura 2.24.

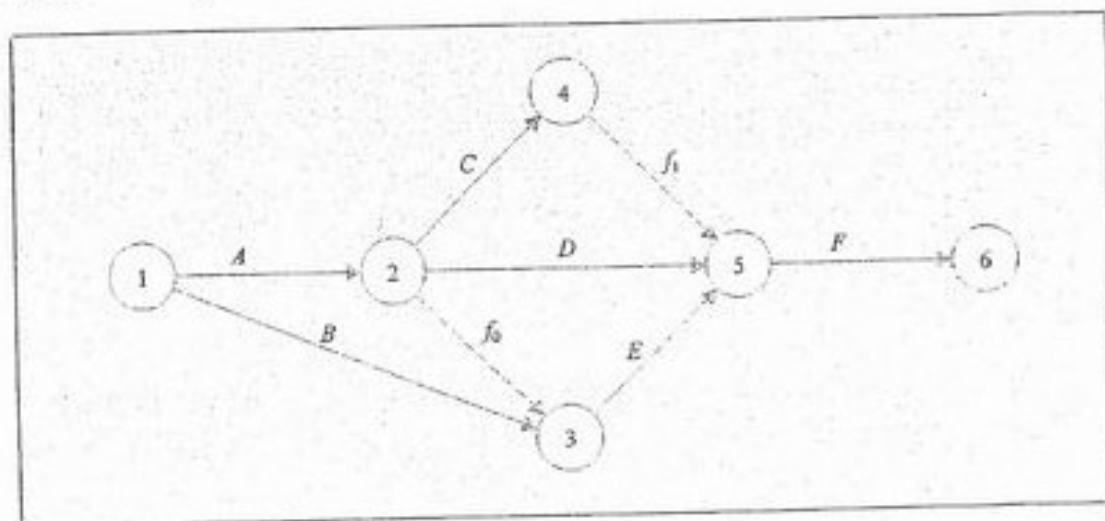


Figura 2.24.

Dado que B precede a E, pero no a C y D, y que E también es precedida por A, que, a su vez, precede a C y D, ha sido necesario utilizar la actividad ficticia f_0 . La f_1 es necesaria para mantener el principio de designación unívoca. Se supone que C dura menos que D.

Problema
23

El método PERT. Representación del grafo

Para desarrollar cierto trabajo es preciso efectuar las tareas recogidas en la tabla 2.7, en la que se señalan cuáles son las tareas que preceden a cada una de ellas.

TABLA 2.7

Tareas	Tareas precedentes
A	—
B	A
C	—
D	—
E	C
F	D
G	B, C
H	D, E
I	D, E
J	F, I
K	G, H
L	K, J

Se desea:

- Representar los grafos parciales.
- Determinar las tareas iniciales y las finales.
- Representar el grafo PERT.

RESOLUCIÓN

- Los grafos parciales son los representados en la figura 2.25.

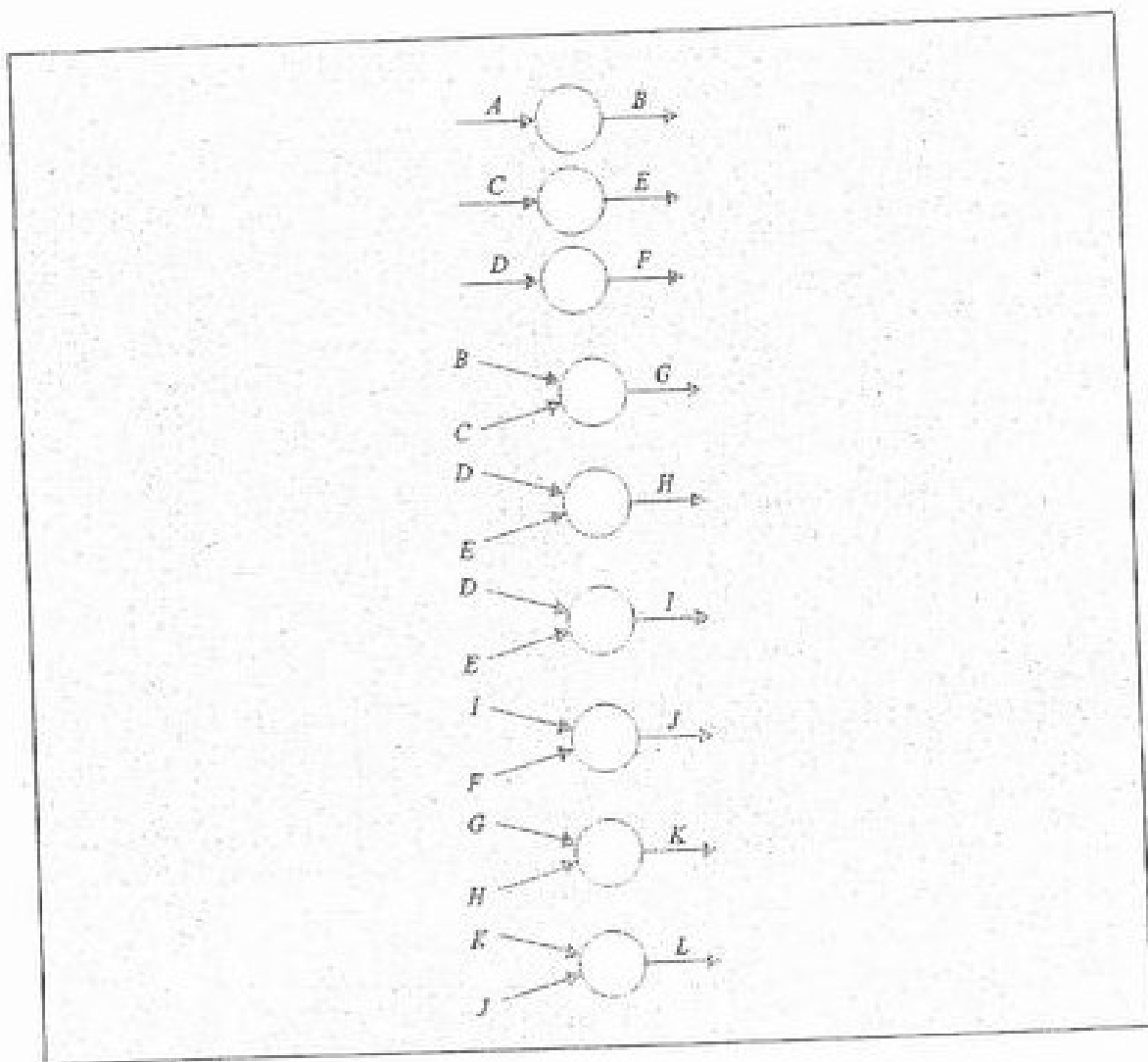


Figura 2.25.

b) Las tareas iniciales son A, C y D, a las que no precede ninguna (figura 2.26).

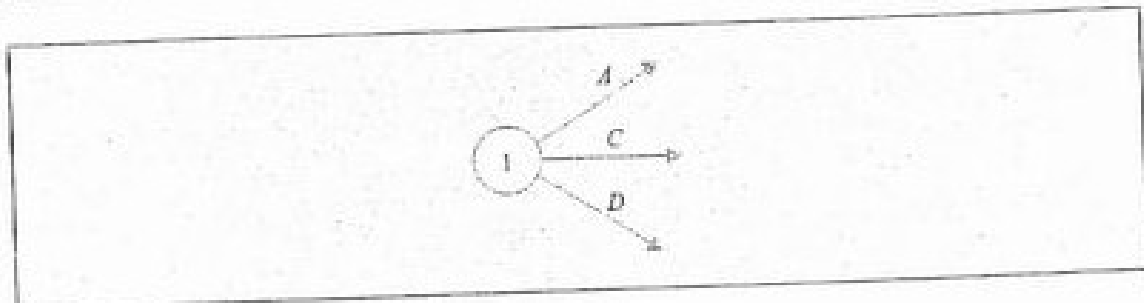


Figura 2.26.

La tarea final es la L, que es la única que no precede a ninguna.

c) De la conjunción de los grafos parciales anteriores resulta el grafo de la figura 2.27.

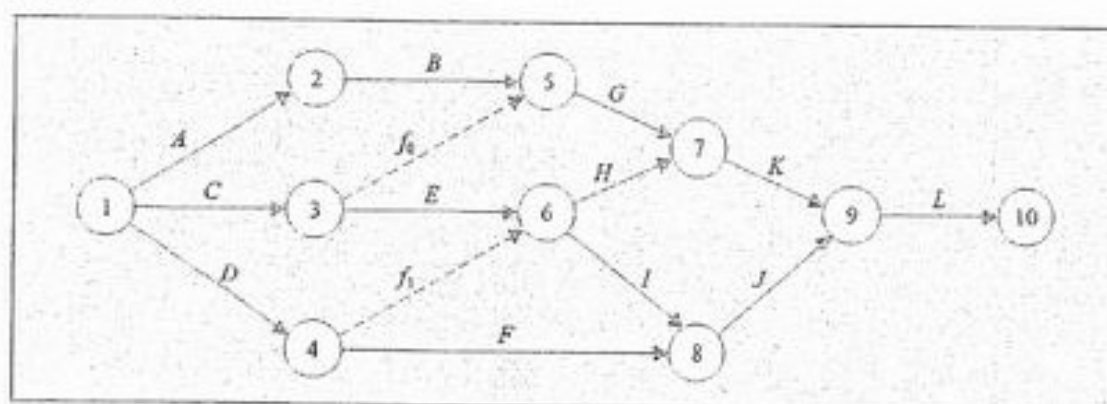


Figura 2.27.

**Problema
24**

El método PERT. Representación del grafo

Para desarrollar cierto trabajo es preciso efectuar las tareas recogidas en la tabla 2.8, en la que se señalan cuáles son las tareas que preceden a cada una de ellas.

TABLA 2.8

Tareas	Tareas precedentes
A	—
B	A
C	B
D	E
E	A
F	B
G	E
H	C
I	G, J
J	B, D
K	E, F
L	H
M	N
N	G
O	C, K

Se desea representar el grafo PERT correspondiente a este trabajo.

RESOLUCIÓN

Procediendo de la forma habitual, se obtiene el grafo PERT de la figura 2.28.

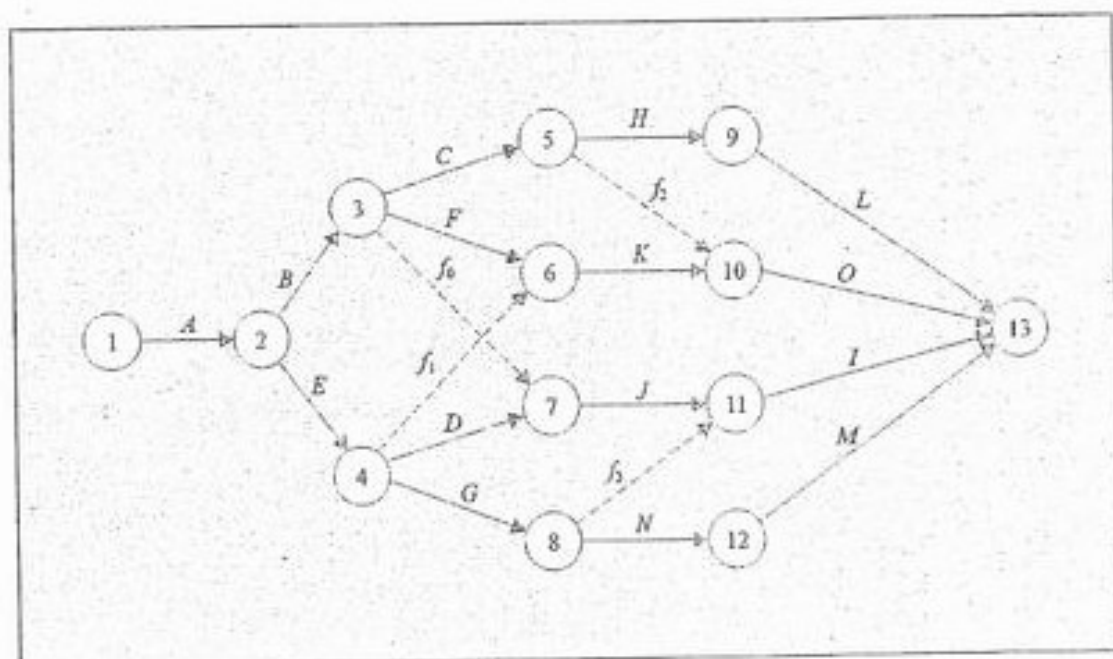


Figura 2.28.

Problema
 25

El método PERT. Representación del grafo

En la tabla de precedencias 2.9 se recogen las actividades precisas para desarrollar cierto proyecto.

TABLA 2.9

Actividades	Actividades precedentes	Actividades	Actividades precedentes
A	—	J	D, E, F
B	—	K	G, H
C	—	L	I
D	A, B, C	M	L
E	A	N	I, J
F	C	O	K
G	E	P	L
H	E	Q	O, N, M, P
I	F		

Prácticas de administración de empresas

Se desea representar el grafo PERT correspondiente a este proyecto, suponiendo que la actividad *G* dura menos que la *H*, y la *P* menos que la *M*.

RESOLUCIÓN

Resolviendo de la forma ya habitual se obtiene el grafo PERT de la figura 2.29.

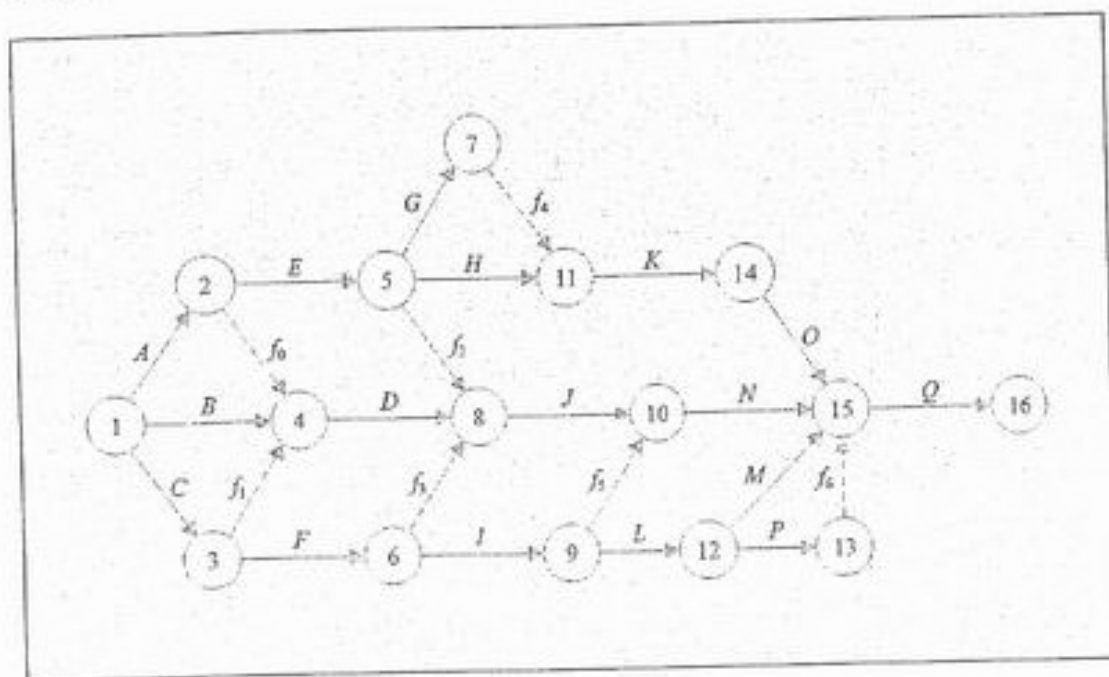


Figura 2.29.

Problema 26

El método PERT. Representación del grafo

En la tabla de precedencias 2.10 se recogen las actividades precisas para desarrollar cierto proyecto.

TABLA 2.10

Actividades	Actividades precedentes	Actividades	Actividades precedentes
A	—	M	D, F, H
B	A	N	J
C	A	O	J
D	C	P	L, M
E	B	Q	K
F	C, E	R	P
G	D	S	K
H	C, E	T	N, P
I	D	U	O
J	D, F, H	V	U
K	I	W	R
L	G, I	X	Q, S

Se desea representar el grafo PERT correspondiente. La actividad F dura menos que la H, y la S menos que la Q.

RESOLUCIÓN

Resolviendo de la forma habitual se obtiene el grafo de la figura 2.30.

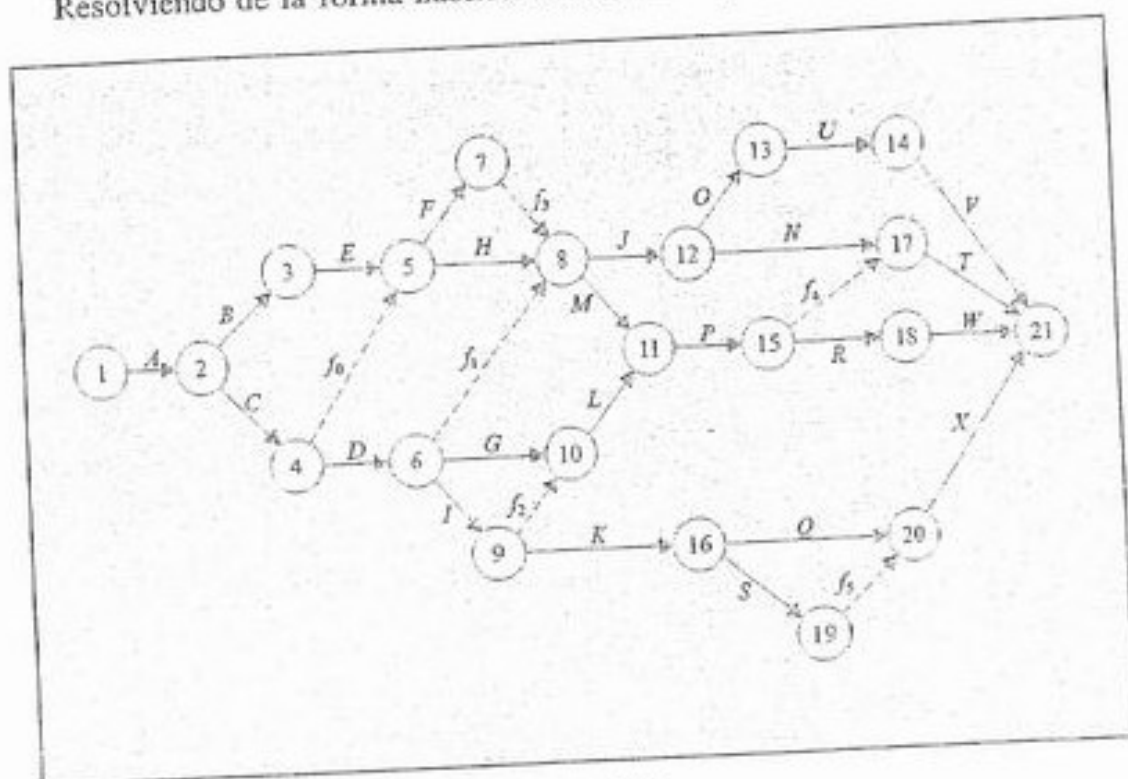


Figura 2.30.

**Problema
27**

El método PERT. Cálculo de tiempos, oscilaciones y holguras.
Determinación del camino crítico

Sobre las flechas del grafo PERT de la figura 2.31 se han señalado las duraciones de las actividades que representan.

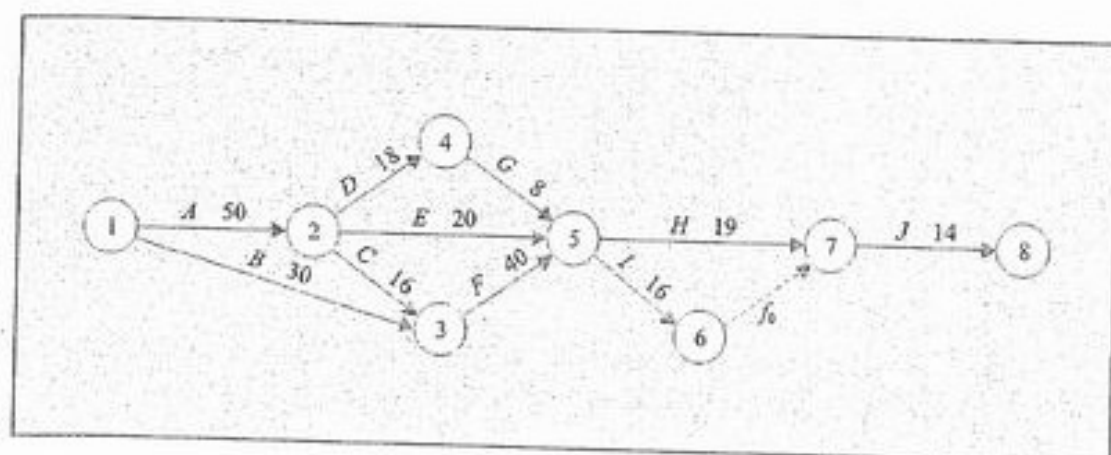


Figura 2.31.

Se desea:

- Determinar los tiempos *early* y *last* de los distintos nudos.
- Especificar cuál es el camino crítico y su duración.
- Determinar las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades.

RESOLUCIÓN

a) Procediendo según se expuso en los problemas 18 y 19, se obtienen los tiempos *early* y *last* reflejados en el grafo de la figura 2.32.

b) El camino crítico es el más largo entre los que conducen gráficamente del primer nudo al último. Está integrado por las actividades A, C, F, H y J. Su duración es de 139 unidades de tiempo (u.t.).

c) Procediendo según se señaló en el problema 20, se han efectuado los cálculos de la tabla 2.11.

TABLA 2.11

Nudo	1	2	3	4	5	6	7	8
Oscilación	0	0	0	30	0	3	0	0

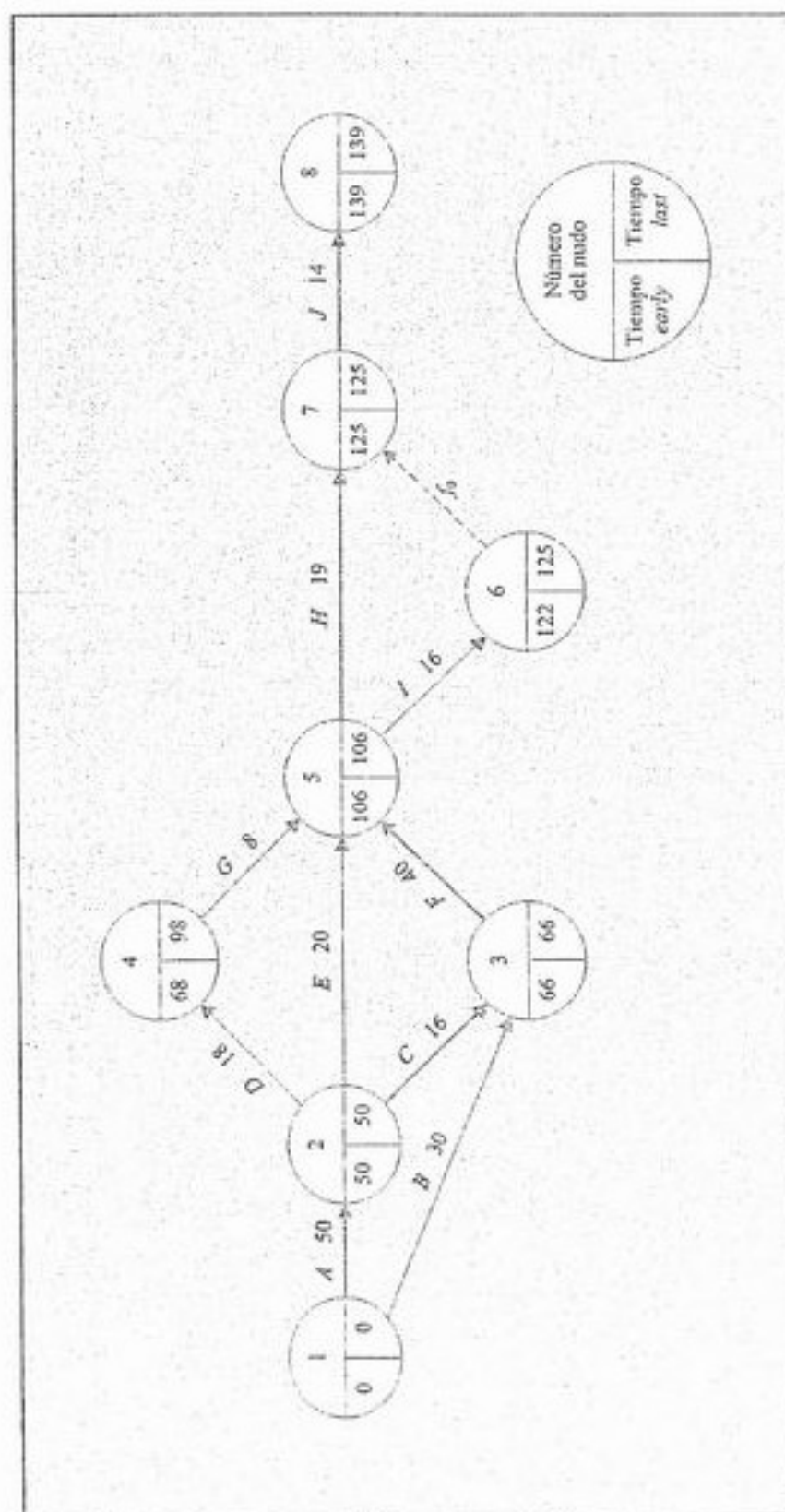


Figura 2.32.

En las actividades críticas (A, C, F, H y J) las holguras valen siempre cero. Las de las otras actividades se han calculado de la forma expuesta en el problema 20, en la tabla 2.12.

TABLA 2.12

Actividad	$i-j$	L_j	E_i	d_{ij}	$H_j = L_j - E_i - d_{ij}$	O_j	$H_i = H_j - O_j$	O_i	$H_i = H_i - O_i$
B	1-3	66	0	30	36	0	36	0	36
D	2-4	98	50	18	30	30	0	0	0
E	2-5	106	50	20	36	0	36	0	36
G	4-5	106	68	8	30	0	30	30	0
I	5-6	125	106	16	3	3	0	0	0

Problema 28

El método PERT. Cálculo de tiempos, oscilaciones y holguras. Determinación del camino crítico

Sobre las flechas del grafo PERT de la figura 2.33 se han señalado las duraciones de las actividades que representan.

Se desea:

- Determinar los tiempos *early* y *last* de los nudos.
- Especificar cuál es el camino crítico y su duración.
- Determinar las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades.

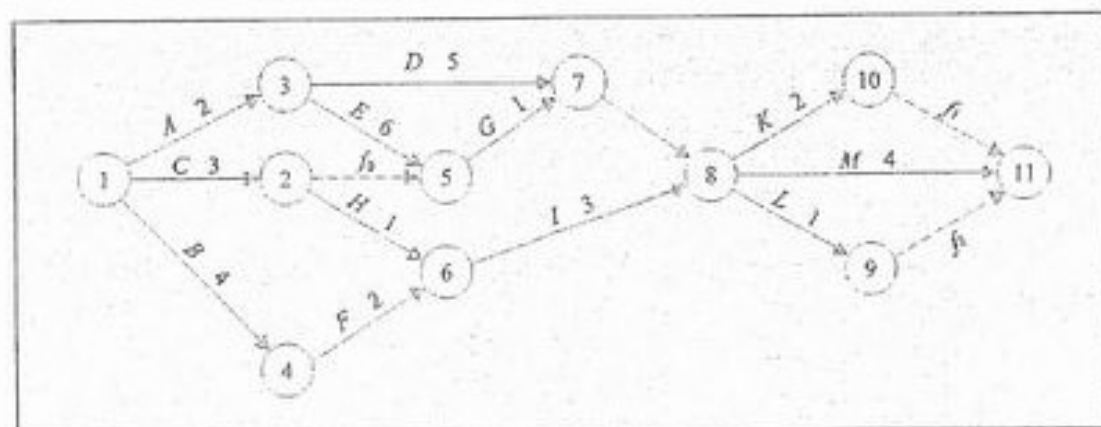


Figura 2.33.

RESOLUCIÓN

a), b) y c) Los tiempos *early* y *last* se recogen en el grafo de la figura 2.34. Las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades no críti-

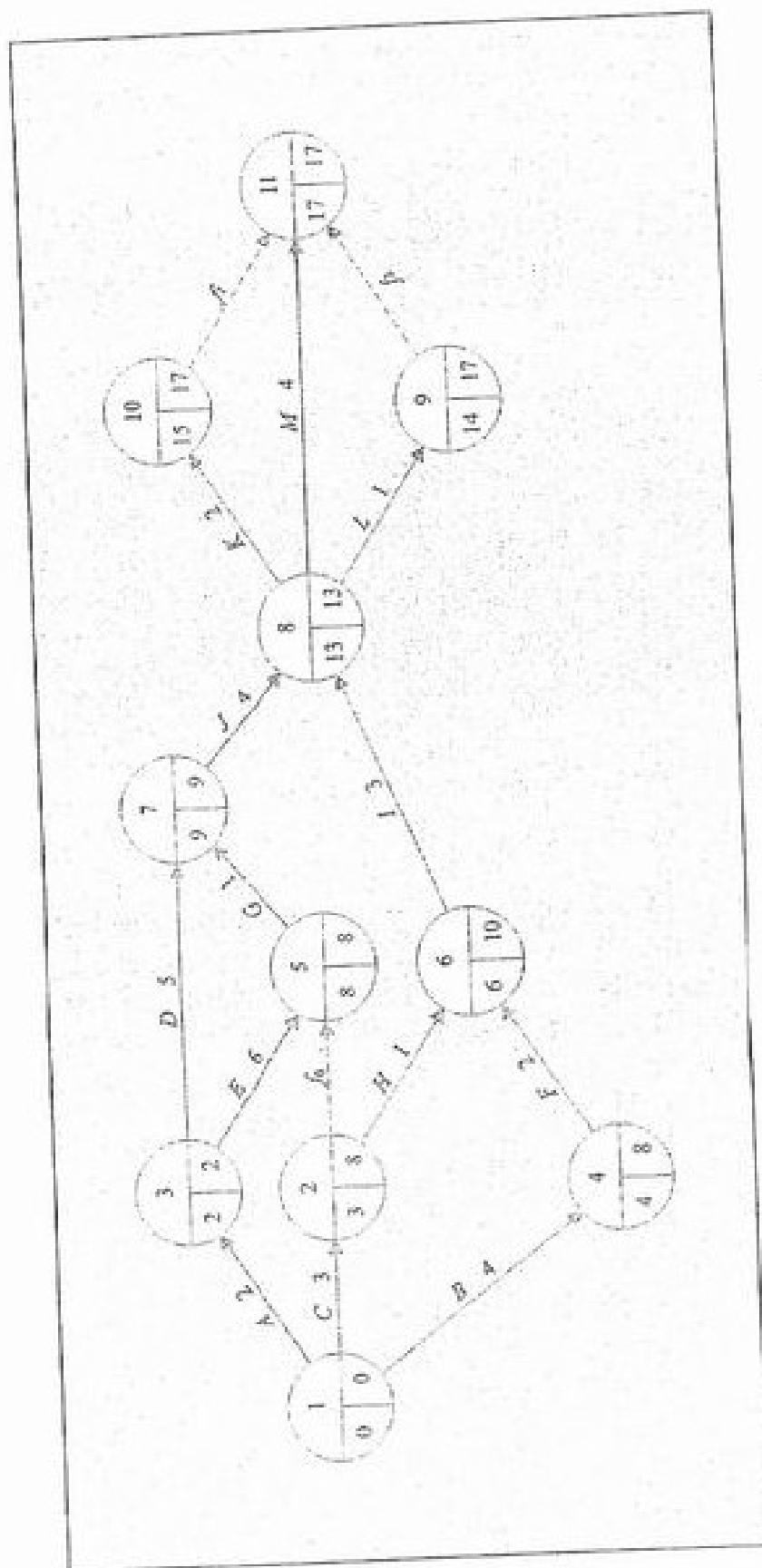


Figura 2.34.

cas se recogen en las tablas 2.13 y 2.14. El camino crítico está formado por las actividades A, D, E, G, J y M, cuyas holguras valen cero. La duración del camino crítico es de 17 u.t.

TABLA 2.13

Nudos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Oscilaciones	0	5	0	4	0	4	0	0	3	2	0

TABLA 2.14

Actividad	$i-j$	L_j	E_i	d_{ij}	$H_i = L_j - E_i - d_{ij}$	O_i	$H_L = H_i - O_i$	O_L	$H_i = H_L - O_L$
B	1-4	8	0	4	4	4	0	0	0
C	1-2	8	0	3	5	5	0	0	0
D	3-7	9	2	5	2	0	2	0	2
F	4-6	10	4	2	4	4	0	4	-4
H	2-6	10	3	1	6	4	2	5	-3
I	6-8	13	6	3	4	0	4	4	0
K	8-10	17	13	2	2	2	0	0	0
L	8-9	17	13	1	3	3	0	0	0

**Problema
29**

El método PERT

Un proyecto está formado por tres actividades: la actividad A, que dura 8 días, la B, que dura 15 días, y la C, que dura 4 días. La única restricción de precedencia es que las actividades A y B preceden a la C. Se desea representar el grafo PERT correspondiente, incluyendo los tiempos *early* y *last* de los nudos.

RESOLUCIÓN

La representación se ha realizado en la figura 2.35.

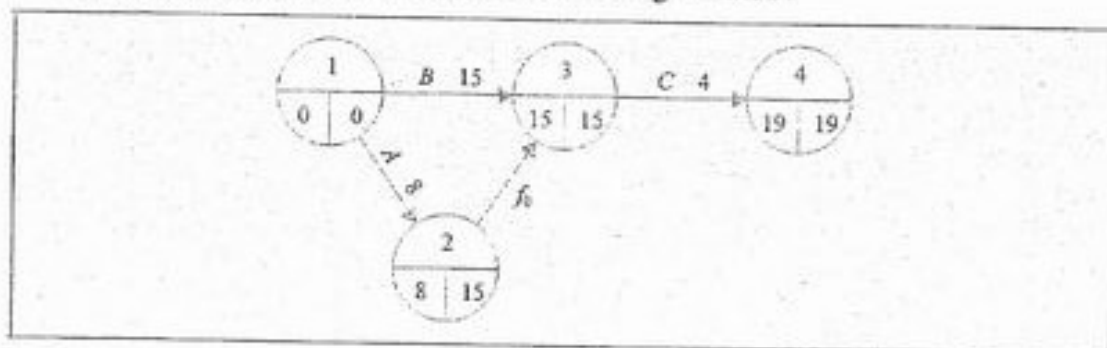


Figura 2.35.

Problema
30
El método PERT

En un grafo PERT sólo existen tres actividades reales y una ficticia. La actividad *A* parte del nudo 1 y termina en el 2. La actividad *B* parte del nudo 1 y termina en el 3. La actividad *C* parte del nudo 2 y termina en el 4. La actividad ficticia parte del nudo 3 y termina en el 4. ¿Es correcto?

RESOLUCIÓN

No es correcto. La actividad ficticia y el nudo 3 sobran. La actividad *B* puede ir directamente del primer nudo al último, que deberá ser el tercero.

Problema
31
El método PERT

Del antepenúltimo nudo de un grafo PERT parten dos actividades. El tiempo *last* del último nudo vale 53 y sobre la flecha que va directamente del antepenúltimo nudo al último figura una duración de 3. Del penúltimo nudo al último hay una flecha que representa una actividad ficticia. ¿Cuánto ha de valer el tiempo *last* del antepenúltimo nudo?

RESOLUCIÓN

El grafo parcial correspondiente ha de ser el de la figura 2.36, donde *a* denota antepenúltimo, *p* penúltimo y *u* último. Puesto que la actividad que va directamente de *a* a *u* ha de tener mayor duración que la que va de *a* a *p*, el tiempo *last* de *a* ha de ser 50.

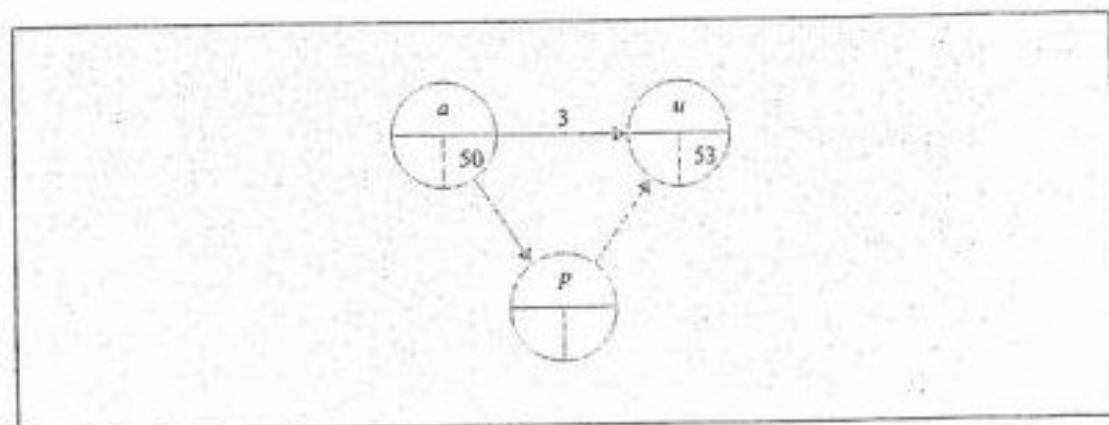


Figura 2.36.

**Problema
32**

El método PERT

La holgura total de la actividad que va del nudo i al j vale 20. La oscilación del nudo i vale 15 y la del nudo j vale 10. ¿Cuánto vale la holgura independiente de la actividad?

RESOLUCIÓN

La holgura independiente es el resultado de deducir, de la holgura total, las oscilaciones de los nudos de origen y de destino. Por consiguiente, la holgura independiente vale -5:

$$H_i = H_L - O_i = H_T - O_j - O_i = 20 - 15 - 10 = -5$$

**Problema
33**

El método PERT

En un grafo PERT, la flecha de una actividad parte de un nudo que tiene una oscilación de 3, y tiene su destino en un nudo que tiene una oscilación de 2. El tiempo *last* del nudo de destino es 44, el tiempo *early* del de origen es 20 y la actividad dura 10. ¿Cuánto vale su holgura independiente?

RESOLUCIÓN

La holgura total vale 14:

$$H_T = L_j - E_i - d_{ij} = 44 - 20 - 10 = 14$$

La holgura independiente es el resultado de deducir, de la holgura total, las oscilaciones de los nudos de origen y de destino. Por consiguiente, la holgura independiente vale 9:

$$H_i = H_L - O_i = H_T - O_j - O_i = 14 - 2 - 3 = 9$$

2.4. EL MÉTODO PERT EN INCERTIDUMBRE

Problema
34

El método PERT en incertidumbre

En la figura 2.37 se ha representado el grafo PERT correspondiente a un determinado proyecto.

Para poder estimar las duraciones esperadas de las actividades, se ha preguntado a un experto en cada actividad que señale cuál sería su duración en el mejor de los casos (tiempo optimista), así como su duración normal (tiempo más probable) y lo que duraría en el peor de los casos (tiempo pesimista), obteniéndose los datos de la tabla 2.15.

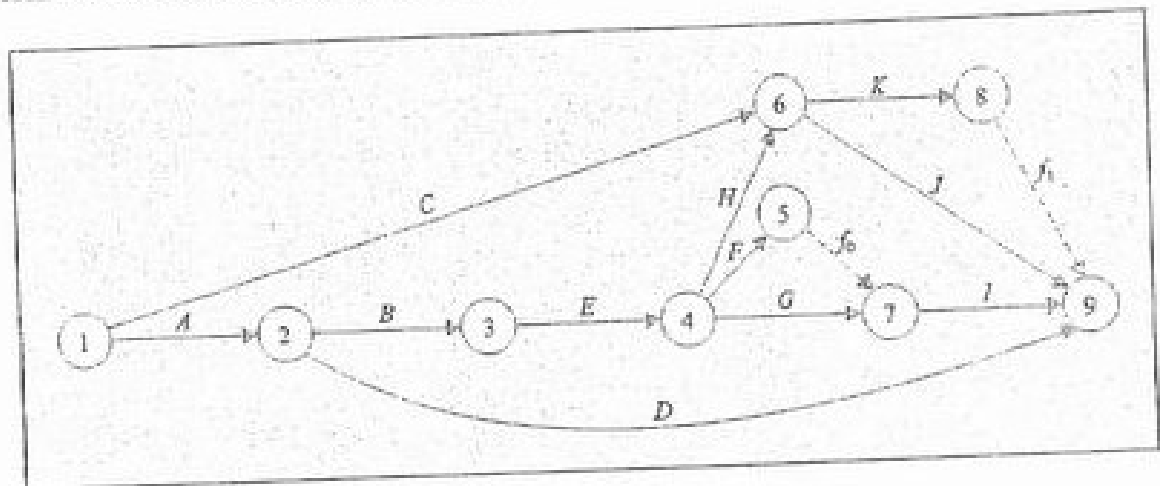


Figura 2.37.

TABLA 2.15

Actividades	Tiempos (u.t.)		
	Optimista	Más probable	Pesimista
A	4	5	6
B	8	9	16
C	12	14	16
D	16	30	32
E	17	19	27
F	7	8	9
G	14	15	16
H	19	26	27
I	3	4	5
J	17	19	27
K	4	6	8

Se desea:

- Determinar los tiempos PERT, o duraciones esperadas, de las actividades.
- Determinar los tiempos *early* y *last* esperados de los nudos.
- Especificar cuál es el camino crítico y su duración esperada.
- Determinar las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades en base a las duraciones esperadas de las mismas.

RESOLUCIÓN

a) Siendo t_0 el tiempo optimista de una actividad, t_m su tiempo más probable y t_p su tiempo pesimista, como duración esperada de esa actividad o tiempo PERT, se suele tomar la media aritmética ponderada:

$$\bar{d} = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6}$$

en la que al tiempo más probable se le asigna una ponderación cuatro veces mayor que al tiempo pesimista y al optimista*. Así, la duración esperada de la actividad A vale:

$$\frac{4 + 4 \cdot 5 + 6}{6} = 5 \text{ u.t.}$$

y el de la B es:

$$\frac{8 + 4 \cdot 9 + 16}{6} = 10 \text{ u.t.}$$

siendo el de la C:

$$\frac{12 + 4 \cdot 14 + 16}{6} = 14 \text{ u.t.}$$

De este modo se han calculado las duraciones esperadas de todas las actividades que, luego, se situaron sobre las flechas que las representan en el grafo de la figura 2.38.

b), c) y d) De la forma habitual, tomando como duraciones de las actividades los tiempos PERT, se han estimado los tiempos *early* y *last* situados en el grafo de la figura. El camino crítico es el formado por las actividades A, B, E, H y J, siendo su duración esperada de 80 u.t.

También, de la forma habitual, se han calculado las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades no críticas en las tablas 2.16 y 2.17.

* El supuesto general es que el tiempo que dura la actividad es una variable aleatoria que sigue cierta distribución beta acotada por sus tiempos pesimista y optimista.

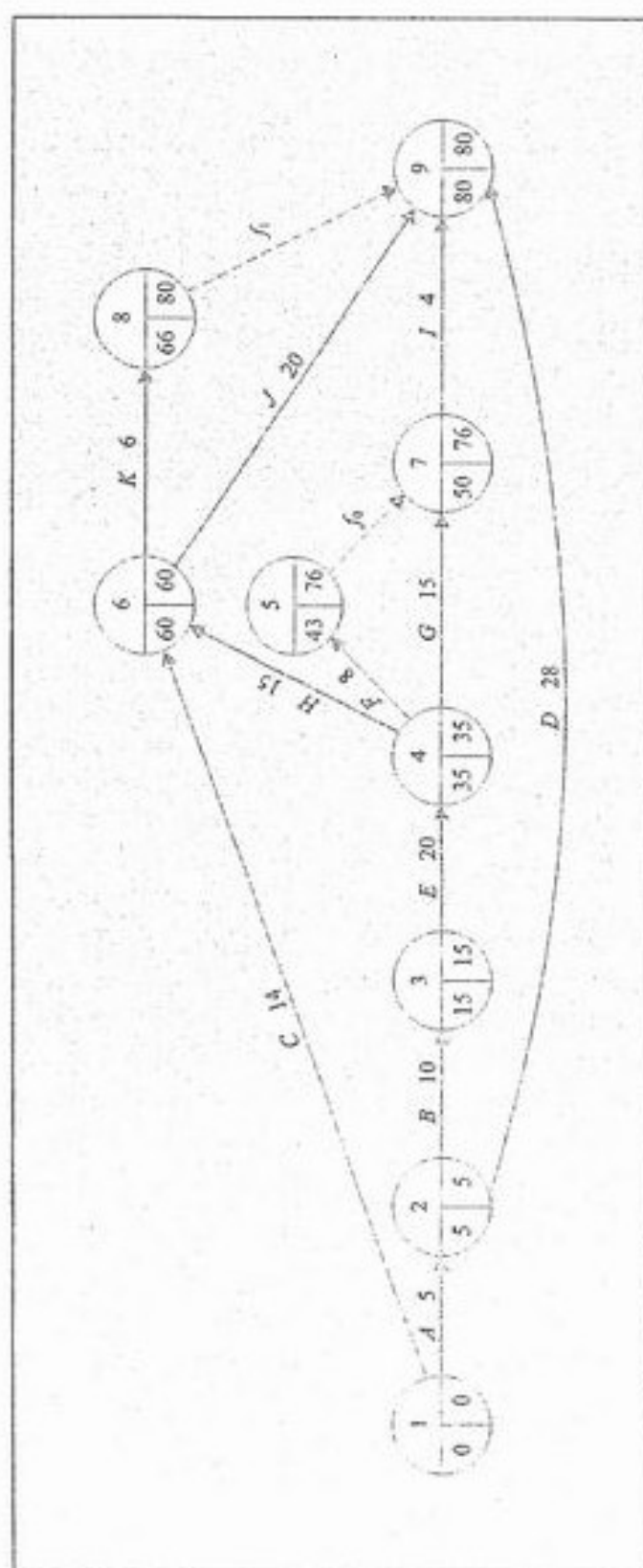


Figura 2.38.

TABLA 2.16

Nudos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Oscilaciones	0	0	0	0	33	0	26	14	0

TABLA 2.17

Actividad	i-j	L_j	E_i	d_{ij}	$H_T = L_j - E_i - d_{ij}$	O_j	$H_L = H_T - O_j$	O_i	$H_i = H_L - O_i$
C	1-6	60	0	14	46	0	46	0	46
F	4-5	76	35	8	33	33	0	0	0
G	4-5	76	35	15	26	26	0	0	0
I	7-9	80	50	4	26	0	26	26	0
K	6-8	80	60	6	14	14	0	0	0
D	2-9	80	5	28	47	0	47	0	47

**Problema
35**

El método PERT en incertidumbre

Se desea estimar las desviaciones típicas de las duraciones de las actividades del problema anterior, el valor esperado de la duración del proyecto, la varianza y la desviación típica de dicha duración y la probabilidad de que se tarde 83,0368 u.t., o más, en ejecutar el proyecto.

RESOLUCIÓN

Habitualmente, en la aplicación del método PERT en situación de incertidumbre se supone que la duración de cada actividad es una variable aleatoria que se ajusta a cierta distribución de probabilidad, perteneciente a la familia de las denominadas distribuciones «beta», cuya esperanza matemática es, según se señaló en el ejercicio anterior:

$$\bar{d} = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6}$$

y cuya varianza vale:

$$\sigma^2(d) = \frac{(t_p - t_0)^2}{36}$$

Los cálculos correspondientes a las actividades del presente caso se efectúan en la tabla 2.18.

La duración del proyecto será la del camino crítico, es decir, la suma de las duraciones de las actividades A, B, E, H y J. Por consiguiente, la duración esperada del proyecto será:

$$E(D) = 5 + 10 + 20 + 25 + 20 = 80 \text{ u.t.}$$

TABLA 2.18

Actividades	t_p	t_o	$t_p - t_o$	$\sigma_p^2 = (t_p - t_o)^2/36$	$\sigma_p = (t_p - t_o)/6$
A	6	4	2	0,1111	0,3333
B	16	8	8	1,7777	1,3333
C	16	12	4	0,4444	0,6666
D	32	16	16	7,1111	2,6666
E	27	17	10	2,7777	1,6666
F	9	7	2	0,1111	0,3333
G	16	14	2	0,1111	0,3333
H	27	19	8	1,7777	1,3333
I	5	3	2	0,1111	0,3333
J	27	17	10	2,7777	1,6666
K	8	4	4	0,4444	0,6666

y la varianza de la duración del proyecto será igual a la suma de las varianzas de las duraciones de las actividades del camino crítico:

$$\begin{aligned}\sigma^2(D) &= \sigma^2(d_A) + \sigma^2(d_B) + \sigma^2(d_E) + \sigma^2(d_H) + \sigma^2(d_J) = \\ &= 0,1111 + 1,7777 + 2,7777 + 1,7777 + 2,7777 = \\ &= 9,2222\end{aligned}$$

Por tanto, su desviación típica será:

$$\sigma(D) = 9,2222^{1/2} = 3,0368 \text{ u.t.}$$

Suponiendo que el número de actividades del camino crítico es suficientemente grande, y que sus duraciones son independientes, del teorema central del límite se deduce que la duración de dicho camino sigue una distribución normal de media 80 u.t. y desviación típica 3,0368. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}P(D \geq 83,0368) &= P(3,0368\xi + 80 \geq 83,0368) = \\ &= P\left(\xi \geq \frac{83,0368 - 80}{3,0368}\right) = P(x \geq 1)\end{aligned}$$

En las tablas se obtiene que:

$$\begin{aligned}P(\xi \geq 1) &= 0,5 - P(0 < \xi < 1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587 = \\ &= 15,87 \text{ por } 100\end{aligned}$$

La probabilidad de que el proyecto dure 83,0368 u.t. o más es del 15,87 por 100.

Problema
36
El método PERT en incertidumbre

El grupo editorial Edituned, G. E., va a constituir una nueva sociedad anónima que editará una enciclopedia realizada por diversos expertos en distintos campos del saber. En la tabla 2.19 se recoge la relación de actividades necesarias y los tiempos optimista, más probable y pesimista de cada una de ellas.

A medida que se constituye la sociedad, pueden irse seleccionando los expertos, pero para contratarlos la sociedad ha de estar constituida. Una vez que se han tenido las relaciones previas con los expertos, que son posteriores a su contratación, éstos han de colaborar en la selección de los términos y en la simultánea de las fotografías e ilustraciones, tras lo cual comienzan a elaborar sus colaboraciones. La publicidad de la enciclopedia comienza tras la encuadernación de la misma.

Se desea:

- Representar el grafo PERT de este proyecto y determinar las duraciones esperadas de las actividades que lo integran.
- Determinar los tiempos *early* y *last* de los distintos nudos, así como el camino crítico y su duración.

TABLA 2.19

Actividades	Tiempos (u.t.)		
	Optimista	Más probable	Pesimista
A. Constitución de la sociedad	2	4	6
B. Selección de los términos que incluirá la enciclopedia	12	13	14
C. Selección de expertos en los distintos temas	4	5	12
D. Contratación de los expertos	0,5	1	1,5
E. Publicidad de la enciclopedia	2	3	4
F. Selección de fotos e ilustraciones	8	9	16
G. Reuniones previas con los expertos	1	2	3
H. Elaboración de las colaboraciones por los expertos	15	16	29
I. Impresión de las pruebas de la enciclopedia	3	4	5
J. Corrección de pruebas	1	2	3
K. Impresión definitiva de la enciclopedia	2	3	4
L. Encuadernación	0,5	1	1,5
M. Distribución a librerías	0,5	1	1,5

- c) Determinar las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades.
- d) Saber cuál es el plazo de ejecución en el que los directivos de la nueva sociedad anónima pueden comprometerse con los directores del grupo editorial, de modo que la probabilidad de incumplimiento supere el 10,2 por 100.

RESOLUCIÓN

a) y b) Según se deduce del planteamiento del problema, el cuadro de precedencias ha de ser el de la tabla 2.20.

TABLA 2.20

Actividades	Actividades precedentes
A	—
B	G
C	—
D	A, C
E	L
F	G
G	D
H	B, F
I	H
J	I
K	J
L	K
M	L

A partir del cuadro de precedencias se ha elaborado el grafo PERT de la figura 2.39 en el que se han incorporado las duraciones esperadas de las actividades y los consecuentes tiempos *early* y *last* de los nudos. El camino crítico está formado por las actividades C, D, G, B, H, I, J, K, L y E, y su duración esperada es de 53 u.t.

c) Los únicos nudos cuyas oscilaciones son distintas de cero son el 2, cuya oscilación es de 2 u.t., y el 6, que tiene una oscilación de 3 u.t.

Las holguras de las actividades críticas valen cero. Las de las otras actividades se calculan en la tabla 2.21.

d) La duración esperada del proyecto será la del camino crítico, es decir, 53 u.t. Para calcular la desviación típica de la duración del camino crítico, han de calcularse las varianzas de las duraciones de las actividades que lo integran, lo cual se ha efectuado en la tabla 2.22.

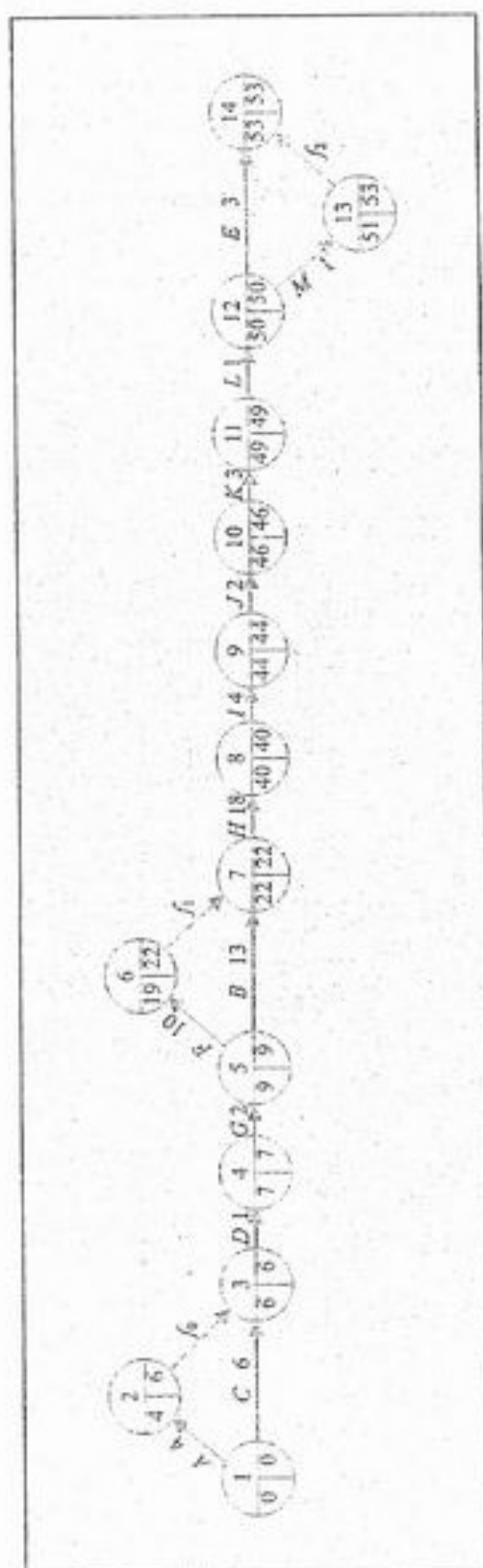


Figura 2.39.

TABLA 2.21

Actividad	$i-j$	L_j	E_i	d_{ij}	H_i	O_j	H_j	O_i	H_i
A	1-2	6	0	4	2	2	0	0	0
F	5-6	22	9	10	3	3	0	0	0
M	12-13	53	50	1	2	2	0	0	0

TABLA 2.22

Actividades	t_j	t_i	$(t_j - t_i)$	$(t_j - t_i)^2/36$
C	12	4	8	1,7777
D	1,5	0,5	1	0,0277
G	3	1	2	0,1111
B	14	12	2	0,1111
H	29	15	14	5,4444
J	5	3	2	0,1111
J	3	1	2	0,1111
K	4	2	2	0,1111
L	1,5	0,5	1	0,0277
E	4	2	2	0,1111
$\sigma(D)$				7,9444

La desviación típica de D vale:

$$\sigma(D) = 7,9444^{1/2} = 2,8186$$

Se desea limitar al 10,2 por 100 la probabilidad de que D sea mayor que cierta cantidad h , es decir:

$$P(D > h) = 0,102$$

o, lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} P(2,8186\xi + 53 > h) &= 0,102 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(\xi > \frac{h-53}{2,8186}\right) &= 0,102 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,5 - P\left(0 \leq \xi \leq \frac{h-53}{2,8186}\right) &= 0,102 \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(0 \leq \xi \leq \frac{h-53}{2,8186}\right) &= 0,398 \end{aligned}$$

En las tablas de la distribución normal tipificada se observa que:

$$P(\xi \leq 1,27) = 0,398$$

Por tanto:

$$\frac{h - 53}{2,8186} = 1,27 \Rightarrow h = 56,55 \text{ u.t.}$$

Comprometiéndose a realizar el proyecto en un tiempo no inferior a 56,55 u.t., los directivos de la nueva sociedad anónima limitan la probabilidad de incumplimiento al 10,2 por 100.

**Problema
37**

El método PERT en Incertidumbre

Una vez determinado el camino crítico de un proyecto, resulta estar formado por 100 actividades, de las cuales:

- 20 actividades tienen una duración optimista de 4 días, un tiempo más probable de 6 días y un tiempo pesimista de 7 días.
- 80 actividades tienen una duración optimista de 15 días, un tiempo más probable de 18 días y un tiempo pesimista de 20 días.

Suponiendo que es aplicable el Teorema Central del Límite, la probabilidad de terminar el proyecto en menos de 1.550 días es igual a la probabilidad de que la variable normal con esperanza matemática igual a 0 y desviación típica igual a 1 sea mayor que ¿cuánto?

RESOLUCIÓN

En cuanto a las primeras 20 actividades:

$$\bar{d} = \frac{4 + 4 \cdot 6 + 7}{5} = 5,83333 \text{ días} ; \sigma^2(d) = \frac{(7 - 4)^2}{36} = 0,25 \text{ días}^2$$

En cuanto a las 80 últimas actividades:

$$\bar{d} = \frac{15 + 4 \cdot 18 + 20}{6} = 17,83333 \text{ días} ; \sigma^2(d) = \frac{(20 - 15)^2}{36} = 0,69444 \text{ días}^2$$

Por consiguiente, la duración esperada del proyecto es:

$$E(D) = 20 \cdot 5,83333 + 80 \cdot 17,83333 = 1.543,33 \text{ días}$$

con una varianza igual a:

$$\sigma^2(D) = 20 \cdot 0,25 + 80 \cdot 0,69444 = 60,5556 \text{ días}^2$$

y una desviación típica que vale:

$$\sigma(D) = 60,5556^{1/2} = 7,7817 \text{ días}$$

Por tanto:

$$P(DP < 1.550) = P(\xi \cdot 7,7817 + 1.543,33 < 1.550) = P(\xi < 0,86)$$

Dado que la campana de Gauss es simétrica en torno a 0, la probabilidad de que la variable $N(0, 1)$ sea inferior a 0,86 es igual a la probabilidad de que sea mayor que -0,86. Por consiguiente, la solución del problema es -0,86.

PARTE SEGUNDA

Finanzas

3

Introducción a las decisiones financieras

3.1. EL BALANCE: CONCEPTOS BÁSICOS

Problema

1

Concepto, el activo y las deudas

La empresa Bruned, S. A., dispone de un terreno valorado en 100 millones de u.m., un edificio que importa 50 millones de u.m., maquinaria valorada en 25 millones y elementos de transporte (fundamentalmente camiones) por un monto total de 12 millones. Además, su inventario de materias primas, productos semielaborados y productos terminados totaliza 30 millones, tiene una cuenta corriente bancaria con un saldo de 400.000 u.m. y 600.000 u.m. en caja, y sus clientes le deben 2 millones. ¿Cuánto vale su activo?

RESOLUCIÓN

El activo está formado por el conjunto de bienes y derechos que tiene la empresa. En el caso de Bruned, S. A., vale 220 millones de u.m.:

$$A = 100 + 50 + 25 + 12 + 30 + 0,4 + 0,6 + 2 = 220 \text{ millones u.m.}$$

Problema

2

Concepto, el activo y las deudas

La empresa Bruned, S. A., a la que se refiere el problema anterior, debe la cuarta parte del terreno y la mitad del edificio. Estas deudas vencen dentro de 5 años. Además, para la adquisición de la maquinaria obtuvo un crédito a lar-

go plazo que importa 12 millones y que tendrá que pagar dentro de 4 años. Por último, tiene un crédito bancario a corto plazo de 700.000 u.m. y debe a sus proveedores 300.000 u.m. ¿Cuánto importan sus recursos ajenos?

RESOLUCIÓN

Se denomina «recursos ajenos» a las deudas que tiene la empresa. En este caso, importan 63 millones:

$$25 + 25 + 12 + 0,7 + 0,3 = 63 \text{ millones u.m.}$$

Problema
3

El patrimonio, el pasivo y los recursos propios

¿Cuánto vale el patrimonio de la empresa de los problemas anteriores? Compruebe el cumplimiento de la ecuación del patrimonio.

RESOLUCIÓN

El valor del patrimonio se determina por diferencia entre el activo y los recursos ajenos. Por ello, también se le denomina «patrimonio neto» o «neto patrimonial».

Se denomina «pasivo» en sentido restringido a las deudas. De ahí la denominada «ecuación del patrimonio», que es la siguiente:

$$\text{Activo} = \text{Pasivo} + \text{Neto}$$

En sentido amplio, se denomina «pasivo» al conjunto de las fuentes de financiación del activo.

En este caso, la empresa tiene bienes y derechos valorados en 220 millones de u.m., pero, como debe 63, su patrimonio vale 157 millones de u.m.:

$$220 - 63 = 157 \text{ millones u.m.}$$

En el caso de esta empresa, se comprueba el cumplimiento de la ecuación del patrimonio:

$$220 = 63 + 157$$

**Problema
4**

El patrimonio, el pasivo y los recursos propios

¿Cuál es la composición del pasivo, en sentido amplio, de la empresa Bruned, S. A., a la que se refieren los problemas anteriores?

RESOLUCIÓN

Esta empresa tiene un activo de 220 millones de u.m., de los que ha financiado con recursos ajenos 63 millones. Por consiguiente, la diferencia la ha financiado con recursos propios. La composición del pasivo de esta empresa será:

Recursos ajenos	63.000.000
Recursos propios	157.000.000

**Problema
5**

El estado de inventario

Presente el estado de inventario de la empresa Bruned.

El estado de inventario es un documento en el que se detallan los componentes del activo y del pasivo con indicación de sus respectivos valores.

El convenio generalmente admitido es situar el activo a la izquierda y el pasivo a la derecha.

Obviamente, el activo total ha de coincidir con el pasivo total: lo que vale el conjunto de activos ha de coincidir con el valor de las fuentes de su financiación.

RESOLUCIÓN

En el caso de nuestra empresa, será el siguiente (en millones):

Activo		Pasivo	
Terrenos	100	Recursos ajenos	63
Edificio	50	Recursos propios	157
Maquinaria	25		
Elementos de transporte	12		
Existencias	30		
Bancos	0,4		
Caja	0,6		
Clientes	2		
Total activo	220	Total pasivo	220

Problema

6

El balance anual

Interprete el balance al 31 de diciembre del pasado año de la empresa Descan, S. A., que es el siguiente:

Activo		Pasivo	
Caja, pesetas	100.000	Capital social	5.000.000
Bancos	400.000	Reservas	5.000.000
Construcciones	7.000.000	Deudas a largo plazo	5.000.000
Terrenos	3.000.000	Proveedores	1.000.000
Clientes	400.000		
Mercaderías	5.000.000		
Total activo	16.000.000	Total pasivo	16.000.000

A la vista de este balance, se deduce que en ese día, en cuanto al activo, en la caja de Descan, S. A., hay 100.000 u.m. en billetes y monedas, tiene 400.000 u.m. en cuentas corrientes, tiene edificios y otras construcciones por un importe igual a 7.000.000 de u.m., sus terrenos importan 3.000.000, los clientes le deben 500.000 u.m. y en los almacenes tienen inventariadas mercaderías que importan 5.000.000 de u.m. En cuanto al pasivo, se observa que el capital social (aportaciones de los propietarios de la empresa a su financiación) totaliza 5 millones, que ha constituido unas reservas de otros 5 millones mediante la retención de beneficios, que tiene unas deudas a largo plazo de 5.000.000 y que debe a sus proveedores 1.000.000 de u.m.

Problema

7

Los recursos propios

¿Cuál es el importe de los recursos propios de la empresa del problema anterior?

RESOLUCIÓN

En la mayor parte de las empresas, las principales fuentes de recursos propios son el capital social y las reservas.

El capital social se encuentra formado por las aportaciones directas de los socios a la financiación de la empresa.

Si, en un año concreto, una empresa tiene pérdidas, su importe se recoge en el activo. Si obtiene beneficios, hasta el momento de su reparto o asignación se sitúan en el pasivo. En ocasiones, no todo el beneficio se reparte a los socios en forma de dividendos, sino que parte del mismo o su totalidad se retiene en la empresa para financiar activos. En tal caso, evidentemente, el importe retenido se recogerá en el pasivo como tal fuente de financiación y, concretamente, bajo la rúbrica de «reservas». También es evidente que las reservas constituyen recursos propios, pues no son deudas.

Por consiguiente, esta empresa tiene dos partidas de recursos propios: el capital social y las reservas, que totalizan 10 millones de u.m.

$$5.000.000 + 5.000.000 = 10.000.000 \text{ de u.m.}$$

3.2. FACTORES DE LOS QUE DEPENDE EL PRECIO DE LA ACCIÓN. LAS DECISIONES FINANCIERAS DE LA EMPRESA

Problema 8

Beneficio y rentabilidad

Una empresa denominada Bri, S. A., tiene un capital social de 2.000 millones de u.m. dividido en un millón de acciones, y ha obtenido un beneficio de 4.000 millones. ¿Cuáles han sido sus beneficios por acción y por cada u.m. de capital social? ¿Qué beneficio le corresponde a quien tiene 10 acciones?

RESOLUCIÓN

Si el beneficio ha sido de 4.000 millones y tiene un millón de acciones, corresponden 4.000 u.m. por acción:

$$\frac{4.000.000.000 \text{ u.m.}}{1.000.000 \text{ acciones}} = 4.000 \text{ u.m./acción}$$

Al repartir 4.000 millones de beneficio entre 2.000 millones de capital propio, se obtienen 2 u.m. por cada u.m. de capital:

$$\frac{4.000.000.000 \text{ u.m.}}{2.000.000.000 \text{ u.m.}} = 2$$

A quien tiene 10 acciones le corresponden 40.000 u.m. de beneficio:

$$4.000 \text{ u.m./acción} \times 10 \text{ acciones} = 40.000 \text{ u.m.}$$

Problema
9

Beneficio y rentabilidad

La empresa Bri, S. A., a la que se refiere el problema anterior, emitió otro millón de acciones e invirtió los fondos obtenidos (2.000 millones) en activos que produjeron un beneficio de 2.000 millones. ¿Cuáles son los efectos de esta operación sobre el beneficio total, sobre el beneficio por acción y sobre el beneficio del propietario de 10 acciones? ¿Qué efecto tendrá esta medida sobre el precio de las acciones de la empresa?

RESOLUCIÓN

El beneficio total sería de 6.000 millones (los 4.000 que generaban las antiguas inversiones y los 2.000 millones que producen las nuevas), pero el beneficio por acción sería sólo de 3.000 u.m., pues ahora hay que repartirlo entre dos millones de acciones (el millón de acciones que ya tenía más el nuevo millón de acciones emitidas):

$$\frac{6.000.000.000 \text{ u.m.}}{2.000.000 \text{ u.m.}} = 3.000 \text{ u.m./acción}$$

Dicho de otro modo, el beneficio por cada u.m. de capital sería de 1,5 u.m., pues ahora hay que repartir el beneficio total entre 4.000 millones de capital propio. A quien tuviera 10 acciones le correspondería un beneficio de 30.000 u.m.:

$$\frac{6.000.000.000 \text{ u.m.}}{4.000.000.000 \text{ u.m.}} = 1,5$$

$$3.000 \text{ u.m./acción} \times 10 \text{ acciones} = 30.000 \text{ u.m.}$$

Evidentemente, la medida de emitir esas acciones para invertir en esos activos produciría una reducción del precio de las acciones, aunque el beneficio total de la empresa haya sido más elevado.

Por ello, son más importantes el beneficio por acción y la rentabilidad (beneficio obtenido cada período por cada u.m. invertida) que el beneficio total.

3.3. LA MEDIDA DE LA RENTABILIDAD

**Problema
10**

La medida de la rentabilidad

Unedrentec, S. A., es una empresa que cuenta con un activo, formado por inmuebles, bienes inventariados de distinto tipo, créditos sobre sus clientes, dinero en caja y en bancos, etc., que totaliza 100 millones de u.m. Utilizando este activo, ha obtenido, en el pasado año, un beneficio de 20 millones de u.m. Se desea saber:

- La rentabilidad económica, u operativa, de esta empresa.
- Su rentabilidad financiera, suponiendo que sólo se financia con capital propio.
- Su rentabilidad financiera suponiendo que su activo se financia al 50 por 100 con capital propio y al 50 por 100 con capital ajeno, que este último tiene un tipo de interés del 10 por 100 anual, y que, de los 20 millones de u.m., no se han deducido, todavía, los intereses de las deudas.

RESOLUCIÓN

a) La rentabilidad, al igual que la productividad, mide la relación entre los resultados obtenidos y los medios aplicados para alcanzarlos. La diferencia entre una y otra medida es que la productividad hace referencia a resultados y medios técnicos (producción y recursos físicos), en tanto que la rentabilidad se refiere a resultados y recursos financieros (beneficios y capitales invertidos, por ejemplo).

La rentabilidad económica es la generada por los activos de la empresa independientemente de los medios de su financiación. Así, en este caso, se han invertido 100 millones de u.m. y se han generado 20 millones de beneficio. Por consiguiente, la rentabilidad económica, o rentabilidad operativa, ha sido del 20 por 100:

$$RE = \frac{BE}{A} = \frac{20.000.000}{100.000.000} = 0,20 = 20 \text{ por } 100$$

donde:

BE: Beneficio, o resultado, operativo, económico o bruto; es decir, el beneficio generado por los activos de la empresa.

A: Activo de la empresa = Capitales propios y ajenos aplicados a su financiación.

b) La rentabilidad *financiera* de la empresa es la obtenida por sus propietarios. A éstos les corresponde, al margen de la consideración de los impuestos, un beneficio igual a la diferencia entre el generado por los activos de la empresa y los intereses de sus deudas. Pero, obviamente, en una empresa sin deudas todo el capital y todo el resultado económico pertenecen a los propietarios y, por consiguiente, la rentabilidad financiera y la económica coinciden. Por tanto, en tal caso,

$$RF = RE = 0,20 = 20 \text{ por } 100$$

c) Si la empresa tiene un activo de 100 millones de u.m. que se encuentra financiado en un 50 por 100 por capital propio y en el otro 50 por 100 por deudas, estas últimas importarán 50 millones de u.m. Si, además, el tipo de interés de estas deudas es el 10 por 100 anual, habrá de pagar a sus acreedores, cada año,

$$F = 50.000.000 \cdot 0,10 = 5.000.000 \text{ u.m.}$$

El beneficio neto, *BN*, que restará para los propietarios, será igual a la diferencia entre el beneficio económico generado por los activos de la empresa y los intereses de sus deudas, *F*. En este caso:

$$BNP = BE - F = 20.000.000 - 5.000.000 = 15.000.000 \text{ u.m.}$$

Los propietarios de la empresa financian el 50 por 100 de sus activos, que importan 100 millones de u.m. Por tanto, la inversión de los dueños, o capital propio de la empresa, *K*, es de 50 millones de u.m., y su rentabilidad (rentabilidad financiera, *RF*) vale:

$$RF = \frac{BN}{K} = \frac{15.000.000}{50.000.000} = 0,3 = 30 \text{ por } 100$$

La rentabilidad financiera de esta empresa, o rentabilidad de los capitales invertidos por los propietarios de la misma, es del 30 por 100.

Problema

11

La medida de la rentabilidad

Rentificuned, S. A., se formó hace un año. Su propietario aportó 250 millones de u.m. de capital propio, y se endeudó en 750 millones de u.m., para adquirir, por 1.000 millones de u.m., los activos necesarios para producir un

nuevo tipo de máquina mecanográfica que atiende al dictado de la voz humana. Durante el primer año ha fabricado y vendido 200.000 aparatos, cada uno de los cuales se vendió por 1.000 u.m. y requirió un coste unitario total, excluidos los costes financieros, de 50 u.m. El tipo de interés de las deudas es del 12 por 100 anual. Se desea conocer la rentabilidad económica y la rentabilidad financiera de esta empresa.

RESOLUCIÓN

Los ingresos de esta empresa serán el producto entre sus unidades físicas vendidas y su precio de venta; es decir:

$$I = 200.000 \cdot 1.000 = 200.000.000 \text{ u.m.}$$

Por otra parte, multiplicando el coste unitario total no financiero por el número de unidades vendidas se obtiene:

$$C = 200.000 \cdot 50 = 10.000.000 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, el beneficio económico de esta empresa fue:

$$BE = 200.000.000 - 10.000.000 = 190.000.000 \text{ u.m.}$$

Dividiendo este beneficio operativo entre el valor del activo, se obtiene la rentabilidad económica, o rentabilidad operativa:

$$RE = \frac{BE}{K} = \frac{190.000.000}{1.000.000.000} = 0,19 = 19 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

El beneficio neto anual de esta empresa es igual a:

$$BN = BE - F = 190.000.000 - 0,12 \cdot 750.000.000 = 100.000.000 \text{ u.m.}$$

Dado que el propietario de esta empresa aportó 250 millones de u.m., su rentabilidad (rentabilidad financiera de la empresa) ha sido, durante el primer año, del 40 por 100:

$$RF = \frac{BN}{K} = \frac{100.000.000}{250.000.000} = 0,4 = 40 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Problema
12

La medida de la rentabilidad

Redivunedsa es una empresa dedicada a la construcción y explotación turística de apartamentos en Urano. De su balance y cuenta de resultados se deduce que su financiación total, que es de 100 millones de u.m., se encuentra formada por un 60 por 100 de capitales propios, integrados por 60.000 acciones, y por un 40 por 100 de fondos ajenos, a los que paga un interés del 14 por 100. Este año, sus activos han generado un beneficio de 25 millones de u.m. y, tras reservar el importe correspondiente para pagar el impuesto sobre la renta de las sociedades, que tiene un tipo del 35 por 100, ha abonado el 70 por 100 del resto en forma de dividendos, reteniendo el 30 por 100 restante para autofinanciación. Se desea saber la rentabilidad financiera de esta empresa y la rentabilidad bursátil por dividendos obtenida por un accionista de la misma que ha adquirido en bolsa acciones con una cotización de 950 u.m. cada una.

RESOLUCIÓN

Según se expuso en los problemas anteriores, el beneficio económico de esta empresa es:

$$BE = 25.000.000 \text{ u.m.}$$

Dado que sus fondos financieros totales valen 100 millones de u.m., y que el 40 por 100 de ellos están constituidos por financiación ajena, ésta valdrá 40 millones de u.m. y, puesto que su interés es del 14 por 100, cada año habrá de pagar a sus acreedores unas cargas financieras iguales a:

$$F = 40.000.000 \cdot 0,14 = 5.600.000 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, su beneficio neto importa 19.400.000 u.m.:

$$BN = BE - F = 25.000.000 - 5.600.000 = 19.400.000 \text{ u.m.}$$

Dado que ha de pagar el 35 por 100 en forma de impuestos, estos últimos importarán 6.790.000 u.m.:

$$T = 19.400.000 \cdot 0,35 = 6.790.000 \text{ u.m.}$$

y el beneficio neto líquido, después de descontar los impuestos, valdrá:

$$BL = 19.400.000 - 6.790.000 = 12.610.000 \text{ u.m.}$$

Introducción a las decisiones financieras

El capital aportado por los accionistas, K , es el 60 por 100 de los 100 millones de u.m. que constituyen la financiación total. Es decir:

$$K = 100.000.000 \cdot 0,60 = 60.000.000 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, la rentabilidad financiera de la empresa antes de descontar los impuestos será:

$$RF_A = \frac{BN}{K} = \frac{19.400.000}{60.000.000} = 0,3233 = 32,33 \text{ por } 100$$

Pero, después de descontar el impuesto sobre los beneficios de la empresa, la rentabilidad financiera líquida de los accionistas es:

$$RF_D = \frac{BL}{K} = \frac{12.610.000}{60.000.000} = 0,2102 = 21,02 \text{ por } 100$$

Como puede comprobarse, siendo t el tipo de gravamen en el impuesto sobre la renta de las sociedades,

$$RF_D = \frac{BL}{K} = \frac{BN - BN \cdot t}{K} = \frac{BN}{K} (1 - t) = RF_A (1 - t)$$

Dado que esta empresa abona el 70 por 100 del beneficio líquido en forma de dividendos (tiene un coeficiente de reparto, b , igual a 0,70), éstos valdrán en su conjunto:

$$D = BL \cdot b = 12.610.000 \cdot 0,70 = 8.827.000 \text{ u.m.}$$

Por tanto, siendo N el número de acciones de la empresa, a cada acción le corresponderá un dividendo igual a:

$$d = \frac{D}{N} = \frac{8.827.000}{60.000} = 147,12 \text{ u.m.}$$

Dado que la cotización, P , de cada acción es de 950 u.m., la rentabilidad bursátil por dividendos, RB_D , es del 15,49 por 100:

$$RB_D = \frac{d}{P} = \frac{147,12}{950} = 0,1549 = 15,49 \text{ por } 100$$

Obviamente, esta rentabilidad también puede calcularse por cociente entre el dividendo total ($D = d \cdot N$) y el valor total de las 60.000 acciones ($P \cdot N$):

$$RB_D = \frac{D}{P \cdot N} = \frac{8.827.000}{950 \cdot 60.000} = 0,1549 = 15,49 \text{ por } 100$$

Al valor en la bolsa de todas las acciones de la empresa, $P \cdot N$, se le denomina *capitalización bursátil* de la misma.

**Problema
13**

La medida de la rentabilidad

Hace un año se constituyó la empresa Piscunedsa, dedicada a la cría de moluscos en piscifactorías. Todos sus fondos financieros fueron aportados por su propietario, quien entregó 50 millones de u.m. Las ventas de la empresa en el ejercicio que ahora termina han alcanzado los 10 millones de u.m., que, una vez deducidos los costes, representan un beneficio de 7 millones de u.m., de los cuales se ha retenido el 35 por 100 para pagar el impuesto sobre la renta de las sociedades y, del beneficio líquido restante, el propietario se ha llevado un 10 por 100 como dividendos. Se desea saber:

- La rentabilidad económica y la rentabilidad financiera de esta empresa.
- Su rentabilidad en ventas y la rotación del capital propio.
- La rentabilidad por dividendos obtenida por el propietario.

RESOLUCIÓN

- a) En este caso:

$$BE = 7.000.000 \text{ u.m.}$$

$$A = 50.000.000 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, la rentabilidad económica fue del 14 por 100:

$$RE = \frac{BE}{A} = \frac{7.000.000}{50.000.000} = 0,14 = 14 \text{ por } 100$$

En cuanto a la rentabilidad financiera, antes de deducir los impuestos, coin-

cidirá con la rentabilidad económica, pues esta empresa no tiene deudas y, por consiguiente, los costes financieros de intereses son nulos ($F = 0$) y, además, el activo está financiado íntegramente con capital propio ($A = K$):

$$RF_A = \frac{BN}{K} = \frac{BE - F}{K} = \frac{BE}{A} = RE = 0,14 = 14 \text{ por } 100$$

Después de impuestos, la rentabilidad financiera vale, según se expuso en la resolución del problema anterior:

$$RF_D = \frac{BL}{K} = \frac{BN - BN \cdot t}{K} = \frac{BN}{K} (1 - t) = RF_A (1 - t) = \\ = 0,14(1 - 0,35) = 0,0910 = 9,10 \text{ por } 100$$

b) La rentabilidad de las ventas, RV , es la proporción que el beneficio representa en relación a las mismas; es decir:

$$RV = \frac{BE}{V.}$$

donde V es el volumen de ventas medido en unidades monetarias. En este caso:

$$RV = \frac{7.000.000}{10.000.000} = 0,70 = 70 \text{ por } 100$$

El beneficio es el 70 por 100 del volumen de ventas. El 30 por 100 restante constituye la recuperación de los costes.

La rotación del capital es el número de veces que éste se encuentra comprendido en las ventas. En este caso, la rotación del capital propio será:

$$r_k = \frac{V}{K} = \frac{10.000.000}{50.000.000} = \frac{1}{5} = 0,20 = 20 \text{ por } 100$$

El pasado año rotó un quinto del capital propio.

c) El dividendo abonado por la empresa es el 10 por 100 del beneficio líquido ($b = 0,10$). En este caso, en el que no hay deudas, el beneficio neto y el económico coinciden y, por consiguiente:

$$D = BL \cdot b = BL \cdot 0,10 = BN(1 - 0,35)0,10 = BE(1 - 0,35)0,10 = \\ = 7.000.000(1 - 0,35)0,10 = 455.000 \text{ u.m.}$$

Dado que el propietario invirtió 50 millones, la rentabilidad por dividendos que ha obtenido, en el año que finaliza, es del 0,91 por 100:

$$R_D = \frac{D}{K} = \frac{455.000}{50.000.000} = 0,0091 = 0,91 \text{ por } 100$$

Problema
14

La medida de la rentabilidad

Guismeluned es una empresa constituida hace varios años para la explotación de una nueva fórmula genética que permite la producción intensiva de guisantes gigantes. El pasado año, con un activo de 200 millones de u.m., financiado en un 70 por 100 por capitales propios y en un 30 por 100 por capitales ajenos, consiguió un volumen de producción y ventas de 100 millones de u.m. de guisantes, lo que le reportó un beneficio, antes de deducir las cargas financieras, de 80 millones de u.m., que dedicó a pagar los intereses de la financiación ajena, que son del 12 por 100, a pagar el impuesto sobre el beneficio neto, que tiene un tipo de gravamen del 35 por 100, a repartir dividendos aplicando un coeficiente de reparto del 50 por 100 de los beneficios líquidos y a autofinanciación. Se desea conocer:

- La rentabilidad económica, o rentabilidad operativa, de esta empresa.
- Su rentabilidad en ventas y la rotación de su capital total, en términos de beneficio bruto.
- Su rentabilidad financiera.
- Su rentabilidad bursátil por dividendos sabiendo que tiene 140.000 acciones, cada una de las cuales cotiza en bolsa a 900 u.m.

RESOLUCIÓN

- a) En este caso:

$$BE = 80.000.000 \text{ u.m.}$$

$$A = 200.000.000 \text{ u.m.}$$

$$RE = \frac{BE}{A} = \frac{80.000.000}{200.000.000} = 0,40 = 40 \text{ por } 100$$

- b) La rentabilidad de las ventas es el cociente entre el beneficio obtenido con las mismas y el volumen de ventas medido en unidades monetarias, V :

$$RV = \frac{BE}{V} = \frac{80.000.000}{100.000.000} = 0,80 = 80 \text{ por } 100$$

La rotación del capital es el número de veces que el mismo se encuentra comprendido en las ventas. Dado que el capital total (pasivo del balance) ha de valer lo mismo que el activo total, A , la rotación de los capitales valdrá:

$$r_T = \frac{V}{A} = \frac{100.000.000}{200.000.000} = 0,5$$

El pasado año, el capital de la empresa ha rotado media vez.

Como puede comprobarse, la rentabilidad económica de la empresa es igual al producto entre la rentabilidad de sus ventas y la rotación de su capital total:

$$RV \cdot r_T = \frac{BE}{V} \cdot \frac{V}{A} = \frac{BE}{A} = RE$$

c) En este caso, los capitales ajenos importan 60 millones de u.m. (el 30 por 100 de 200 millones) y, dado que su tipo de interés es el 12 por 100, se tiene que:

$$F = 60.000.000 \cdot 0,12 = 7.200.000 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente:

$$BN = BE - F = 80.000.000 - 7.200.000 = 72.800.000 \text{ u.m.}$$

Por otra parte, el capital propio de la empresa importa 140.000.000 de u.m. (el 70 por 100 de 200 millones). Por tanto, la rentabilidad financiera antes de impuestos es igual a:

$$RF_A = \frac{BN}{K} = \frac{72.800.000}{140.000.000} = 0,52 = 52 \text{ por } 100$$

Después de descontar el 35 por 100 para pago de impuestos, resta un beneficio líquido igual a:

$$BL = 72.800.000(1 - 0,35) = 47.320.000 \text{ u.m.}$$

Así pues, la rentabilidad financiera después de impuestos vale:

$$RF_D = \frac{BL}{K} = \frac{47.320.000}{140.000.000} = 0,3380 = 33,80 \text{ por } 100$$

d) Dado que el dividendo representa un 50 por 100 del beneficio líquido, será igual a:

$$D = BL \cdot b = 47.320.000 \cdot 0,5 = 23.660.000$$

La capitalización bursátil de la empresa será el producto entre la cotización de cada acción y el número de acciones que tiene emitidas:

$$P \cdot N = 900 \cdot 140.000 = 126.000.000$$

Por consiguiente, la rentabilidad bursátil por dividendos vale:

$$RB_D = \frac{D}{P \cdot N} = \frac{23.660.000}{126.000.000} = 0,1878 = 18,78 \text{ por } 100$$

**Problema
15**

La medida de la rentabilidad

Si la rentabilidad bursátil por dividendos de una empresa es el 25 por 100, ha obtenido un beneficio de 900.000 u.m. y aplica un coeficiente de reparto del 10 por 100, ¿cuánto vale su capitalización bursátil?

RESOLUCIÓN

Si ha obtenido un beneficio de 900.000 u.m. y ha repartido un 10 por 100, el dividendo será 90.000 u.m.

$$D = 0,10 \cdot 900.000 = 90.000 \text{ u.m.}$$

La rentabilidad bursátil por dividendos responde a la expresión:

$$RB_D = \frac{D}{P \cdot N}$$

donde $P \cdot N$ es la capitalización bursátil. Por consiguiente:

$$P \cdot N = \frac{D}{RB_D} = \frac{90.000}{0,25} = 360.000 \text{ u.m.}$$

**Problema
16**
La medida de la rentabilidad

¿Cómo se explica que con unas ventas de 50 millones de u.m. y un beneficio operativo de 45 millones, la rentabilidad económica de una empresa haya sido sólo el 2 por 100?

RESOLUCIÓN

Como ya es sabido:

$$RE = \frac{BE}{A} = \frac{BE}{V} \cdot \frac{V}{A} = RV \cdot r_T$$

La rentabilidad de las ventas ha sido muy alta; concretamente, el 90 por 100:

$$RV = \frac{BE}{V} = \frac{45}{50} = 0,9 \text{ por } 100 = 90 \text{ por } 100$$

Por consiguiente, la baja rentabilidad económica se ha debido a la baja rotación del capital, que sólo ha sido de 0,0222 veces:

$$r_T = \frac{RE}{RV} = \frac{0,02}{0,9} = 0,0222 \text{ veces}$$

**Problema
17**
La medida de la rentabilidad

Si la rentabilidad económica de una empresa es el 40 por 100 y su capital total ha rotado dos veces, ¿cuánto vale la rentabilidad de sus ventas?

RESOLUCIÓN

De la expresión

$$RE = RV \cdot r_T$$

se deduce que

$$RV = \frac{RE}{r_T} = \frac{0,4}{2} = 0,2 \text{ por } 1 = 20 \text{ por } 100$$

5.4. LA ESTRUCTURA ECONÓMICA FINANCIERA, EL FONDO DE MANIOBRA Y EL PERÍODO MEDIO DE MADURACIÓN

Problema
18

El fondo de rotación o maniobra

Dos amigos constituyeron hace un año y un día la sociedad anónima Progrunedsa, dedicada a la programación y venta de juegos para microordenadores. Para ello, aportaron en efectivo 2.000.000 de u.m., cada uno, de las cuales dedicaron 300.000 a los gastos de notaría, registro y constitución de la sociedad y 1.500.000 a la adquisición de ordenadores y mobiliario, dejando el resto en la cuenta bancaria. Su intención es amortizar su inmovilizado en diez años. Cada tres meses, conforme lo gastan, compran material auxiliar (papel para las impresoras, discos, cintas, etc.), por un importe de 100.000 u.m., que abonan al cabo de los dos meses desde la adquisición. Dado el volumen de trabajo que tienen, hace seis meses contrataron dos empleados que les suponen unos gastos de personal de 200.000 u.m. mensuales que pagan al comienzo de cada mes de trabajo. Inmediatamente después de la constitución de la sociedad patentaron dos programas valorados en 10.000.000 de u.m., que ya tenían desarrollados y por los que cobran, cada cuatro meses y medio vencidos, unos cánones de 1.800.000 u.m. Estas patentes se comenzarán a amortizar dentro de dos años. El alquiler del local les supone unos gastos de 50.000 u.m., pagaderas cada cinco meses vencidos. Se desea conocer la estructura económica-financiera de esta empresa y el valor de su fondo de rotación o maniobra, sabiendo que ha de pagar como impuestos el 35 por 100 de los beneficios y que el resto se retiene en la empresa como autofinanciación.

RESOLUCIÓN

Calculemos, en primer lugar, los ingresos y los gastos de esta empresa:

- Ingresos: Están constituidos por los cánones, que tienen un importe de 1.800.000 u.m. cada cuatro meses y medio; es decir, 400.000 u.m. mensuales, o, lo que es lo mismo, 4.800.000 u.m. anuales:

$$I = \frac{1.800.000}{4,5} \cdot 12 = 400.000 \cdot 12 = 4.800.000$$

— Gastos. Son los siguientes:

- a) Amortización de los gastos de constitución (300.000 u.m.) y de los ordenadores y mobiliario (1.500.000 u.m.). Dado que el total de 1.800.000 u.m. se ha de amortizar en diez años, se amortizarán 180.000 u.m. anuales.
- b) Gastos de material auxiliar. Cada tres meses gastan 100.000 u.m., por lo cual el gasto anual es de

$$100.000 \cdot 4 = 400.000 \text{ u.m. anuales}$$

- c) Gastos de personal, que totalizan 200.000 u.m. mensuales. Dado que los dos empleados sólo han trabajado seis meses, el gasto, por este concepto, ha sido de

$$200.000 \cdot 6 = 1.200.000 \text{ u.m.}$$

- d) Gastos de alquiler del local. Son 50.000 u.m. mensuales o, lo que es lo mismo, 600.000 u.m. al año:

$$50.000 \cdot 12 = 600.000 \text{ u.m. anuales}$$

El total de gastos es, como consecuencia:

$$G = 180.000 + 400.000 + 1.200.000 + 600.000 = 2.380.000 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, el beneficio del ejercicio fue de 2.420.000 u.m. El 35 por 100 de este importe ($2.420.000 \cdot 0,35 = 847.000$) se lo deben a la Hacienda Pública, y el resto (1.573.000) se retienen como reservas en la empresa.

En cuanto a los activos y pasivos a corto plazo, ha de observarse que:

- a) El primer cobro de cánones se realizó al cabo de los cuatro meses y medio de actividad, y el segundo al cabo de los nueve meses. Por consiguiente, se han devengado otros tres meses que la empresa todavía no ha cobrado (cobrará dentro de mes y medio). El importe correspondiente a tres meses es:

$$\frac{1.800.000}{4,5} \cdot 3 = 1.200.000 \text{ u.m.}$$

Este importe es un activo a corto plazo.

- b) Dado que, cada tres meses, se compra material auxiliar, se habrá realizado ahora una compra cuyo importe figurará en el activo y que se abonará dentro de dos meses. Por tanto, en el pasivo aparecerá una deuda a corto plazo de 100.000 u.m.
- c) Dado que los gastos de personal se pagan anticipadamente, se habrá anticipado ahora 200.000 u.m. que figurarán como activo a corto plazo.
- d) El alquiler del local importa 50.000 u.m. mensuales y se paga cada cinco meses. Por consiguiente, el último pago se efectuó al final del décimo mes y han transcurrido dos meses desde entonces, en los cuales se han devengado los gastos correspondientes que se abonarán dentro de un trimestre. Como pasivo a corto plazo, por este concepto, figurará un importe de 100.000 u.m.:

$$50.000 \cdot 2 = 100.000 \text{ u.m.}$$

No existe otra financiación a largo plazo (capitales permanentes) que no sean las aportaciones de los socios en efectivo y patentes (en total, $4.000.000 + 10.000.000 = 14.000.000$ u.m.), así como las reservas provenientes de la retención de beneficio (1.573.000 u.m.). El activo fijo está formado por los ordenadores y el mobiliario (que, tras la amortización, importan 1.350.000 u.m.), los gastos de constitución (que, tras la amortización de la décima parte importan 270.000 u.m.) y las patentes.

TABLA 3.1

Activo		Pasivo	
11.620.000	Activo fijo:	Capitales permanentes:	15.573.000
1.350.000	Orden. y Mob. 1.500.000	Capital social	14.000.000
	Menos: Amort. acum. (150.000)	Reservas	1.573.000
270.000	Gastos de constitución		
10.000.000	Patentes		
5.000.000	Activo circulante:	Pasivo a corto plazo:	1.047.000
100.000	Material auxiliar	Alquileres devengados a	
200.000	Remuneraciones anticipadas	pagar diferidamente	100.000
1.200.000	Cánones devengados a cobrar	Proveedores de mat. aux.	100.000
	diferidamente	Hacienda Pública, acreedora	847.000
3.500.000	Tesorería*		
16.620.000	Total activo	Total pasivo	16.620.000

* Su importe se ha obtenido por diferencia.

Los gastos de constitución no constituyen un activo real que pudiera venderse, o liquidarse, en caso de liquidación de la empresa. Son lo que se denomina «un activo ficticio» que compensa a los capitales propios de la empresa, es decir, a su patrimonio neto (capital social y reservas). Si este activo ficticio se hubiese amortizado, como tal gasto, en este ejercicio en el que se crearon, tanto el activo fijo como el beneficio y las reservas de la empresa habrían sido inferiores. Por todo ello, otra forma de exponer esquemáticamente el balance de la empresa es la tabla 3.2.

TABLA 3.2

Activo		Pasivo	
11.350.000	Activo fijo real	Patrimonio neto	15.303.000
5.100.000	Activo circulante	Pasivo a corto plazo	1.147.000
16.450.000	Total activo	Total pasivo	16.450.000

En el activo se recoge la *estructura económica* de la empresa, es decir, las inversiones realizadas; los bienes y derechos con los que realiza su actividad o que se derivan de la misma. En el pasivo se refleja la estructura financiera de la empresa: las fuentes de financiación de su activo; sus capitales propios y sus deudas. El activo se divide en activo fijo, al que también se denomina «inmovilizado» o «estructura estable de la empresa», y activo circulante. El activo fijo está formado por todos los elementos vinculados a la empresa a largo plazo, mientras que en el activo circulante se encuentran todos aquellos que, como su nombre indica, circulan por la misma y, generalmente, son objeto de frecuente renovación.

En cuanto al pasivo, se encuentra formado por los capitales permanentes, que son aquellas fuentes de financiación que se encuentran a disposición de la empresa un período largo de tiempo (recursos financieros propios y crédito a medio y largo plazo), y los pasivos a corto plazo. En el pasivo se refleja la *estructura financiera* de la empresa.

Con las fuentes de financiación, que están reflejadas en el pasivo, se financian los activos. Para que exista correspondencia entre la naturaleza de los activos y la de los medios financieros, el activo fijo ha de ser financiado con capitales permanente y el activo circulante ha de serlo con pasivo a corto plazo. Sin embargo, para evitar los riesgos de un desfase entre el ritmo de cobros del activo circulante y el ritmo de pagos derivado de la exigibilidad del pasivo a corto, que pueda dar lugar a una suspensión de pagos más o menos prolon-

gada de la empresa, una parte del activo circulante ha de ser financiada con recursos permanentes. Es decir, el pasivo a corto plazo ha de ser menor que el activo circulante.

A la diferencia se le denomina *fondo de rotación o fondo de maniobra*. Por consiguiente, denominando A_F al activo fijo, A_C al circulante, CP a los capitales permanentes y P_C al pasivo a corto plazo, el fondo de maniobra, FM , se puede definir (véase la figura 3.1) de las dos formas siguientes:

- a) Como la parte del activo circulante que no es financiado por pasivo a corto, sino por capitales permanentes (y, en este sentido, también se le denomina «capital de trabajo»):

$$FM = A_C - P_C$$

- b) Como la parte de capitales permanentes que no financia activo fijo, sino que financia activo circulante:

$$FM = CP - A_F$$

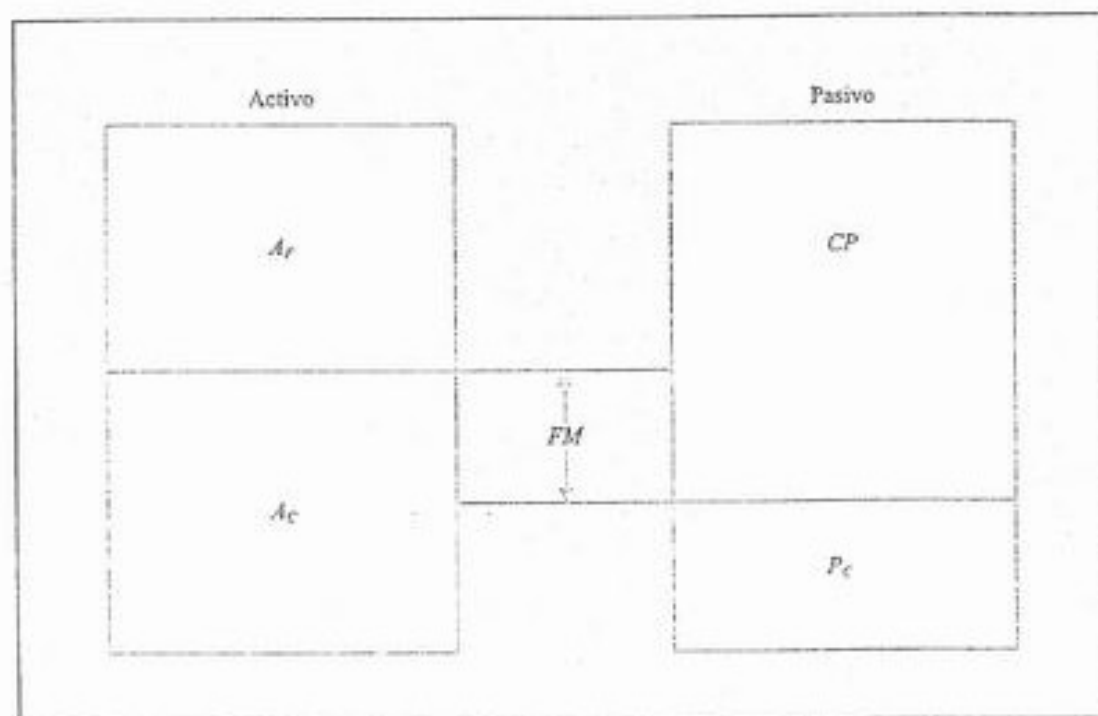


Figura 3.1.

La empresa Progrunedsa no tiene más capitales permanentes que sus fondos propios, pues no tiene endeudamiento a medio o largo plazo. Por consiguiente, su fondo de maniobra vale:

$$FM = A_C - P_C = 5.100.000 - 1.147.000 = 3.953.000 \text{ u.m.}$$

o, definido de la forma alternativa señalada anteriormente:

$$FM = CP - A_F = 15.303.000 - 11.350.000 = 3.953.000 \text{ u.m.}$$

El tamaño idóneo del fondo de maniobra varía de una empresa a otra e incluso, dentro de la misma empresa, se modifica a lo largo del tiempo, dependiendo, además, de la política general de su dirección. No obstante, como se verá en próximos problemas, para determinar el fondo de rotación adecuado existen procedimientos aproximativos que permiten obtener, en muchos casos, estimaciones razonables del mismo.

**Problema
19**

El cálculo del período medio de maduración económico

Letrunedsa tiene un volumen anual de ventas (valoradas, como es evidente, aplicando el *precio de venta* de su producto) de E unidades monetarias y, por término medio, los clientes tienen una deuda con la empresa de e u.m. Otros datos relativos a esta empresa, valorados todos ellos por su *coste*, son los siguientes:

- Consumo anual de materias primas: A u.m.
- Nivel medio de existencias de materias primas en almacén: a u.m.
- Valor de la producción: C u.m.
- Valor de los productos en curso de elaboración, por término medio: c u.m.
- Ventas anuales: V u.m.
- Nivel medio de existencias en el almacén de productos terminados: v u.m.

Se desea conocer el período medio de maduración de esta empresa y sus componentes.

RESOLUCIÓN

El denominado «ciclo de explotación» o «ciclo dinero-mercaderías-dinero» de la empresa es el proceso en el que se adquieren los materiales inventariables (materias primas y auxiliares, por ejemplo), se almacenan hasta incorporarse al proceso de transformación, se realiza la fabricación, se obtienen los productos terminados, éstos son también almacenados, y luego vendidos y re-

mitidos a los clientes, a quienes se cobra inmediatamente o transcurrido cierto período de tiempo, lo que permite recuperar fondos de dinero con los que retribuir a los factores de producción e iniciar el ciclo de nuevo. A la duración de este ciclo se le denomina *período de maduración*. En algunas ocasiones el ciclo puede tener una duración diferente que en otras. A su duración media se le llama *período medio de maduración*.

El período medio de maduración, PM , estará integrado por el *período medio de almacenamiento* de materias primas, PM_a , el de *fabricación*, PM_c , el de *venta*, PM_v , y el de *cobro* a clientes, PM_e . Es decir:

$$PM = PM_a + PM_c + PM_v + PM_e$$

Para obtener el período medio de maduración y sus componentes, obsérvese que*:

- Si A es el consumo anual de primeras materias y a el nivel medio de existencias en almacén, el cociente

$$n_a = \frac{A}{a}$$

será el número de veces que, en un año, se consume el *stock* medio de materias primas, y

$$\frac{365}{n_a} = 365 \frac{a}{A} = PM_a$$

será el número de días que tarda la empresa en consumir el nivel medio, es decir, el período medio de almacenamiento.

- Si C es el coste total de la producción anual (materias primas y otros consumos incorporados) y c es el nivel medio de productos en curso de elaboración (valorados también al coste), C/c indicará el número de veces que, en un año, se renueva el *stock* en curso de fabricación. Si dicho cociente se representa por n_c , obviamente

$$\frac{365}{n_c} = 365 \frac{c}{C} = PM_c$$

indicará el número de días que, por término medio, tardan en fabricarse los productos, es decir, el período medio de fabricación.

* Fernández Pirla, J. M.: *Teoría Económica de la Contabilidad*, ICE, Madrid, 1970, págs. 81 y 82.

De forma semejante, siendo V el volumen anual de ventas, valorado a precio de coste, y v el volumen medio de las existencias del almacén de productos terminados, valorado también al coste, el cociente

$$n_v = \frac{V}{v}$$

será el número de veces que, en un año, se renuevan las existencias de productos acabados, y

$$\frac{365}{n_v} = 365 \frac{v}{V} = PM_v$$

señalará el número de días que, por término medio, tarda en producirse dicha renovación; es decir, el plazo promedio que se requiere para vender los artículos del *stock* medio de productos terminados, o período medio de venta.

Finalmente, si E es el volumen o montante anual de ventas (valoradas, como es obvio, al precio que se aplica a los clientes, resultante de añadir al coste un margen de beneficio) y e el valor medio de la deuda que los clientes tienen con la empresa, el ratio o cociente

$$n_e = \frac{E}{e}$$

será el número de veces que, en un año, se renueva la deuda media de los clientes, y

$$\frac{365}{n_e} = 365 \frac{e}{E} = PM_e$$

será el número medio de días que tarda en cobrarse a los clientes, o período medio de cobro.

El período medio de maduración, o tiempo que tarda en recuperarse una unidad monetaria invertida en el ciclo de explotación, es, por consiguiente:

$$PM = PM_a + PM_c + PM_v + PM_e = 365 \left(\frac{a}{A} + \frac{c}{C} + \frac{v}{V} + \frac{e}{E} \right)$$

Problema
20

El período-medio de almacenamiento

La empresa Madura, S. A., compró y consumió el pasado año, para la fabricación de su producto, 20.000 u.m. de materias primas y, por término medio, mantuvo un nivel de existencias de las mismas en almacén de 2.000 u.m. ¿Cuánto vale su período medio de almacenamiento?

RESOLUCIÓN

$$PM_a = 365 \frac{a}{A} = 365 \frac{2.000}{20.000} = 36,5 \text{ días}$$

Problema
21

El cálculo del período medio de maduración económico

Numerunedsa compró y consumió el pasado año, para la fabricación de su producto, 10.000.000 de u.m. de materias primas y, por término medio, mantuvo un nivel de existencias de las mismas en almacén de 1.000.000 de u.m. (estando ambas magnitudes valoradas al precio de adquisición). El volumen de ventas (valoradas, como es evidente, aplicando el precio de venta de su producto) fue de 30.000.000 de u.m. y, por término medio, los clientes tuvieron una deuda con la empresa de 1.500.000 u.m. Otros datos relativos a esta empresa, valorados todos ellos según su coste, son los siguientes:

- Valor de la producción anual: 20.000.000 de u.m.
- Valor de los productos en curso de elaboración, por término medio: 1.000.000 de u.m.
- Ventas anuales: 24.000.000 de u.m.
- Nivel medio de las existencias en el almacén de productos terminados: 2.000.000 de u.m.

Se desea conocer el período medio de maduración de esta empresa y sus componentes.

RESOLUCIÓN

Conforme se expuso en el problema anterior:

$$PM_a = 365 \frac{a}{A} = 365 \frac{1.000.000}{10.000.000} = 36,5 \text{ días}$$

$$PM_c = 365 \frac{c}{C} = 365 \frac{1.000.000}{20.000.000} = 18,25 \text{ días}$$

$$PM_v = 365 \frac{v}{V} = 365 \frac{2.000.000}{24.000.000} = 30,42 \text{ días}$$

$$PM_e = 365 \frac{e}{E} = 365 \frac{1.500.000}{30.000.000} = 18,25 \text{ días}$$

$$PM = 36,5 + 18,25 + 30,42 + 18,25 = 103,42 \text{ días}$$

Por término medio, en esta empresa, una unidad monetaria invertida en el ciclo de explotación se recupera, con el cobro a clientes, al cabo de 103,42 días.

**Problema
22**

El período medio de maduración financiero y el cálculo del fondo de maniobra mínimo o necesario (modelo analítico)

La empresa Numerunedsa, del problema anterior, paga al contado todos sus gastos salvo las materias primas, por las que mantiene un saldo medio de deuda con sus proveedores de 2.000.000 de u.m. Además, mantiene un nivel medio de tesorería en caja y bancos de 2.000.000 de u.m. Se desea conocer el período medio de maduración financiero de esta empresa y su fondo de maniobra medio.

RESOLUCIÓN

Tal y como se dedujo en el problema anterior, el período medio de maduración de esta empresa, en sentido económico, es de 103,42 días. Una parte de este período es financiado por los proveedores permitiendo el aplazamiento de los pagos a la empresa. Deduciendo de este PM la parte financiada por los aportantes de recursos se obtiene el *período de maduración financiero*.

Si anualmente se compran materias primas por P unidades monetarias y el saldo medio con proveedores es de p u.m., cada año se paga este saldo medio:

$$n_p = \frac{P}{p}$$

veces y, por consiguiente, el número promedio de días que financian los proveedores, o período medio *de pago*, es:

$$PM_p = \frac{365}{n_p} = 365 \frac{P}{P}$$

En este caso, en el que coinciden las compras de materias primas y su consumo ($P = A = 10.000.000$ de u.m.),

$$PM_p = 365 \frac{2.000.000}{10.000.000} = 73 \text{ días}$$

Por tanto, el período medio de maduración financiero vale:

$$PMF = PM - PM_p = 103,42 - 73 = 30,42 \text{ días}$$

En cuanto al fondo de maniobra medio de esta empresa, será la diferencia entre su activo circulante medio en tesorería, t , en existencias de materias primas, productos semiterminados y productos acabados y créditos sobre clientes ($a + c + v + e$) y el pasivo a corto plazo medio proveniente de las deudas con proveedores, p . Es decir:

$$FM = A_c - P_c = t + a + c + v + e - p = 2.000.000 + 1.000.000 + 1.000.000 + 2.000.000 + 1.500.000 - 2.000.000 = 5.500.000 \text{ u.m.}$$

Obsérvese que el fondo de maniobra también puede expresarse del siguiente modo:

$$FM = t + a + c + v + e - p = t + \frac{A}{365} PM_a + \frac{C}{365} PM_c + \frac{V}{365} PM_v + \frac{E}{365} PM_e - PM_p \frac{P}{365}$$

y, dado que $A = P$:

$$FM = t + \frac{A}{365} (PM_a - PM_p) + \frac{C}{365} PM_c + \frac{V}{365} PM_v + \frac{E}{365} PM_e$$

En esta expresión, $A/365$ es el consumo medio diario de materias primas. Multiplicando este importe por el exceso que representa el período medio de in-

movilización de una unidad monetaria en almacén de materias primas, PM_a , sobre la parte que, de este período, es financiada por los proveedores, se obtiene el fondo de maniobra necesario para financiar el inventario de primeras materias. El cociente $C/365$ es el coste medio diario de producción y, multiplicando este importe por el número de días que permanece inmovilizada una unidad monetaria en productos en curso, se obtiene el fondo de maniobra necesario para financiar el inventario de existencias de estos productos semielaborados. Del mismo modo se interpretan los dos últimos sumandos. A este procedimiento de determinación del fondo de maniobra se le denomina *modelo analítico*.

**Problema
23**

El período medio de maduración financiero

Una empresa cuyo período de maduración económico es de 103 días paga al contado todos sus gastos salvo las materias primas, de las que adquiere y consume 20.000.000 de u.m. al año. Se desea conocer su período medio de maduración financiero, sabiendo que mantiene una deuda media con sus proveedores de 4.000.000 de u.m.

RESOLUCIÓN

$$PM_p = 365 \frac{4.000.000}{20.000.000} = 73 \text{ días}$$

$$PMF = PM - PM_p = 103 - 73 = 30 \text{ días}$$

**Problema
24**

El período medio de maduración y el cálculo del fondo de maniobra mínimo o necesario (modelo analítico)

Comercialuned es una empresa dedicada a la compraventa de un producto textil que no tiene proceso de fabricación. Su único coste son los metros de tela que adquiere y que importan 10.000.000 de u.m. anuales, que vende, en el mismo año en el que las compra, con un margen de beneficio del 20 por 100 sobre el precio de adquisición. Su política es la de cobrar a los clientes a los 15 días de la venta y la de pagar a su proveedor a los 30 días desde la adquisición. Por término medio, mantiene en el almacén un *stock* valorado (a precio de coste) en 500.000 u.m. Se desea conocer su período medio de maduración y su fondo de maniobra si desea mantener un saldo de tesorería de 500.000 u.m.

RESOLUCIÓN

En este caso:

$$a = 500.000 \text{ u.m.}$$

$$A = 10.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$n_a = \frac{A}{a} = \frac{10.000.000}{500.000} = 20 \text{ veces}$$

$$PM_a = \frac{365}{n_a} = \frac{365}{20} = 18,25 \text{ días}$$

$$PM_p = 30 \text{ días}$$

$$PM_c = 0 \text{ (pues no tiene proceso de producción)}$$

$$PM_v = 0 \text{ (pues no tiene proceso de producción)}$$

$$E = 10.000.000(1 + 0,20) = 12.000.000 \text{ u.m.}$$

$$PM_e = 15 \text{ días}$$

Por consiguiente, su período medio de maduración económico vale:

$$PM = PM_a + PM_c + PM_v + PM_e = 18,25 + 0 + 0 + 15 = 33,25 \text{ días}$$

Su período medio de maduración financiero vale:

$$PMF = PM - PM_p = 33,25 - 30 = 3,25 \text{ días}$$

Su fondo de maniobra medio es igual a:

$$\begin{aligned} FM &= t + \frac{A}{365} (PM_a - PM_p) + \frac{C}{365} PM_c + \frac{V}{365} PM_v + \frac{E}{365} PM_e = \\ &= 500.000 + \frac{10.000.000}{365} (18,25 - 30) + 0 + 0 + \frac{12.000.000}{365} \cdot 15 = \\ &= 671.232,87 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

En el balance, el activo circulante y su financiación serán, por término medio:

Activo circulante		Financiación del activo circulante	
500.000	Exist. de mercaderías	Débitos a proveedores	821.917,81
493.150,68	Crédito sobre clientes (12.000.000 · 15/365)	(10.000.000 · 30/365)	
		Fondo de maniobra	671.232,87
500.000	Tesorería		
1.493.150,68	Total	Total	1.493.150,68

Problema
25

El período medio de maduración y el cálculo del fondo de maniobra mínimo o necesario (modelo sintético)

Don Munedsio es un mecánico que tiene un pequeño taller artesanal en el que fabrica por encargo cierto modelo de automóvil de lujo, cuyo coste total es de 9.000.000 de u.m. Este coste total se va conformando regularmente a lo largo del proceso de fabricación, que dura 90 días, al final de los cuales entrega al cliente el automóvil, cuyo precio es de 12.000.000 de u.m. Suponiendo que no tiene almacén de materias primas, sino que éstas se van adquiriendo a medida que se van necesitando, se desea saber el período de maduración y el fondo de maniobra que ha de mantener este artesano en los siguientes casos:

- a) Cuando todos los costes se pagan al contado, es decir, a diario, y el cobro al cliente se efectúa al contado.
- b) Cuando todos los costes se pagan al contado y el cobro al cliente se produce a los 60 días de la entrega del automóvil terminado.
- c) Cuando los costes se pagan con un aplazamiento de 30 días y el cliente paga al contado.
- d) Cuando los costes se pagan con un aplazamiento de 30 días y el cliente paga a los 60 días de la entrega del automóvil.

RESOLUCIÓN

a) El coste medio que habrá de abonarse diariamente, k , será el cociente entre el coste total y el período medio de fabricación (que, en este caso, coincide con el de maduración):

$$k = \frac{9.000.000}{90} = 100.000 \text{ u.m.}$$

Dado que, durante 90 días, tiene que ir abonando unos gastos (materias primas, mano de obra, gastos generales) de 100.000 u.m. cada día, y que el negocio no generará recursos hasta el final del período de fabricación con la venta del automóvil y su cobro al cliente, el activo circulante inicial que habrá de tener este artesano será de 9.000.000 de u.m. Contando con este importe inicial en tesorería, puede ir abonando los gastos diarios y al final obtiene 12.000.000 de u.m., de los que 3.000.000 de u.m. son beneficios que puede retirar como dividendos y retener las 9.000.000 de u.m. restantes para iniciar el ciclo de nuevo. Por consiguiente, en este caso, en el que no hay deudas,

$$FM = A_C = k \cdot PM = 100.000 \cdot 90 = 9.000.000 \text{ de u.m.}$$

A medida que va incorporando costes al automóvil en curso de fabricación, el valor al coste de este último va aumentando. Así, el activo circulante inicial de esta empresa está formado íntegramente por 9.000.000 de u.m. de tesorería; al día siguiente está integrado por 8.900.000 u.m. de tesorería y 100.000 u.m. de producto en curso de fabricación; al segundo día por 8.800.000 u.m. de tesorería y 200.000 u.m. de productos en curso; transcurridos 89 días estará formado por 100.000 u.m. de tesorería y 8.900.000 u.m. de productos en curso; y al finalizarse el automóvil, el activo circulante estará integrado por 9.000.000 de u.m. de existencias de productos terminados. Tras su entrega al cliente y cobro del producto, el activo circulante será de 12.000.000 de u.m. (en tesorería), pero el propietario puede retirar, como dividendo, 3.000.000 de u.m. para su consumo, pues para iniciar el ciclo de nuevo es suficiente que tenga 9.000.000 de u.m., que es el fondo de maniobra necesario.

b) En este caso, el período de maduración estará formado por el de fabricación y el de cobro al cliente:

$$PM = PM_c + PM_e = 90 + 60 = 150 \text{ días}$$

Dado que cada uno de estos días ha de atender al pago de 100.000 u.m. diarias (al final de los 90 días se finaliza la fabricación de un automóvil, pero empieza la del siguiente), y que no se obtienen nuevos recursos hasta el final de estos 150 días, el activo circulante necesario será:

$$A_c = k \cdot PM = 100.000 \cdot 150 = 15.000.000 \text{ u.m.}$$

que, en este caso, coincide con el fondo de maniobra necesario.

Si inicialmente tiene una tesorería de 15.000.000 de u.m., podrá ir abonando los gastos diarios, de modo que la evolución del fondo de maniobra puede ilustrarse haciendo referencia a algunos momentos del tiempo como los expuestos en la tabla 3.3.

Obsérvese que, dado que sólo es necesario un fondo de 15.000.000 de u.m., el propietario puede retirar, tras el cobro al cliente, los 3.000.000 de u.m. que constituyen su beneficio, por lo cual, en el momento en el que, tras la venta, éste se genera, constituye un pasivo a corto plazo que se realizará al obtener la liquidez necesaria.

c) En este caso, el período de maduración económico coincide con el de fabricación. Pero el período de maduración financiero será:

$$PMF = PM_c - PM_p = 90 - 30 = 60 \text{ días}$$

TABLA 3.3

Número de días transcurridos	Fondo de maniobra	Total
	Tesorería (15.000.000)	15.000.000
45	Tesorería (10.500.000) Productos en curso (4.500.000)	15.000.000
90 (antes de la entrega)	Tesorería (6.000.000) Productos terminados (9.000.000)	15.000.000
90 (después de la entrega)	Tesorería (6.000.000) Crédito sobre clientes (12.000.000) Menos: Dividendo a repartir (3.000.000)	15.000.000
150 (antes del cobro)	Productos en curso (6.000.000) Crédito sobre clientes (12.000.000) Menos: Dividendo a repartir (3.000.000)	15.000.000
150 (después del cobro y antes del reparto de dividendos)	Productos en curso (6.000.000) Tesorería (12.000.000) Menos: Dividendo a repartir (3.000.000)	15.000.000
150 (después del cobro y del reparto de dividendos)	Productos en curso (6.000.000) Tesorería (9.000.000)	15.000.000

y, dado que los aportantes de fondos financian la tercera parte del ciclo, es suficiente que el propietario financie con sus propios recursos las dos terceras partes de su coste total; es decir,

$$FM = \frac{2}{3} 9.000.000 = 6.000.000 \text{ de u.m.}$$

Dicho de otro modo, al requerirse un gasto diario de 100.000 u.m. y dado que la recuperación no se produce sino al cabo de 90 días, el activo circulante necesario será:

$$A_c = k \cdot PM = 100.000 \cdot 90 = 9.000.000 \text{ de u.m.}$$

Pero los aportantes de factores financian, durante 90 días, un coste diario de 100.000 u.m., por lo cual financian 3.000.000 de u.m.

$$P_c = k \cdot PM_p = 100.000 \cdot 30 = 3.000.000 \text{ de u.m.}$$

Por lo cual, el fondo de maniobra necesario es:

$$FM = A_c - P_c = 9.000.000 - 3.000.000 = 6.000.000 \text{ de u.m.}$$

En la tabla 3.4 se refleja la situación del fondo de maniobra en distintos momentos del tiempo.

TABLA 3.4

Número de días transcurridos	Fondo de maniobra	Total
—	Tesorería (6.000.000)	6.000.000
1	Tesorería (6.000.000) Productos en curso (10.000.000) Menos: Costes a pagar (100.000)	6.000.000
30 (antes del pago)	Tesorería (6.000.000) Productos en curso (3.000.000) Menos: Costes a pagar (3.000.000)	6.000.000
30 (después del pago)	Tesorería (3.000.000) Productos en curso (3.000.000)	6.000.000
60 (antes del pago)	Tesorería (3.000.000) Productos en curso (6.000.000) Menos: Costes a pagar (3.000.000)	6.000.000
60 (después del pago)	Productos en curso (6.000.000)	6.000.000
90 (antes del pago y del cobro a clientes)	Productos terminados (9.000.000) Menos: Costes a pagar (3.000.000)	6.000.000
90 (antes del pago y después del cobro a clientes)	Tesorería (12.000.000) Menos: Costes a pagar (3.000.000) Menos: Dividendos a repartir (3.000.000)	6.000.000
90 (después del pago y del reparto del beneficio)	Tesorería (6.000.000)	6.000.000

d) En este caso, el período de maduración económico dura 150 días:

$$PM = PM_c + PM_e = 90 + 60 = 150 \text{ días}$$

y el período de maduración financiero tiene una duración de 120 días:

$$PMF = PM - PM_p = 150 - 30 = 120 \text{ días}$$

Hay que financiar un gasto diario de 100.000 u.m. durante 150 días:

$$A_c = k \cdot PM = 100.000 \cdot 150 = 15.000.000 \text{ de u.m.}$$

Pero los aportantes de medios productivos financian 3.000.000:

$$P_c = k \cdot PM_p = 100.000 \cdot 30 = 3.000.000 \text{ de u.m.}$$

Por consiguiente, el fondo de rotación necesario es:

$$FM = A_C - P_C = 15.000.000 - 3.000.000 = 12.000.000 \text{ de u.m.}$$

Lo cual puede comprobarse en la tabla 3.5.

TABLA 3.5

Número de días transcurridos	Fondo de maniobra	Total
	Tesorería (12.000.000)	12.000.000
30 (después del pago)	Tesorería (9.000.000) Productos en curso (3.000.000)	12.000.000
90 (después del pago)	Tesorería (3.000.000) Crédito sobre clientes (12.000.000) Menos: Dividendos a repartir (3.000.000)	12.000.000
120 (después del pago)	Productos en curso (3.000.000) Crédito sobre clientes (12.000.000) Menos: Dividendos a repartir (3.000.000)	12.000.000
150 (antes del pago y después del cobro a clientes)	Tesorería (12.000.000) Productos en curso (6.000.000) Menos: Costes a pagar (3.000.000) Menos: Dividendos a repartir (3.000.000)	12.000.000
150 (después del pago y del reparto del beneficio)	Tesorería (6.000.000) Productos en curso (6.000.000)	12.000.000

A este procedimiento de determinación del fondo de maniobra mínimo, o necesario, se le denomina *modelo sintético*.

**Problema
26**

El período medio de maduración y el cálculo del fondo de maniobra mínimo o necesario (modelo sintético)

Sintunedsa es una empresa dedicada a la fabricación de sillas. Diariamente consume 500 unidades físicas de madera, que tiene un precio unitario de 250 u.m. Cada operario cobra 1.000 u.m. por hora trabajada y diariamente se aplican 32 horas/hombre. Existen, además, otros costes generales de producción de

los que se utiliza un módulo diario de 200 unidades físicas cuyo coste unitario es de 5 u.m. El período medio de maduración económico de esta empresa es de 6 días y los períodos medios que transcurren desde la incorporación al proceso productivo de las primeras materias, la mano de obra y los gastos generales y el momento de su pago son de 3, 5 y 4 días, respectivamente. Se desea conocer el importe del fondo de maniobra de esta empresa.

RESOLUCIÓN

Conforme se expuso en los problemas anteriores, cada unidad monetaria incorporada al ciclo de explotación se recupera al cabo de los PM días desde su incorporación. Si diariamente se incorporan k unidades (siendo k el gasto medio diario), la inmovilización media en activo circulante será*:

$$A_C = PM \cdot k$$

El gasto medio diario, k , está formado por el consumo diario de materias primas, de mano de obra y de gastos generales. Si diariamente se emplean s unidades físicas de materias primas (con un precio unitario igual a p_s) y m unidades físicas de mano de obra (con precio unitario p_m), y g es el módulo diario de costes generales de producción, cuyo precio unitario es p_g , obviamente:

$$k = sp_s + mp_m + gp_g$$

y, en consecuencia,

$$A_C = PM(sp_s + mp_m + gp_g)$$

Esta cantidad se encontrará materializada en tesorería, en almacén de materias primas, en productos en curso de elaboración, en productos terminados y en créditos sobre clientes.

Por otra parte, si a los proveedores de materias primas se les paga al cabo de los x_s días desde su incorporación al proceso de producción, por término medio estarán financiando las $x_s \cdot sp_s$ u.m. que resultan de multiplicar el consumo diario y el número de días de aplazamiento del pago. Del mismo modo, si la mano de obra se abona con un aplazamiento de x_m días, y x_g es el período medio de dilación en el pago de los gastos generales, otros pasivos a corto plazo

* Fernández Pirla, J. M.: *Economía y Gestión de la Empresa*, ICE, Madrid, 1974, págs. 88-93.

serán $x_m \cdot mp_m$ y $x_g \cdot gp_g$. Por consiguiente, por término medio, el pasivo a corto plazo valdrá:

$$P_C = x_s sp_s + x_m mp_m + x_g gp_g$$

y el valor del fondo de maniobra será:

$$\begin{aligned} FM &= A_C - P_C = PM(sp_s + mp_m + gp_g) - (x_s sp_s + x_m mp_m + x_g gp_g) = \\ &= sp_s(PM - x_s) + mp_m(PM - x_m) + gp_g(PM - x_g) \end{aligned}$$

Dado que los proveedores de materias primas financian 3 días del periodo de maduración, que los trabajadores financian 5 días y que los aportantes de otros factores financian 4 días, los medios financieros propios que necesitará la empresa para mantener el nivel productivo serán los siguientes, en este caso:

— Fondo para pago de primeras materias:

$$sp_s(PM - x_s) = 500 \cdot 250(6 - 3) = 375.000 \text{ u.m.}$$

— Fondo para pago de mano de obra:

$$mp_m(PM - x_m) = 1.000 \cdot 32(6 - 5) = 32.000 \text{ u.m.}$$

— Fondo para pago de gastos generales:

$$gp_g(PM - x_g) = 200 \cdot 5(6 - 4) = 2.000 \text{ u.m.}$$

El fondo de maniobra valdrá:

$$FM = 375.000 + 32.000 + 2.000 = 409.000 \text{ u.m.}$$

A este procedimiento de determinación del fondo de maniobra se le denomina *modelo sintético*.

Problema
27

El periodo medio de maduración y el cálculo del fondo de maniobra mínimo o necesario (modelo sintético)

Naviunedsa es una empresa dedicada a la fabricación de naves de recreo cuyo ciclo de explotación dura 90 días. Cada 30 días tiene unos costes totales de 50.000.000 de u.m., de los cuales, el 60 por 100 corresponde a primeras mate-

rias, el 30 por 100 a mano de obra y el 10 por 100 restante a gastos generales. Los aplazamientos en los pagos son de 30 días la mano de obra, 60 días las primeras materias y 15 días los otros gastos. Se desea saber el fondo de maniobra que ha de mantener si desea un margen de seguridad del 10 por 100 sobre el mínimo necesario.

RESOLUCIÓN

Dado que, cada 30 días, el coste es de 50.000.000 de u.m., el coste medio diario valdrá:

$$k = \frac{50.000.000}{30} = 1.666.666,6 \text{ u.m.}$$

que se desglosa del siguiente modo:

— Coste diario de materias primas, sp_s ; el 60 por 100:

$$0,60 \cdot 1.666.666,6 = 1.000.000 \text{ de u.m.}$$

— Coste diario de mano de obra, mp_m ; el 30 por 100:

$$0,30 \cdot 1.666.666,6 = 500.000 \text{ u.m.}$$

— Coste diario de gastos generales, gp_g ; el 10 por 100:

$$0,10 \cdot 1.666.666,6 = 166.666,6 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente:

$$A_C = PM \cdot k = 90 \cdot 1.666.666,6 = 150.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$\begin{aligned} P_C &= x_s(sp_s) + x_m(mp_m) + x_g(gp_g) = \\ &= 60 \cdot 1.000.000 + 30 \cdot 500.000 + 15 \cdot 166.666,6 = 77.500.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

$$FM = A_C - P_C = 150.000.000 - 77.500.000 = 72.500.000 \text{ u.m.}$$

Si desea mantener un fondo de maniobra que incorpore un 10 por 100 de margen de seguridad, habrá de tener un fondo de 79.750.000 u.m.

$$72.500.000(1 + 0,10) = 79.750.000 \text{ u.m.}$$

**Problema
28**

El período medio de maduración y el cálculo del fondo de maniobra mínimo o necesario (modelo sintético)

Una empresa tiene un período medio de maduración económico de 7 días y paga a sus proveedores en un plazo de 4 días. Diariamente consume 1.000 u.f. de materias primas, que tienen un precio unitario de 125 u.m. Se desea conocer el importe del fondo de maniobra que necesita esta empresa para pago de primeras materias.

RESOLUCIÓN

$$sp_j(PM - x_j) = 1.000 \cdot 125(7 - 4) = 375.000 \text{ u.m.}$$

3.5. LOS RATIOS COMO INSTRUMENTO DE ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA ECONÓMICO-FINANCIERA DE LA EMPRESA

**Problema
29**

Los ratios como instrumento de análisis de la estructura económico-financiera de la empresa

En la tabla 3.6 se recoge, en millones de u.m., el balance de situación actual de la empresa Ratunedsa.

La cifra anual de ventas de esta empresa ha sido de 30 millones de u.m. valoradas a precio de venta, pues, si se las valora según su coste, su importe es de 22 millones de u.m.

Se desea efectuar un análisis de esta empresa aplicando los ratios de situación y de rotación más habitualmente empleados.

RESOLUCIÓN

Los ratios de *situación* se obtienen a partir de los datos del balance y, por consiguiente, muestran la situación de la empresa en el momento al que aquél se refiere. Tienen carácter estático. Estos ratios son de tres tipos:

- Los relativos al activo, con los que se estudia la estructura económica de la empresa.

TABLA 3.6

Activo			Pasivo		
<i>Tesorería</i>		15	<i>Pasivo a corto plazo</i>		19,25
Caja	1		Proveedores	3,5	
Bancos	14		Efectos comerciales a pagar	10	
<i>Realizable</i>		37	Hacienda Pública, acreedor	2	
Cientes	18		Préstamos a corto plazo	3,75	
Efectos comerciales a cobrar	10		<i>Capitales permanentes</i>		96
Inversiones financieras temporales en fondos públicos	9		Préstamos a largo plazo	15	
<i>Existencias</i>		25	Capital social	50	
Mercaderías	21		Reservas	31	
Envases	4				
<i>Inmovilizado material neto</i>		38,25			
Edificios y otras construcc.	25				
Maquinaria, instalaciones y utillaje	9				
Mobiliario y enseres	7,25				
Menos: amortización acum.	(3)				
Total activo neto		115,25	Total pasivo		115,25

- Los referentes al pasivo, con los que se estudia la estructura financiera de la firma.
- Los ratios de síntesis, o de equilibrio financiero, en los que se utilizan datos del activo y del pasivo del balance.

Dado que algunos ratios hacen referencia a masas patrimoniales más amplias que las detalladas en el balance de esta empresa, previamente hay que efectuar los siguientes cálculos:

Activo circulante:

$$\begin{aligned}
 A_C &= \text{Tesorería} + \text{Realizable} + \text{Existencias} = \\
 &= T + R + E = 15 + 37 + 25 = 77 \text{ millones de u.m.}
 \end{aligned}$$

Activo fijo:

$$A_F = 38,25 \text{ millones de u.m.}$$

Pasivo a corto:

$$P_C = 19,25 \text{ millones de u.m.}$$

Capitales permanentes:

$$CP = 96 \text{ millones de u.m.}$$

Recursos propios:

$$RP = \text{Capital social} + \text{Reservas} = 50 + 31 = 81 \text{ millones de u.m.}$$

Recursos ajenos a largo:

$$RA = 15 \text{ millones de u.m.}$$

Recursos ajenos totales:

$$RAT = P_C + RA = 19,25 + 15 = 34,25 \text{ millones de u.m.}$$

Fondo de maniobra:

$$FM = A_C - P_C = 77 - 19,25 = 57,75 \text{ millones de u.m.}$$

Al aplicar los ratios de situación más habituales al presente caso, se obtienen los resultados sintetizados en la tabla 3.7, en la que A y P significan activo total y pasivo total, respectivamente.

TABLA 3.7

Ratios de activo	Tesorería: $T/A = 15/115,25 = 0,1302$	
	Activo circulante:	Realizable: $R/A = 37/115,25 = 0,3210$
	$\frac{A_C}{A} = \frac{77}{115,25} = 0,6681$	Existencias: $E/A = 25/115,25 = 0,2169$
Ratios de pasivo	Activo fijo: $A_f/A = 38,25/115,25 = 0,3319$	
	Pasivo a corto: $P_C/P = 19,25/115,25 = 0,1670$	
	Capitales permanentes: $CP/P = 96/115,25 = 0,8330$	Recursos ajenos a largo plazo: $RA/P = 15/115,25 = 0,0302$ (dependencia financiera)
		Recursos propios: $RP/P = 81/115,25 = 0,7028$ (autonomía financiera)

TABLA 3.7 (continuación)

Ratios de solvencia y equilibrio financiero	Equilibrio financiero a corto plazo o liquidez	Liquidez: $A_C/P_C = 77/19,5 = 3,9487$
		Tesorería inmediata: $T/P_C = 15/19,5 = 0,7692$
		Tesorería ordinaria: $(T + R)/P_C = (15 + 37)/19,5 = 2,66$
	Equilibrio financiero a largo plazo	Capital propio inmovilizado: $(A_F - RA)/RP = (38,25 - 15)/81 = 0,2870$
		Capital propio en circulante: $FM/RP = 57,75/81 = 0,7130$
		Garantía: $A/RAT = 115,25/34,25 = 3,3650$
		Financiación del inmovilizado: $CP/A_F = 96/38,25 = 2,5098$
	Apalancamiento	Endeudamiento a corto: $P_C/RP = 19,25/81 = 0,2376$
		Endeudamiento a largo: $RA/RP = 15/81 = 0,1852$
		Endeudamiento total: $RAT/RP = 34,25/81 = 0,4228$

Un ratio no es sino el tanto por uno que la magnitud situada en el numerador representa respecto a la del denominador. Su significado se deduce de la denominación que reciben y de las partidas que los integran. Pero, para emitir un juicio, en general es necesario compararlos con los valores que han tomado en otros momentos del tiempo o bien, por ejemplo, con los de otras empresas semejantes o con los de la empresa media de su sector.

No obstante, a la vista de los valores obtenidos, puede afirmarse que esta empresa es fuertemente solvente tanto a corto como a largo plazo, debido a su bajo nivel de endeudamiento y a su elevado fondo de maniobra y nivel de tesorería.

Los ratios de *rotación*, también denominados «ratios de actividad o de gestión» tienen carácter dinámico. Miden el número de veces que la masa patrimonial correspondiente se encuentra comprendida en el volumen de ventas o ci-

fra de negocios del período, que suele ser un año. Cuanto mayores sean estas rotaciones de las masas patrimoniales, mayor será la eficacia de su utilización. Los ratios de rotación más frecuentemente empleados son los siguientes, donde V denota las ventas anuales y C su valoración al coste:

— Rotación de activos:

$$\text{Activo total:} \quad \frac{V}{A} = \frac{30}{115,25} = 0,2603$$

$$\text{Activo fijo:} \quad \frac{V}{A_f} = \frac{30}{38,25} = 0,7843$$

$$\text{Activo circulante:} \quad \frac{V}{A_c} = \frac{30}{77} = 0,3896$$

$$\text{Clientes y efectos a cobrar:} \quad \frac{30}{18 + 10} = 1,0714$$

$$\text{Existencias:} \quad \frac{C}{E} = \frac{22}{25} = 0,8800$$

— Rotación de fuentes de financiación:

$$\text{Capitales permanentes:} \quad \frac{V}{CP} = \frac{30}{96} = 0,3125$$

$$\text{Capitales propios:} \quad \frac{V}{RP} = \frac{30}{81} = 0,3704$$

Al igual que en el caso de los ratios de situación, en general, el principal interés radica en conocer su evolución y en compararlos con los de otras empresas o con los de la empresa media del sector de que se trate.

**Problema
30**

Los ratios como instrumento de análisis de la estructura económico-financiera de la empresa

Duponedont, S. A., con un activo de 50 millones de u.m., financiado en un 70 por 100 por recursos propios, tuvo el pasado año un volumen de venta de 20 millones de u.m., lo que le permitió obtener un beneficio neto de 5 millones de u.m. Se desea aplicar el método Dupont para analizarla financieramente.

RESOLUCIÓN

El método Dupont permite descomponer la rentabilidad de los capitales totales de la empresa, P , y la de sus capitales propios, RP , en diversos elementos que actúan entre sí de forma multiplicativa. Así, siendo BN el beneficio neto, la rentabilidad de los capitales totales se podrá descomponer del siguiente modo:

$$R = \frac{BN}{P} = \frac{BN}{A} = \frac{BN}{V} \frac{V}{A}$$

donde BN/V es el margen neto sobre ventas y V/A es la rotación del activo. En este caso:

$$\frac{BN}{V} = \frac{5}{20} = 0,25$$

$$\frac{V}{A} = \frac{20}{50} = 0,40$$

$$R = \frac{BN}{A} = \frac{5}{50} = 0,10$$

La rentabilidad obtenida (el 10 por 100) se explica por haberse aplicado un margen de beneficio sobre ventas del 25 por 100 y por una rotación del activo igual a 0,40.

La rentabilidad financiera, o rentabilidad de los capitales propios, se descompone del siguiente modo:

$$RF = \frac{BN}{RP} = \frac{BN}{V} \frac{V}{A} \frac{A}{RP}$$

donde BN/V es el margen neto sobre ventas, V/A es la rotación del activo y A/RP es igual a:

$$\frac{A}{RP} = \frac{P}{RP} = \frac{RAT + RP}{RP} = \frac{RAT}{RP} + 1$$

Se trata, por tanto, de añadir la unidad al ratio de endeudamiento total al que se hizo referencia en el problema anterior; A/RP es una medida del grado de endeudamiento de la empresa. En este caso:

$$RP = 0,7 \cdot 50 = 35 \text{ millones de u.m.}$$

$$\frac{A}{RP} = \frac{50}{35} = 1,4886$$

$$RF = \frac{5}{35} = 0,1429$$

La rentabilidad financiera obtenida (el 14,29 por 100) se explica por la aplicación de un margen sobre ventas del 25 por 100, porque el activo rotó un 40 por 100 y porque el coeficiente de endeudamiento total de la empresa es del 48,86 por 100 ($1,4886 - 1 = 0,4886$).

Problema
31

Los ratios como instrumento de análisis de la estructura económico-financiera de la empresa

En la tabla 3.8 se recogen, sintéticamente, los balances de situación y algunos datos de las cuentas de resultados de los dos últimos ejercicios económicos de Funedsa (millones de u.m.).

TABLA 3.8

BALANCE		
	Año 1	Año 2
<i>Activo circulante</i>	15.590	20.270
Tesorería	210	420
Realizable	5.480	7.400
Existencias	9.900	12.450
<i>Activo fijo neto</i>	26.570	32.450
Activo total	42.160	52.720
<i>Pasivo a corto plazo</i>	25.160	12.500
<i>Capitales permanentes</i>	17.000	40.220
Recursos ajenos a largo plazo	4.200	8.420
Capital social y reservas	8.400	25.300
Resultados	4.400	6.500
Pasivo total	42.160	52.720
CUENTA DE RESULTADOS		
	Año 1	Año 2
<i>Ventas</i>	42.200	52.750
— Ventas valoradas al coste	(32.050)	(40.050)
— Otros costes no financieros	(4.200)	(5.270)
<i>Beneficio operativo</i>	5.950	7.430
— Gastos financieros	(1.450)	(930)
Beneficio neto	4.400	6.500

En los dos años la empresa decidió no repartir dividendos y está exenta del pago de impuesto sobre el beneficio. Se desea analizar, mediante ratios de situación, de rentabilidad y de rotación, la evolución de esta empresa y su estado actual. Aplíquese también el método Dupont para analizar su rentabilidad.

RESOLUCIÓN

Obsérvese que, dado que los beneficios se retienen como reservas, los recursos propios del primer año importan 12.800 millones (8.400 + 4.400) y que los del segundo ascienden a 31.800 millones (25.300 + 6.500).

En la tabla 3.9 se recogen los ratios más habitualmente empleados.

A la vista de estos resultados resulta evidente que la estructura económica de la empresa reflejada en su activo no se ha alterado sustancialmente. Sin em-

TABLA 3.9

<i>Ratios de activo:</i>	Año 1	Año 2		Año 1	Año 2
Activo circulante	0,3698	0,3845	Tesorería	0,0050	0,0080
			Realizable	0,1300	0,1404
			Existencias	0,2348	0,2362
Activo fijo	0,6302	0,6155			
<i>Ratios de pasivo:</i>					
Pasivo a corto plazo	0,5968	0,2371			
Capitales permanentes	0,4032	0,7629	R. ajenos a l.	0,0996	0,1597
			R. propios	0,3036	0,6032
<i>Ratios de solvencia y equilibrio financiero:</i>					
Equilibrio a corto o liquidez	Liquidez			0,6196	1,6216
	Tesorería inmediata			0,0083	0,0336
	Tesorería ordinaria			0,2262	0,6256
Equilibrio a largo	Capital propio inmovilizado			1,7477	0,7557
	Capital propio circulante			0,7477	0,2443
	Garantía			1,4359	2,5200
	Financiación del inmovilizado			0,6398	1,2394
Apalancamiento	Endeudamiento a corto			1,9656	0,3931
	Endeudamiento a largo			0,3281	0,2648
	Endeudamiento total			2,2937	0,6579

bargo, su estructura financiera ha mejorado ostensiblemente, reduciéndose la participación del pasivo a corto plazo a favor de los capitales permanentes y, especialmente, de los recursos propios, cuya participación en la financiación total pasó del 30,36 por 100 al 60,32. La participación de la financiación a corto plazo el año 1 tenía tal relevancia que el fondo de maniobra era negativo ($A_C - P_C = 15.590 - 25.160 = -9.570$ millones de u.m.), estando parte del activo fijo financiado con pasivo a corto plazo. Esto hacía que el ratio de participación del capital propio en la financiación del activo circulante fuera negativo ($-0,7477$) y que su complemento a la unidad (el ratio de participación del capital propio en la financiación del inmovilizado) fuera superior a la unidad. Esta situación también se pone de manifiesto por el hecho de que el ratio de liquidez (A_C/P_C) fuera inferior a la unidad. La modificación de la forma de financiación da lugar a una mayor solvencia a corto y a largo plazo, según se pone de manifiesto por el aumento de los ratios de tesorería inmediata y ordinaria, del ratio de garantía y del coeficiente de financiación del inmovilizado, que pasa de tomar un valor inferior a la unidad (lo que refleja que el fondo de maniobra es negativo) a alcanzar un valor que señala que los capitales permanentes cubren el activo fijo y parte del activo circulante. Al final del año 1, el endeudamiento a corto plazo era casi igual al doble de los recursos propios (el coeficiente valía 1,9656) y los recursos ajenos totales lo duplicaban ampliamente (2,2937). Al final del año 2, el endeudamiento a corto plazo representa un 23,71 por 100 del pasivo total (frente al 59,68 por 100 que representaba al final del año 1) y, en relación al capital propio, esta fuente financiera representa sólo el 39,31 por 100, siendo el 65,79 por 100 la proporción correspondiente al total de recursos ajenos. Se redujo, también, la participación de los fondos ajenos dentro de los capitales permanentes, que pasó del 32,81 por 100 de los capitales propios al 26,48 por 100.

El primer año, la rentabilidad económica de la empresa fue:

$$RE_1 = \frac{BE_1}{A_1} = \frac{5.950}{42.160} = 0,1411 = 14,11 \text{ por } 100$$

en tanto que en el segundo tomó el valor:

$$RE_2 = \frac{BE_2}{A_2} = \frac{7.430}{52.720} = 0,1409 = 14,09 \text{ por } 100$$

lo cual no supone una modificación relevante. En cuanto a la rentabilidad financiera, se obtienen los siguientes valores:

$$RF_1 = \frac{BN_1}{RP_1} = \frac{4.400}{12.800} = 0,3437 = 34,37 \text{ por } 100$$

$$RF_2 = \frac{BN_2}{RP_2} = \frac{6.500}{31.800} = 0,2044 = 20,44 \text{ por } 100$$

Dado que la rentabilidad de los activos apenas se modificó, la sustitución de recursos ajenos por recursos propios, aunque mejoró la situación de equilibrio y de solvencia de la empresa (redujo su riesgo), provocó una disminución de la rentabilidad de los accionistas o propietarios de la firma.

Pero, para analizar con mayor detalle las razones de esta evolución de la rentabilidad de la empresa, puede efectuarse un análisis de sus coeficientes de rotación y un estudio basado en el método Dupont.

Los principales coeficientes de rotación son los siguientes:

	Año 1	Año 2
— Rotación de activos:		
Activo total (V/A)	$\frac{42.200}{42.160} = 1,0009$	$\frac{52.750}{52.720} = 1,006$
Activo fijo (V/A_f)	$\frac{42.200}{26.570} = 1,5883$	$\frac{52.750}{32.450} = 1,6256$
Activo circulante (V/A_c)	$\frac{42.200}{15.590} = 2,7068$	$\frac{52.750}{20.270} = 2,6024$
Existencias (C/E)	$\frac{32.050}{9.900} = 3,2374$	$\frac{40.050}{12.450} = 3,2169$
— Rotación de fuentes de financiación		
Capitales permanentes (V/CP)	$\frac{42.200}{17.000} = 2,4824$	$\frac{52.750}{40.220} = 1,3115$
— Capitales propios (V/RP)	$\frac{42.200}{12.800} = 2,2969$	$\frac{52.750}{31.800} = 1,6588$

Dado que la rotación del activo total apenas se ha modificado y que tampoco se ha alterado sustancialmente la composición del activo, las rotaciones de los componentes del activo no han variado de forma destacable de un año al otro.

Sin embargo, debido a la elevación de los capitales propios y de los capitales permanentes, su rotación se redujo sustancialmente, a pesar de que las ventas aumentaron en un 25 por 100 de un período a otro:

$$\frac{52.750 - 42.200}{42.200} 100 = 25 \text{ por } 100$$

En cuanto al análisis basado en el método de Dupont, los resultados se recogen en la tabla 3.10.

TABLA 3.10

	Año 1	Año 2
I. Margen neto sobre ventas (BN/V)	0,1043	0,1232
II. Rotación del activo fijo (V/A)	1,0010	1,0010
III. Rentabilidad de los capitales totales ($I \times II$)	1,1044	0,1233
IV. Medida del grado de endeudamiento (A/RP)	3,2938	1,6579
V. Rentabilidad financiera ($III \times IV$)	0,3433	0,2044

De este análisis se deduce que la principal razón de la reducción de la rentabilidad financiera es la disminución del grado de endeudamiento, la cual compensó la favorable evolución de la rentabilidad de los capitales totales propiciada por el aumento del margen neto sobre ventas.

Desde el punto de vista de la rentabilidad de los propietarios, en una empresa en la que la rentabilidad de los activos es superior al coste de los recursos ajenos, interesa sustituir capitales propios por fondos ajenos; con ello, la rentabilidad de los recursos propios se eleva. El coste medio de los recursos ajenos en esta empresa fue, en el primer período:

$$\frac{\text{Gastos financieros}}{RAT} = \frac{1.550}{25.160 + 4.200} = 0,0528$$

es decir, del 5,28 por 100, frente a una rentabilidad económica del 14,11 por 100. Dado que su financiación se realizó principalmente con recursos ajenos, su rentabilidad financiera fue superior que en el segundo año, en el que el coste de estos recursos se redujo ligeramente [$930/(12.500 + 8.420) = 0,0445$] y la rentabilidad económica apenas se modificó (0,1409), pero la financiación se efectuó en mayor medida con recursos propios.

En definitiva, los propietarios de la empresa sacrificaron rentabilidad a favor de una mayor seguridad y solvencia. Se trata de una empresa que experimentó una fuerte expansión que, transitoriamente, financió con créditos a corto plazo, los cuales fue renovando al ir venciendo para, luego (el segundo año), sustituirlos paulatinamente por préstamos a largo plazo y, especialmente, por capitales propios, cuya consecución requiere más trámites, y más tiempo, que los créditos a corto plazo.

Problema
32

Los ratios como instrumento de análisis de la estructura económico-financiera de la empresa

El pasado año, una empresa tuvo un ratio de endeudamiento total del 0,5 por 1, una rentabilidad financiera del 20 por 100 y obtuvo un margen neto sobre ventas del 15 por 100. ¿Cuál fue la rotación de su activo?

RESOLUCIÓN

Según el método Dupont:

$$RF = \frac{BN}{RP} = \frac{BN}{V} \frac{V}{A} \frac{A}{RP}$$

donde

$$\frac{A}{RP} = \frac{RAF}{RP} + 1$$

Por consiguiente, en este caso:

$$0,20 = 0,15 \frac{V}{A} (0,5 + 1)$$

de donde se deduce que el activo ha rotado 0,8889 veces:

$$\frac{V}{A} = 0,8889 \text{ veces}$$

Problema
33

Los ratios como instrumento de análisis de la estructura económico-financiera de la empresa

¿Cuánto ha valido la rentabilidad financiera de una empresa que ha obtenido un margen neto sobre ventas del 25 por 100, cuyo activo ha rotado dos veces y que financia el 60 por 100 de ese activo con deudas?

RESOLUCIÓN

Según el método Dupont:

$$RF = \frac{BN}{RP} = \frac{BN}{V} \frac{V}{A} \frac{A}{RP}$$

Por consiguiente, en este caso:

$$RF = 0,25 \cdot 2 \frac{A}{0,4A} = 0,25 \cdot 2 \frac{1}{0,4} = 1,25 \text{ por } 1 = 125 \text{ por } 100$$

4

Análisis y evaluación de inversiones

4.1. VARIABLES FUNDAMENTALES QUE DEFINEN UN PLAN DE INVERSIÓN

Problema 1

Las variables relevantes

Se trata de invertir en una obligación que vale 2.000 u.m. y que rentará anualmente y de forma ilimitada un interés de 200 u.m. Los intereses son cobrados con la intermediación de un banco que cobra una comisión de 5 u.m. Identifique las variables relevantes de esta inversión.

RESOLUCIÓN

Desde el punto de vista económico, lo único relevante en una inversión es el desembolso inicial que requiere, los flujos de caja que cabe esperar de la misma, los momentos en que se espera que sean generados cada uno de ellos y el riesgo que comporta.

En este caso, el desembolso inicial necesario para realizar esta inversión es de 2.000 u.m., y cada año genera un flujo de caja igual a 195 u.m., es decir, igual a la diferencia entre el cobro anual que genera la inversión (200 u.m.) y los pagos que requiere (las 5 u.m. que se han de abonar al banco por su intermediación).

Por consiguiente, son variables fundamentales que definen el plan de esta inversión las siguientes:

$$A = 2.000 \text{ u.m.}, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = 195, \quad n \rightarrow \infty$$

donde A es el desembolso inicial, Q_t es el flujo de caja del t -ésimo año y n es la duración de la inversión.

Problema

2

El desembolso inicial

Mueblisa, que tiene una cadena de tiendas de venta de muebles, está pensando en abrir otra sucursal en un nuevo barrio de cierta ciudad. Para realizar un estudio, el pasado año pagó 100.000 u.m. a una empresa consultora. ¿Es este importe un dato relevante para la decisión de abrir la sucursal o no hacerlo?

RESOLUCIÓN

Evidentemente, la respuesta es no. Las 100.000 u.m. no se pueden recuperar ni abriendo la sucursal ni no abriéndola. Constituyen un pago que ya se ha efectuado y, por tanto, no se debe considerar en la decisión de inversión.

Problema

3

El desembolso inicial

Mueblisa, a la que se refiere el problema anterior, es propietaria desde hace bastantes años del local en el que se está considerando la posibilidad de poner una sucursal. ¿Habrá que olvidar el valor del solar porque no se precisa realizar ningún desembolso adicional por él?

RESOLUCIÓN

Evidentemente, la respuesta es no. La utilización de este local comportaría un coste de oportunidad. Si el local se pudiera vender en 125.000 u.m., su utilización para instalar la sucursal supondría perder este cobro. Por ello, habría que incluirlo entre el desembolso inicial de la inversión. Adviértase, además, que el importe que hay que tener en cuenta son las 125.000 u.m. que vale el terreno en el mercado, independientemente de si Mueblisa pagó más o menos cuando lo adquirió.

Problema

4

Los flujos de caja

¿Cómo habría de considerarse el hecho de que Mueblisa, a la que se refieren los problemas anteriores, cuente ya con una tienda en un barrio que se encuentra en las proximidades de aquel en el que se va a situar la nueva?

RESOLUCIÓN

Han de tenerse en cuenta los efectos que tiene el proyecto en las otras áreas de la empresa. Por ejemplo, si, como señala el enunciado, Mueblisa tuviera ya otra tienda en un barrio próximo a aquel en el que piensa colocar la nueva sucursal, habría que estudiar los efectos de ésta en la actividad de aquélla, y, al estimar los flujos de caja, considerar como pagos del proyecto la reducción de los cobros de la tienda antigua e incorporar entre sus cobros la reducción de los pagos de esa antigua sucursal.

Problema
5

El efecto de la inflación y del riesgo: la rentabilidad requerida

Una persona, A, puede invertir los capitales líquidos de que dispone al 10 por 100 anual acumulativo. Actualmente, otra persona, B, debe pagar a A 1.000 u.m., pero atraviesa un período de escasez de liquidez y le pide que le aplace el pago. ¿Qué cantidad exigirá aquélla si ésta se retrasa un año? ¿Y si se retrasa dos años? ¿Y si fueran tres los años de aplazamiento? Supóngase que no existe inflación.

RESOLUCIÓN

Si el acreedor, A, recibiera actualmente las 1.000 u.m. podría invertirlas al 10 por 100, y al cabo de un año tendría:

$$1.000 + 0,10 \times 1.000 = 1.000(1 + 0,10) = 1.100 \text{ u.m.}$$

es decir, las 1.000 u.m. más sus intereses (un 10 por 100 sobre 1.000 es igual a 100). Ésta sería, por consiguiente, la cifra que, referida a dentro de un año, es equivalente, para este acreedor, a las 1.000 percibidas actualmente y, por consiguiente, 1.100 u.m. sería la cantidad que exigiría para no resultar perjudicado si el pago se aplaza un año.

Si el acreedor recibiera ahora las 1.000 u.m., invirtiéndolas al 10 por 100, al cabo de dos años tendría el capital que tuviera al cabo de un año (1.100 u.m.) más el 10 por 100 de intereses correspondientes al segundo año, es decir:

$$\begin{aligned} 1.100 + 0,10 \times 1.100 &= 1.100(1 + 0,10) = 1.000(1 + 0,10)(1 + 0,10) = \\ &= 1.000(1 + 0,10)^2 = 1.210 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

En ausencia de inflación, al acreedor le resultará indiferente percibir ahora 1.000 u.m. o 1.210 dentro de dos años. Para él son capitales financieramente equivalentes. Por consiguiente, exigirá que, si el aplazamiento es de dos años, se le abonen 1.210 u.m. al cabo de los mismos.

De forma semejante, 1.000 u.m. colocadas ahora al 10 por 100, al cabo de tres años se habrán transformado en

$$1.000(1 + 0,10)(1 + 0,10)(1 + 0,10) = 1.000(1 + 0,10)^3 = 1.331 \text{ u.m.}$$

Si el aplazamiento es de tres años, el acreedor exigirá que, al final de los mismos, se le paguen 1.331 u.m. Este capital, referido al momento 3 de la figura 4.1, es financieramente equivalente, para esta persona, a 1.000 u.m. referidas al momento 0 (momento actual).

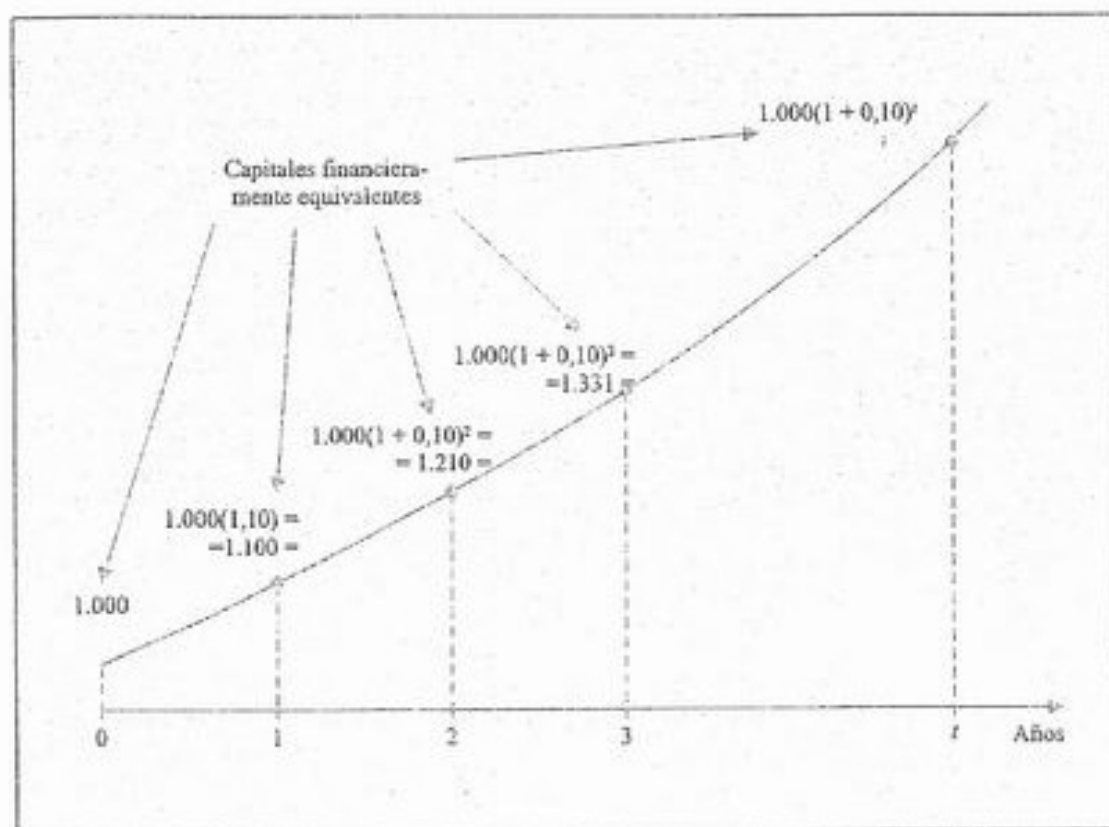


Figura 4.1.

Actuando de este modo, el acreedor se asegura recibir una rentabilidad del 10 por 100, tanto si recibe ahora los fondos como si su percepción se aplaza.

Problema 6

El efecto de la inflación y del riesgo: la rentabilidad requerida

Una persona que ha de percibir, dentro de tres años, 1.331 u.m. recibe el ofrecimiento de su deudor de adelantar el abono de esa deuda. Si el acreedor puede colocar los capitales al 10 por 100 anual acumulativo, ¿qué importe exigirá percibir si el pago se realiza actualmente? ¿Y si se realiza dentro de un año? ¿Y si se efectuara dentro de dos? Supóngase que no existe inflación (figura 4.2).

RESOLUCIÓN

Si actualmente percibiera una cantidad igual a

$$\frac{1.331}{(1 + 0,10)^3} \text{ u.m.}$$

colocándolas al 10 por 100, al final de los tres años obtendría:

$$\left[\frac{1.331}{(1 + 0,10)^3} \right] (1 + 0,10)^3 = 1.331 \text{ u.m.}$$

Al acreedor le resultará equivalente percibir ahora

$$\frac{1.331}{(1 + 0,10)^3} = 1.000 \text{ u.m.}$$

que 1.331 u.m. dentro de tres años, pues, colocando las 1.000 u.m. al 10 por 100, al cabo de los tres años tendría igualmente 1.331 u.m. Por consiguiente, si el pago se efectúa actualmente, exigirá 1.000 u.m.

De forma semejante, si el pago se realizara dentro de un año, exigiría

$$\frac{1.331}{(1 + 0,10)^2} = 1.100 \text{ u.m.}$$

pues, colocando estas 1.100 u.m. durante los dos años que transcurren desde el final del primero hasta el final del tercero, obtendría:

$$\left[\frac{1.331}{(1 + 0,10)^2} \right] (1 + 0,10)^2 = 1.331 \text{ u.m.}$$

Y, como ya resulta obvio, si el pago se efectuara al final del segundo año, exigiría:

$$\frac{1.331}{1 + 0,10} = 1.210 \text{ u.m.}$$

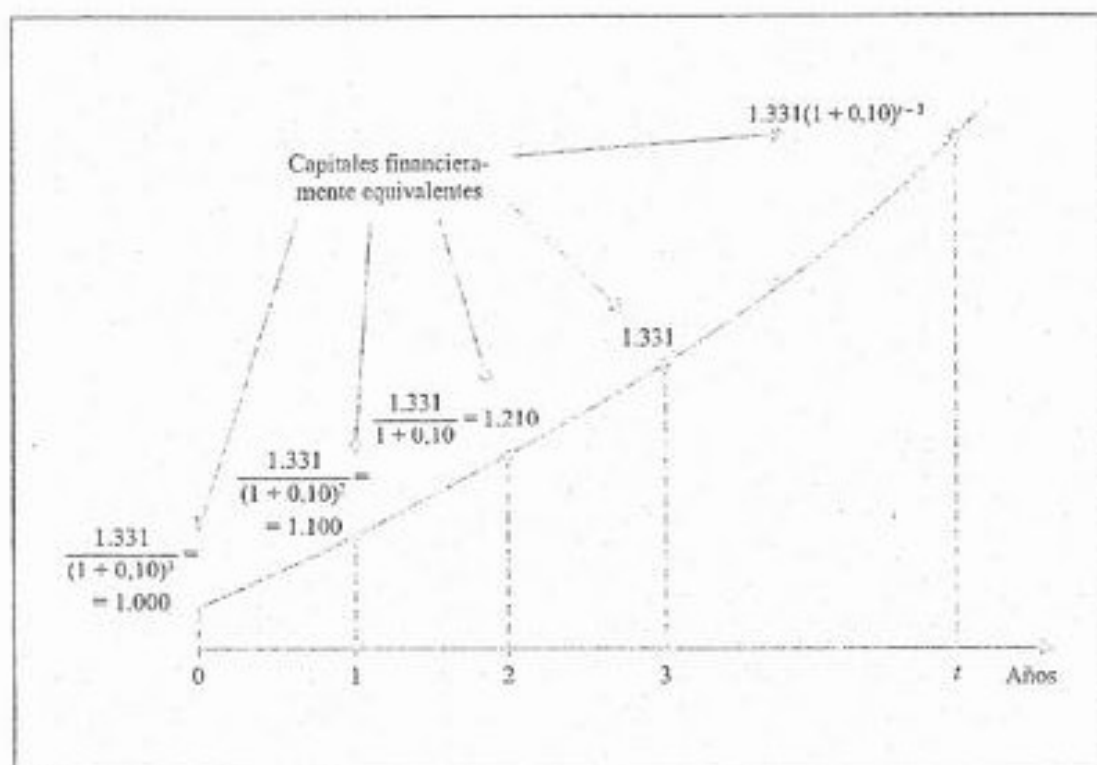


Figura 4.2.

**Problema
7**

El efecto de la inflación y del riesgo:
la rentabilidad requerida

Sean los capitales disponibles en los momentos que se indican, reflejados en la tabla 4.1.

TABLA 4.1

Capitales (u.m.)	Momentos
15.000	Actual (0)
10.000	Dentro de 1 año
12.000	Dentro de 2 años
18.000	Dentro de 3 años
20.000	Dentro de 4 años

¿Cuáles son sus equivalentes en la actualidad y dentro de uno, dos, tres y seis años? El tipo aplicable (rentabilidad requerida) es el 8 por 100 anual acumulativo.

RESOLUCIÓN

Como puede comprobarse en los ejercicios anteriores, la expresión general que es aplicable para determinar cuál es el capital equivalente en el momento s de otro capital que importa Q , u.m. y es disponible en el momento t es

$$Q_{st} = Q(1 + i)^{s-t}$$

donde i es el tipo calculatorio (la rentabilidad requerida) en tanto por uno. Por ejemplo, el equivalente de las 20.000 u.m. disponibles dentro de cuatro años es, dentro de dos:

$$\begin{aligned} Q_{2/4} &= 20.000(1 + 0,08)^{2-4} = 20.000(1 + 0,08)^{-2} = \\ &= \frac{20.000}{(1 + 0,08)^2} = 17.146,78 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

y, de forma semejante, el equivalente de las 10.000 u.m. disponibles en el momento 1 es, en el momento 3:

$$Q_{3/1} = 10.000(1 + 0,08)^{3-1} = 10.000(1 + 0,08)^2 = 11.664 \text{ u.m.}$$

De este modo se han efectuado los cálculos para obtener los resultados de la tabla 4.2.

TABLA 4.2

Capitales	Momentos en los que son disponibles	Capitales equivalentes en los momentos				
		0	1	2	3	6
15.000	0	$15.000(1,08)^0 = 15.000$	$15.000(1,08)^1 = 16.200$	$15.000(1,08)^2 = 17.496$	$15.000(1,08)^3 = 18.895,68$	$15.000(1,08)^6 = 23.803,11$
10.000	1	$10.000(1,08)^{-1} = 9.259,26$	$10.000(1,08)^0 = 10.000$	$10.000(1,08)^1 = 10.800$	$10.000(1,08)^2 = 11.664$	$10.000(1,08)^5 = 14.693,28$
12.000	2	$12.000(1,08)^{-2} = 10.288,07$	$12.000(1,08)^{-1} = 11.111,11$	$12.000(1,08)^0 = 12.000$	$12.000(1,08)^1 = 12.960$	$12.000(1,08)^4 = 16.325,87$
18.000	3	$18.000(1,08)^{-3} = 14.288,98$	$18.000(1,08)^{-2} = 15.432,10$	$18.000(1,08)^{-1} = 16.666,67$	$18.000(1,08)^0 = 18.000$	$18.000(1,08)^3 = 22.674,82$
22.000	4	$20.000(1,08)^{-4} = 14.700,60$	$20.000(1,08)^{-3} = 15.876,64$	$20.000(1,08)^{-2} = 17.146,78$	$20.000(1,08)^{-1} = 18.518,52$	$20.000(1,08)^2 = 23.328$

Problema
8

El efecto de la inflación y del riesgo: la rentabilidad requerida

Suponga usted que no puede colocar sus capitales a ninguna tasa de interés, que existe un tipo de inflación anual acumulativo del 9 por 100 y que alguien que debería pagarle ahora 1.000 u.m. le pide que le retrase el pago un año. ¿Qué cantidad le exigiría? ¿Y si el pago se retrasase dos años? ¿Y si fueran tres los años de aplazamiento?

RESOLUCIÓN

Por término medio, los bienes y servicios que ahora podrían adquirirse con 1.000 u.m. dentro de un año valdrán

$$1.000 + 0,09 \times 1.000 = 1.000(1 + 0,09) = 1.090 \text{ u.m.}$$

es decir, un 9 por 100 más.

Dentro de dos años los precios habrán subido, por término medio, otro 9 por 100 sobre los existentes al final del primer año, por lo que, lo que hoy podría adquirirse con 1.000 u.m., dentro de dos años valdrá, por término medio:

$$\begin{aligned} 1.090 + 0,09 \times 1.090 &= (1.090)(1 + 0,09) = [1.000(1 + 0,09)](1 + 0,09) = \\ &= 1.000(1 + 0,09)^2 = 1.188,1 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

De forma semejante, dentro de tres años se requerirán:

$$1.000(1 + 0,09)^3 = 1.295,03 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, para mantener la capacidad adquisitiva se exigirían 1.090 u.m. si el pago se retrasa un año, 1.188,1 u.m. si se retrasa dos y 1.295,03 si son tres los años de aplazamiento.

Problema
9

El efecto de la inflación y del riesgo: la rentabilidad requerida

Suponga usted que alguien debe pagarle 1.188,1 u.m. dentro de dos años y que le ofrece la posibilidad de efectuar dicho pago ahora o dentro de un año o dentro de tres. ¿Qué cantidades le exigiría usted, como mínimo, para mantener

su capacidad adquisitiva, si la tasa de inflación anual acumulativa es del 9 por 100? Haga abstracción de la posibilidad de invertir los capitales líquidos.

RESOLUCIÓN

Con 1.188,1 u.m. podrían adquirirse, dentro de dos años, los mismos bienes y servicios que con

$$1.188,1(1 + 0,09) = 1.295,03 \text{ u.m.}$$

dentro de tres años, y los mismos que con

$$\frac{1.188,1}{1 + 0,09} = 1.090 \text{ u.m. dentro de un año}$$

o con

$$\frac{1.188,1}{(1 + 0,09)^2} = 1.000 \text{ u.m. hoy}$$

Por consiguiente, para mantener la capacidad adquisitiva se exigirían 1.000 u.m. hoy, 1.090 dentro de un año y 1.295,03 dentro de tres años.

Problema 10

El efecto de la inflación y del riesgo: la rentabilidad requerida

Sean los capitales disponibles en los momentos que se indican reflejados en la tabla 4.3.

TABLA 4.3

Capitales (u.m.)	Momentos
15.000	Actual (0)
10.000	Dentro de 1 año
12.000	Dentro de 2 años
18.000	Dentro de 3 años
20.000	Dentro de 4 años

¿Cuáles son sus equivalentes actualmente y dentro de uno, dos, tres y seis años desde el punto de vista del mantenimiento de la capacidad adquisitiva? La tasa de inflación anual acumulativa es del 10 por 100.

RESOLUCIÓN

Como puede comprobarse en los ejercicios anteriores, la expresión general que es aplicable para determinar el capital disponible en el momento s que tiene la misma capacidad adquisitiva que otro capital que importa Q , u.m. y que es disponible en el momento t es

$$Q_{st} = Q_t(1 + g)^{t-s}$$

donde g es la tasa de inflación anual acumulativa en tanto por uno. Por ejemplo, el equivalente, en relación a la inflación, de las 20.000 u.m. disponibles en el momento 4 (final del cuarto año) es, en el momento 2:

$$\begin{aligned} Q_{24} &= 20.000(1 + 0,10)^{2-4} = 20.000(1 + 0,10)^{-2} = \\ &= \frac{20.000}{(1 + 0,10)^2} = 16.528,93 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

y, de forma semejante, el equivalente de las 10.000 u.m. disponibles en el momento 1 es, en el momento 6:

$$Q_{61} = 10.000(1 + 0,10)^{6-1} = 16.105,1 \text{ u.m.}$$

De esta manera se han efectuado los cálculos para obtener los resultados de la tabla 4.4.

TABLA 4.4

Capitales	Momentos en los que son disponibles	Capitales equivalentes en los momentos				
		0	1	2	3	6
15.000	0	$15.000(1,1)^0 = 15.000$	$15.000(1,1) = 16.500$	$15.000(1,1)^2 = 18.150$	$15.000(1,1)^3 = 19.965$	$15.000(1,1)^6 = 26.573,42$
10.000	1	$10.000(1,1)^{-1} = 9.090,91$	$10.000(1,1)^0 = 10.000$	$10.000(1,1) = 11.000$	$10.000(1,1)^2 = 12.100$	$10.000(1,1)^5 = 16.105,1$
12.000	2	$12.000(1,1)^{-2} = 9.917,36$	$12.000(1,1)^{-1} = 10.909,09$	$12.000(1,1)^0 = 12.000$	$10.000(1,1) = 13.200$	$12.000(1,1)^4 = 17.569,2$
18.000	3	$18.000(1,1)^{-3} = 13.523,67$	$18.000(1,1)^{-2} = 14.876,03$	$18.000(1,1)^{-1} = 16.363,64$	$18.000(1,1)^0 = 18.000$	$18.000(1,1)^3 = 23.958$
20.000	4	$20.000(1,1)^{-4} = 13.660,27$	$20.000(1,1)^{-3} = 15.026,20$	$20.000(1,1)^{-2} = 16.528,93$	$20.000(1,1)^{-1} = 18.181,82$	$20.000(1,1)^2 = 24.200$

**Problema
11**

El efecto de la inflación y del riesgo: la rentabilidad requerida

Sean los capitales disponibles en los momentos que se indican reflejados en la tabla 4.5.

TABLA 4.5

Capitales (u.m.)	Momentos
10.000	Dentro de 11 años
20.000	Dentro de 12 años
30.000	Dentro de 13 años
40.000	Dentro de 14 años

¿Cuáles son sus equivalentes dentro de 10, 12, 14 y 16 años, teniendo en cuenta tanto la tasa de inflación, que es del 9 por 100 anual acumulativo, como el tipo de interés, que es del 10 por 100, también anual y acumulativo?

RESOLUCIÓN

A la vista de las soluciones de los ejercicios anteriores resulta ya obvio que para determinar el capital disponible en el momento s , que es equivalente a otro capital que importa Q_t u.m. y que es disponible en el momento t , ha de aplicarse la expresión general

$$Q_{st} = Q_t(1+i)^{s-t}(1+g)^{s-t}$$

o, lo que es lo mismo,

$$Q_{st} = Q_t[(1+i)(1+g)]^{s-t} = Q_t(1+i+g+ig)^{s-t} = Q_t(1+k)^{s-t}$$

donde

$$k = i + g + ig$$

Aplicando el tipo calculatorio k se tienen en cuenta tanto la inflación como el interés del dinero. Dicho de otro modo, si en ausencia de inflación la rentabilidad requerida es i , cuando existe una inflación igual al g por uno la rentabilidad requerida ha de ser igual a ese tipo k .

En este caso:

$$k = 0.1 + 0.09 + 0.1 \times 0.09 = 0.199$$

Por ejemplo, el equivalente de las 40.000 u.m. disponibles en el momento 14 (dentro de catorce años) es, en el momento 10:

$$Q_{10/14} = 40.000(1 + 0,199)^{10-14} = 40.000(1,199)^{-4} = \frac{40.000}{1,199^4} = 19.354,56 \text{ u.m.}$$

y, de forma semejante, el equivalente de las 10.000 u.m. disponibles dentro de once años es, en el momento 16 (final del decimosexto año):

$$Q_{16/11} = 10.000(1 + 0,199)^{16-11} = 10.000(1,199)^5 = 24.779,69$$

De este modo se han efectuado los cálculos precisos para obtener los resultados recogidos en la tabla 4.6.

Otra forma de resolverlo es, obviamente, descontar sucesivamente por el interés y por la inflación. Por ejemplo, las 30.000 u.m. disponibles en el momento 13 tienen como equivalente al final del décimo año (momento 10):

$$\frac{30.000}{(1 + 0,10)^3(1 + 0,09)^3} = 17.404,59 \text{ u.m.}$$

TABLA 4.6

Capitales	Momentos	Capitales equivalentes en los momentos			
		10	12	14	16
10.000	11	$10.000(1,199)^{-1} = 8.340,28$	$10.000(1,199) = 11.990$	$10.000(1,199)^3 = 17.236,84$	$10.000(1,199)^5 = 24.779,69$
20.000	12	$20.000(1,199)^{-2} = 13.912,07$	$20.000(1,199)^0 = 20.000$	$10.000(1,199)^3 = 17.236,84$	$20.000(1,199)^4 = 41.333,93$
30.000	13	$30.000(1,199)^{-3} = 17.404,59$	$30.000(1,199)^{-1} = 25.020,85$	$10.000(1,199)^3 = 17.236,84$	$30.000(1,199)^3 = 51.710,51$
40.000	14	$40.000(1,199)^{-4} = 19.354,56$	$40.000(1,199)^{-2} = 27.824,13$	$10.000(1,199)^3 = 17.236,84$	$40.000(1,199)^2 = 57.504,04$

De forma semejante, el equivalente, en el momento 12, de las 40.000 u.m. disponibles en el momento 14, es

$$\frac{40.000}{(1 + 0,10)^2(1 + 0,09)^2} = 27.824,13 \text{ u.m.}$$

Problema
12

El efecto de la inflación y del riesgo: la rentabilidad requerida

¿Qué tipo de interés ha de aplicar un banco, en los préstamos que concede, si desea obtener un tipo de rentabilidad neto de inflación del 12 por 100 anual acumulativo y la tasa media de crecimiento de los precios es del 9 por 100, también anual y acumulativa?

RESOLUCIÓN

El tipo que habrá de aplicarse será:

$$k = 0,12 + 0,09 + 0,12 \times 0,09 = 0,2208 \text{ por uno anual} = 22,08 \text{ por 100 anual}$$

Cobrando una «tasa nominal» del 22,08 por 100 anual, el banco obtendrá una rentabilidad del 12 por 100 anual «en términos reales». Dicho en otros términos, al fin de cada año podrá adquirir, por término medio, un 12 por 100 más de bienes y servicios del que podría adquirir al comienzo de cada año con el importe del préstamo concedido y sus intereses acumulados. Su rentabilidad es de un 12 por 100 anual en términos de «capacidad adquisitiva».

4.2. MÉTODOS ESTÁTICOS DE SELECCIÓN DE INVERSIONES

Problema
13

Métodos estáticos. Plazo de recuperación

Sean dos proyectos de inversión cuyos desembolsos iniciales y flujos de caja, generados en los distintos años de su duración, vienen recogidos en la tabla 4.7.

TABLA 4.7

Proyectos	Flujos de caja (u.m.)				Desembolsos iniciales (u.m.)
	Primer año	Segundo año	Tercer año	Cuarto año	
A	200	1.800	100	100	2.000
B	400	1.000	600	12.000	2.000

¿Qué inversión es preferible según el criterio del *pay-back*?

RESOLUCIÓN

Es preferible la primera inversión, pues las 2.000 u.m. invertidas se recuperarán en dos años (200 u.m. el primer año y 1.800 el segundo), en tanto que en la inversión *B* se precisan tres años para recuperar el importe invertido ($400 + 1.000 + 600 = 2.000$). Como puede observarse, en el criterio del *pay-back* prima la liquidez de las inversiones sobre su rentabilidad. Este método de selección no tiene en cuenta el valor de los flujos de caja generados con posterioridad al plazo de recuperación (12.000 u.m. en la inversión *B* y sólo 100 u.m. en los años tercero y cuarto del proyecto *A*). Además, para determinar el *pay-back* no se actualizan los flujos de caja, sino que se les suma sin tener en cuenta que son magnitudes heterogéneas por referirse a distintos momentos del tiempo.

Problema
14

Métodos estáticos. Plazo de recuperación

Sean las dos inversiones (*X* e *Y*) definidas en la tabla 4.8.

TABLA 4.8

	Inversión X	Inversión Y
Desembolso inicial	1.000	1.000
Flujo de caja del primer período	1.000	100
Flujo de caja del segundo período	0	900
Flujo de caja del tercer (último) período	0	10.000

¿Cuál de ellas es preferible según el criterio del plazo de recuperación? Coméntese la solución del ejercicio.

RESOLUCIÓN

En la inversión *X* las 1.000 u.m. del desembolso inicial se recuperan con el flujo de caja del primer período. Por consiguiente, su plazo de recuperación es de un período.

En la inversión *Y* se recuperan 100 u.m. en el primer período y 900 en el segundo. Por tanto, su plazo de recuperación es de dos períodos.

Conforme a este criterio, la inversión *X* es preferible a la inversión *Y*. Sin embargo, es evidente que, conforme a cualquier criterio de valor o rentabilidad,

la inversión Y sería preferida a la X. El método del plazo de recuperación es un criterio de liquidez, y las inversiones líquidas no tienen por qué ser siempre las más rentables.

**Problema
15**

Métodos estáticos. Plazo de recuperación

Un proyecto de inversión tiene un desembolso inicial de 2.000 u.m. y genera anualmente un flujo de caja constante e igual a 500 u.m. ¿Cuánto vale su *pay-back*?

RESOLUCIÓN

$$P = \frac{2.000}{500} = 4 \text{ años}$$

Si cada año genera un flujo de caja de 500 u.m. y su duración es igual o mayor que cuatro años, éste será el período al cabo del cual se recuperarán las 2.000 u.m. invertidas. Obsérvese que el enunciado del problema estaría completo si hiciese referencia a la duración de la inversión, pues, si ésta fuera inferior a cuatro años, la inversión no se recuperaría nunca y no tendría *pay-back*.

**Problema
16**

Métodos estáticos. Métodos del flujo de caja total, y medio anual, por unidad monetaria comprometida

¿Cuál de los proyectos de inversión del problema 13 de esta parte es preferible según los criterios de comparación de réditos basados en la rentabilidad total del proyecto y en una base anual (criterios de flujo de caja total, y anual, por unidad monetaria comprometida)?

RESOLUCIÓN

Un criterio de comparación de réditos es el que trata de estimar la rentabilidad global del proyecto determinando el flujo de caja generado, por cada proyecto, por unidad monetaria invertida. Para el proyecto A se tendría:

$$r'_A = \frac{200 + 1.800 + 100 + 100}{2.000} = 1,10 \text{ por uno} = 110 \text{ por } 100$$

y para el B:

$$r'_B = \frac{400 + 1.000 + 600 + 12.000}{2.000} = 7 \text{ por uno} = 700 \text{ por } 100$$

Por consiguiente, según este método, es preferible el proyecto B. Este procedimiento tiene varios inconvenientes. En primer lugar, no tiene en cuenta el momento en que se generan los distintos flujos de caja, y, así, suma, en el numerador, magnitudes que son heterogéneas entre sí. En segundo lugar, no calcula una verdadera rentabilidad, pues, para ello, sería preciso que restara, en el numerador, la cantidad invertida; por ejemplo, si se invierten 100 u.m. y se obtiene, en contrapartida, 125, se diría que se ha obtenido una rentabilidad del 25 por 100, o del 0,25 por uno, que resulta de restar, de las 125, las 100 invertidas, y dividir el resultado entre el importe de la inversión $((125 - 100)/100 = 0,25 \text{ por uno} = 25 \text{ por } 100)$. En tercer lugar, no va referido a una base temporal, lo que no tiene sentido en economía, donde estamos acostumbrados a hablar de rentabilidades anuales, semestrales, trimestrales, etc. Para subsanar este último inconveniente y obtener un rédito anual, basta dividir los resultados del criterio anterior entre los años que duran las inversiones, obteniéndose:

$$r''_A = \frac{200 + 1.800 + 100 + 100}{2.000 \times 4} = 0,275 \text{ por uno anual} = 27,50 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

$$r''_B = \frac{400 + 1.000 + 600 + 12.000}{2.000 \times 4} = 1,75 \text{ por uno anual} = 175 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Este criterio adolece de los mismos inconvenientes que el anterior, salvo que viene referido a una base anual. Sin embargo, como se verá en un próximo problema, el procedimiento empleado para tal referencia introduce importantes inconvenientes.

Problema 17

Métodos estáticos. Métodos del flujo de caja total, y medio anual, por unidad monetaria comprometida

Sean dos proyectos de inversión cuyos desembolsos iniciales y flujos de caja, generados en los distintos años de su duración, vienen recogidos en la tabla 4.9, en la que Q_t representa el flujo de caja del año t ($t = 1, 2, 3, 4$).

TABLA 4.9

Proyectos	Desembolsos iniciales	Flujos de caja			
		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
A	2.000	3.000	20	20	20
B	2.000	20	20	20	3.000

Se desea jerarquizarlos, por orden de preferencia, según los criterios de comparación de réditos de flujo de caja total, y flujo de caja anual, por unidad monetaria comprometida.

RESOLUCIÓN

$$r'_A = \frac{3.000 + 20 + 20 + 20}{2.000} = 1,53 \text{ por uno} = 153 \text{ por } 100$$

$$r'_B = \frac{20 + 20 + 20 + 3.000}{2.000} = 1,53 \text{ por uno} = 153 \text{ por } 100$$

$$r''_A = \frac{3.000 + 20 + 20 + 20}{2.000 \times 4} = 0,3825 \text{ por uno anual} = 38,25 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

$$r''_B = \frac{20 + 20 + 20 + 3.000}{2.000 \times 4} = 0,3825 \text{ por uno anual} = 38,25 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Dado que no tienen en cuenta el momento en que se generan los flujos, los dos proyectos son indiferentes según ambos criterios. Sin embargo, cualquier persona preferiría el proyecto A —en el que la mayor parte del flujo total se genera con anterioridad al B— al menos por dos motivos:

- Las 3.000 u.m. podrían ser colocadas a cierto tipo de interés desde el período uno, con lo que en el cuarto se tendrían tales unidades monetarias más sus intereses acumulados.
- La inflación conduce a preferir obtener los flujos de caja lo antes posible, pues, con el paso del tiempo, su valor real es menor.

Problema
18

Métodos estáticos. Métodos del flujo de caja total, y medio anual, por unidad monetaria comprometida

Sean dos proyectos de inversión cuyos desembolsos iniciales y flujos de caja, generados en los distintos años de sus duraciones, vienen recogidos en la tabla 4.10, en la que Q_t representa el flujo de caja del año t ($t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

TABLA 4.10

Proyectos	Desembolsos Iniciales	Flujos de caja					
		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
A	2.000	1.000	1.400	1.600	—	—	—
B	2.000	1.000	1.400	1.600	0,5	0,5	0,5

¿Cuál es preferible según el criterio de comparación de réditos del flujo neto de caja medio anual por unidad monetaria comprometida?

RESOLUCIÓN

$$r''_A = \frac{1.000 + 1.400 + 1.600}{2.000 \times 3} = 0,667 \text{ por uno anual} = 66,67 \text{ por 100 anual}$$

$$r''_B = \frac{1.000 + 1.400 + 1.600 + 0,5 + 0,5 + 0,5}{2.000 \times 6} = 0,3335 \text{ por uno anual} = 33,35 \text{ por 100 anual}$$

Conforme a este criterio, es preferible el proyecto A. Sin embargo, como es obvio, ambos son prácticamente equivalentes y, en cualquier caso, es preferible el segundo, el cual genera los mismos flujos que el primero los tres primeros años y continúa generando flujos los tres siguientes, por pequeños que sean estos últimos.

Este criterio siempre conduce a preferir las inversiones de corta duración y penaliza a aquellas que tienen una vida más prolongada.

Problema
19

Métodos estáticos. Comparación de costes

Una empresa fabricante de productos deportivos piensa introducir un nuevo modelo de raqueta de tenis fabricada con materiales plásticos ultraligeros. Para ello puede utilizar cualquiera de los dos procedimientos de fabricación cuyas características más relevantes se recogen en la tabla 4.11.

TABLA 4.11

Procedimientos	Costes fijos anuales	Costes variables por raqueta fabricada y vendida
Invertir en factoría tipo A	1.000.000 u.m.	2.000 u.m.
Invertir en factoría tipo B	250.000 u.m.	2.500 u.m.

Como puede observarse, la factoría tipo A tiene mayor tamaño y, por consiguiente, sus costes fijos, o cargas de estructura, son más elevados que los de la tipo B, cuya dimensión es más reducida. Sin embargo, la factoría grande fabrica los productos con menores requerimientos de costes variables que la pequeña. ¿Qué inversión recomendaría usted a esta empresa?

RESOLUCIÓN

Supuesto que el volumen anual de fabricación y venta de raquetas fuera V , los costes totales serían, en caso de invertir en la fábrica grande:

$$C_{TA} = 1.000.000 + 2.000 \times V$$

y si lo hiciera en la pequeña:

$$C_{TB} = 250.000 + 2.500 \times V$$

Siguiendo el criterio de comparación de costes, se observa que los de ambas inversiones coinciden para aquel volumen de ventas, X , para el cual:

$$1.000.000 + 2.000X = 250.000 + 2.500X$$

de donde se deduce que

$$X = \frac{750.000}{500} = 1.500 \text{ raquetas}$$

Si el volumen anual de fabricación y ventas que espera esta empresa es inferior a 1.500 raquetas, habrá de invertir en una fábrica pequeña. Si, por el contrario, la demanda esperada supera esta cantidad, es preferible aprovechar las ventajas de la fábrica A, que tiene unos costes variables más bajos, dado que, aunque sus costes fijos son elevados, al repartirse entre gran número de unidades, comporta un costo total unitario más pequeño que el de la fábrica pequeña. En la tabla 4.12 se recogen los resultados obtenidos para distintos supuestos en cuanto al volumen anual de fabricación y ventas.

b) $VAN = -\text{Inversión} + \text{Desinversión} = -10.000 + 9.074,86 = -925,14$.

c) La inversión no es efectuable, pues lo que el inversor adquiere realizando la inversión (futuros flujos de caja) vale, en términos actuales, 9.074,86 u.m. y ha de pagar, por ello, 10.000 u.m. Dicho de otro modo, el VAN de la inversión es negativo.

Problema
24

VAN

Sea un proyecto de inversión que requiere un desembolso inicial de 5.000 u.m. y que genera los siguientes flujos netos de caja:

Primer año:	2.000 u.m.
Segundo año:	3.000 u.m.
Tercer año:	4.000 u.m.

Si no existiera inflación se aplicaría un tipo de descuento del 4 por 100 anual, pero existe una tasa de inflación del 8 por 100 anual acumulativo. ¿Es efectuable este proyecto de inversión según el criterio del valor actual neto?

RESOLUCIÓN

Rentabilidad requerida = $0,04 + 0,08 + 0,04 \times 0,08 = 0,1232$ por uno:

$$VAN = -5.000 + \frac{2.000}{1,1232} + \frac{3.000}{1,1232^2} + \frac{4.000}{1,1232^3} = 1.981,46$$

Dado que el VAN es positivo, la inversión es efectuable.

Importa recordar, aunque resulte obvio, que el cálculo también podría haberse realizado, sin necesidad de determinar el tipo calculatorio aplicable con inflación, del siguiente modo:

$$VAN = -5.000 + \frac{2.000}{(1,04)(1,08)} + \frac{3.000}{(1,04)^2(1,08)^2} + \frac{4.000}{(1,04)^3(1,08)^3} = 1.981,46$$

Problema
25

Tasa de valor actual

Cierto proyecto de inversión requiere un desembolso inicial de 10.000 u.m. y genera los siguientes flujos de caja:

Primer año:	5.000 u.m.
Segundo año:	6.000 u.m.
Tercer año:	6.000 u.m.
Cuarto año:	8.000 u.m.
Quinto año:	8.000 u.m.

En ausencia de inflación la rentabilidad requerida sería del 5 por 100, pero existe una tasa de crecimiento medio de los precios del 8 por 100 anual acumulativo. ¿Cuánto vale la tasa de valor actual de esta inversión?

RESOLUCIÓN

Tipo de descuento considerada la inflación =

$$= 0,05 + 0,08 + 0,05 \times 0,08 = 0,134 \text{ por uno}$$

$$VAN = -10.000 + \frac{5.000}{1,134} + \frac{6.000}{1,134^2} + \frac{6.000}{1,134^3} + \frac{8.000}{1,134^4} + \frac{8.000}{1,134^5} = 12.293,14 \text{ u.m.}$$

El valor actual neto de esta inversión representa un 122,93 por 100 sobre su desembolso inicial:

$$\begin{aligned} \text{Tasa de valor actual} = T &= \frac{VAN}{\text{Desembolso inicial}} = \frac{12.293,14}{10.000} = \\ &= 1,2293 \text{ por uno} = 122,93 \text{ por 100} \end{aligned}$$

Problema 26

VAN y tasa de valor actual

Se desea jerarquizar, por orden de preferencia, según los criterios del VAN y de la tasa de valor actual, los proyectos de inversión cuyos desembolsos iniciales y flujos de caja, generados en los distintos años de su duración, vienen recogidos en la tabla 4.14.

La rentabilidad requerida es la misma para todos los proyectos y, teniendo ya en cuenta la tasa de inflación, es del 10 por 100. ¿Qué proyectos habría de efectuar un inversor que dispone de 40.000 u.m. para realizar inversiones si éstas no se pueden repetir (ninguna puede ser realizada varias veces)?

o, lo que es lo mismo,

$$C_{TM} = 29.500.000 + V_2 \times 1.150 = 29.750.000 + V_2 \times 1.200$$

de donde se deduce que

$$V_2 = -5.000$$

Sólo si las ventas fueran negativas, lo cual es económicamente imposible, podría llegar a ser preferible la inversión en planta pequeña. Para cualquier posible volumen de ventas, los costes más bajos corresponden a la planta mediana hasta 35.000 u.f. anuales; a partir de ese nivel, que resulta sustancialmente elevado, en relación a las 5.000 u.f. asignadas por la empresa, sería preferible la inversión en una planta grande.

4.3. MÉTODOS DINÁMICOS DE SELECCIÓN DE INVERSIONES

Problema
22

VAN

Determinar si es efectuable, según el criterio del valor actual (VAN), un proyecto de inversión que precisa un desembolso inicial de 2.000 u.m. y que genera unos flujos netos de caja de 200 u.m. el primer año, 300 el segundo, 500 el tercero y 1.200 el cuarto, y último, de su duración. La rentabilidad que se requeriría si no existiera inflación, sería el 8 por 100. Existe una tasa de inflación del 9 por 100 anual acumulativa.

RESOLUCIÓN

Rentabilidad requerida con inflación = $0,08 + 0,09 + 0,08 \times 0,09 = 0,1772$ por uno.

El valor actual de los flujos netos, es decir, el capital equivalente a todos ellos en el momento 0, será:

$$\frac{200}{1,1772} + \frac{300}{(1,1772)^2} + \frac{500}{(1,1772)^3} + \frac{1.200}{(1,1772)^4} = 1.317,72 \text{ u.m.}$$

El valor actual de inversión, es decir, el valor, en términos actuales, de lo que el inversor adquiere, pagando 2.000 u.m., es de 1.317,72 u.m. Dado que am-

bas magnitudes (la desinversión, es decir, las 1.317,72 u.m. que el inversor va a percibir, y las 2.000 u.m. que ha de pagar por ello, o inversión) se encuentran referidas al mismo momento del tiempo (momento 0, en el que se ha de efectuar el desembolso), son comparables. Obviamente, no parece razonable pagar 2.000 u.m. por algo que, en términos actuales, vale 1.317,72 u.m. Deduciendo del valor actual de la inversión (1.317,72 u.m.) el desembolso preciso (2.000 u.m.), se obtiene su valor actual *neto*:

$$VAN = -2.000 + 1.317,72 = -682,28$$

Dado que su valor actual neto es negativo, la inversión no es efectuable. Un proyecto sólo es viable, según este criterio, cuando su *VAN* es positivo, es decir, cuando el valor actual de la desinversión (flujos netos de caja) es mayor que la inversión (desembolso inicial).

**Problema
23**

VAN

Sea un proyecto de inversión que requiere un desembolso inicial de 10.000 u.m. y que genera los siguientes flujos de caja:

Primer año:	2.000 u.m.
Segundo año:	3.000 u.m.
Tercer año:	4.000 u.m.
Cuarto año:	3.000 u.m.

La rentabilidad requerida en ausencia de inflación sería un 5 por 100 anual, pero la tasa de inflación anual acumulativa es del 6 por 100. Se desea determinar:

- El valor actual de los flujos de caja.
- El valor actual neto de la inversión.
- Si la inversión es, o no, efectuable, según este criterio.

RESOLUCIÓN

- Rentabilidad requerida: $0,05 + 0,06 + 0,05 \times 0,06 = 0,113$ por uno.
Valor actual de los flujos de caja =

$$\frac{2.000}{1,113} + \frac{3.000}{(1,113)^2} + \frac{4.000}{(1,113)^3} + \frac{3.000}{(1,113)^4} = 9.074,86 \text{ u.m.}$$

RESOLUCIÓN

En las inversiones en las que, inicialmente, se produce un desembolso o salida de caja (A) y, posteriormente, todos los flujos netos de caja (cobros - pagos) son positivos (Q_1, Q_2, \dots, Q_n), el VAN evoluciona con el tipo de descuento (k) siguiendo una curva semejante a la de la figura 4.3.

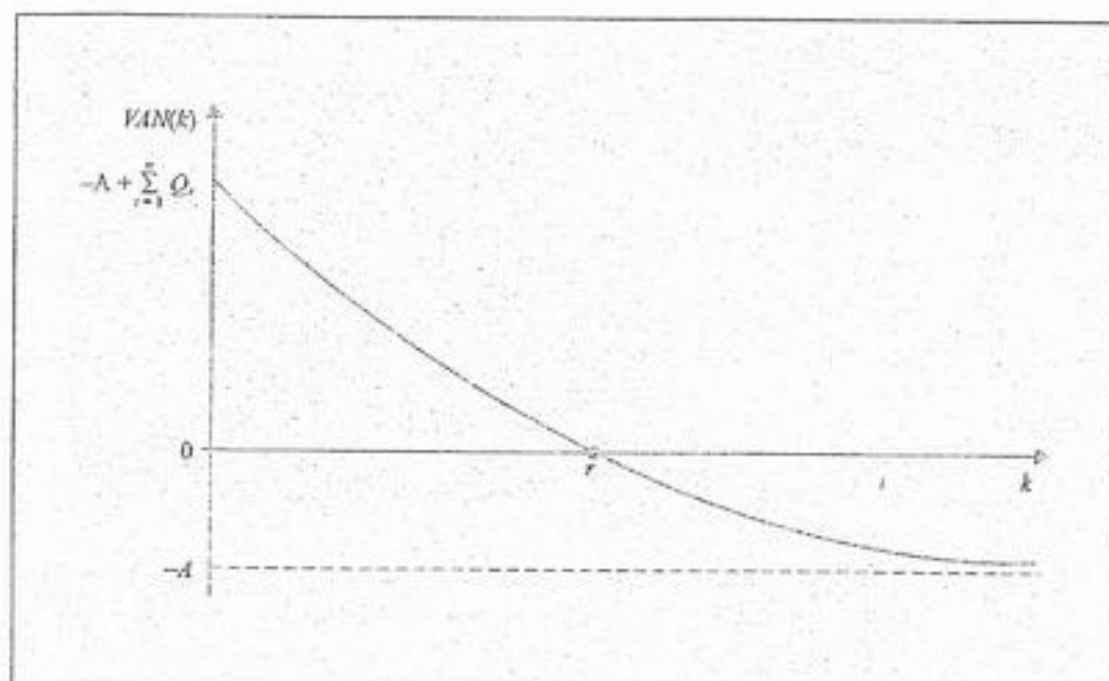


Figura 4.5.

En efecto, la expresión del VAN sería:

$$VAN_k = -A + \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k)^n}$$

Cuando k tiende a infinito, el VAN tiende a un importe negativo ($-A$). A medida que se va reduciendo, el VAN crece y toma el máximo valor ($-A + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$) cuando k toma el mínimo valor que puede alcanzar, es decir, cuando k vale cero. No tendría sentido analizar una inversión en la que la suma aritmética de los flujos de caja ($Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$) es más pequeña que el desembolso inicial (A), pues tal inversión es, claramente, no efectuable cualquiera que sea el tipo de descuento. Por consiguiente, en las inversiones «analizables» el importe $-A + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ ha de ser positivo. Por tanto, en estas inversiones, a medida que crece el tipo de descuento desde cero hacia infinito, el VAN se reduce desde valores positivos hasta valores negativos, existiendo,

siempre, un valor intermedio de k , al que se denomina r , que hace que el VAN valga cero. Para tipos de descuento inferiores a r , el VAN será positivo y, por consiguiente, la inversión será efectuable con arreglo a este criterio. Para tipos superiores a r , el VAN será negativo y la inversión no será efectuable.

En este ejercicio, en concreto, deduciendo los pagos de los cobros, se obtienen los siguientes flujos netos de caja:

Primer año:	$Q_1 = 500$
Segundo año:	$Q_2 = 1.000$
Tercer año:	$Q_3 = 500$
Cuarto año:	$Q_4 = 1.000$

Igualando el VAN a cero se obtendrá el valor de r :

$$-1.500 + \frac{500}{(1+r)} + \frac{1.000}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{1.000}{(1+r)^4} = 0$$

Dado que r no puede ser despejada en la anterior expresión, ha de probarse con distintos valores hasta encontrar aquel que la cumple, o bien utilizar fórmulas aproximadas. La siguiente expresión proporciona una aproximación por defecto, es decir, que el verdadero valor de r es superior al que resulta de aplicarla:

$$r^* = (S/A)^{(S/M)} - 1$$

donde:

S (de suma) es igual a $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$.

M (de multiplicación) es igual a $Q_1 \cdot 1 + Q_2 \cdot 2 + Q_3 \cdot 3 + \dots + Q_n \cdot n$.

Otra aproximación, en este caso por exceso, es la siguiente:

$$r^{**} = (S/A)^{(D/S)} - 1$$

siendo:

D (de división) igual a $Q_1/1 + Q_2/2 + Q_3/3 + \dots + Q_n/n$

Se cumple que:

$$r^* \leq r \leq r^{**}$$

En este ejemplo resulta:

$$S = 500 + 1.000 + 500 + 1.000 = 3.000$$

TABLA 4.14

Proyectos	Flujos netos de caja (u.m.)					Desembolsos iniciales (u.m.)
	Primer año	Segundo año	Tercer año	Cuarto año	Quinto año	
A	2.000	2.000	3.500	3.500	3.500	10.000
B	2.000	2.000	4.000	4.000	4.000	11.000
C	3.000	3.000	4.000	4.000	4.000	12.000
D	2.000	2.000	15.000	—	—	13.000
E	2.000	3.000	5.000	5.000	5.000	14.000
F	4.000	4.000	4.500	4.500	4.500	15.000

RESOLUCIÓN

Denominando T a la tasa de valor actual:

$$VAN_A = -10.000 + \frac{2.000}{1,1} + \frac{2.000}{1,1^2} + \frac{3.500}{1,1^3} + \frac{3.500}{1,1^4} + \frac{3.500}{1,1^5} = 664,45 \text{ u.m.}$$

$$T_A = \frac{664,45}{10.000} = 0,0664 \text{ por uno}$$

$$VAN_B = -11.000 + \frac{2.000}{1,1} + \frac{2.000}{1,1^2} + \frac{4.000}{1,1^3} + \frac{4.000}{1,1^4} + \frac{4.000}{1,1^5} = 692,07 \text{ u.m.}$$

$$T_B = \frac{692,07}{11.000} = 0,0629 \text{ por uno}$$

$$VAN_C = -12.000 + \frac{3.000}{1,1} + \frac{3.000}{1,1^2} + \frac{4.000}{1,1^3} + \frac{4.000}{1,1^4} + \frac{4.000}{1,1^5} = 1.427,61 \text{ u.m.}$$

$$T_C = \frac{1.427,61}{12.000} = 0,1190 \text{ por uno}$$

$$VAN_D = -13.000 + \frac{2.000}{1,1} + \frac{2.000}{1,1^2} + \frac{15.000}{1,1^3} = 1.740,79 \text{ u.m.}$$

$$T_D = \frac{1.740,79}{13.000} = 0,1339 \text{ por uno}$$

$$VAN_E = -14.000 + \frac{2.000}{1,1} + \frac{3.000}{1,1^2} + \frac{5.000}{1,1^3} + \frac{5.000}{1,1^4} + \frac{5.000}{1,1^5} = 573,77 \text{ u.m.}$$

$$T_E = \frac{573,77}{14.000} = 0,0410 \text{ por uno}$$

$$VAN_F = -15.000 + \frac{4.000}{1,1} + \frac{4.000}{1,1^2} + \frac{4.500}{1,1^3} + \frac{4.500}{1,1^4} + \frac{4.500}{1,1^5} = 1.190,77 \text{ u.m.}$$

$$T_F = \frac{1.190,77}{15.000} = 0,0794 \text{ por uno}$$

Las relaciones, por orden de preferencia, se establecerán ordenando los proyectos de mayor a menor VAN y T , como se indica en la tabla 4.15.

TABLA 4.15

Número de orden	Orden según VAN	Orden según T
1	<i>D</i>	<i>D</i>
2	<i>C</i>	<i>C</i>
3	<i>F</i>	<i>F</i>
4	<i>B</i>	<i>A</i>
5	<i>A</i>	<i>B</i>
6	<i>E</i>	<i>E</i>

Según cualquiera de los dos criterios, el inversor que dispone de 40.000 u.m. habría de efectuar las inversiones *D* (dedicándole 13.000 u.m.), *C* (12.000 u.m.) y *F* (15.000 u.m.). La suma de los desembolsos iniciales de estas tres inversiones preferibles coincide con el capital del inversor.

**Problema
27**

VAN y TIR

Cierta inversión requiere un desembolso inicial de 1.500 u.m. y genera los cobros y pagos en los sucesivos años de su duración, tal como se indica en la tabla 4.16.

TABLA 4.16

	Cobros (u.m.)	Pagos (u.m.)
Primer año	3.000	2.500
Segundo año	4.500	3.500
Tercer año	5.000	4.500
Cuarto año	3.000	2.000

¿Para qué tipos de descuento es efectuable o deja de serlo?

$$\begin{aligned}
 0 &= -3.000 + \frac{2.000}{1+r_A} + \frac{4.500}{(1+r_A)^2} \rightarrow \\
 &\rightarrow -3.000(1+r_A)^2 + 2.000(1+r_A) + 4.500 = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow 1+r_A = \frac{-2.000 \pm \sqrt{2.000^2 + 4 \times 3.000 \times 4.500}}{2(-3.000)} = \\
 &= \begin{cases} 1,602629 \rightarrow r_A = 0,6026 \\ -0,9359 \end{cases}
 \end{aligned}$$

y luego, observando que de las expresiones (1) y (2) se deduce que

$$(1+r_A) = (1+r_R)1,06$$

determinar r_R como sigue:

$$\begin{aligned}
 1+r_A &= 1,06 + 1,06r_R \rightarrow r_R = \frac{r_A - 0,06}{1,06} = \frac{0,6026 - 0,06}{1,06} = \\
 &= 0,5119 \text{ por uno anual} = 51,19 \text{ por 100 anual}
 \end{aligned}$$

Si no existiera inflación, la rentabilidad de esta inversión sería del 60,26 por 100 anual (r_A). Al considerar que existe una tasa de inflación del 6 por 100, dicha rentabilidad resulta ser realmente del 51,19 por 100.

En general, la relación existente entre ambas tasas puede expresarse como

$$r_A = r_R + g + r_R g$$

donde g es el tanto por uno de inflación anual acumulativo, o bien como

$$r_R = \frac{r_A - g}{1 + g}$$

Problema
29

TIR

La empresa P. S. A., revisa todos los años las expectativas de rentabilidad de sus inversiones. El pasado año previó, para su inversión en una nueva factoría, una rentabilidad real del 10 por 100 anual suponiendo que la tasa de inflación fuera del 5 por 100 acumulativo en cada uno de los años de la duración de di-

cha inversión. Pero en dicho año, que ahora termina, la inflación fue del 8 por 100 y se considera que continuará esta tasa durante toda la vida de la inversión. ¿Cuál es el nuevo tipo de rentabilidad revisado real?

RESOLUCIÓN

Conforme se expuso en el problema anterior,

$$r_R = \frac{r_A - g}{1 + g}$$

Para el 5 por 100 de inflación, previsto para el pasado año, se tendría:

$$0,10 = \frac{r_A - 0,05}{1,05} \rightarrow r_A = 0,155 \text{ por uno anual}$$

En ausencia de inflación, esta inversión generaría una rentabilidad del 15,5 por 100 anual. Para una inflación del 8 por 100 anual, su tasa de rentabilidad real sería:

$$r_R = \frac{0,155 - 0,08}{1,08} = 0,0694 \text{ por uno anual}$$

es decir, el 6,94 por 100 anual.

Problema 30

TIR

Si la tasa de inflación es el 10 por 100 anual, la rentabilidad anual real de una inversión es el 12 por 100. ¿Cuál será su rentabilidad real para una tasa de inflación del 20 por 100?

RESOLUCIÓN

$$0,12 = \frac{r_A - 0,10}{1 + 0,10}$$

de donde se deduce que

$$r_A = 0,232$$

$$M = 1 \times 500 + 2 \times 1.000 + 3 \times 500 + 4 \times 1.000 = 8.000$$

$$D = \frac{500}{1} + \frac{1.000}{2} + \frac{500}{3} + \frac{1.000}{4} = 1.416,66$$

$$r^* = \left(\frac{3.000}{1.500} \right)^{\frac{3.000}{8.000}} - 1 = (2)^{3/8} - 1 = 0,2968 \text{ por uno} = 29,68 \text{ por } 100$$

$$r^{**} = \left(\frac{3.000}{1.500} \right)^{\frac{1.416,66}{3.000}} - 1 = 0,3872 \text{ por uno} = 38,72 \text{ por } 100$$

El verdadero tipo de descuento que hace el VAN igual a cero (el que cumple la expresión [1]) se encontrará comprendido entre 0,2968 y 0,3872. Probando con distintos valores comprendidos entre estos extremos, en la expresión (1), se obtiene el siguiente valor de r :

$$r = 0,3197 \text{ por uno} = 31,97 \text{ por } 100$$

Para tipos de descuento inferiores al 31,97 por 100 anual, el VAN de esta inversión será positivo y, por consiguiente, la inversión será efectuable con arreglo a este criterio. Para tipos de descuento superiores a esa tasa, la inversión no será efectuable, por resultar un VAN negativo.

A ese valor, r , que hace que el VAN de una inversión sea nulo, se le denomina *tipo de rendimiento interno, tasa interna de rentabilidad (TIR), tasa de retorno* o, simplemente, *rentabilidad* de la inversión.

**Problema
28**

VAN y TIR

Sea una inversión que requiere un desembolso inicial de 3.000 u.m. y que dura dos años, en el primero de los cuales genera un flujo neto de caja de 2.000 u.m., siendo de 4.500 el generado en el segundo. Si existe una tasa de inflación del 6 por 100 anual acumulativo y la rentabilidad que se le requeriría en ausencia de inflación es del 8 por 100, ¿cuál es su valor actual neto? ¿Y su tasa de rentabilidad interna real (neta de inflación)?

RESOLUCIÓN

El VAN puede calcularse aplicando el nuevo tipo calculatorio (rentabilidad requerida en situación de inflación):

$$k = 0,08 + 0,06 + 0,08 \times 0,06 = 0,1448 \text{ por uno anual}$$

y haciendo:

$$VAN = -3.000 + \frac{2.000}{1,1448} + \frac{4.500}{1,1448} = 2.180,66 \text{ u.m.}$$

o bien, de forma directa:

$$VAN = -3.000 + \frac{2.000}{1,08 \times 1,06} + \frac{4.500}{1,08^2 \times 1,06^2} = 2.180,66 \text{ u.m.}$$

La tasa de rentabilidad interna es el tipo de descuento que hace el VAN igual a cero. El cálculo de la tasa real (neta de inflación), a la que se denominará r_R , podrá hacerse determinando el valor de r_R , que cumple:

$$0 = -3.000 + \frac{2.000}{(1+r_R) \times 1,06} + \frac{4.500}{(1+r_R)^2 \times 1,06^2} \quad (1)$$

obteniéndose, en este caso, una ecuación de segundo grado, que también puede expresarse del siguiente modo:

$$-3.000 \times 1,06^2(1+r_R)^2 + 2.000 \times 1,06(1+r_R) + 4.500 = 0$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} (1+r_R) &= \frac{-2.000 \times 1,06 \pm \sqrt{(2.000 \times 1,06)^2 + 4 \times 3.000 \times 1,06^2 \times 4.500}}{2(-3.000)(1,06)^2} = \\ &= \begin{cases} 1,5119 \\ -0,8830 \end{cases} \end{aligned}$$

La única solución que tiene sentido económico es la primera (la tasa de rentabilidad de esta inversión ha de ser positiva). Por consiguiente:

$$1+r_R = 1,5119 \rightarrow r_R = 0,5119 \text{ por uno anual} = 51,19 \text{ por 100 anual}$$

Otra forma de calcular el tipo interno de rentabilidad (TIR) es comenzar determinando la tasa de rentabilidad aparente (r_A); es decir, la que correspondería a esta inversión si no existiera inflación, del siguiente modo:

que produce en el segundo. Además, precisa la realización de un pago de 100 u.m. el primer año, y otro de 200 el segundo. La rentabilidad requerida de esta inversión es el 12 por 100 anual, y se desea saber si es realizable de acuerdo con el criterio de índice de rentabilidad.

RESOLUCIÓN

El denominado «índice de rentabilidad» es el cociente entre el valor actual de los cobros y el valor actual de los pagos, incluyendo entre estos últimos el desembolso inicial. Por ejemplo, en este caso, se obtendría el siguiente valor actual de los cobros:

$$VAC = \frac{300}{1,12} + \frac{400}{1,12^2} = 586,73 \text{ u.m.}$$

y el siguiente valor actual de los pagos:

$$VAP = 200 + \frac{100}{1,12} + \frac{200}{1,12^2} = 448,72 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, el índice de rentabilidad, *IR*, vale 1,30:

$$IR = \frac{VAC}{VAP} = \frac{586,73}{448,72} = 1,30$$

Congruentemente con el criterio del *VAN*, según el *IR* una inversión es efectiva cuando el valor actual de los cobros es superior al valor actual de los pagos, es decir, cuando el *IR* es superior a la unidad. Por consiguiente, esta inversión es efectiva.

Problema 34

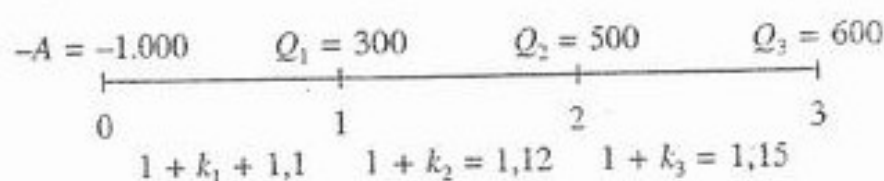
VAN

Una empresa considera la posibilidad de realizar una inversión que requeriría un desembolso inicial de 1.000 u.m. y que, teniendo una duración de tres períodos, generaría unos flujos de caja de 300 u.m. en el primer período, 500 en el segundo y 600 en el tercero. Siendo los tipos de descuento adecuados a este análisis del 10 por 100 en el primer intervalo, del 12 por 100 en el segundo y del 15 por 100 en el tercero, ¿cuál es el valor actual neto de esta inversión? ¿Es efectiva?

RESOLUCIÓN

$$VAN = -1.000 + \frac{300}{1,1} + \frac{500}{(1,1)(1,12)} + \frac{600}{(1,1)(1,12)(1,15)} = 102,06$$

Dado que el valor neto es positivo, la inversión es efectuable.



Problema
35

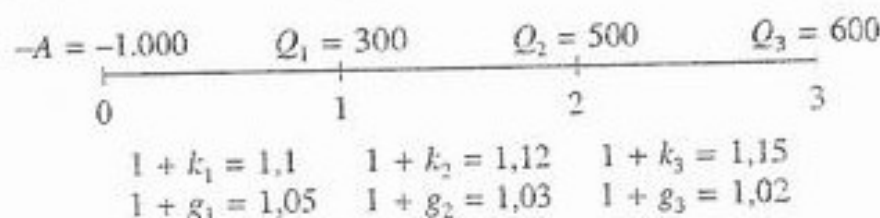
VAN

¿Es efectuable la inversión del problema anterior según el criterio del valor actual neto si se prevén unas tasas de inflación del 5 por 100 para el primer período, del 3 por 100 para el segundo y del 2 por 100 para el tercero?

RESOLUCIÓN

$$VAN = -1.000 + \frac{300}{(1,1)(1,05)} + \frac{500}{(1,1)(1,12)(1,05)(1,03)} + \frac{600}{(1,1)(1,12)(1,15)(1,05)(1,03)(1,02)} = 18,90$$

Aunque, al tener en cuenta el efecto de la inflación, el valor actual neto se ha reducido considerablemente, continúa siendo positivo y, por consiguiente, la inversión es efectuable con arreglo a este criterio:



Por consiguiente, para una inflación del 20 por 100:

$$r_R = \frac{0,232 - 0,20}{1 + 0,20} = 0,0267 \text{ por } 1 = 2,67 \text{ por } 100$$

**Problema
31**

TIR

Un banco concede a uno de sus clientes un crédito de un millón de pesetas por el que, en cada uno de los cinco años de su duración, le cobrará un interés del 16 por 100. El último año, el cliente deberá devolver el principal del préstamo (un millón de pesetas) y los intereses correspondientes al último año. ¿Cuál es la tasa de rentabilidad obtenida por el banco en esta operación?

RESOLUCIÓN

Evidentemente, la tasa de rentabilidad será del 16 por 100. Para comprobarlo basta calcular el valor de r , que cumple:

$$0 = -1.000.000 + \frac{160.000}{1+r} + \frac{160.000}{(1+r)^2} + \frac{160.000}{(1+r)^3} + \frac{160.000}{(1+r)^4} + \frac{1.160.000}{(1+r)^5}$$

Conforme se expuso anteriormente, r ha de ser inferior a

$$r^{**} = \left(\frac{4 \times 1.600.000 + 1.160.000}{1.000.000} \right)^{\frac{160.000 + 160.000 + 160.000 + 160.000 + 1.160.000}{4 \times 160.000 + 1.160.000}} - 1 = 0,2027 \text{ por uno anual}$$

y mayor que

$$r^* = \left(\frac{4 \times 160.000 + 1.160.000}{1.000.000} \right)^{\frac{4 \times 160.000 + 1.160.000}{1 \times 160.000 + 2 \times 160.000 + 3 \times 160.000 + 4 \times 160.000 + 5 \times 1.160.000}} - 1 = 0,1537 \text{ por uno anual}$$

Probando con distintos valores comprendidos entre estos extremos, se deduce que

$$r = 0,16 \text{ por uno anual} = 16 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Obviamente, la rentabilidad de un préstamo de este tipo, en el que el tipo de interés es del 16 por 100 anual, habrá de ser también del 16 por 100.

**Problema
32**

Plazo de recuperación con descuento

Se desea conocer el plazo de recuperación con descuento de una inversión que requiere un desembolso inicial de 5.000 u.m. y que genera unos flujos de caja de 1.100 u.m. el primer año, 2.420 el segundo, 2.662 el tercero y 3.600 el cuarto y último de su duración. La rentabilidad requerida de esta inversión es el 10 por 100 anual.

RESOLUCIÓN

El valor actual de las 1.100 u.m. que genera la inversión el primer año es 1.000 u.m.:

$$\frac{1.100}{1,1} = 1.000 \text{ u.m.}$$

Por tanto, al final del primer año se habrán recuperado, en términos actuales, 1.000 u.m. de las 5.000 u.m. invertidas. Del mismo modo, se deduce que, al final del segundo, se recuperarán otras 2.000 u.m.:

$$\frac{2.420}{1,1^2} = 2.000 \text{ u.m.}$$

y que, al final del tercero, se recuperarán 2.000 u.m. más:

$$\frac{2.662}{1,1^3} = 2.000 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, al cabo de tres años se habrá recuperado el desembolso inicial. Dicho de otro modo, el plazo de recuperación con descuento de esta inversión es de tres años.

**Problema
33**

Índice de rentabilidad

Una inversión que requiere un desembolso inicial de 200 u.m. dura dos años, en el primero de los cuales genera un cobro de 300 u.m., siendo igual a 400 el

Dado que esta fórmula proporciona aproximaciones inferiores a la verdadera tasa de rentabilidad, es obvio que ésta es superior a su rentabilidad requerida y, por consiguiente, la inversión es efectuable conforme a este criterio. La rentabilidad de la inversión es superior al tipo de rentabilidad que se le exige.

$$r > r^* = 0,1641 \text{ por uno} > 0,10 \text{ por uno}$$

**Problema
38**

TIR: La utilidad de las fórmulas aproximadas

¿Es efectuable la inversión del problema anterior, según el criterio del tipo de rendimiento interno, si se prevén unas tasas de inflación del 5 por 100 para el primer período, del 3 por 100 para el segundo y del 2 por 100 para el tercero?

RESOLUCIÓN

El tipo de rendimiento interno real de esta inversión sería aquel valor de r_R para el cual

$$2.000 = \frac{600}{(1 + r_R)1,05} + \frac{1.000}{(1 + r_R)^2(1,05)(1,03)} + \frac{1.200}{(1 + r_R)^3(1,05)(1,03)(1,02)}$$

o, lo que es lo mismo,

$$2.000 = \frac{571,43}{1 + r_R} + \frac{924,64}{(1 + r_R)^2} + \frac{1.087,81}{(1 + r_R)^3}$$

Aplicando la fórmula aproximada por defecto se deduce que

$$r_R^* = \left(\frac{571,43 + 924,64 + 1.087,81}{2.000} \right)^{\frac{571,43 + 924,64 + 1.087,81}{571,43 + 2(924,64) + 3(1.087,81)}} - 1 = 0,1235$$

Dado que esta fórmula proporciona siempre una cota inferior de la verdadera rentabilidad, es obvio que ésta ha de ser superior a la rentabilidad requerida (10 por 100) y, por consiguiente, la inversión continúa siendo efectuable con arreglo a este criterio.

Problema
39
TIR: La utilidad de las fórmulas aproximadas

¿Sería efectuable la inversión de los problemas anteriores, conforme al criterio del tipo de rendimiento interno, si, existiendo los mencionados grados de inflación, la empresa obtiene beneficios que son gravados con un tipo del 36 por 100 y la amortización de esta inversión se realiza linealmente? Supóngase que los flujos de caja constituyen beneficios del período en que se generan.

RESOLUCIÓN

En este caso, para determinar el tipo de rendimiento interno, se habría de descontar de los flujos de caja la parte que se paga en forma de impuestos. Dado, además, que las cuotas de amortización constituyen gastos deducibles, el flujo de caja neto de impuestos del período t sería:

$$Q'_t = Q_t - \left(Q_t - \frac{2.000}{3} \right) 0,36 = Q_t(1 - 0,36) + \frac{720}{3} = 0,64Q_t + 240$$

Así pues:

$$Q'_1 = 0,64 \times 600 + 240 = 624$$

$$Q'_2 = 0,64 \times 1.000 + 240 = 880$$

$$Q'_3 = 0,64 \times 1.200 + 240 = 1.008$$

Por consiguiente, el tipo de rendimiento interno real será aquel valor de r_R para el cual

$$2.000 = \frac{624}{(1 + r_R)(1,05)} + \frac{880}{(1 + r_R)^2(1,05)(1,03)} + \frac{1.008}{(1 + r_R)^3(1,05)(1,03)(1,02)}$$

o bien

$$2.000 = \frac{594,29}{1 + r_R} + \frac{813,68}{(1 + r_R)^2} + \frac{913,76}{(1 + r_R)^3}$$

Aproximando por defecto:

Problema
36

VAN

¿Sería efectuable la inversión de los problemas anteriores, conforme al criterio del valor actual neto, si, existiendo los mencionados grados de inflación, la empresa obtiene beneficios que son gravados con un tipo del 36 por 100 y la amortización de esta inversión se realiza linealmente? Supóngase que los flujos de caja constituyen beneficios del período en que se generan.

RESOLUCIÓN

En este caso, para determinar el valor actual neto, se habría de descontar de los flujos de caja la parte que se paga en forma de impuestos. Dado, además, que las cuotas de amortización constituyen gastos deducibles, el flujo de caja neto de impuestos del período t sería, para un tipo impositivo del 36 por 100:

$$Q'_t = Q_t - \left(Q_t - \frac{1.000}{3} \right) 0,36 = Q_t (1 - 0,36) + \frac{360}{3} = 0,64 Q_t + 120$$

Así pues:

$$Q'_1 = 0,64 \times 300 + 120 = 312 \text{ u.m.}^*$$

$$Q'_2 = 0,64 \times 500 + 120 = 440 \text{ u.m.}$$

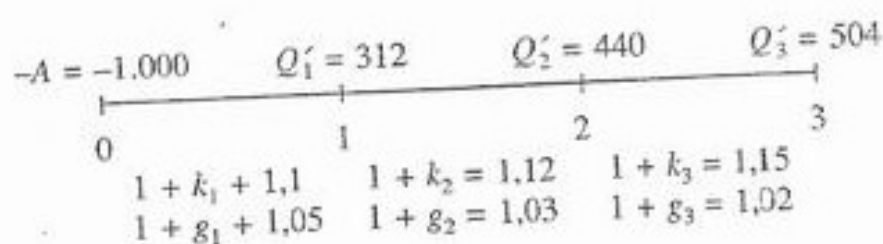
$$Q'_3 = 0,64 \times 600 + 120 = 504 \text{ u.m.}$$

y por consiguiente:

$$\begin{aligned} VAN = & -1.000 + \frac{312}{(1,1)(1,05)} + \frac{440}{(1,1)(1,12)(1,05)(1,03)} + \\ & + \frac{504}{(1,1)(1,12)(1,15)(1,05)(1,03)(1,02)} = -77,17 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Al introducir el impuesto de sociedades, el valor actual neto de la inversión es negativo y, por consiguiente, dicha inversión no es efectuable.

* El primer año, esta inversión genera 33,33 u.m. de pérdidas ($300 - 1.000/3 = -33,33$). Si las otras inversiones de la empresa generan beneficios superiores, se ahorrará $0,36 \cdot 33,33 = 12$ u.m. de impuestos que se añaden a las 300 u.m. como mayor flujo de caja. Lo mismo sucede en otros problemas posteriores.



Problema 37

TIR: La utilidad de las fórmulas aproximadas

Una empresa que exige de sus inversiones una rentabilidad del 10 por 100 tiene la posibilidad de realizar una inversión que requerirá un desembolso inicial de 2.000 u.m. y que, teniendo una duración de tres periodos, generaría los flujos netos de caja recogidos en la tabla 4.17.

TABLA 4.17

Periodo	Flujos netos de caja (u.m.)
Primero	600
Segundo	1.000
Tercero	1.200

¿Es efectuable esta inversión según el criterio del tipo de rendimiento interno?

RESOLUCIÓN

El tipo de rendimiento interno de esta inversión sería aquel valor de r para el cual:

$$2.000 = \frac{600}{1+r} + \frac{1.000}{(1+r)^2} + \frac{1.200}{(1+r)^3}$$

Utilizando la fórmula de aproximación por defecto se deduce que

$$r^* = \left(\frac{600 + 1.000 + 1.200}{2.000} \right)^{\frac{600+1.000+1.200}{600+2 \times 1.000+3 \times 1.200}} - 1 = 0,1641 = 16,41 \text{ por } 100$$

o, lo que es lo mismo:

$$0,2677 < r_B < 0,2856$$

El límite inferior de r_B es más elevado que el límite superior de r_A ; es decir:

$$r_A < 0,2347 < 0,2677 < r_B$$

Por consiguiente:

$$r_A < r_B$$

La rentabilidad de la inversión B es más elevada y, por tanto, ésta es la inversión preferible según este criterio.

4.4. EL VAN Y LA TIR EN ALGUNOS CASOS ESPECIALES

Problema 41

VAN y TIR en casos especiales

Se desea calcular el valor actual neto de una inversión de duración igual a un año, que precisa un desembolso inicial de 1.500 u.m. y que generaría los siguientes flujos de caja: 500 al final del primer trimestre, 1.000 al final del segundo, 500 al finalizar el tercero y 1.000 al final del cuarto y último trimestre de su duración. La rentabilidad *anual* requerida de esta inversión es el 60 por 100.

RESOLUCIÓN

Dado que los flujos de caja son trimestrales, para descontarlos puede procederse del siguiente modo:

$$VAN = -1.500 + \frac{500}{1,6^{1/4}} + \frac{1.000}{1,6^{1/2}} + \frac{500}{1,6^{3/4}} + \frac{1.000}{1,6} = 711,5$$

Es decir, aplicando la rentabilidad requerida anual, y teniendo en cuenta que el primer flujo se genera al cabo de una cuarta parte de un año, el segundo al final de medio año, el tercero dentro de tres cuartas partes de año y el último al final de un año.

Otra forma de proceder es la siguiente:

$$VAN = -1.500 + \frac{500}{(1+k')^1} + \frac{1.000}{(1+k')^2} + \frac{500}{(1+k')^3} + \frac{1.000}{(1+k')^4}$$

donde k' es la rentabilidad requerida trimestral. Para determinar el valor de una u.m. actual dentro de un año, puede procederse aplicando la tasa requerida trimestral cuatro veces, obteniéndose $(1+k')^4$, o bien aplicando la tasa requerida anual, k , una vez, con lo que se obtiene $(1+k)$. Dado que ambos importes han de coincidir:

$$(1+k')^4 = 1+k$$

se deduce que:

$$k' = (1+k)^{1/4} - 1$$

En este caso en concreto, se obtiene:

$$k' = (1+0,6)^{1/4} - 1 = 0,1247$$

Por tanto:

$$VAN = -1.500 + \frac{500}{1,1247} + \frac{1.000}{1,1247^2} + \frac{500}{1,1247^3} + \frac{1.000}{1,1247^4} = 711,5$$

Problema
42

VAN y TIR en casos especiales

Se desea conocer la *TIR* anual de la inversión del problema anterior, así como analizar la efectividad de esta inversión utilizando este criterio.

RESOLUCIÓN

Al igual que en el cálculo del *VAN*, en la determinación de la *TIR* anual, r , puede procederse de dos formas equivalentes. La primera consiste en aplicar la siguiente expresión:

$$r_R^* = \left(\frac{594,29 + 813,68 + 913,76}{2.000} \right)^{\frac{594,29 + 813,68 + 913,76}{594,29 + 2(813,68) + 3(913,76)}} - 1 = 0,0722 =$$

$$= 7,22 \text{ por } 100$$

Dado que ésta es una aproximación por defecto, nada puede decirse de momento sobre si la verdadera tasa de rentabilidad es o no superior al 10 por 100.

Una fórmula que ofrece una cota superior de la verdadera tasa de rentabilidad es, como se sabe:

$$r^{**} = (S/A)^{DIS} - 1$$

En este caso:

$$r_R^{**} = \left(\frac{594,29 + 813,68 + 913,76}{2.000} \right)^{\frac{594,29 + 813,68 + 913,76}{594,29 + 2(813,68) + 3(913,76)}} - 1 = 0,0875 =$$

$$= 8,75 \text{ por } 100$$

Dado que la verdadera tasa de rentabilidad ha de ser inferior al 8,75 por 100 y que la rentabilidad requerida es del 10 por 100, cuando se consideran tanto los efectos de la inflación como la existencia de un impuesto sobre el beneficio, la inversión no es efectuable:

$$r < r^{**} = 8,75 \text{ por } 100 < 10 \text{ por } 100$$

**Problema
40**

TIR: La utilidad de las fórmulas aproximadas

Una empresa se plantea la realización de uno de los dos proyectos de inversión cuyos flujos de caja y desembolsos iniciales se encuentran recogidos en la tabla 4.18.

TABLA 4.18

Proyectos	Desembolsos iniciales	Primer año		Segundo año		Tercer año		Cuarto año	
		Cobros	Pagos	Cobros	Pagos	Cobros	Pagos	Cobros	Pagos
A	1.500 u.m.	100	50	1.000	500	1.500	500	2.000	750
B	2.000 u.m.	150	100	1.500	1.200	2.500	1.000	4.000	1.250

¿Qué inversión es preferible según el criterio del tipo interno de rentabilidad (TIR)?

RESOLUCIÓN

La TIR del proyecto A será el valor r_A , que cumple:

$$0 = -1.500 + \frac{50}{1 + r_A} + \frac{500}{(1 + r_A)^2} + \frac{1.000}{(1 + r_A)^3} + \frac{1.250}{(1 + r_A)^4}$$

Para aplicar las aproximaciones por defecto y por exceso estudiadas en problemas anteriores, pueden calcularse previamente los importes:

$$S = 50 + 500 + 1.000 + 1.250 = 2.800 \text{ u.m.}$$

$$M = 1 \times 50 + 2 \times 500 + 3 \times 1.000 + 4 \times 1.250 = 9.050 \text{ u.m.}$$

$$D = \frac{50}{1} + \frac{500}{2} + \frac{1.000}{3} + \frac{1.250}{4} = 945,83 \text{ u.m.}$$

Es así que

$$\left(\frac{2.800}{1.500} \right)^{\frac{2.800}{9.050}} - 1 < r_A < \left(\frac{2.800}{1.500} \right)^{\frac{945,83}{2.800}} - 1$$

Es decir:

$$0,2130 < r_A < 0,2347$$

En cuanto a la tasa correspondiente a la inversión B, se tiene que

$$0 = -2.000 + \frac{50}{1 + r_B} + \frac{300}{(1 + r_B)^2} + \frac{1.500}{(1 + r_B)^3} + \frac{2.750}{(1 + r_B)^4}$$

$$S = 50 + 300 + 1.500 + 2.750 = 4.600 \text{ u.m.}$$

$$M = 1 \times 50 + 2 \times 300 + 3 \times 1.500 + 4 \times 2.750 = 16.150 \text{ u.m.}$$

$$D = \frac{50}{1} + \frac{300}{2} + \frac{1.500}{3} + \frac{2.750}{4} = 1.387,5 \text{ u.m.}$$

Por tanto:

$$\left(\frac{4.600}{2.000} \right)^{\frac{4.600}{16.150}} - 1 < r_B < \left(\frac{4.600}{2.000} \right)^{\frac{1.387,5}{4.600}} - 1$$

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} VAN &= -625 + \frac{300}{(1 + 0,12)^{1/12}} + \frac{200}{(1 + 0,12)^{1/2}} + \frac{500}{(1 + 0,12)^2} = \\ &= -625 + 297,18 + 188,98 + 398,60 = 259,76 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Problema
46

VAN y TIR en casos especiales

Una inversión requiere un desembolso inicial de 2.000 u.m. y genera, durante cada uno de los cinco años de su duración, un flujo anual constante de 600 u.m. Siendo la rentabilidad requerida del 10 por 100, se desea conocer su valor actual neto y su tasa de rentabilidad. No existe inflación.

RESOLUCIÓN

En el caso en que los flujos son constantes ($Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$), la expresión del VAN será:

$$\begin{aligned} VAN &= -A + \frac{Q}{1+k} + \frac{Q}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q}{(1+k)^n} = \\ &= -A + Q \left[\frac{1}{1+k} + \frac{1}{(1+k)^2} + \dots + \frac{1}{(1+k)^n} \right] \end{aligned}$$

El importe recogido entre corchetes es la suma de los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $1/(1+k)$, siendo el último $1/(1+k)^n$, y la razón (factor que, multiplicado a cada término, genera el siguiente) igual a $1/(1+k)$. En general, la suma de los términos de una progresión geométrica es igual a

$$S = \frac{T_1 - T_n R}{1 - R}$$

donde T_1 es el primer término, T_n el último y R la razón. En este caso se tendrá:

$$VAN = -A + Q \frac{\frac{1}{1+k} - \frac{1}{(1+k)^n} \times \frac{1}{(1+k)}}{1 - \frac{1}{1+k}} = -A + Q \frac{1 - \frac{1}{(1+k)^n}}{(1+k) - 1} =$$

$$= -A + Q \frac{1 - (1+k)^{-n}}{k}$$

El importe

$$\frac{1}{1+k} + \frac{1}{(1+k)^2} + \dots + \frac{1}{(1+k)^n} = \frac{1 - (1+k)^{-n}}{k}$$

es el valor actual, al tanto k , de una corriente de flujos unitarios anuales de duración n años, y se le suele designar mediante el símbolo $a_{\overline{n}|k}$. Por tanto:

$$VAN = -A + a_{\overline{n}|k}$$

En el caso del problema planteado, se hará:

$$VAN = -2.000 + 600a_{\overline{30}|0,10} = -2.000 + 600 \times \frac{1 - (1,1)^{-30}}{0,1} = 274,47 \text{ u.m.}$$

La tasa de rentabilidad será el valor de r que cumple:

$$-2.000 + 600a_{\overline{30}|r} = 0$$

es decir:

$$-2.000 + 600 \times \frac{1 - (1+r)^{-30}}{r} = 0 \rightarrow \frac{1 - (1+r)^{-30}}{r} = \frac{2.000}{600} = 3,33$$

de donde se obtiene, probando con distintos valores de r :

$$r = 0,1524 \text{ por uno anual} = 15,24 \text{ por 100 anual}$$

$$0 = -1.500 + \frac{500}{(1+r)^{1/4}} + \frac{1.000}{(1+r)^{1/2}} + \frac{500}{(1+r)^{3/4}} + \frac{1.000}{(1+r)}$$

obteniéndose, por prueba y error:

$$r = 2,0332 \text{ por } 1 = 203,32 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

La segunda consiste en calcular primero la *TIR* trimestral, r' , y luego, a partir de ella, la anual del siguiente modo:

— Cálculo de la tasa trimestral:

$$0 = -1.500 + \frac{500}{(1+r')^1} + \frac{1.000}{(1+r')^2} + \frac{500}{(1+r')^3} + \frac{1.000}{(1+r')^4}$$

de donde, utilizando los procedimientos aproximados ya conocidos, y por posterior prueba y error, se deduce que:

$$r' = 0,3197 \text{ por } 1 = 31,97 \text{ por } 100 \text{ trimestral}$$

— Cálculo de la tasa anual: según se dedujo en el problema anterior:

$$(1+r')^4 = 1+r$$

se deduce que:

$$r = (1+r')^4 - 1$$

En este caso en concreto, se obtiene:

$$r = (1 + 0,3197)^4 - 1 = 2,0332 \text{ por } 1 = 203,32 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

El análisis de la efectividad de la inversión puede realizarse utilizando las rentabilidades trimestrales o las anuales. Por ejemplo, esta inversión es realizable, pues su rentabilidad trimestral esperada (0,3197 por uno) es mayor que la requerida (0,1247, según se dedujo en el problema anterior). Dicho de otro modo, es efectuable porque su rentabilidad anual esperada (2,0332 por uno) es superior a la requerida (0,6 según el enunciado del problema anterior).

Problema
43

VAN y TIR en casos especiales

La rentabilidad trimestral de una inversión es el 0,1 por 100. ¿Cuánto vale su rentabilidad anual?

RESOLUCIÓN

$$r = (1 + 0,001)^4 - 1 = 0,004006 \text{ por } 1 = 0,4006 \text{ por } 100$$

Problema
44

VAN y TIR en casos especiales

Un banco ha concedido a un cliente un préstamo de 2.000.000 de u.m. por el que, al final de cada uno de los doce trimestres de su duración, le cobrará un interés del 3 por 100. El último trimestre el cliente deberá devolver el principal del préstamo y los intereses del último trimestre. ¿Cuánto vale la rentabilidad anual de la inversión del banco?

RESOLUCIÓN

Evidentemente, la rentabilidad trimestral del banco es el 3 por 100. Para calcular la rentabilidad anual basta hacer:

$$r = (1 + 0,03)^4 - 1 = 0,1255 \text{ por } 1 = 12,55 \text{ por } 100$$

Problema
45

VAN y TIR en casos especiales

Una inversión requiere un desembolso inicial de 625 u.m. y genera los siguientes flujos de caja: 300 u.m. al cabo de un mes, 200 u.m. al cabo de un semestre y 500 u.m. al cabo de dos años. Si la rentabilidad anual requerida es el 12 por 100, ¿cuánto vale su VAN?

Dado que esta empresa dispone tan sólo de 1.000 u.m. para invertir, se precisa saber qué proyecto debe efectuarse, en base a los criterios del VAN y de la tasa de retorno, siendo la rentabilidad requerida de los dos proyectos el 10 por 100. Ninguna de las inversiones tendría valor residual alguno y ambas tienen el mismo riesgo.

RESOLUCIÓN

a) Valores actuales netos:

$$VAN = -1.000 + 250a_{\overline{20}|0,1} = -1.000 + 200 \frac{1 - 1,1^{-20}}{0,1} = 217,10 \text{ u.m.}$$

$$VAN = -1.000 + 200a_{\overline{20}|0,1} = -1.000 + 200 \frac{1 - 1,1^{-20}}{0,1} = 702,7 \text{ u.m.}$$

Conforme al criterio del valor actual neto, las dos inversiones son efectuales, pero es preferible la segunda.

b) Tipos de rendimiento internos:

$$0 = -1.000 + 250a_{\overline{20}|r_A} \rightarrow a_{\overline{20}|r_A} = 4 \rightarrow \frac{1 - (1 + r_A)^{-20}}{r_A} = 4$$

Mediante prueba y error se comprueba que el valor de r_A para el cual se cumple que $a_{\overline{20}|r_A} = 4$ es

$$r_A = 0,1632$$

Del mismo modo:

$$0 = -1.000 + 200a_{\overline{20}|r_B} \rightarrow a_{\overline{20}|r_B} = 5 \rightarrow \frac{1 - (1 + r_B)^{-20}}{r_B} = 5 \quad ; \quad r_B = 0,1942$$

Conforme al criterio de la tasa de rendimiento, las dos inversiones son efectuales, pero es preferible la segunda.

Problema 50

VAN y TIR en casos especiales

Resolver el problema anterior en base a los criterios del valor actual neto y del tipo de rendimiento interno, cuando existe un grado de inflación anual acumulativo del 5 por 100.

RESOLUCIÓN

a) Valores actuales netos:

$$\begin{aligned} VAN_A &= -1.000 + 25a_{\overline{70}, 1+0,05+0,1+0,05} = -1.000 + 250a_{\overline{70}, 1,155} = \\ &= -1.000 + 250 \frac{1 - 1,155^{-7}}{0,155} = 24,69 \end{aligned}$$

$$VAN_B = -1.000 + 200a_{\overline{200}, 1,155} = -1.000 + 200 \frac{1 - 1,155^{-20}}{0,155} = 218,04$$

Ambas inversiones son efectuales, siendo preferible la segunda.

b) Tipos de rendimiento internos:

$$(1 + r_A) = (1 + g)(1 + r_R)$$

donde g es el grado de inflación, r_A es el tipo de rendimiento aparente y r_R es el tipo de rendimiento real. Por consiguiente:

$$r_R = \frac{1 + r_A}{1 + g} - 1 = \frac{r_A - g}{1 + g}$$

$$r_{RA} = \frac{0,1632 - 0,05}{1,05} = 0,1078$$

$$r_{RB} = \frac{0,1942 - 0,05}{1,05} = 0,1466$$

Ambas inversiones son efectuales, siendo preferible la segunda.

Problema 47

VAN y TIR en casos especiales

Una empresa se plantea realizar una inversión, cuya duración considera ilimitada, que generaría un flujo de caja anual constante igual a 125 u.m., requiriendo un desembolso inicial de 1.000 u.m. Si no existiera inflación y el tipo de rentabilidad requerida fuera del 5 por 100, ¿cuál sería su valor actual neto? ¿Y su tasa de rentabilidad interna?

RESOLUCIÓN

Conforme se expuso en el problema anterior, cuando los flujos de caja son constantes:

$$VAN = -A + Q \frac{1 - (1 + k)^{-n}}{k}$$

Si, además, la duración de la inversión fuera ilimitada, se tendría:

$$VAN = -A + Q \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 + k)^{-n}}{k}$$

dato que $1 + k > 1$, cuando n tiende a infinito, el importe $(1 + k)^{-n} = 1/(1 + k)^n$ tenderá a cero y, por tanto:

$$VAN = -A + \frac{Q}{k}$$

En este caso:

$$VAN = -1.000 + \frac{125}{0,05} = 1.500 \text{ u.m.}$$

El tipo interno de rentabilidad (*TIR*) es el tipo de descuento para el cual el *VAN* vale cero, es decir:

$$0 = -1.000 + \frac{125}{r} \rightarrow r = \frac{125}{1.000} = 0,125 \text{ por uno anual} = 12,5 \text{ por 100 anual}$$

**Problema
48**
VAN y TIR en casos especiales

¿Cuáles serían el valor actual neto y la tasa interna de rentabilidad real de la inversión del problema anterior si existiera una tasa de inflación anual acumulativa del 6 por 100?

RESOLUCIÓN

El tipo calculatorio sería, como se sabe:

$$k = i + g + ig = 0,05 + 0,06 + 0,05 \times 0,06 = 0,113$$

y, por consiguiente:

$$VAN = -A + \frac{Q}{k} = -1.000 + \frac{125}{0,113} = 106,19 \text{ u.m.}$$

En ausencia de inflación, la rentabilidad era del 12,5 por 100 anual. Tal sería, por tanto, la tasa de rendimiento aparente (r_A) cuando existe inflación. Para determinar la tasa real, cabe hacer uso de la ya conocida expresión:

$$r_R = \frac{r_A - g}{1 + g}$$

obteniéndose:

$$r_R = \frac{0,125 - 0,06}{1,06} = 0,0613 \text{ por uno anual} = 6,13 \text{ por 100 anual}$$

**Problema
49**
VAN y TIR en casos especiales

Una empresa dispone de las siguientes posibilidades de inversión:

- a) Se trata de una inversión que requeriría un desembolso inicial de 1.000 u.m. y generaría durante seis años un flujo neto de caja constante e igual a 250 u.m.
- b) Este proyecto requeriría un desembolso inicial de 1.000 u.m. y generaría durante veinte años un flujo neto de caja constante e igual a 200 u.m.

$$VAN = -A + \frac{Q_1}{k - f}$$

y la rentabilidad de la inversión será el valor de r tal que:

$$0 = -A + \frac{Q_1}{r - f}$$

es decir:

$$r = \frac{Q_1}{A} + f$$

En el caso del problema planteado, se obtiene:

$$VAN = -1.000 + \frac{500}{0,12 - 0,05} = 6.142,86 \text{ u.m.}$$

$$r = \frac{500}{1.000} + 0,05 = 0,55 \text{ por } 1 = 55 \text{ por } 100$$

Como se dedujo en un problema anterior, si tendiendo la duración de la inversión hacia infinito todos los flujos se mantuvieran al nivel del primero (es decir, si no crecieran, sino que se mantuvieran constantes), la rentabilidad de la inversión sería igual al cociente entre el flujo constante y el desembolso inicial ($500/1.000 = 0,50$ por 1, en este caso). Si, por el contrario, los flujos crecen a una cierta tasa, el aumento de rentabilidad que ello produce es precisamente igual a la tasa de crecimiento de los flujos (0,05 por 1, en este caso).

Problema
53

VAN y TIR en casos especiales

Se desea determinar el VAN de una inversión cuyo desembolso inicial es de 2.000 u.m., siendo su duración de 20 años. Tal inversión generaría el próximo año un flujo de caja de 1.000 u.m. y los flujos de caja posteriores crecerían a una tasa anual del 5 por 100. La rentabilidad requerida de esta inversión es el 12 por 100 anual.

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 VAN &= -A + Q_1 \frac{1 - (1+f)^n/(1+k)^n}{k-f} = \\
 &= -2.000 + 1.000 \frac{1 - (1+0,05)^{20}/(1+0,12)^{20}}{0,12 - 0,05} = \\
 &= 8.356,30 \text{ u.m.}
 \end{aligned}$$

Problema
54
VAN y TIR en casos especiales

Una inversión que requiere un desembolso inicial de 3.000 u.m. tiene una duración ilimitada. Se espera que el flujo de caja del próximo año valga 800 u.m. y que luego crezca a una tasa anual constante del 7 por 100. La tasa de inflación anual es el 10 por 100. ¿Cuánto vale su rentabilidad real anual?

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 r_A &= \frac{Q_1}{A} + f = \frac{800}{3.000} + 0,07 = 0,33667 \text{ por } 1 \\
 r_R &= \frac{r_A - g}{1 + g} = \frac{0,33667 - 0,10}{1 + 0,10} = 0,2152 \text{ por } 1 = 21,52 \text{ por } 100
 \end{aligned}$$

4.5. RELACIONES ENTRE LA VAN Y LA TIR

Problema
55
VAN y TIR en las decisiones de aceptación o rechazo de proyectos independientes

Sea un proyecto de inversión que requiere un desembolso inicial de 1.000 u.m. y que duraría dos años, generando unos flujos netos de caja de 600 u.m. al final del primero y 500 al final del segundo, y siendo su valor residual de 200 u.m. Se desea estudiar su efectividad para un tipo de descuento y rentabilidad requerida real del 12 por 100 anual, en los casos siguientes:

Problema

51

VAN y TIR en casos especiales

Se desea determinar el VAN y la TIR de una inversión cuyo desembolso inicial es de 1.000 u.m., siendo su duración de 3 años. Tal inversión generaría el próximo año un flujo de caja de 500 u.m. y los flujos anuales posteriores crecerían a una tasa anual del 5 por 100. La rentabilidad requerida de esta inversión es el 12 por 100 anual.

RESOLUCIÓN

Que los flujos de caja crecen a una tasa f , expresada en tanto por uno, significa que:

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_1(1+f) \\ Q_3 &= Q_2(1+f) = Q_1(1+f)^2 \\ Q_4 &= Q_3(1+f) = Q_1(1+f)^3 \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= Q_1(1+f)^{n-1} \end{aligned}$$

Por tanto, el VAN de la inversión será:

$$\begin{aligned} VAN &= -A + \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_1(1+f)}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_1(1+f)^{n-1}}{(1+k)^n} = \\ &= -A + Q_1 \left[\frac{1}{(1+k)} + \frac{(1+f)}{(1+k)^2} + \dots + \frac{(1+f)^{n-1}}{(1+k)^n} \right] \end{aligned}$$

De nuevo aparece entre corchetes la suma de los términos de una progresión geométrica. Resolviendo como en ocasiones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} VAN &= -A + Q_1 \frac{[1/(1+k)] - [(1+f)^n/(1+k)^n][(1+f)/(1+k)]}{1 - [(1+f)/(1+k)]} = \\ &= -A + Q_1 \frac{1 - (1+f)^n/(1+k)^n}{k - f} \end{aligned}$$

Así, en este caso:

$$VAN = -1.000 + 500 \frac{1 - (1 + 0,05)^3 / (1 + 0,12)^3}{0,12 - 0,05} = 257,32 \text{ u.m.}$$

En cuanto a la tasa de rentabilidad interna, como ya resultará evidente, es el valor de r que cumple la siguiente expresión:

$$0 = -A + Q_1 \frac{1 - (1 + f)^n / (1 + r)^n}{r - f}$$

Es decir, en este caso:

$$VAN = -1.000 + 500 \frac{1 - (1 + 0,05)^3 / (1 + r)^3}{r - 0,05}$$

Probando con distintos valores, se obtiene:

$$r = 0,262 \text{ por } 1 = 26,2 \text{ por } 100$$

**Problema
52**

VAN y TIR en casos especiales

Se desea determinar el VAN y la TIR de la inversión del problema anterior suponiendo que su duración tiende a infinito.

RESOLUCIÓN

Si al supuesto de que los flujos de caja crecen a una tasa constante se añade el de que la duración de la inversión tiende a infinito, el valor actual neto será el límite, para n tendiendo a infinito, de

$$-A + Q_1 \frac{1 - (1 + f)^n / (1 + k)^n}{k - f} = -A + Q_1 \frac{1 - [(1 + f) / (1 + k)]^n}{k - f}$$

Si f fuera inferior a k , el cociente $(1 + f) / (1 + k)$ sería superior a la unidad y el límite valdría infinito. Puesto que toda inversión ha de tener un valor actual finito, ha de suponerse que f es inferior a k , y, en tal caso, el límite es:

$$VAN = -1.000 + \frac{528}{1,12 \times 1,06} + \frac{664}{1,12^2 \times 1,06^2} = -84,15 < 0$$

$$r_R = \frac{r_A - g}{1 + g} = \frac{0,1205 - 0,06}{1,06} = 0,0571 < 0,12$$

**Problema
56**

VAN y *TIR* ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: caso en el que no existe discrepancia, aunque se utilice un único tipo de descuento

Para elaborar una nueva marca de lejía, la empresa Unedia de Productos Químicos, S. A. (UPEQUISA) puede elegir las alternativas de inversiones *X* o *Y*, que son mutuamente excluyentes entre sí. Ambas requieren un desembolso inicial de 2.000 u.m. y tienen una duración ilimitada. La primera tiene un flujo anual constante de 1.000 u.m., en tanto que la segunda generaría un primer flujo, al cabo de un año, igual a 800 u.m. y, a partir de entonces, los flujos anuales crecerían a una tasa interanual del 12 por 100. Se desea analizar este problema utilizando los criterios del valor actual neto y de la tasa interna de rentabilidad, bajo el supuesto de que ambas alternativas de inversión tienen el mismo nivel de riesgo y de que la rentabilidad requerida es la misma para las dos.

RESOLUCIÓN

Como ya es bien sabido, cuando los flujos de caja son constantes y la duración de la inversión es ilimitada, el valor actual neto y la tasa interna de rentabilidad responden a las expresiones:

$$VAN = -A + \frac{Q}{k}$$

y

$$r = \frac{Q}{A}$$

respectivamente. Por consiguiente, en el caso de la alternativa *X*, se obtiene:

$$VAN_x = -2.000 + \frac{1.000}{k}$$

$$r_x = \frac{1.000}{2.000} = 0,5 \text{ por } 1 = 50 \text{ por } 100$$

También es ya sabido que, cuando la duración de la inversión es ilimitada y los flujos crecen a una tasa constante, el VAN y la TIR responden a las siguientes expresiones:

$$VAN = -A + \frac{Q_1}{k - f}$$

$$r = \frac{Q_1}{A} + f$$

Así, en el caso de la inversión Y, se obtiene:

$$VAN_Y = -2.000 + \frac{800}{k - 0,12}$$

$$r_Y = \frac{800}{2.000} + 0,12 = 0,52 \text{ por } 1 = 52 \text{ por } 100$$

Dado que ambas inversiones tienen el mismo nivel de riesgo y que la rentabilidad de la inversión Y (el 52 por 100) es mayor que la de la inversión X (el 50 por 100), según el criterio de la TIR la Y es preferible a la X.

Sin embargo, siguiendo el criterio del VAN, la referencia por uno u otro proyecto dependerá, en principio, de cuál sea el tipo k que se utilice para valorarles. Existirá un k^* para el cual ambas inversiones sean indiferentes entre sí, es decir, un k^* tal que:

$$VAN_X = VAN_Y$$

o, lo que es lo mismo:

$$VAN_X = -2.000 + \frac{1.000}{k^*} = -2.000 + \frac{800}{k^* - 0,12} = VAN_Y$$

De donde se deduce que la intersección entre las curvas de ambos valores actuales netos (la *intersección de Fisher*) se produce para un tipo de descuento igual a:

$$k^* = 0,6 \text{ por } 1 = 60 \text{ por } 100$$

- No existe inflación y la empresa está exenta del pago del impuesto sobre el beneficio.
- Se prevé una tasa de inflación para los próximos años de un 6 por 100 anual y la empresa está exenta del pago del impuesto sobre el beneficio.
- No existe inflación y la empresa está sometida al impuesto sobre el beneficio con un tipo impositivo del 36 por 100.
- Se prevé una tasa de inflación para los próximos años de un 6 por 100 anual y la empresa está sometida al impuesto sobre el beneficio con un tipo impositivo del 36 por 100.

Supóngase que los flujos son beneficios para la empresa en el período en que se generan y que la amortización de la inversión es lineal.

RESOLUCIÓN

$$a) \text{ VAN} = -1.000 + \frac{600}{1,12} + \frac{500}{1,12^2} + \frac{200}{1,12^2} = -1.000 + \frac{600}{1,12} + \frac{700}{1,12^2} = 93,75$$

La inversión es efectuable.

$$1.000 = \frac{600}{1+r} + \frac{700}{(1+r)^2} \rightarrow 1.000(1+r)^2 - 600(1+r) - 700 = 0$$

$$(1+r) = \frac{+600 \pm \sqrt{600^2 + 4 \times 1.000 \times 700}}{2 \times 1.000} = \begin{cases} -0,5888 \rightarrow r = -1,5888 \\ 1,1888 \rightarrow r = 0,1888 \end{cases}$$

El único resultado económicamente viable es $r = 0,1888$. La inversión es efectuable ($r >$ rentabilidad requerida = 0,12).

$$b) \text{ VAN} = -1.000 + \frac{600}{1,12 \times 1,06} + \frac{700}{1,12^2 \times 1,06^2} = 2,04 > 0$$

Aunque el VAN de la inversión se ha reducido considerablemente al introducir el efecto de la inflación, continúa siendo aceptable.

En cuanto a la tasa de rentabilidad, es posible calcularla mediante la expresión

$$(1 + r_A) = (1 + g)(1 + r_R)$$

donde g es la tasa de inflación y r_R y r_A los tipos de rentabilidad real y aparente, respectivamente, deduciéndose:

$$r_R = \frac{r_A - g}{1 + g} = \frac{0,1888 - 0,06}{1,06} = 0,1215 > 0,12$$

Si bien la tasa de rentabilidad real se ha reducido al introducir el efecto de la inflación, la inversión continúa siendo efectuable.

c) Para determinar el VAN y la TIR este caso, es preciso calcular antes los flujos netos de impuestos, deduciendo de los flujos totales la parte que se paga en forma de impuestos, teniendo en cuenta que las cuotas de amortización constituyen gastos deducibles. Así, el flujo de caja neto de impuestos del período t sería:

$$Q'_t = Q_t - \left(Q_t - \frac{1.000 - 200}{2} \right) 0,36 = Q_t(1 - 0,36) + 400 \times 0,36 = 0,64Q_t + 144$$

Por consiguiente:

$$Q_1 = 0,64 \times 600 + 144 = 528$$

$$Q_2 = 0,64 \times 500 + 144 + 200 = 664$$

$$VAN = -1.000 + \frac{528}{1,12} + \frac{664}{1,12^2} = 0,76$$

La inversión es efectuable.

$$1.000 = \frac{528}{1+r} + \frac{592}{(1+r)^2} \rightarrow 1.000(1+r)^2 - 528(1+r) - 592 = 0$$

$$1+r = \frac{528 \pm \sqrt{528^2 + 4 \times 1.000 \times 664}}{2 \times 1.000} = \begin{cases} 1,1205 \rightarrow r = 0,1205 \\ -0,5926 \rightarrow r = -1,5926 \end{cases}$$

El único resultado económicamente viable es $r = 0,1205$ y esta tasa es superior a la rentabilidad requerida (0,12). Por consiguiente, en este caso la inversión es efectuable.

d) Dado que en el caso c) la inversión es efectuable por un escaso margen, no lo será en éste, pues al efecto de los impuestos hay que añadir el de la inflación. No obstante, si se desea calcular el VAN y la TIR de esta inversión, basta hacer

anual constante de 1.200 u.m. La inversión B requiere un desembolso inicial de 1.000 u.m. y genera un flujo de caja anual constante de 500 u.m. ¿Qué inversión es preferible según el VAN?

RESOLUCIÓN

El problema se resuelve exactamente igual que el anterior, y los resultados son muy semejantes, aunque en este caso es preferible la inversión A:

$$r_B = \frac{500}{1.000} = 0,5 \text{ por } 1 = 50 \text{ por } 100$$

$$r_A = \frac{1.200}{2.000} = 0,6 \text{ por } 1 = 60 \text{ por } 100$$

$$VAN_B = -1.000 + \frac{500}{k^*} = -2.000 + \frac{1.200}{k^*} = VAN_A$$

$$k^* = 0,7 \text{ por } 1 = 70 \text{ por } 100$$

La intersección de Fisher se produce por debajo del eje de abscisas y, en consecuencia, no existe discrepancia entre el VAN y la TIR al jerarquizar las inversiones. Es preferible la inversión A, que es la que tiene la mayor TIR.

Problema
59

VAN y TIR ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: caso en el que no existe discrepancia, aunque se utilice un único tipo de descuento

Los proyectos de inversión A y B tienen el mismo riesgo, requieren unos desembolsos iniciales de 2.000 y 1.000 u.m., respectivamente, y generan ilimitadamente unos flujos de caja anuales constantes iguales a 1.000 u.m. la inversión A y 500 u.m. la inversión B. ¿Qué inversión es preferible según el VAN antes de resolver la discrepancia?

RESOLUCIÓN

$$r_A = \frac{1.000}{2.000} = 0,5 \text{ por } 1 = 50 \text{ por } 100$$

$$r_A = \frac{500}{1.000} = 0,5 \text{ por } 1 = 50 \text{ por } 100$$

La representación gráfica de los valores actuales netos de ambas inversiones se ha realizado en la figura 4.5. Como puede observarse, para cualquier tipo de descuento para el que ambas inversiones son efectuales es preferible la inversión A.

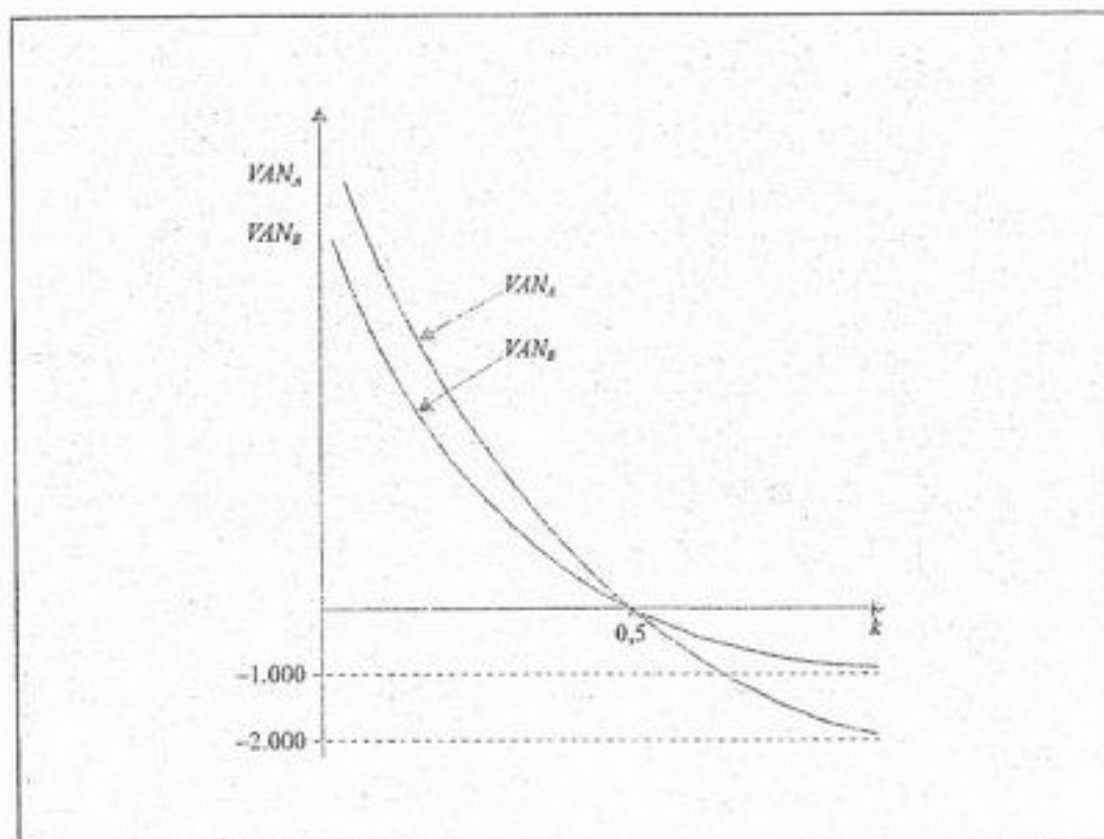


Figura 4.5.

Problema 60

VAN y TIR ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: caso de posible discrepancia, cuando se utiliza un único tipo de descuento

Sean dos proyectos de inversión, A y B, que requieren unos desembolsos iniciales de 2.000 y 1.000 u.m., respectivamente, y que generan ilimitadamente unos flujos netos de caja anuales constantes iguales a 1.000 u.m. la inversión A y 600 u.m. la inversión B. ¿Para qué tipos de descuento es preferible una u otra

Puede comprobarse que para cualquier tipo inferior al 60 por 100 el VAN de la inversión Y es superior al de la inversión X . (Recuérdese, a este respecto, que la expresión utilizada para calcular el VAN de la inversión Y sólo es aplicable cuando el tipo de descuento es superior a la tasa de crecimiento de los flujos, y que cuando aquélla es inferior a ésta, el VAN es infinito.) Por otra parte, cuando se sustituye k por 0,6 en las expresiones de los valores actuales netos de ambas inversiones, se observa que los dos son negativos e iguales a $-333,33$ u.m. Por consiguiente, para esa rentabilidad requerida no es realizable ninguna de las inversiones y tampoco lo serían para rentabilidades requeridas más elevadas. Dicho de otro modo, para cualquier tipo de descuento para el que hubiera que tomar una decisión de selección, la alternativa elegida sería la inversión Y .

Dado que también la TIR conduce a preferir la inversión Y , en este caso no existe discrepancia entre los dos criterios aunque se utilice un único tipo de descuento. En la figura 4.4 se han representado los valores actuales netos de ambos proyectos como funciones del tipo de descuento.

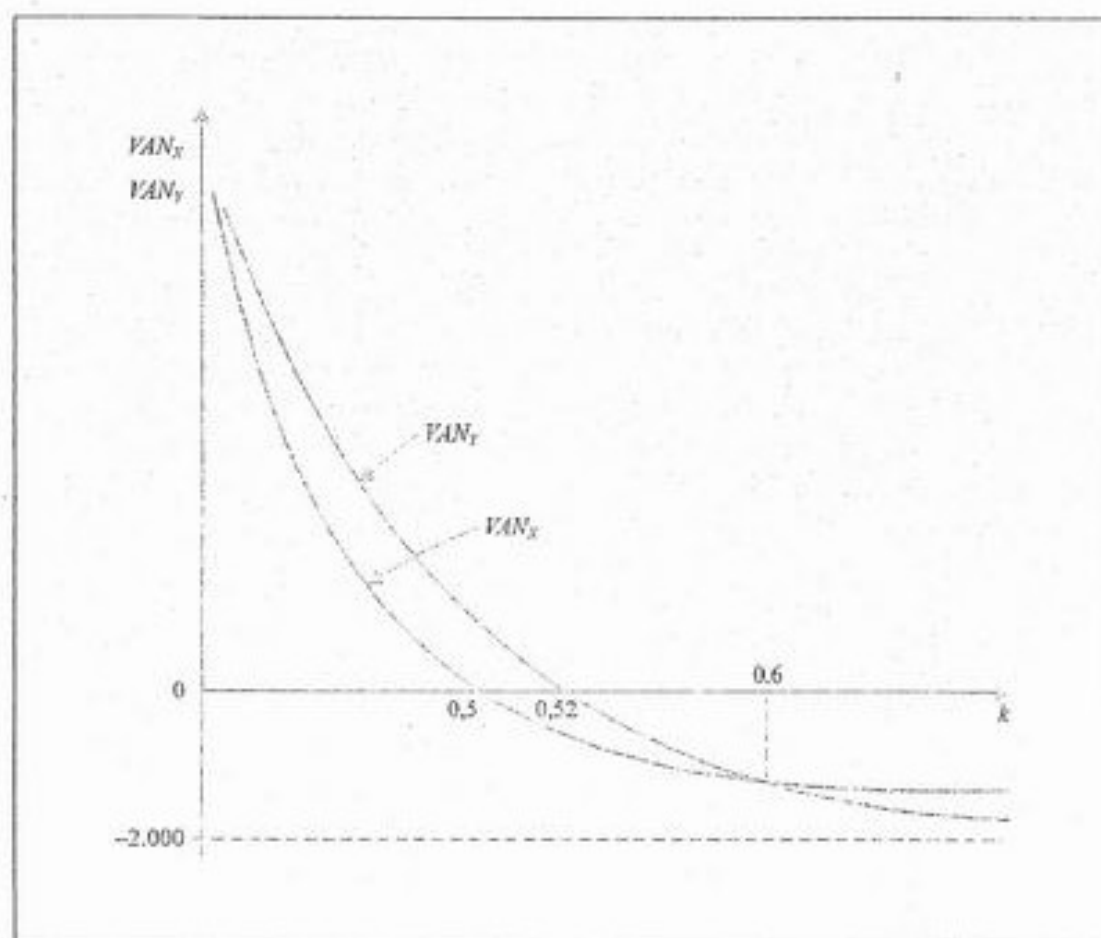


Figura 4.4.

Problema
57

VAN y *TIR* ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: caso en el que no existe discrepancia, aunque se utilice un único tipo de descuento

Las duraciones de las inversiones mutuamente excluyentes *A* y *B* son ilimitadas. La primera tiene un desembolso inicial de 500 u.m. y un flujo de caja anual constante de 250 u.m. La inversión *B* requiere un desembolso inicial de 1.000 u.m. y genera un flujo de caja anual constante de 600 u.m. ¿Qué inversión es preferible según el *VAN*?

RESOLUCIÓN

Las rentabilidades de las inversiones son:

$$r_A = \frac{250}{500} = 0,5 \text{ por } 1 = 50 \text{ por } 100$$

$$r_B = \frac{600}{1.000} = 0,6 \text{ por } 1 = 60 \text{ por } 100$$

La intersección de Fisher se producirá en un valor de k^* que cumple:

$$VAN_A = -500 + \frac{250}{k^*} = -1.000 + \frac{600}{k^*} = VAN_B$$

Es decir:

$$k^* = 0,7 \text{ por } 1 = 70 \text{ por } 100$$

La intersección se produce para un tipo de descuento superior a las tasas de rentabilidad de las dos inversiones. Si una inversión se valora con un tipo de descuento superior a su rentabilidad, su *VAN* es negativo. Por tanto, la intersección se produce por debajo del eje de abscisas y, en consecuencia, no existe discrepancia entre el *VAN* y la *TIR* al jerarquizar las inversiones. Es preferible la inversión *B*.

Problema
58

VAN y *TIR* ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: caso en el que no existe discrepancia, aunque se utilice un único tipo de descuento

Las duraciones de las inversiones mutuamente excluyentes *A* y *B* son ilimitadas. La primera tiene un desembolso inicial de 2.000 u.m. y un flujo de caja

Se desea conocer, siendo el tipo calculatorio en ausencia de inflación del 5 por 100, para qué tasa de inflación media anual acumulativa es preferible uno u otro proyecto de inversión según el criterio del valor actual neto.

RESOLUCIÓN

Los dos proyectos serán indiferentes para aquella tasa de inflación g tal que:

$$\begin{aligned} VAN_A &= -1.000 + \frac{120}{0,05 + g + 0,05g} = -1.500 + \frac{150}{0,05 + g + 0,05g} = VAN_B \rightarrow \\ &\rightarrow -500 + \frac{30}{0,05 + g + 0,05g} = 0 \rightarrow g = 0,00952 \text{ por uno anual} \end{aligned}$$

Por otra parte, si no existiese inflación:

$$\begin{aligned} VAN_A &= -1.000 + \frac{120}{0,05} = 1.400 \\ VAN_B &= -1.500 + \frac{150}{0,05} = 1.500 \end{aligned}$$

Los tipos de inflación para los cuales los valores actuales netos de cada uno de los proyectos valen cero son aquellos g_A^* y g_B^* , respectivamente, tales que:

$$\begin{aligned} -1.000 + \frac{120}{0,05 + g_A^* + 0,05g_A^*} &= 0 \rightarrow g_A^* = 0,066 \text{ por uno anual} \\ -1.500 + \frac{150}{0,05 + g_B^* + 0,05g_B^*} &= 0 \rightarrow g_B^* = 0,0476 \text{ por uno anual} \end{aligned}$$

Los resultados anteriores se han recogido en la figura 4.7. Como puede observarse, el proyecto B es preferible para tasas de inflación medias inferiores al 0,952 por 100. Para tasas superiores es preferible la inversión A .

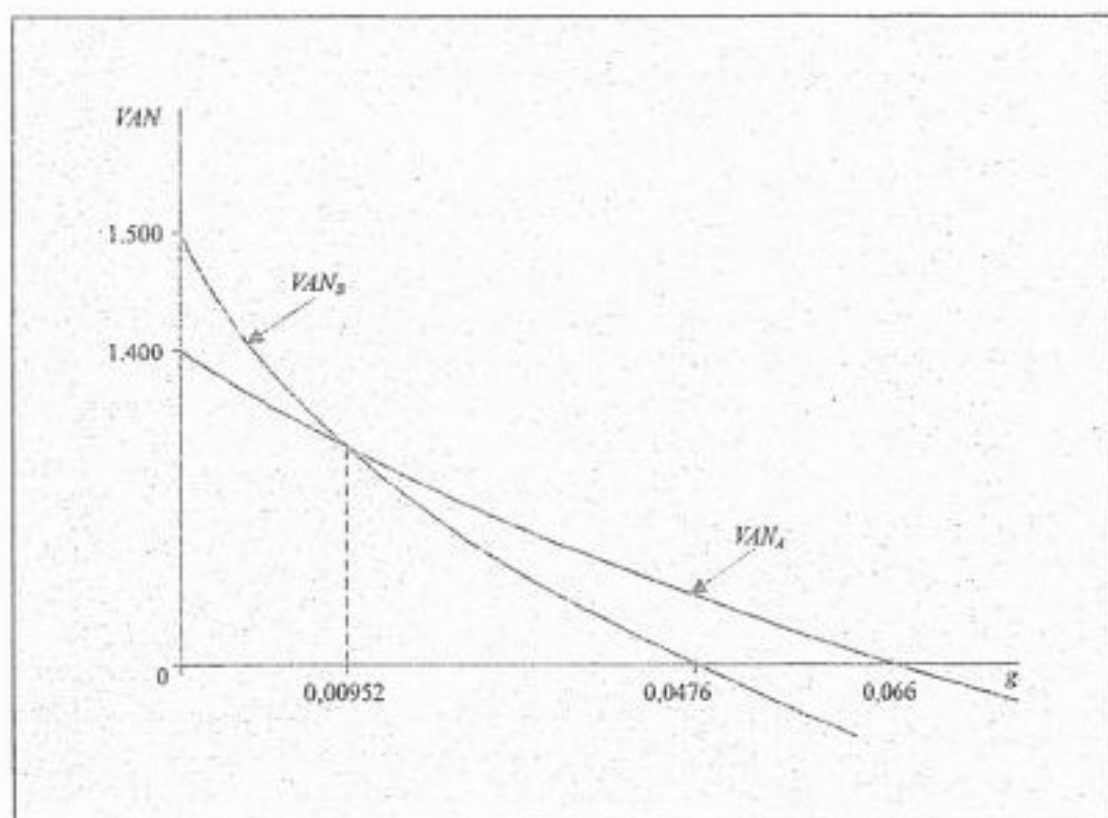


Figura 4.7.

**Problema
62**

VAN y TIR ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: la resolución de la discrepancia

Para elaborar una nueva marca de leche en polvo, la empresa Lactuned, S. A., puede elegir las alternativas de inversiones *C* o *L*, que son mutuamente excluyentes entre sí. Ambas requieren un desembolso inicial de 4.000 u.m. y tienen una duración ilimitada. La primera tiene un flujo, al cabo de un año, igual a 1.600 u.m. y, a partir de entonces, los flujos anuales crecerían a una tasa interanual del 5 por 100. Se desea analizar este problema utilizando los criterios del valor actual neto y de la tasa interna de rentabilidad, bajo el supuesto de que ambas alternativas de inversión tienen el mismo nivel de riesgo.

RESOLUCIÓN

Como ya es bien sabido, cuando los flujos de caja son constantes y la dura-

inversión según el criterio del VAN? ¿Qué inversión es preferible según su tipo de rendimiento interno?

RESOLUCIÓN

Igualando los valores actuales netos de ambos proyectos se obtiene:

$$\begin{aligned} VAN_A &= -2.000 + \frac{1.000}{k^*} = -1.000 + \frac{600}{k^*} = VAN_B \rightarrow -1.000 + \frac{400}{k^*} = \\ &= 0 \rightarrow k^* = 0,4 \text{ por uno} = 40 \text{ por } 100 \end{aligned}$$

Para un tipo de descuento del 40 por 100 los valores actuales netos de ambos proyectos coinciden.

Para $k = 0$, ambos VAN tienden a infinito. Cuando k tiende a infinito, el VAN_A tiende a -2.000 y el VAN_B tiende a -1.000 .

El tipo de descuento para el cual el VAN_A vale cero (tipo de rendimiento interno de la inversión A) se calculará haciendo:

$$-2.000 + \frac{1.000}{r_A} = 0 \rightarrow r_A = 0,5 \text{ por uno anual} = 50 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

De forma semejante, en cuanto a la rentabilidad de la inversión B, se tiene:

$$-1.000 + \frac{600}{r_B} = 0 \rightarrow r_B = 0,6 \text{ por uno anual} = 60 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

En la representación gráfica de los VAN de ambas inversiones (figura 4.6), como funciones del tipo de descuento, se observa que para tipos inferiores al 40 por 100, según este criterio es preferible la inversión A, y a partir de dicho tipo es preferible la inversión B.

Según el criterio de la tasa interna de rentabilidad es siempre preferible la inversión B, cuya rentabilidad (0.6 por uno) es más elevada que la de la inversión A (0.5 por uno).

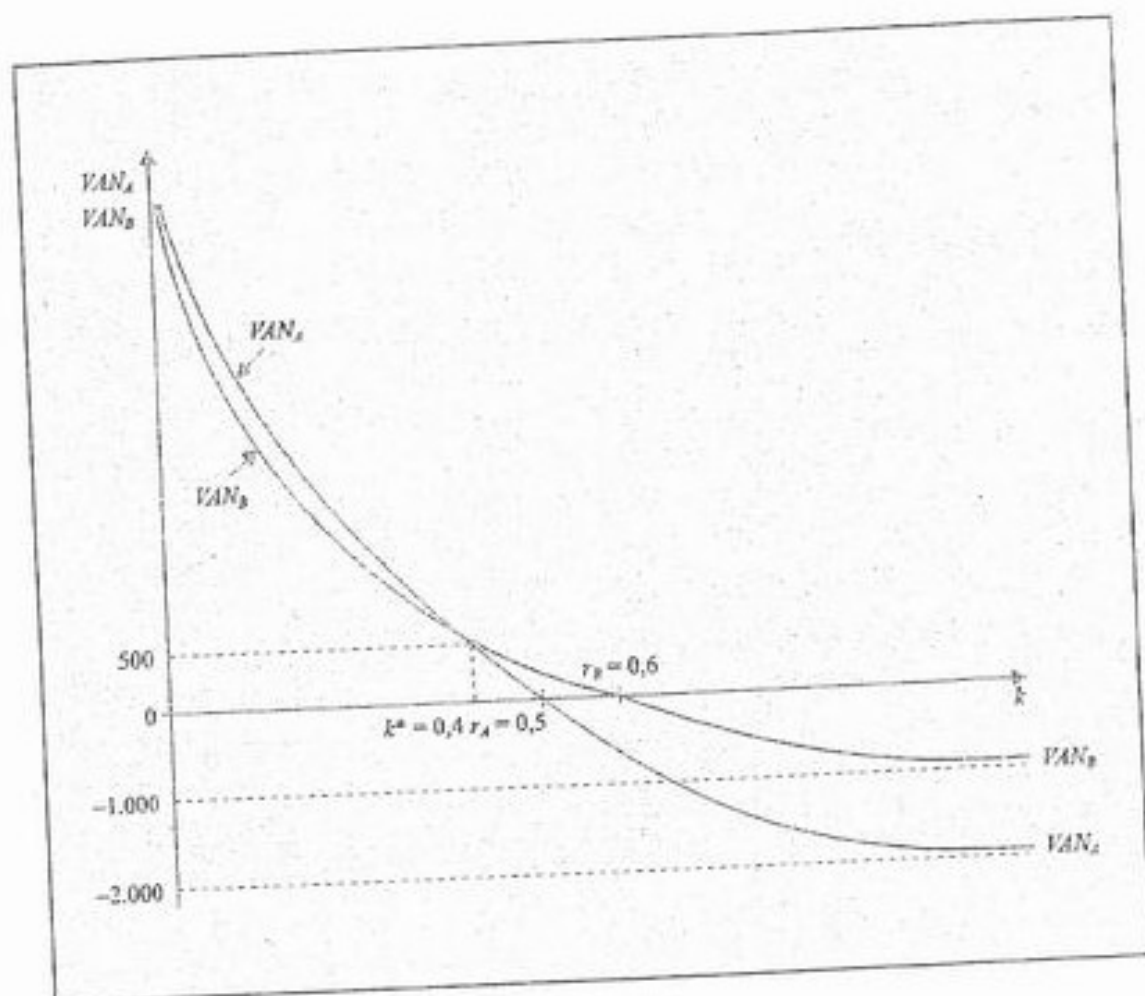


Figura 4.6.

**Problema
61**

VAN y TIR ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: caso de posible discrepancia cuando se utiliza un único tipo de descuento

Cierta empresa dispone de las dos posibilidades de inversión siguientes:

- Se trata de una inversión que requiere un desembolso inicial de 1.000 u.m. y que generará ilimitadamente un flujo de caja anual constante de 120 u.m.
- Se trata de una inversión que precisa un desembolso inicial de 1.500 u.m. y que generará ilimitadamente un flujo de caja anual constante de 150 u.m.

le exigirá una rentabilidad anual de, al menos, el 45 por 100, y al calcular su VAN, obtendrá un valor positivo:

$$VAN_C = -4.000 + \frac{2.000}{k_C} = -4.000 + \frac{2.000}{0,45} = 444,44$$

Por tanto, el VAN conduce a la misma decisión que la TIR: debe realizarse la inversión C. Con ello, se resuelve la discrepancia.

Obsérvese, además, que no es tanto un problema de jerarquización o selección entre un conjunto de proyectos realizables. En realidad, es un problema de efectividad: el proyecto C es efectivo porque su rentabilidad (el 50 por 100) excede a la rentabilidad que le es exigible (el 45 por 100) y, en consecuencia, su valor actual neto es positivo (444,44). El proyecto L no es efectivo, desde el punto de vista de la TIR, pues su rentabilidad (el 45 por 100) es inferior a la que se le debe requerir (el 50 por 100), y tampoco lo es desde el punto de vista del VAN, pues éste es negativo.

En la figura 4.8 se han representado los resultados obtenidos.

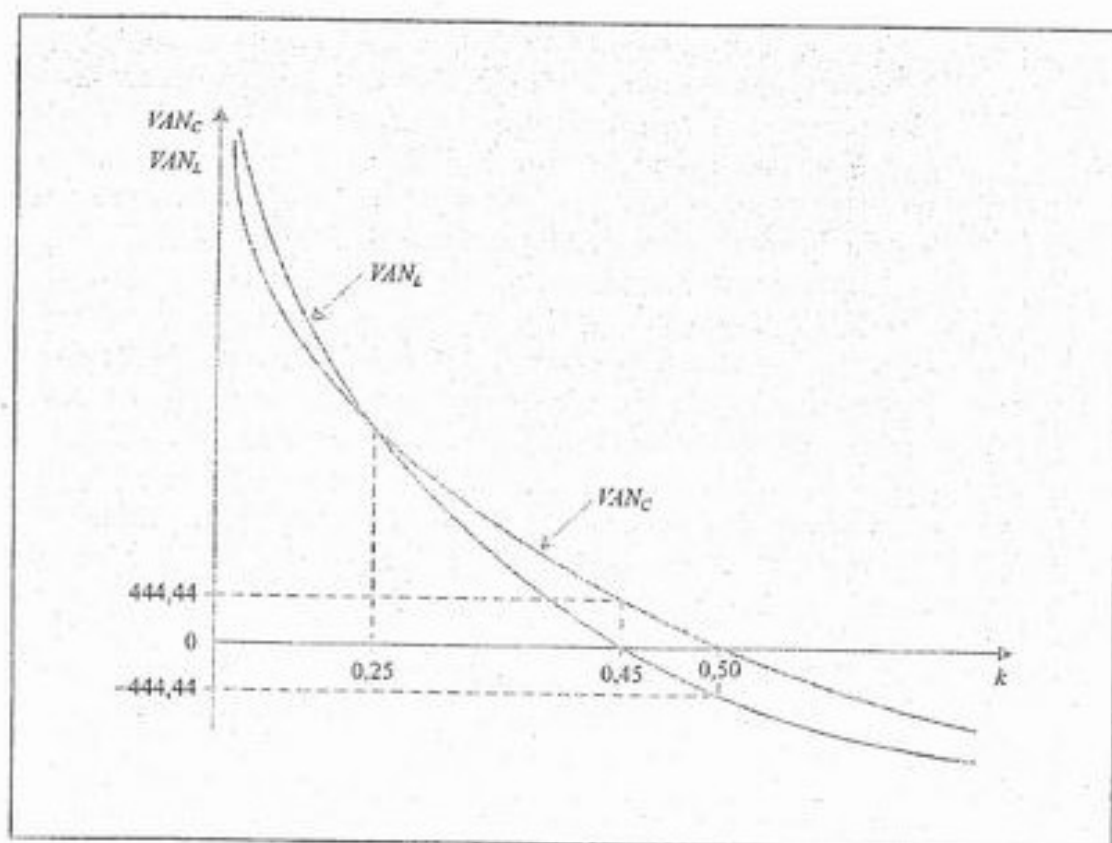


Figura 4.8.

**Problema
63**

VAN y TIR ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo: la resolución de la discrepancia

Al resolver la discrepancia del problema 59, ¿qué inversión es preferible según el VAN?

RESOLUCIÓN

Al resolver la discrepancia, los criterios *VAN* y *TIR* conducen a la misma conclusión de jerarquización. Dado que las dos inversiones tienen la misma rentabilidad (el 50 por 100), según la *TIR* ambas inversiones son indiferentes entre sí. Por consiguiente, según el *VAN* también son indiferentes entre sí, y ninguna es preferible a la otra.

**Problema
64**

VAN, tasa de valor actual y TIR ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo

Doña María Dolores Rodrigo Moya heredó recientemente una inesperada y cuantiosa fortuna de un olvidado pariente afincado en un país oriental. Gastó parte de la misma viajando por dicho país, al que acudió para resolver los trámites de la herencia. En sus viajes conoció una deliciosa fruta, que pensó plantar en su pueblo a la vuelta. Pero, una vez en él, se enteró de que ya habían sido plantados multitud de arbustos productores de esa fruta, de la que, tras diversos estudios realizados por los organismos oficiales que aconsejaron su cultivo, se esperan unas ventas anuales, distribuidas regularmente a lo largo del año, de 2.040.000 kg, a 500 u.m./kg. Los arbustos fueron plantados hace un año y necesitan seis, desde su plantación, para comenzar a dar frutos, por lo que doña María Dolores ha pensado dedicarse a la importación de los mismos durante los próximos cinco años. Tras informarse, a través de amigos dejados en Oriente y consultando con compañías de transporte, sabe que cada kilo le costaría 400 u.m. y que el transporte y seguro de cada pedido no superior a 200.000 kg cuesta 10.000.000 de u.m. Se trata de un producto perecedero que no puede conservarse en condiciones adecuadas más de un mes, por lo que considera que habría que realizarse, al menos, un pedido mensual. El terreno donde piensa ubicar los almacenes le costaría 25 millones de u.m. y la construcción de los locales le supondría otros 15 millones. Al final de los cinco años podría enajenar el terreno en el mismo importe que le costó y estima que, una vez desmontados los locales, podría venderlos en 2,5 millones. La

ción de la inversión es ilimitada, el valor actual neto y la tasa interna de rentabilidad responden a las expresiones:

$$VAN = -A + \frac{Q}{k}$$

y

$$r = \frac{Q}{A}$$

respectivamente. Por consiguiente, en el caso de la alternativa C, se obtiene:

$$VAN_C = -4.000 + \frac{2.000}{k}$$

$$r_C = \frac{2.000}{4.000} = 0,5 \text{ por } 1 = 50 \text{ por } 100$$

También es ya sabido que, cuando la duración de la inversión es ilimitada y los flujos crecen a una tasa constante, el VAN y la TIR responden a las siguientes expresiones:

$$VAN = -A + \frac{Q_1}{k - f}$$

$$r = \frac{Q_1}{A} + f$$

Así, en el caso de la inversión L, se obtiene:

$$VAN_L = -4.000 + \frac{1.600}{k - 0,05}$$

$$r_L = \frac{1.600}{4.000} + 0,05 = 0,45 \text{ por } 1 = 45 \text{ por } 100$$

Dado que ambas inversiones tienen el mismo nivel de riesgo y que la rentabilidad de la inversión L (el 45 por 100) es menor que la de la inversión C (el 50 por 100), según el criterio de la TIR la C es preferible a la L.

Sin embargo, siguiendo el criterio del VAN, si se ha de aplicar el mismo tipo de descuento a las dos inversiones, la preferencia por uno u otro proyecto dependerá, en principio, de cuál sea el tipo k que se utilice para valorarles. Existirá un k^* para el cual ambas inversiones sean indiferentes entre sí, es decir, un k^* tal que:

$$VAN_C = VAN_L$$

o, lo que es lo mismo:

$$VAN_C = -4.000 + \frac{2.000}{k^*} = -4.000 + \frac{1.600}{k^* - 0,05} = VAN_L$$

De donde se deduce que la intersección entre las curvas de ambos valores actuales netos (la *intersección de Fisher*) se produce para un tipo de descuento igual a:

$$k^* = 0,25 \text{ por } 1 = 25 \text{ por } 100$$

Puede comprobarse que para cualquier tipo inferior al 25 por 100 el VAN de la inversión *L* es superior al de la inversión *C*. (Recuérdese nuevamente, a este respecto, que la expresión utilizada para calcular el VAN de la inversión *L* sólo es aplicable cuando el tipo de descuento es superior a la tasa de crecimiento de los flujos, y que cuando aquélla es inferior a ésta el VAN es infinito.) Si, por el contrario, el tipo aplicable a ambas inversiones fuera superior al 25 por 100, el VAN de la *C* sería superior al de la *L*. Por otra parte, cuando se sustituye *k* por 0,25 en las expresiones de los valores actuales netos de ambas inversiones, se observa que los dos son positivos e iguales a 4.000 u.m. Por consiguiente, para esa rentabilidad requerida son realizables las dos inversiones y resulta indiferente elegir una u otra; para cualquier tipo inferior es preferible la inversión *L*, y para cualquier tipo superior es preferible la inversión *C*.

Para resolver la discrepancia, basta observar que la rentabilidad requerida no ha de ser necesariamente la misma para las dos inversiones. En realidad, parece más razonable considerar que la rentabilidad requerida de cada uno de los proyectos de inversión que tienen el mismo riesgo es la rentabilidad de la inversión alternativa. Por ejemplo, si alguien puede colocar las 4.000 u.m. de que dispone en unos pagarés que, como la inversión *C*, rentan el 50 por 100 anual, y le ofrecen otra inversión que tiene el mismo riesgo, de esta inversión alternativa requerirá al menos el 50 por 100. Si tal inversión alternativa fuera la inversión *L*, al calcular su VAN, se obtendría una cifra negativa:

$$VAN_L = -4.000 + \frac{1.600}{k_L - 0,05} = -4.000 + \frac{1.600}{0,5 - 0,05} = -444,44$$

Del mismo modo, si una persona puede colocar las 4.000 u.m. en unos pagarés que, como la inversión *L*, rentan el 45 por 100 anual, y le ofrecen la posibilidad de realizar la inversión *C* que tiene el mismo riesgo, a esta alternativa

$$B = 29.000.000 - 3.300.000 = 25.700.000 \text{ u.m. anuales}$$

El pago anual de impuestos será el 33 por 100 del beneficio neto, es decir:

$$0,33 \times 25.700.000 = 8.481.000 \text{ u.m. anuales}$$

- e) Total pagos: el total de pagos anuales será la suma de los calculados:

Pagos de compras de mercaderías	816.000.000
Pagos de transportes y seguros	120.000.000
Pagos de gastos de personal	4.000.000
Pagos de impuestos sobre beneficios	8.481.000
Total pagos anuales	948.481.000 u.m.

Obsérvese que las amortizaciones son costes, que hay que deducir para calcular el beneficio neto, pero no son pagos.

— Flujos netos de caja anuales: anualmente, el flujo neto de caja será la diferencia entre los cobros y los pagos:

$$969.000.000 - 948.481.000 = 20.519.000 \text{ u.m. anuales}$$

Existe, además, al final del quinto año, otro cobro, correspondiente a la venta del terreno (25 millones) y de los locales por su valor residual (2,5 millones), que totaliza 27,5 millones.

Utilizando como tipo de descuento aquel al que pueden ser colocados los capitales líquidos (20 por 100 ofrecido por el banco), resulta, como valor actual neto de la inversión:

$$\begin{aligned} VAN &= -44.000.000 + \frac{20.519.000}{1,20} + \frac{20.519.000}{1,20^2} + \frac{20.519.000}{1,20^3} + \\ &+ \frac{20.519.000}{1,20^4} + \frac{20.519.000}{1,20^5} + \frac{27.500.000}{1,20^5} = \\ &= -44.000.000 + 20.519.000 \left(\frac{1}{1,20} + \frac{1}{1,20^2} + \frac{1}{1,20^3} + \frac{1}{1,20^4} + \frac{1}{1,20^5} \right) + \\ &+ \frac{27.500.000}{1,20^5} = -44.000.000 + 20.519.000 a_{\overline{5}|0,20} + \frac{27.500.000}{1,20^5} = \end{aligned}$$

$$= -44.000.000 + 20.519.000 \frac{1 - (1,20)^{-5}}{0,20} + \frac{27.500.000}{1,20^5} =$$

$$= 28.416.003,87 \text{ u.m.} > 0$$

Según el criterio del VAN, la inversión es efectuable.
La tasa del valor actual es igual a

$$T = \frac{28.416.003,87}{44.000.000} = 0,6458 \text{ por uno} = 64,58 \text{ por 100}$$

En cuanto a la TIR, o tipo de descuento para el que el VAN es igual a cero, se tendría:

$$-44.000.000 + 20.519.000 \frac{1 - (1 + r)^{-5}}{r} + \frac{27.500.000}{(1 + r)^5} = 0$$

Partiendo de las aproximaciones ya conocidas y por sucesivas aproximaciones posteriores o, directamente, mediante prueba y error, se obtiene:

$$r = 0,4354 \text{ por uno anual} = 43,54 \text{ por 100 anual}$$

La rentabilidad de la inversión sería de un 43,54 por 100 anual, que resulta sustancialmente superior al 20 por 100 ofrecido por el banco si se colocan en él los fondos. Por consiguiente, también según este criterio es efectuable la inversión.

4.6. LA RENTABILIDAD REQUERIDA Y LA DIFERENCIA DE RIESGO ENTRE LAS INVERSIONES MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Problema 65

TIR ante proyectos mutuamente excluyentes que tienen el mismo riesgo

Una persona tiene invertidos 30.000.000 de u.m. en deuda perpetua del Estado, que le renta el 12 por 100 anual. Actualmente está considerando la posibilidad de vender dicha deuda e invertir los 30 millones en la adquisición de una tienda para la venta de pan. Tras consultar con distintos establecimientos de este tipo, ha llegado a la conclusión de que sus ventas en u.m. crecen un 5 por 100 acumulativo,

constitución de la sociedad anónima importadora le costaría, entre gastos de notaría, registro, etc., 4 millones, y sus beneficios se verían gravados anualmente con un tipo impositivo del 33 por 100. La distribución del producto sería realizada por un intermediario que trabaja con un margen de beneficio del 5 por 100 sobre el precio, por lo que pagaría a doña María Dolores sólo el 95 por 100 del precio de venta final de cada kilo. Necesitaría emplear, además, dos operarios que le supondrían un coste anual de 2 millones de u.m. cada uno. Un banco le ha ofrecido a esta señora pagarle el 20 por 100 anual acumulativo de intereses libres de impuestos si coloca en él sus fondos, y ella le pide a usted que le analice la conveniencia de la inversión en la empresa importadora suponiendo que no existe inflación de precios, que todos los ingresos se cobran y los gastos se pagan al contado y que el proyecto de importación tiene el mismo riesgo que el de colocación de los fondos en el banco.

RESOLUCIÓN

El primer paso en la resolución será estimar el desembolso inicial requerido y los cobros y pagos anuales, de cuya diferencia resultarán los flujos netos de caja:

— Desembolsos iniciales:

Adquisición de terreno	25.000.000
Construcción de locales	15.000.000
Constitución de la sociedad	4.000.000
Desembolso inicial	<u>44.000.000</u>

— Cobros anuales:

Se venderían 2.040.000 kg. por cada uno de los cuales el distribuidor pagaría el 95 por 100 de 500 u.m., que es su precio final. Por consiguiente, el cobro anual sería de

$$2.040.000 \times 0,95 \times 500 = 969.000.000 \text{ de u.m.}$$

— Pagos anuales:

a) Para adquisición de mercaderías: habría que importar 2.040.000 kg anuales, cada uno de los cuales costaría 400 u.m. Por consiguiente, anualmente habría de pagarse

$$2.040.000 \times 400 = 816.000.000 \text{ de u.m.}$$

b) Dado que

$$\frac{2.040.000}{12} = 170.000 \text{ kg}$$

realizando un pedido mensual (doce anuales) de 170.000 kg. se satisface la demanda anual, y dado que cada pedido no superior a 200.000 kg cuesta 10.000.000 de u.m., el pago anual a transportistas y aseguradores sería de

$$12 \times 10.000.000 = 120.000.000 \text{ de u.m.}$$

c) Pagos anuales de gastos de personal (dos personas a dos millones cada una): 4.000.000.

d) Pago de impuestos sobre el beneficio:

$$\text{Beneficio} = \text{Ingresos} - \text{Gastos}$$

Ingresos por ventas = 969.000.000 de u.m. anuales:

Gastos:

Compras de mercaderías	816.000.000
Transportes y seguros	120.000.000
Costes de personal	4.000.000
Total gastos	<u>940.000.000</u> de u.m. anuales

El beneficio bruto (antes de deducir las amortizaciones) es de

$$969.000.000 - 940.000.000 = 29.000.000 \text{ de u.m. anuales}$$

Por otra parte, han de amortizarse los gastos de constitución (4 millones) y la depreciación de los locales (15 millones - 2,5 millones = 12,5 millones de u.m.) en los cinco años de vida de la sociedad, por lo que el coste anual de amortización será:

$$\frac{16.500.000}{5} = 3.300.000 \text{ u.m. anuales}$$

El beneficio neto será, por consiguiente,

a) Los diez primeros años ($t = 1, 2, \dots, 10$):

$$\begin{aligned} Q_t &= 14.000.000(1,05)^{t-1} - 10.000.000(1,05)^{t-1} - 1.500.000(1,06)^{t-1} - \\ &\quad - 0,33[4.000.000(1,05)^{t-1} - 1.500.000(1,06)^{t-1} - 3.000.000] = \\ &= 4.000.000(1,05)^{t-1}(1 - 0,33) - 1.500.000(1,06)^{t-1}(1 - 0,33) + \\ &\quad + 0,33 \rightarrow 3.000.000 = 2.680.000(1,05)^{t-1} - 1.005.000(1,06)^{t-1} + 990.000 \end{aligned}$$

b) A partir del undécimo año ($t = 11, 12, \dots$):

$$\begin{aligned} Q_t &= 14.000.000(1,05)^{t-1} - 10.000.000(1,05)^{t-1} - 1.500.000(1,06)^{t-1} - \\ &\quad - 0,33[4.000.000(1,05)^{t-1} - 1.500.000(1,06)^{t-1}] = \\ &= 2.680.000(1,05)^{t-1} - 1.005.000(1,06)^{t-1} \end{aligned}$$

La tasa de rentabilidad aparente de esta inversión será aquel valor r_A para el cual:

$$\begin{aligned} 0 &= -30.000.000 + \frac{2.680.000 - 1.005.000 + 990.000}{1 + r_A} + \\ &\quad + \frac{2.680.000 \times 1,05 - 1.005.000 \times 1,06 + 990.000}{(1 + r_A)^2} + \\ &\quad + \frac{2.680.000 \times 1,05^2 - 1.005.000 \times 1,06^2 + 990.000}{(1 + r_A)^3} + \dots + \\ &\quad + \frac{2.680.000 \times 1,05^9 - 1.005.000 \times 1,06^9 + 990.000}{(1 + r_A)^{10}} + \\ &\quad + \frac{2.680.000 \times 1,05^{10} - 1.005.000 \times 1,06^{10}}{(1 + r_A)^{11}} + \\ &\quad + \frac{2.680.000 \times 1,05^{11} - 1.005.000 \times 1,06^{11}}{(1 + r_A)^{12}} + \\ &= 2.680.000 \left[\frac{1}{1 + r_A} + \frac{1,05}{(1 + r_A)^2} + \frac{1,05^2}{(1 + r_A)^3} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,05^9}{(1 + r_A)^{10}} + \frac{1,05^{10}}{(1 + r_A)^{11}} + \frac{(1,05)^{11}}{(1 + r_A)^{12}} + \dots \right] - \\ &\quad - 1.005.000 \left[\frac{1}{1 + r_A} + \frac{1,06}{(1 + r_A)^2} + \frac{1,06^2}{(1 + r_A)^3} + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1,05^9}{(1+r_A)^{10}} + \frac{1,06^{10}}{(1+r_A)^{11}} + \frac{1,06^{11}}{(1+r_A)^{12}} + \dots \Big] +$$

$$+ 990.000 \left[\frac{1}{1+r_A} + \frac{1}{(1+r_A)^2} + \frac{1}{(1+r_A)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r_A)^{10}} \right]$$

Los tres importes situados entre corchetes son sumas de términos de progresiones geométricas. Como se recordará de otro problema anterior, la suma de los términos de una progresión de este tipo en la que el primer término es T_1 , siendo T_n el último y R la razón, que multiplicada por cada término genera el siguiente, es

$$S = \frac{T_1 - T_n R}{1 - R}$$

En cuanto al primer importe situado entre corchetes, que multiplica a 2.680.000, se tendría

$$\frac{\frac{1}{1+r_A}}{1 - \frac{1,05}{1+r_A}} = \frac{1}{r_A - 0,05}$$

pues ha de suponerse que la razón $(1,05/(1+r_A))$ es inferior a la unidad (la progresión es decreciente). De otro modo, cada término sería superior al anterior y, dado que la progresión es ilimitada, su suma valdría infinito. Al ser la progresión decreciente, el último término (en el infinito) valdría cero ($T_n = 0$).

De forma semejante, en cuanto al segundo importe situado entre corchetes, se tendrá:

$$\frac{\frac{1}{1+r_A}}{1 - \frac{1,06}{1+r_A}} = \frac{1}{r_A - 0,06}$$

En cuanto al tercero, como es ya bien sabido tras los problemas realizados anteriormente, vale

$$a_{10|r_A} = \frac{1 - (1+r_A)^{-10}}{r_A}$$

cada año, y a la de que el importe de dichas ventas incorpora un 40 por 100 de margen sobre el precio total en el que se adquiere el pan al fabricante. Estima, además, que las ventas del primer año serían de 14 millones de u.m., y que para atender al negocio bastaría un dependiente, que representaría unos gastos de personal, el primer año, de 1.500.000 u.m. A partir de ese año, dichos gastos de personal crecerían en la misma tasa acumulativa que la de la inflación, que se espera sea del 6 por 100. Aunque, en caso de ponerlo en marcha, no tiene intención de vender nunca el negocio, las normas del Ministerio de Economía y Hacienda le permiten amortizar la inversión realizada con la adquisición de la tienda en diez años. Sus beneficios netos anuales se verían gravados con un tipo del 33 por 100, cada año, en el impuesto sobre la renta de las sociedades. Suponiendo que todos los ingresos se cobran al contado y que los gastos se pagan, también, al contado, ¿considera usted aconsejable instalar el negocio siguiendo el criterio basado en su rentabilidad? Supóngase, además, que la deuda perpetua y el proyecto de la panadería tienen el mismo riesgo.

RESOLUCIÓN

- Desembolso inicial = 30.000.000 de u.m.
- Cobros anuales por ventas:

Primer año	14.000.000 de u.m.
Segundo año	$14.000.000(1 + 0,05)$ de u.m.
Tercer año	$14.000.000(1 + 0,05)(1 + 0,05) = 14.000.000 \times 1,05^2$ u.m.
Cuarto año	$14.000.000 \times 1,05^2(1 + 0,05) = 14.000.000 \times 1,05^3$ u.m.
Quinto año	$14.000.000 \times 1,05^4$ u.m.
⋮	
t -ésimo año	$14.000.000(1,05)^{t-1}$ de u.m.

- Pagos anuales por compras:

El importe anual de las ventas (V) incorpora un 40 por 100 sobre el importe de las compras (C). Por consiguiente:

$$V = C + 0,40C = 1,4C \rightarrow C = \frac{V}{1,4}$$

Por tanto, los pagos anuales por compras serán:

$$\text{Primer año} \quad \frac{14.000.000}{1,4} = 10.000.000 \text{ de u.m.}$$

Segundo año	$\frac{14.000.000}{1,4} (1 + 0,05) = 10.000.000(1,05)$ de u.m.
Tercer año	$\frac{14.000.000}{1,4} (1 + 0,05)^2 = 10.000.000(1,05)^2$ de u.m.
Cuarto año	$\frac{14.000.000}{1,4} (1,05)^3 = 10.000.000(1,05)^3$ de u.m.
Quinto año	$\frac{14.000.000}{1,4} (1 + 0,05)^4 = 10.000.000(1,05)^4$ de u.m.
⋮	
t -ésimo año	$10.000.000 \times 1,05^{t-1}$

— Pagos anuales por gastos de personal:

Primer año	1.500.000 u.m.
Segundo año	$1.500.000(1 + 0,06)$ u.m.
Tercer año	$1.500.000(1 + 0,06)^2$ u.m.
Cuarto año	$1.500.000(1 + 0,06)^3$ u.m.
Quinto año	$1.500.000(1 + 0,06)^4$ u.m.
⋮	
t -ésimo año	$1.500.000(1 + 0,06)^{t-1}$

— Pagos anuales de impuestos sobre beneficios:

$$\begin{aligned} \text{Beneficio bruto del año } t &= \text{Ingresos} - \text{Gastos} = \text{Ventas} - \text{Compras} - \\ &- \text{Gastos de personal} = 14.000.000(1,05)^{t-1} - 10.000.000(1,05)^{t-1} - \\ &- 1.500.000(1,06)^{t-1} = 4.000.000(1,05)^{t-1} - 1.500.000(1,06)^{t-1} \end{aligned}$$

A partir del undécimo año el beneficio neto coincidirá con el beneficio bruto. Pero, en los diez primeros, hay que deducir las amortizaciones de los 30.000.000 invertidos en la adquisición del local, correspondiendo 3 millones a cada año. Por consiguiente, los pagos de impuestos serán:

$$0,33[4.000.000(1,05)^{t-1} - 1.500.000(1,06)^{t-1} - 3.000.000] \quad \text{los diez primeros años } (t = 1, 2, \dots, 10)$$

$$\text{y} \quad 0,33[4.000.000(1,05)^{t-1} - 1.500.000(1,06)^{t-1}] \quad \text{a partir del undécimo año } (t = 11, 12, \dots)$$

En definitiva, el flujo neto de caja (cobros-pagos) del t -ésimo año será:

La duplicación del tipo de descuento produce sólo una pequeña reducción del valor actual del flujo de caja a un año y, sin embargo, el mismo aumento del tipo de descuento hace que el valor actual del flujo de caja a diez años se reduzca en un 37,2 por 100. Por tanto, el riesgo de que, al alterarse el tipo de descuento (la rentabilidad requerida), el proyecto deje de ser viable es mayor cuando sus mayores flujos de caja se generan tarde que cuando se producen pronto.

En la práctica, puede haber muchos más factores que afecten al riesgo de los diversos proyectos alternativos, pero, si los demás factores inciden sobre los niveles de riesgo de los mismos en la misma medida, el más arriesgado será aquel en el que los mayores flujos de caja se generen más tarde.

Problema
67

La introducción del riesgo en la selección de proyectos mutuamente excluyentes

Se están analizando las dos inversiones mutuamente excluyentes, A y B, cuyas características más relevantes son las siguientes:

- En cuanto a la inversión A, se ha calculado la rentabilidad que cabe esperar de la misma, habiendo resultado ser un 15 por 100 anual. Se trata de una inversión muy segura, por lo que se le aplica una prima de riesgo de sólo el 4 por 100.
- En cuanto a la inversión B, su realización entraña cierto nivel de riesgo, por lo que se le asigna una prima del 8 por 100. También se ha calculado su rentabilidad esperada y ha resultado ser el 18 por 100.

El coste de financiación de esta empresa es el 10 por 100 y la rentabilidad del activo libre de riesgo es el 5 por 100. Se desea saber qué inversión es realizable.

RESOLUCIÓN

El activo libre de riesgo es, como su nombre indica, aquel cuya rentabilidad es conocida con certeza. Quien presta dinero al Estado, adquiriendo un título de deuda a corto plazo emitido por el Tesoro Público, realiza una inversión que puede considerarse libre de riesgo. Pero con ello renuncia a hacer otro uso de ese dinero durante cierto período de tiempo y, por ello, ha de percibir cierta remuneración. A esas inversiones se les denomina *activos sin riesgo*, y su rentabilidad es el *tipo de interés libre de riesgo*, R_f . A medida que las inversiones tengan mayor nivel de riesgo, su rentabilidad esperada habrá de ser más elevada para compensar ese mayor riesgo que incorporan. De manera que la rentabilidad esperada estará integrada por dos partes: una con la que remunera el mero transcurso del tiempo sin

disponer de los fondos invertidos (el tipo de interés libre de riesgo), y otra que remunera el riesgo en que se incurre.

Asignar a una inversión una *prima de riesgo* igual p equivale a señalar que, para compensar el nivel de riesgo que tiene, ha de generar, al menos, una rentabilidad igual al resultado de añadir esta prima a la rentabilidad libre de riesgo R_f . Se denomina *rentabilidad neta de riesgo* de un proyecto de inversión a la diferencia entre la rentabilidad esperada del mismo y su prima de riesgo.

Pero el problema es más complejo cuando no se trata ya de analizar si la rentabilidad de un activo compensa el riesgo que tiene (de modo que resulta preferible invertir en él, en lugar de hacerlo en el activo sin riesgo), sino de compararle con otro u otros proyectos de inversión mutuamente excluyentes que tienen distintos niveles de riesgo. Evidentemente, la diferencia entre sus rentabilidades ha de compensar la diferencia entre sus riesgos.

Además, evidentemente, la rentabilidad de un activo ha de superar al coste de la financiación, pues, por ejemplo, no es económico tomar dinero a un coste anual del 20 por 100 para invertir esos fondos al 10 por 100.

Por todo ello, sintetizando, para que un proyecto sea efectuable con arreglo al tipo de rendimiento interno, ha de cumplir tres *condiciones*:

1. Su rentabilidad neta de riesgo ha de superar la rentabilidad del activo libre de riesgo. Dicho de otro modo, su rentabilidad total ha de ser superior a la que resulta de añadir su prima de riesgo a la rentabilidad del activo sin riesgo.
2. Su rentabilidad neta de riesgo ha de superar la rentabilidad neta de riesgo de las otras inversiones alternativas, es decir, de los otros proyectos con los que sea mutuamente excluyente.
3. Su rentabilidad aparente total ha de superar el coste de la financiación.

Denominando p a la prima de riesgo del proyecto, R_f a la rentabilidad del activo sin riesgo, k_i al coste de la financiación, r' a la rentabilidad del proyecto alternativo y p' a la prima de riesgo de este último, las tres condiciones se expresan del siguiente modo:

$$\begin{aligned} r - p &> R_f && \text{o bien, } r > R_f + p \\ r - p &> r' - p' && \text{o bien, } r > r' - p' + p \\ r &> k_i \end{aligned}$$

Puesto que r ha de ser mayor que $(R_f + p)$, mayor que $(r' - p' + p)$ y mayor que k_i , las tres condiciones pueden sintetizarse en que la rentabilidad total de la inversión, r , ha de ser superior a su rentabilidad requerida, k , siendo ésta la mayor de las tres tasas anteriores; dicho de otro modo:

Por consiguiente, la expresión de la tasa de retorno aparente resultante es

$$0 = -30.000.000 + 2.680.000 \frac{1}{r_A - 0,05} - 1.005.000 \frac{1}{r_A - 0,06} + \\ + 990.000 \frac{1 - (1 + r_A)^{-10}}{r_A}$$

Mediante sucesivas aproximaciones, por el método de prueba y error, se obtiene:

$$r_A = 0,1111 \text{ por uno anual} = 11,11 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

La inversión no es conveniente, habida cuenta de que la inversión actual de esta persona le renta el 12 por 100 anual. En términos reales, la tasa neta de inflación de esta inversión en la expenduría de pan sería:

$$r_R = \frac{0,1111 - 0,06}{1,06} = 0,0482 \text{ por uno anual} = 4,82 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

En cuanto a la inversión en deuda perpetua del Estado, su rentabilidad real es

$$r_R = \frac{0,12 - 0,06}{1,06} = 0,0566 \text{ por uno anual} = 5,66 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

En términos reales también es superior la rentabilidad de la deuda perpetua que la de la tienda.

Problema
66

La sensibilidad del valor actual respecto a la rentabilidad requerida

Se desea determinar la reducción que se produce en el valor actual de un flujo de caja de 500 u.m. al pasar el tipo de descuento del 5 al 10 por 100 anual, en los dos casos siguientes:

- Cuando el flujo de caja se produce al cabo de un año.
- Cuando el flujo de caja se genera a los diez años.

RESOLUCIÓN

El valor actual de un flujo, Q , situado en el momento n (es decir, al cabo de n años), es:

$$VA = \frac{Q}{(1+k)^n}$$

A medida que aumentan k y el momento en el que se genera cada flujo, el denominador de VA se eleva, y el aumento es exponencial, de modo que el efecto de una elevación de k es más acusado en el valor actual de los flujos más distantes.

Así, en este caso, el valor actual de 500 u.m. de dentro de un año descontadas al 5 por 100 vale 476,20 u.m.:

$$\frac{500}{(1+0,05)} = 476,20 \text{ u.m.}$$

Por otro lado, si la rentabilidad requerida pasara a ser el 10 por 100, el valor actual de las 500 u.m. pasaría a valer 454,55:

$$\frac{500}{(1+0,10)} = 454,55 \text{ u.m.}$$

Por tanto, el aumento de cinco puntos en el tipo de descuento hace que el valor actual del flujo a un año se reduzca en un 4,55 por 100:

$$\frac{454,55 - 476,20}{476,20} = -0,0455 \text{ por 1}$$

Sin embargo, si las 500 u.m. se generaran dentro de 10 años, los resultados serían los siguientes:

— Valor actual para un tipo de descuento igual al 5 por 100:

$$\frac{500}{(1+0,05)^{10}} = 192,75 \text{ u.m.}$$

— Valor actual para un tipo de descuento igual al 10 por 100:

$$\frac{500}{(1+0,10)^{10}} = 306,95 \text{ u.m.}$$

— Porcentaje de reducción en el valor actual provocado por un aumento de cinco puntos porcentuales en el tipo de descuento:

$$\frac{192,75 - 306,95}{306,95} = -0,3720 \text{ por 1} = -37,20 \text{ por 100}$$

man, y que es un helicóptero plegable de bolsillo de uso individual. Dados los estudios de mercado efectuados, la empresa se ha planteado la posibilidad de invertir los recursos provenientes de la liquidación de la flota de autobuses en la fabricación del invento de don Unedio, pues, además, según los estudios técnicos que ha encargado, el importe necesario para ello es sorprendentemente pequeño, pudiendo cubrirse con los 20 millones disponibles.

Los flujos de caja esperados del proyecto consistente en ampliar la flota de avionetas (proyecto A) son 10.000.000 u.m. anuales durante tanto tiempo que su duración se puede considerar ilimitada. El flujo de caja del primer año del proyecto de don Unedio (proyecto H) sería de 9.000.000 u.m., y a partir de ese momento se espera que crezcan los flujos a una tasa interanual constante del 15 por 100, siendo su duración tan prolongada que también puede considerarse ilimitada.

Dado que la inversión en la avioneta tiene un riesgo semejante al riesgo medio de las inversiones que ya conforman la empresa, antes de aparecer el proyecto de don Unedio se consideraba que la rentabilidad que se le debería requerir sería igual al coste medio de la financiación de TIO, que es el 25 por 100. En el proyecto del Heliman no se tiene tanta confianza, pues el negocio no es habitual en la empresa (se trata de un proyecto de fabricación y la empresa es de servicios); es un producto totalmente nuevo en el mercado, por lo que no existe experiencia previa, y se teme que muchos posibles adquirentes del mismo por sus necesidades de desplazamiento, o de atravesar la ciudad en horas punta, no se atrevan a usarlo; se teme, incluso, que el Gobierno vete el proyecto ante el temor de que se llene de estos aparatos un espacio donde no es posible colocar semáforos. No obstante, es difícil asignarle una prima sobre el tipo de interés sin riesgo que es el 6 por 100. Por ello, don Ovidio, presidente de la empresa TIO y descendiente de su fundador, nos ha pedido que determinemos para qué primas de riesgo es efectuable el proyecto de su empleado. Como los honorarios son aceptables (superiores a los de otra dedicación alternativa de nuestro tiempo), y don Ovidio paga puntualmente y es solvente (el riesgo es prácticamente nulo), aceptamos y resolvemos su problema.

RESOLUCIÓN

Evidentemente, la rentabilidad del proyecto A, r_A , es el 50 por 100:

$$r_A = \frac{10.000.000}{20.000.000} = 0,50 \text{ por } 1 = 50 \text{ por } 100$$

También resulta ya evidente que la rentabilidad del proyecto H es el 60 por 100:

$$r_H = \frac{9.000.000}{20.000.000} + 0,15 = 0,60 \text{ por } 1 = 60 \text{ por } 100$$

Como se señaló en el problema anterior, para que una inversión sea realizable, su rentabilidad, r , ha de cumplir la siguiente condición:

Condición de efectabilidad:

$$r > k$$

donde:

$$k = \max [(R_f + p); (r' - p' + p); k_0]$$

Si el proyecto A fuera un proyecto independiente, se le requeriría una rentabilidad del 25 por 100 anual, que es el coste de la financiación; es decir, en el caso de este proyecto:

$$R_f + p = 0,25$$

Puesto que el tipo de interés sin riesgo es el 6 por 100, la prima de riesgo requerida de este proyecto es el 21 por 100:

$$p = 0,25 - R_f = 0,25 - 0,06 = 0,21 \text{ por } 1 = 21 \text{ por } 100$$

Puesto que la rentabilidad de este proyecto (el 50 por 100) es superior a su rentabilidad requerida (el 25 por 100), como proyecto independiente es efectuable. Pero, al aparecer el proyecto H , nos encontramos ante dos proyectos mutuamente excluyentes, y, para que el proyecto A sea efectuable, su rentabilidad ha de ser también superior a $(r' - p' + p)$, donde r' y p' son la rentabilidad y la prima de riesgo del proyecto alternativo, respectivamente (es decir, del proyecto H). Por consiguiente, en cuanto al proyecto A :

$$r' - p' + p = 0,60 - p' + 0,21 = 0,81 - p'$$

Puesto que la rentabilidad del proyecto A es el 50 por 100, sólo será efectuable cuando:

$$0,50 > 0,81 - p'$$

es decir, cuando la prima de riesgo del proyecto alternativo (el proyecto H) supere el 31 por 100:

$$p' > 0,31 \text{ por } 1$$

Condición de efectividad:

$$r > k$$

donde:

$$k = \max [(R_f + p); (r' - p' + p); k_i]$$

Así, en relación a la inversión *B* a la que se refiere el enunciado:

$$R_f + p = 0,05 + 0,08 = 0,13$$

$$r' - p' + p = 0,15 - 0,04 + 0,08 = 0,19$$

$$k_i = 0,10$$

Por consiguiente, la rentabilidad que ha de exigirse de esta inversión es el 19 por 100. Si se tratara de una inversión independiente, su rentabilidad requerida sería el 13 por 100. Pero, dado que se ha de elegir entre este proyecto y el proyecto *A*, y que, para que el *B* sea preferible, su rentabilidad neta de riesgo ha de superar a la de la inversión alternativa, debe generar una rentabilidad de, al menos, el 19 por 100. Como su rentabilidad total es el 18 por 100, el proyecto *B* no es efectivo.

En cuanto al proyecto *A*, los datos son los siguientes:

$$R_f + p = 0,05 + 0,04 = 0,09$$

$$r' - p' + p = 0,18 - 0,08 + 0,04 = 0,14$$

$$k_i = 0,10$$

La rentabilidad requerida de este proyecto es el 14 por 100. Como su rentabilidad total esperada es el 15 por 100, de acuerdo con la *TIR* el proyecto es efectivo.

Como ya es evidente, si el criterio del *VAN* se aplica correctamente, utilizando como tipo de descuento la rentabilidad requerida, conduce a la misma decisión que el tipo de rendimiento interno. En efecto, si la rentabilidad esperada (18 por 100 en el proyecto *B*) es inferior a la rentabilidad requerida (19 por 100 en el proyecto *B*), el *VAN* del proyecto es negativo y éste no es efectivo. Cuando, por el contrario, la rentabilidad esperada del proyecto (el 15 por 100 en el proyecto *A*) supera su rentabilidad requerida (el 14 por 100 en el proyecto *A*), el *VAN* del proyecto es positivo y éste es realizable. En la figura 4.6 se han representado gráficamente estos resultados.

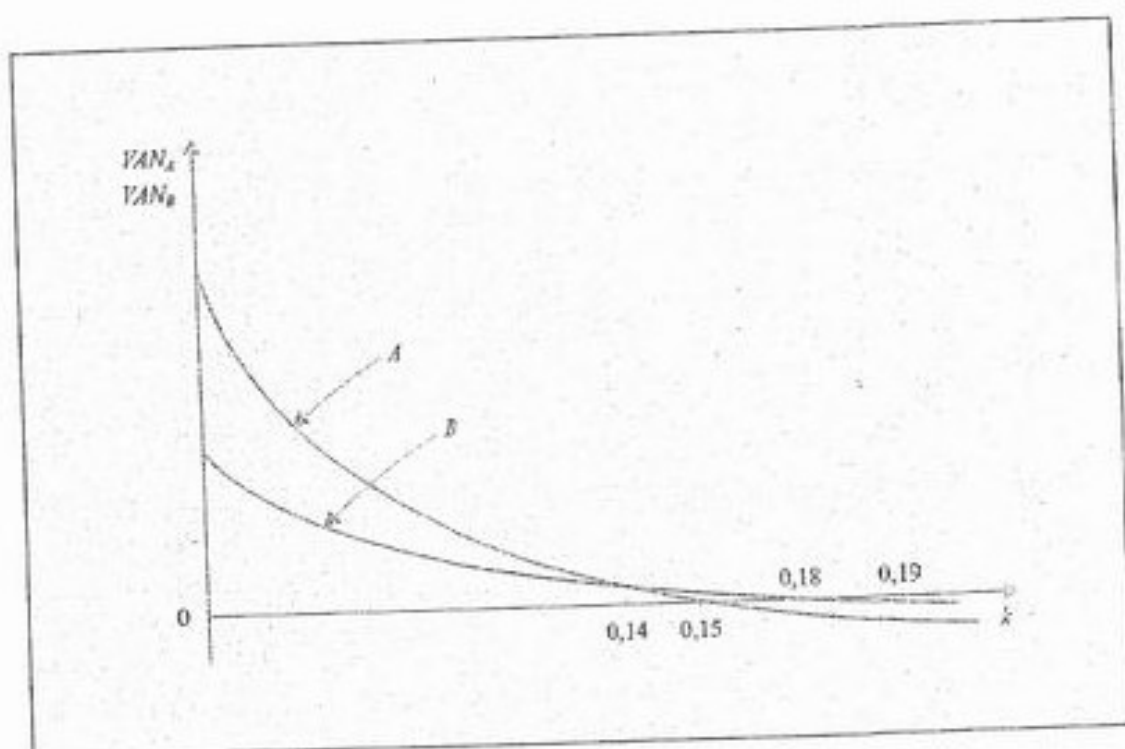


Figura 4.9.

**Problema
68**

La introducción del riesgo en la selección de proyectos mutuamente excluyentes

Transportes Interurbanos Ovidio (TIO) es una empresa que comenzó sus actividades hace más de medio siglo, transportando pasajeros de unas ciudades a otras en autobuses. Dada la gran dinamicidad de la empresa, ha llegado a ampliar su actividad al transporte urgente de personas por vía aérea en avionetas y helicópteros.

Recientemente ha liquidado algunas de sus inversiones en autobuses, al finalizar una de las licencias que tenía concedidas y no serle renovada. Con los fondos, 20.000.000 u.m., pensaba ampliar la flota de avionetas comprando otra para prestar servicios a altos mandos de la Administración Pública y de grandes empresas que tienen urgencia en sus desplazamientos con cierta frecuencia. Éste es un negocio que en TIO conocen bien, por lo que se pueden estimar los flujos de caja con cierta precisión y el riesgo existente es escaso.

Pero no hace mucho, ante la dirección de la empresa se presentó don Unedio Gómez, que trabaja en los talleres de mantenimiento y que ha desarrollado un producto que, una vez analizado el mercado por otra empresa experta de marketing, puede ser revolucionario. Se trata del producto que don Unedio denomina Heli-

$$r' - p' + p = 0,09 - 0,04 + 0,02 = 0,07 \text{ por } 1$$

$$k_i = 0,06 \text{ por } 1$$

La inversión requerida de la inversión A es el 8 por 100, pues es la más alta de las tres tasas calculadas. Dado que su rentabilidad esperada es más alta (el 9 por 100), sí es realizable.

En cuanto a la inversión B:

$$R_f + p = 0,06 + 0,04 = 0,10 \text{ por } 1$$

$$r' - p' + p = 0,09 - 0,02 + 0,04 = 0,11 \text{ por } 1$$

$$k_i = 0,06 \text{ por } 1$$

La rentabilidad requerida de esta inversión es el 11 por 100. Dado que su rentabilidad esperada es más baja (el 9 por 100), la inversión B no es realizable.

**Problema
70**

La introducción del riesgo en la selección de proyectos mutuamente excluyentes

A una empresa cuyo coste del capital es el 12 por 100 se le presentan dos alternativas de inversión mutuamente excluyentes, X e Y. A la alternativa X se le asigna una prima de riesgo del 3 por 100 sobre la rentabilidad del activo libre de riesgo que se estima en un 4 por 100, en tanto que la prima de riesgo que se asigna a la inversión Y es el 5 por 100. La rentabilidad esperada de la inversión Y es el 15 por 100. ¿Cuál es la rentabilidad requerida de la inversión X?

RESOLUCIÓN

La rentabilidad requerida de la inversión X será el mayor de los tres importes siguientes:

$$R_f + p = 0,04 + 0,03 = 0,07 \text{ por } 1$$

$$r' - p' + p = 0,15 - 0,05 + 0,03 = 0,13 \text{ por } 1$$

$$k_i = 0,12 \text{ por } 1$$

Por consiguiente, la rentabilidad requerida de la inversión X es el 13 por 100.

Problema
71

La introducción del riesgo en la selección de proyectos mutuamente excluyentes

Las inversiones *A* y *B* tienen unas rentabilidades esperadas respectivas del 15 y del 18 por 100. Sus primas de riesgo son del 4 y del 8 por 100, respectivamente. El coste de financiación de la empresa es el 10 por 100, y la rentabilidad del activo libre de riesgo es el 6 por 100. ¿Qué inversión es efectuable?

RESOLUCIÓN

En cuanto a la inversión *A*:

$$R_f + p = 0,06 + 0,04 = 0,10 \text{ por 1}$$

$$r' - p' + p = 0,18 - 0,08 + 0,04 = 0,14 \text{ por 1}$$

$$k_i = 0,10 \text{ por 1}$$

La rentabilidad requerida de la inversión *A* es el 14 por 100, y puesto que su rentabilidad esperada es más elevada (el 15 por 100), es efectuable.

En cuanto a la inversión *B*:

$$R_f + p = 0,06 + 0,08 = 0,14 \text{ por 1}$$

$$r' - p' + p = 0,15 - 0,04 + 0,08 = 0,19 \text{ por 1}$$

$$k_i = 0,10 \text{ por 1}$$

La rentabilidad requerida de la inversión *B* es el 19 por 100, que es más elevada que su rentabilidad esperada, por lo que no es efectuable.

Si la prima de riesgo del proyecto de Heliman fuera inferior al 31 por 100, sería preferible tal proyecto al consistente en adquirir una nueva avioneta.

El problema también puede plantearse partiendo del análisis del proyecto *H*. Para que sea efectuable ha de cumplir la condición señalada anteriormente, o sea:

Condición de efectualidad:

$$r > k$$

donde:

$$k = \max [(R_f + p); (r' - p' + p); k_i]$$

Y, en este caso:

- En primer lugar, su rentabilidad (el 60 por 100) supera al coste de la financiación, k_i (el 25 por 100).
- En segundo lugar, su rentabilidad ha de superar el resultado de añadir su prima de riesgo al tipo R_f , es decir:

$$R_f + p' = 0,06 + p$$

Dado que la rentabilidad de esta inversión es el 60 por 100, ha de cumplirse que:

$$0,60 > 0,06 + p$$

Por consiguiente, si fuera un proyecto independiente sería suficiente que su prima de riesgo no alcanzara el 54 por 100:

$$p < 0,54$$

- Pero, en tercer lugar, al haber un proyecto alternativo, su rentabilidad ha de superar el importe:

$$r' - p' + p = 0,50 - 0,21 + p = 0,29 + p$$

Como su rentabilidad es el 60 por 100, para que sea efectuable habrá de cumplirse:

$$0,60 > 0,29 + p$$

o, lo que es lo mismo:

$$p < 0,31$$

que es la misma conclusión que se obtuvo anteriormente.

El problema también puede plantearse en términos de rentabilidades netas de riesgo. Puesto que la rentabilidad del proyecto *A* es el 50 por 100 y que su prima de riesgo es el 21 por 100, su rentabilidad neta de riesgo es el 29 por 100:

$$0,50 - 0,21 = 0,29 \text{ por 1}$$

Del mismo modo, siendo *p* la prima de riesgo del proyecto *H*, su rentabilidad neta de riesgo es:

$$0,60 - p$$

Será realizable el proyecto *H* cuando:

$$0,60 - p > 0,29$$

es decir, cuando:

$$p < 0,31$$

Problema
69

La introducción del riesgo en la selección de proyectos mutuamente excluyentes

Se están analizando dos inversiones mutuamente excluyentes, *A* y *B*, cuyas características más relevantes son las siguientes:

- Inversión *A*: la rentabilidad que cabe esperar de la misma es del 9 por 100 anual. Por ser una inversión muy segura se le aplica una prima por riesgo del 2 por 100.
- Inversión *B*: Su realización conlleva un cierto nivel de riesgo, por lo que se le aplica una prima del 4 por 100. Su rentabilidad esperada es del 9 por 100.

El coste de la financiación de esta empresa es del 6 por 100 y la rentabilidad del activo libre de riesgo es del 3 por 100. Se desea saber qué inversión es preferible.

RESOLUCIÓN

En cuanto a la inversión *A*:

$$R_f + p = 0,03 + 0,02 = 0,05 \text{ por 1}$$

5

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento sobre la rentabilidad y el riesgo de la empresa

5.1. EL APALANCAMIENTO Y EL PUNTO MUERTO

Problema 1

El apalancamiento y el punto muerto

Se acaba de crear la empresa Calcuned, S. A., para fabricar cierto componente neumático de uso industrial. Para constituir la empresa se abonaron 1.000.000 u.m. en concepto de gastos de notaría, registro mercantil, etc., que se amortizarán en diez años. Este mismo es el plazo de amortización de la maquinaria y de los locales industriales de la empresa, por los que se abonaron 5.000.000 de u.m. Junto a estos gastos de amortización, que se efectúa linealmente, existen otros costes fijos de producción y distribución que importan 1.400.000 de u.m. anuales. Además, la fabricación y distribución de cada componente requiere un coste variable de 10.000 u.m. Esta empresa tiene, junto a los activos mencionados anteriormente, un activo circulante que importa 2.000.000 de u.m. Calcuned, S. A., se financia en un 50 por 100 con recursos propios y en el otro 50 por 100 con recursos ajenos, a los que abona un interés anual del 12 por 100. Si el precio de cada componente que vende es de 20.000 u.m., se desea conocer:

- El punto muerto, punto de equilibrio o umbral de rentabilidad de esta empresa.
- Su coeficiente de apalancamiento operativo si vende 500 componentes al año.
- Su coeficiente de apalancamiento financiero para ese volumen de ventas.
- Su coeficiente de apalancamiento combinado, o total, para ese mismo volumen de ventas.

4.7. LA RELACIÓN ENTRE EL PLAZO DE RECUPERACIÓN SIMPLE Y LOS CRITERIOS VAN Y TIR CUANDO LOS FLUJOS DE CAJA SON CONSTANTES Y LA DURACIÓN DE LA INVERSIÓN ES ILIMITADA

Problema
72

La relación entre el plazo de recuperación simple y los criterios VAN y TIR cuando los flujos de caja son constantes y la duración de la inversión es ilimitada

Una inversión genera *ad infinitum* un flujo de caja anual constante de 100 u.m. y su rentabilidad requerida es el 10 por 100 anual. ¿Qué VAN mínimo ha de exigírsele para que sea congruente con la exigencia de que su plazo de recuperación simple no sobrepase los 5 años?

RESOLUCIÓN

Cuando los flujos de caja son constantes (iguales a Q) y la duración de la inversión es mayor que el propio plazo de recuperación simple, éste es igual al cociente entre el desembolso inicial y el flujo de caja constante:

$$P = \frac{A}{Q}$$

Por consiguiente, en tal caso:

$$A = Q \cdot P$$

$$Q = \frac{A}{P}$$

Por otra parte, cuando el flujo de caja es constante y la inversión dura indefinidamente,

$$VAN = -A + \frac{Q}{k}$$

$$r = \frac{Q}{A}$$

Si la duración de la inversión tiende a infinito, y el desembolso inicial se recupera en algún momento, tal duración será superior a su plazo de recuperación y, en tal caso, siendo el flujo de caja constante, podrá escribirse:

$$VAN = -A + \frac{A}{P \cdot k} = A \left(\frac{1}{P \cdot k} - 1 \right)$$

o bien:

$$VAN = Q \left(\frac{1}{k} - P \right)$$

y también

$$r = \frac{1}{P}$$

En este caso, limitar P a un máximo de cinco años equivale a exigir un VAN mínimo de 500 u.m.:

$$VAN = Q \left(\frac{1}{k} - P \right) = 100 \left(\frac{1}{0,10} - 5 \right) = 500 \text{ u.m.}$$

cuantía igual a ΔBE , aquél se modifica en ΔBN u.m., el apalancamiento financiero se medirá por el coeficiente:

$$A_f = \frac{\Delta BN / BN}{\Delta BE / BE} = \frac{\Delta BN}{\Delta BE} \cdot \frac{BE}{BN} \quad (6)$$

y, si las variaciones son infinitesimales:

$$A_f = \frac{dBN}{dBE} \cdot \frac{BE}{BN}$$

Pero siendo F los intereses de las deudas:

$$BN = BE - F$$

Por consiguiente:

$$\frac{dBN}{dBE} = 1$$

y, en definitiva,

$$A_f = \frac{BE}{BN} = \frac{(p - C_v)V - C_f}{(p - C_v)V - C_f - F} \quad (7)$$

Dado que $F \geq 0$, es obvio que:

$$A_f \geq 1 \Rightarrow \frac{\Delta BN / BN}{\Delta BE / BE} \geq 1 \Rightarrow \frac{\Delta BN}{BN} \geq \frac{\Delta BE}{BE}$$

Una proporción de variación del beneficio económico genera una variación del beneficio neto de proporción mayor o igual que aquella y tanto mayor cuanto mayores sean los gastos financieros.

Obsérvese que el valor de A_f es el mismo si se mide la incidencia de las variaciones del beneficio económico sobre el beneficio líquido, BL , resultante de descontar los impuestos del beneficio neto. En efecto, en tal caso, siendo t el tipo de gravamen:

$$A_f = \frac{\Delta BL / BL}{\Delta BE / BE} = \frac{\Delta BL}{\Delta BE} \cdot \frac{BE}{BL}$$

donde $BL = BN(1 - t) = (BE - F)(1 - t)$. Y tomando variaciones infinitesimales:

$$A_f = \frac{dBL}{dBE} \frac{BE}{BL} = (1 - t) \frac{BE}{BN(1 - t)} = \frac{BE}{BN}$$

que coincide con el resultado de la expresión (7).

En este caso, los activos de la empresa importan:

Activo fijo	
Gastos de constitución	1.000.000 u.m.
Maquinaria y locales	5.000.000 u.m.
Activo circulante	2.000.000 u.m.
Total	8.000.000 u.m.

Estos 8.000.000 de u.m. se encuentran financiadas al 50 por 100 por capitales propios (4.000.000 de u.m.) y ajenos (4.000.000 de u.m.) y el coste de estos últimos es el 12 por 100 anual, es decir:

$$F = 0,12 \cdot 4.000.000 = 480.000 \text{ u.m.}$$

Por tanto:

$$A_f = \frac{(20.000 - 10.000)500 - 2.000.000}{(20.000 - 10.000)500 - 2.000.000 - 480.000} = 1,19$$

d) Al modificarse las ventas, se produce una variación del beneficio generado por los activos, BE , y al modificarse este último se altera el beneficio financiero de la empresa (figura 5.1). El apalancamiento total mide la incidencia de las variaciones de las ventas sobre el beneficio neto de intereses, por el coeficiente:

$$A_t = \frac{\Delta BN / BN}{\Delta V / V}$$

$$\Delta V \Rightarrow \Delta BE \Rightarrow \Delta BN$$

Figura 5.1.

RESOLUCIÓN

a) El punto muerto es el nivel de producción y ventas para el cual el beneficio vale cero. Hasta este nivel, la empresa obtiene pérdidas y, a partir de él, comienza a generar beneficios. Generalmente, el beneficio a que hace referencia el punto muerto es el beneficio económico, es decir, el beneficio generado por los activos, antes de deducir los intereses de las deudas y el Impuesto sobre la Renta de Sociedades.

Siendo p el precio de venta, V el número de unidades físicas vendidas, C_v el coste variable unitario y C_f el importe de los costes fijos no financieros, el beneficio económico, BE (también denominado *BAIT*, o beneficio antes de intereses y tasas impositivas), será:

$$BE = pV - C_v V - C_f = (p - C_v)V - C_f \quad (1)$$

Por consiguiente, el punto muerto será el número de unidades físicas vendidas, X , para el cual:

$$(p - C_v)X - C_f = 0$$

Es decir:

$$X = \frac{C_f}{p - C_v} \quad (2)$$

En este caso, los costes fijos son los siguientes:

Amortización de gastos de constitución (1.000.000 de u.m. en diez años):

100.000 u.m. anuales

Amortización de maquinaria y locales (5.000.000 de u.m. en diez años):

500.000 u.m. anuales

Otros gastos fijos:

1.400.000 u.m. anuales

Coste fijo anual total = 100.000 + 500.000 + 1.400.000 = 2.000.000 de u.m.

Por tanto:

$$X = \frac{2.000.000}{20.000 - 10.000} = 200 \text{ u.f.}$$

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

b) El apalancamiento operativo se mide por el cociente entre el tanto por uno de modificación del beneficio económico y el tanto por uno de variación de las ventas que da lugar a dicha modificación del beneficio. Si, inicialmente, las unidades físicas producidas y vendidas son V , el beneficio económico es BE y, al modificarse las ventas en una cuantía igual a ΔV , el beneficio económico se altera en ΔBE , el apalancamiento operativo valdrá:

$$A_0 = \frac{\Delta BE/BE}{\Delta V/V} = \frac{\Delta BE}{\Delta V} \frac{V}{BE} \quad (3)$$

Cuando las alteraciones son infinitesimales, las variaciones finitas han de sustituirse por diferenciales:

$$A_0 = \frac{dBE}{dV} \frac{V}{BE}$$

En la ecuación (1) puede comprobarse que la derivada del beneficio respecto a las ventas vale:

$$\frac{dBE}{dV} = p - C_v$$

Por consiguiente:

$$A_0 = (p - C_v) \frac{V}{BE} = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f} \quad (4)$$

Dado que los costes fijos no pueden ser negativos, es obvio que:

$$A_0 \geq 1 \Rightarrow \frac{\Delta BE/BE}{\Delta V/V} \geq 1 \Rightarrow \frac{\Delta BE}{BE} \geq \frac{\Delta V}{V} \quad (5)$$

Una modificación de las ventas provocará una modificación del beneficio de proporción no inferior y su incidencia será tanto mayor cuanto mayores sean los costes fijos.

En este caso:

$$A_0 = \frac{(20.000 - 10.000)500}{(20.000 - 10.000)500 - 2.000.000} = 1,6\bar{6}$$

c) El apalancamiento financiero es la incidencia que tiene la variación del beneficio económico sobre el beneficio financiero o neto que resta después de deducir las cargas financieras, pero antes de deducir los impuestos, BN . Si inicialmente el beneficio financiero es BN y, al alterarse el beneficio económico en una

dido el pasado año 100.000 unidades físicas de su producto, lo cual representa un elevado margen sobre su punto muerto, o punto de equilibrio, que se encuentra situado en las 20.000 unidades físicas. ¿Cuál es el coeficiente de apalancamiento operativo de esta empresa?

RESOLUCIÓN

Según se indicó anteriormente:

$$A_0 = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f}$$

Es decir:

$$A_0 = \frac{V}{V - \frac{C_f}{p - C_v}} = \frac{V}{V - X}$$

donde, según se recordará, X es el punto muerto. Por consiguiente, en este caso:

$$A_0 = \frac{100.000}{100.000 - 20.000} = 1,25$$

Problema
5

El apalancamiento y el punto muerto

En las mismas páginas del diario madrileño a que se refería el problema anterior se recogían los siguientes datos sobre otra empresa del sector de aparatos de informática:

- Margen bruto unitario de su producto: 12.330 u.m.
- Coste fijo no financiero por unidad física de producto: 2.577 u.m.
- Coste financiero por unidad física de producto: 352 u.m.

Se desea conocer los coeficientes de apalancamiento de esta empresa.

RESOLUCIÓN

Según se dedujo anteriormente:

$$A_0 = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f}$$

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

La diferencia entre el precio de venta y el coste variable por unidad es el denominado «margen bruto unitario»:

$$m = p - C_v$$

y de la expresión anterior se deduce que:

$$A_0 = \frac{p - C_v}{(p - C_v) - \frac{C_f}{V}} = \frac{m}{m - \frac{C_f}{V}}$$

Por tanto:

$$A_0 = \frac{12.330}{12.300 - 2.577} = 1,26$$

En cuanto al apalancamiento financiero:

$$\begin{aligned} A_f &= \frac{(p - C_v)V - C_f}{(p - C_v)V - C_f - F} = \frac{(p - C_v) - \frac{C_f}{V}}{(p - C_v) - \frac{C_f}{V} - \frac{F}{V}} = \frac{m - \frac{C_f}{V}}{m - \frac{C_f}{V} - \frac{F}{V}} = \\ &= \frac{12.300 - 2.577}{12.330 - 2.577 - 352} = 1,04 \end{aligned}$$

El apalancamiento total será:

$$A_t = A_0 \cdot A_f = 1,26 \cdot 1,04 = 1,31$$

Problema 6

El apalancamiento y el punto muerto

Se dispone de los siguientes datos relativos al producto S70 de Pumunedsa:

- Margen bruto unitario: 10.000 u.m.
- Volumen de ventas anual: 2.000 u.f.
- Costes fijos anuales no financieros: 1.000.000 de u.m.
- Volumen de deudas: 20.000.000 de u.m.
- Tipo de interés de sus deudas: 14 por 100.

Como se deduce de esta expresión y de las expresiones del apalancamiento operativo y del apalancamiento financiero (3) y (6), es evidente que:

$$A_t = A_o A_f$$

Es decir:

$$A_t = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f} \cdot \frac{(p - C_v)V - C_f}{(p - C_v)V - C_f - F} = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f - F}$$

Dado que $C_f \geq 0$ y $F \geq 0$, es obvio que:

$$A_t \geq 1 \Rightarrow \frac{\Delta BN / BN}{\Delta V / V} \geq 1 \Rightarrow \frac{\Delta BN}{BN} \geq \frac{\Delta V}{V}$$

La existencia de costes fijos (financieros y no financieros) amplifica la incidencia de la coyuntura de las ventas sobre el beneficio financiero que restará para los accionistas. La existencia de altos coeficientes de apalancamiento (es decir, la existencia de elevados costes fijos) es favorable cuando lo es la evolución de las ventas, pues, si éstas se elevan, los beneficios subirán en una proporción tanto mayor cuanto mayores sean estos coeficientes. Sin embargo, si las ventas se reducen, la reducción de los beneficios será también tanto mayor, proporcionalmente, cuanto mayores sean los coeficientes de apalancamiento. De ahí que estos coeficientes permitan una medida del riesgo empresarial.

Los costes fijos no financieros suelen crecer con el tamaño de la empresa (entre ellos se encuentran las amortizaciones). También se les denomina «cargas de estructura». Los costes financieros, por su parte, dependen, como es obvio, del endeudamiento de la empresa y de los tipos de interés.

En el presente caso:

$$A_t = \frac{(20.000 - 10.000)500}{(20.000 - 10.000)500 - 2.000.000 - 480.000} = 1,98$$

Problema
2

El punto muerto

El producto de una empresa tiene unos costes fijos anuales de 1.000.000 de u.m. y un coste variable unitario de 100 u.m. Si el precio unitario de venta es de 90 u.m., ¿cuánto vale su punto muerto?

RESOLUCIÓN

Si el coste variable unitario es superior al precio de venta, el margen bruto unitario es negativo. Con cada unidad vendida se pierden 10 u.m.:

$$p - c_v = 90 - 100 = -10 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, los costes fijos no se recuperan nunca o, lo que es lo mismo, el punto muerto no existe. Cuanto más se vende, más pérdidas se tienen. No existe un volumen de ventas a partir del cual se obtengan beneficios.

Problema
3

El punto muerto

Los costes fijos anuales de una empresa valen 200.000 u.m. El coste variable unitario de su producto es igual al precio en el que lo vende e igual a 200 u.m. ¿Cuánto vale su punto muerto?

RESOLUCIÓN

Si se aplica la expresión del punto muerto:

$$X = \frac{C_F}{p - c_v}$$

puede llegarse a la conclusión de que el punto muerto vale infinito.

En realidad, el punto muerto no existe. La lógica del punto muerto es la siguiente: con cada unidad física de producto que se vende se recuperan $p - c_v$ unidades monetarias de coste fijo. Por ello, al dividir el total a recuperar (C_F) entre lo que se recupera con cada unidad vendida, se obtiene el número de unidades necesarias para la recuperación.

Pero, cuando el margen unitario ($p - c_v$) vale cero, como en este caso, con cada unidad de venta no se recupera nada, no existe el punto muerto; no existe un volumen de ventas anual a partir del cual se obtengan beneficios.

Problema
4

El apalancamiento

En las páginas de Economía de un diario madrileño se pudo leer recientemente que una empresa fabricante de cierto componente para automóviles había ven-

RESOLUCIÓN

Como se ha demostrado anteriormente:

$$A_0 = \frac{BE + C_F}{BE}$$

En este caso:

$$A_0 = \frac{4C_F + C_F}{4C_F} = \frac{4 + 1}{4} = 1,25$$

Por otra parte:

$$\frac{\Delta BE}{BE} = \frac{\Delta V}{V} A_0$$

Por consiguiente:

$$\frac{\Delta BE}{BE} = 0,15 \cdot 1,25 = 0,1875 \text{ por } 1 = 18,75 \text{ por } 100$$

Problema
10

El apalancamiento y el punto muerto

Las ventas del producto de una empresa superan en un 20 por 100 a su punto muerto. ¿Cuánto vale su apalancamiento operativo?

RESOLUCIÓN

Según se ha demostrado anteriormente:

$$A_0 = \frac{V}{V - X}$$

En este caso:

$$V = 1,2X$$

Por tanto:

$$A_0 = \frac{1,2X}{1,2X - X} = \frac{1,2}{1,2 - 1} = 6$$

**Problema
11**

El apalancamiento y el punto muerto

El punto muerto de una empresa es el 20 por 100 de sus ventas. ¿Cuánto vale su apalancamiento operativo?

RESOLUCIÓN

$$A_0 = \frac{V}{V - X}$$

En este caso:

$$X = 0,2V$$

Por consiguiente:

$$A_0 = \frac{V}{V - 0,2V} = \frac{1}{1 - 0,2} = 1,25$$

**Problema
12**

El apalancamiento y el punto muerto

En relación al beneficio económico de una empresa, los costes financieros representan el 20 por 100. ¿Cuánto vale su apalancamiento financiero?

RESOLUCIÓN

$$A_f = \frac{BE}{BN} = \frac{1}{BN/BE} = \frac{1}{(BE - F)/BE} = \frac{1}{1 - F/BE} = \frac{1}{1 - 0,20} = 1,25$$

Se desea saber:

- El punto muerto de este producto de Pumunedsa.
- Sus coeficientes de apalancamiento.

RESOLUCIÓN

- Conforme ya se sabe:

$$X = \frac{C_f}{p - C_v} = \frac{C_f}{m} = \frac{1.000.000}{10.000} = 100 \text{ u.f.}$$

- También son ya conocidas las siguientes expresiones:

$$A_0 = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f} = \frac{10.000 \cdot 2.000}{10.000 \cdot 2.000 - 1.000.000} = 1,05$$

$$A_f = \frac{(p - C_v)V - C_f}{(p - C_v)V - C_f - F} = \frac{10.000 \cdot 2.000 - 1.000.000}{10.000 \cdot 2.000 - 1.000.000 - 0,14 \cdot 20.000.000} = 1,17$$

$$A_r = A_0 \cdot A_f = 1,05 \cdot 1,17 = 1,23$$

Problema 7

El apalancamiento

Del informe sobre la estructura de los costes de la empresa Xunedis se deduce que, en relación al beneficio generado por los activos de la empresa, los costes fijos no financieros representan el 25 por 100 y que los financieros representan el 10 por 100. ¿Cuáles son los coeficientes de apalancamiento de esta empresa?

RESOLUCIÓN

Operando en las expresiones ya conocidas, se deducen las siguientes:

$$A_0 = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f} = \frac{BE + C_f}{BE} = 1 + \frac{C_f}{BE}$$

$$A_f = \frac{BE}{BN} = \frac{1}{BN/BE} = \frac{1}{(BE - F)/BE} = \frac{1}{1 - (F/BE)}$$

por tanto, en este caso:

$$A_0 = 1 + 0,25 = 1,25$$

$$A_f = \frac{1}{1 - 0,10} = 1,11$$

$$A_f = A_0 \cdot A_f = 1,25 \cdot 1,11 = 1,39$$

Problema

8

El apalancamiento

El beneficio económico de una empresa ha sido 2.000.000 de u.m. con unos costes fijos no financieros de 400.000 u.m. ¿Cuánto habría aumentado su beneficio económico si sus ventas hubieran aumentado un 200 por 100?

RESOLUCIÓN

El apalancamiento operativo vale 1,2:

$$A_0 = (p - c_v) \frac{V}{BE} = \frac{BE + C_F}{BE} = 1 + \frac{C_F}{BE} = 1 + \frac{400.000}{2.000.000} = 1,2$$

Por otra parte:

$$\frac{\Delta BE}{BE} = \frac{\Delta V}{V} A_0$$

Por consiguiente:

$$\frac{\Delta BE}{BE} = 2 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ por } 1 = 240 \text{ por } 100$$

Al aumentar las ventas un 200 por 100, el beneficio económico aumenta un 240 por 100.

Problema

9

El apalancamiento

El beneficio económico de una empresa es el cuádruple de sus costes fijos no financieros. Si sus ventas aumentan un 15 por 100, ¿en qué porcentaje variará su beneficio económico?

5.2. ENDEUDAMIENTO Y RENTABILIDAD

Problema

17

La rentabilidad y el apalancamiento

Una empresa tiene un coeficiente de apalancamiento financiero de 2 y el 50 por 100 de sus activos se financian con deudas. Si su rentabilidad económica aumenta un 12 por 100, ¿cuánto aumentará su rentabilidad financiera?

RESOLUCIÓN

Cuando se modifica el beneficio operativo como consecuencia de una alteración de las ventas, la rentabilidad económica se alterará en la misma proporción:

$$\frac{\Delta RE}{RE} = \frac{\Delta BE}{BE}$$

pues RE es igual al resultado de dividir BE entre una constante, que es el activo (A).

Cuando se modifica el beneficio neto como consecuencia de una variación del beneficio operativo, la rentabilidad financiera se alterará en la misma proporción:

$$\frac{\Delta RF}{RF} = \frac{\Delta BN}{BN}$$

pues RF es igual al resultado de dividir BN entre una constante (los recursos propios, RP). Por tanto, la elasticidad respecto a la rentabilidad económica de la rentabilidad financiera será igual al apalancamiento financiero:

$$\frac{\Delta RF/RF}{\Delta RE/RE} = \frac{\Delta BN/BN}{\Delta BE/BE} = A_f$$

Por consiguiente:

$$\frac{\Delta RF}{RF} = \left(\frac{\Delta RE}{RE} \right) A_f$$

Si el apalancamiento financiero vale 2 y la rentabilidad económica aumenta un 12 por 100, la rentabilidad financiera aumentará un 24 por 100:

$$\frac{\Delta RF}{RF} = 0,12 \cdot 2 = 0,24 \text{ por } 1 = 24 \text{ por } 100$$

Problema
18

La rentabilidad y el apalancamiento

El apalancamiento operativo de una empresa vale 1,5, su activo vale 50 millones de u.m. y tiene unos costes fijos no financieros de 25 millones. ¿En qué porcentaje aumentará su rentabilidad económica si sus ventas aumentan un 12 por 100?

RESOLUCIÓN

Como se demostró anteriormente:

$$\frac{\Delta RE}{RE} = \frac{\Delta BE}{BE}$$

Por consiguiente:

$$A_0 = \frac{\Delta BE/BE}{\Delta V/V} = \frac{\Delta RE/RE}{\Delta V/V}$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\Delta RE}{RE} = \frac{\Delta V}{V} A_0$$

En este caso:

$$\frac{\Delta RE}{RE} = 0,12 \cdot 1,5 = 0,18 \text{ por } 1 = 18 \text{ por } 100$$

Problema
19

La relación entre la rentabilidad financiera y la rentabilidad operativa

Se desea estudiar la rentabilidad financiera líquida, o rentabilidad líquida de los capitales propios, de una empresa que tiene un activo de 100 millones de u.m., para niveles de rentabilidad económica (o rentabilidad de los activos) que oscilan, de cinco en cinco puntos, entre un 1 y un 31 por 100, para los siguientes niveles de endeudamiento:

**Problema
13**

El apalancamiento

El beneficio neto de una empresa es el 80 por 100 de su beneficio operativo. ¿Cuánto vale su apalancamiento financiero?

RESOLUCIÓN

$$A_f = \frac{BE}{BN} = \frac{1}{BN/BE} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

**Problema
14**

El apalancamiento

Si el beneficio neto de una empresa es igual al doble de sus costes financieros, ¿en qué porcentaje se modificará su beneficio neto si su beneficio económico aumenta un 15 por 100?

RESOLUCIÓN

$$A_f = \frac{BE}{BN} = \frac{BN + F}{BN} = \frac{2F + F}{2F} = \frac{2 + 1}{2} = 1,5$$

Por otra parte:

$$\frac{\Delta BN}{BN} = \frac{\Delta BE}{BE} A_f$$

Por tanto:

$$\frac{\Delta BN}{BN} = 0,15 \cdot 1,5 = 0,225 \text{ por } 1 = 22,5 \text{ por } 100$$

**Problema
15**

El apalancamiento y el punto muerto

Las ventas del producto de una empresa duplican su punto muerto, y su beneficio neto triplica sus costes financieros. ¿Cuánto vale su apalancamiento total?

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

RESOLUCIÓN

Según se ha demostrado anteriormente:

$$A_0 = \frac{V}{V - X}$$

En este caso:

$$V = 2X$$

Por tanto:

$$A_0 = \frac{2X}{2X - X} = \frac{2}{2 - 1} = 2$$

Por otra parte:

$$A_f = \frac{BE}{BN} = \frac{BN + F}{BN}$$

Por consiguiente:

$$A_f = \frac{3F + F}{3F} = \frac{3 + 1}{3} = 1,3333$$

El apalancamiento total es el producto del apalancamiento operativo y el financiero. Por tanto:

$$A_t = A_0 \cdot A_f = 2 \cdot 1,3333 = 2,67$$

Problema 16

El apalancamiento

El total de costes fijos (financieros y no financieros) de una empresa representa el 25 por 100 de su beneficio neto. ¿Cuánto vale su apalancamiento total?

RESOLUCIÓN

Operando en la expresión ya conocida, se obtiene:

$$A_t = \frac{(p - c_v)V}{(p - c_v)V - C_f - F} = \frac{BN + C_f + F}{BN} = 1 + \frac{C_f + F}{BN} = 1 + 0,25 = 1,25$$

$$MB = pV - C_v \cdot V = (p - C_v)V$$

Por consiguiente, el apalancamiento operativo de esta empresa vale:

$$A_0 = \frac{(p - C_v)V}{(p - C_v)V - C_f} = \frac{100}{80} = 1,25$$

En cuanto a su apalancamiento financiero (sobre el cual, como se recordará, no influye la consideración de los impuestos), denominando RA a los recursos ajenos y RP a los recursos propios, será igual a:

$$A_f = \frac{(p - C_v)V - C_f}{(p - C_v)V - C_f - F} = \frac{80}{80 - 0,12RA} \quad (1)$$

Para cada nivel de recursos ajenos se tendrá un apalancamiento financiero diferente, y también un apalancamiento total distinto, conforme a la expresión:

$$A_t = A_0 \cdot A_f = 1,25 \cdot A_f \quad (2)$$

El caso en el que el coeficiente RA/RP vale cero es aquel en el que la empresa no tiene deudas ($RA = 0$) y los 300 millones están financiados íntegramente con capital propio ($RP = 300$ millones de u.m.). Cuando este coeficiente vale 0,5 significa que los recursos ajenos representan la mitad que los propios y, dado que el total ha de ser de 300, se deduce que:

$$RP + RA = RP + \frac{1}{2}RP = 1,5RP = 300 \Rightarrow \begin{cases} RP = 200 \text{ millones de u.m.} \\ RA = 100 \text{ millones de u.m.} \end{cases}$$

En general, denominando L al coeficiente recursos ajenos/recursos propios, y siendo P el pasivo total:

$$P = RP + RA$$

$$L = \frac{RA}{RP} \Rightarrow RP = \frac{RA}{L} \Rightarrow P = \frac{RA}{L} + RA = RA \left(1 + \frac{1}{L}\right) \Rightarrow RA = P \frac{L}{1 + L} \quad (3)$$

En este caso, $P = 300$ millones de u.m. Aplicando la expresión (3) para cada valor de L y sustituyendo luego en las expresiones (1) y (2), se obtienen los resultados de la tabla 5.2.

Como ya se sabe, la rentabilidad financiera antes de impuestos responde a la expresión:

$$RF_A = \frac{BN}{RP} = \frac{BE - F}{RP}$$

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

TABLA 5.2

L	RA	A_f	A_i
0	0	1	1,25
0,5	100	1,18	1,47
1	150	1,29	1,61
1,5	180	1,37	1,71
2	200	1,43	1,79

o, lo que es lo mismo, siendo k_i el tipo de interés de las deudas, RE la rentabilidad económica y A el volumen de activos que habrá de coincidir con el del pasivo ($A = P$):

$$\begin{aligned}
 RF_A &= \frac{BE - k_i \cdot RA}{RP} = \frac{RE \cdot A - k_i \cdot RA}{RP} = \frac{RE(RP + RA) - k_i \cdot RA}{RP} = \\
 &= \frac{RE \cdot RP + (RE - k_i)RA}{RP} = RE + (RE - k_i) \frac{RA}{RP} = RE + (RE - k_i)L \quad (4)
 \end{aligned}$$

Esta importante expresión muestra que, desde el punto de vista de la rentabilidad de los propietarios de la empresa, siempre que la rentabilidad esperada de los activos, RE , supere el coste de los recursos ajenos, k_i , es conveniente endeudarse. Así, en el presente caso:

$$RE = \frac{BE}{A} = \frac{80}{300} = 0,266\bar{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow RF = 0,266\bar{6} + (0,266\bar{6} - 0,12)L = 0,266\bar{6} + 0,146\bar{6} \cdot L$$

y al sustituir los distintos valores alternativos de L , se obtienen los resultados de la tabla 5.3.

Dado que la rentabilidad económica esperada por los directivos de la empresa supere el coste de sus deudas, la rentabilidad financiera esperada será tanto mayor

TABLA 5.3

L	RF_A
0	0,2666
0,5	0,3400
1	0,4133
1,5	0,4866
2	0,5600

- a) Endeudamiento nulo (financiación íntegra con capital propio).
- b) Endeudamiento del 50 por 100.
- c) Endeudamiento del 75 por 100.

El tipo de interés de las deudas es del 8 por 100 y la empresa está sometida a un tipo impositivo, en el impuesto sobre el beneficio de las sociedades, del 50 por 100.

RESOLUCIÓN

En la tabla 5.1 se han recogido los cálculos precisos para la resolución del problema, en millones de u.m.

TABLA 5.1

	Niveles de rentabilidad económica (RE)						
	1 %	6 %	11 %	16 %	21 %	26 %	31 %
Beneficio antes de intereses e impuestos	1	6	11	16	21	26	31
<i>Caso a) Endeudamiento nulo</i>							
F. Gastos de intereses	—	—	—	—	—	—	—
BN. Beneficio imponible	1	6	11	16	21	26	31
T. Impuestos	0,5	3	5,5	8	10,5	13	15,5
BL. Beneficio líquido después de impuestos	0,5	3	5,5	8	10,5	13	15,5
RF _D . Rentabilidad financiera líquida (%)	0,5	3	5,5	8	10,5	13	15,5
<i>Caso b) Endeudamiento del 50 por 100</i>							
F. Gastos de intereses (8 por 100 s/50)	4	4	4	4	4	4	4
BN. Beneficio imponible	-3	2	7	12	17	22	27
T. Impuestos	-1,5	1	3,5	6	8,5	11	13,5
BL. Beneficio líquido después de impuestos	-1,5	1	3,5	6	8,5	11	13,5
RF _D . Rentabilidad financiera líquida (%)	-3	2	7	12	17	22	27
<i>Caso c) Endeudamiento del 75 por 100</i>							
F. Gastos de intereses (8 por 100 s/75)	6	6	6	6	6	6	6
BN. Beneficio imponible	-5	0	5	10	15	20	25
T. Impuestos	-2,5	0	2,5	5	7,5	10	12,5
BL. Beneficio líquido después de impuestos	-2,5	0	2,5	5	7,5	10	12,5
RF _D . Rentabilidad financiera líquida (%)	-10	0	10	20	30	40	50

Los cálculos se realizan del siguiente modo (aplicando la simbología ya utilizada en los problemas de rentabilidad):

$$BE = \frac{RE \cdot \text{Activo}}{100} = \frac{RE \cdot 100}{100} \text{ millones de u.m.}$$

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

$$\begin{aligned}\text{Deudas} &= \text{Coeficiente de endeudamiento} \cdot \text{Pasivo} = \\ &= \text{Coeficiente de endeudamiento} \cdot \text{Activo} = \\ &= (\text{Coeficiente de endeudamiento}) \cdot 100 \text{ millones de u.m.}\end{aligned}$$

$$F = 8 \text{ por } 100 \text{ s/Deudas} = (0,08 \cdot \text{Deudas}) \text{ millones de u.m.}$$

$$BN = (BE - F) \text{ millones de u.m.}$$

$$BL = (BN - T) \text{ millones de u.m.}$$

$$RF_D = \frac{BL}{\text{Capital propio}} 100 = \frac{BL}{100 - \text{Deudas}} 100$$

Como puede observarse, para altos niveles de rentabilidad económica, es preferible endeudarse; la rentabilidad financiera, o rentabilidad de los accionistas, será tanto mayor cuanto mayor sea el nivel de endeudamiento. Pero si la rentabilidad económica es reducida, la rentabilidad financiera será tanto más baja cuanto mayor sea el endeudamiento de la empresa. Dado que a priori no se sabe la rentabilidad económica futura que tendrá la empresa, las decisiones han de basarse en estimaciones, y el riesgo financiero será tanto mayor cuanto mayor sea el nivel de deudas que se decida mantener. Si la rentabilidad económica resulta ser elevada, se conseguirá una alta rentabilidad financiera; pero si aquella resulta ser finalmente baja, ésta será tanto menor cuanto mayor sea el coeficiente de endeudamiento.

Problema 20

La relación entre la rentabilidad financiera y la rentabilidad operativa

Los directivos de Palancuned, S. A., esperan conseguir que el próximo año el margen de beneficio bruto de la empresa sea de 100 millones de u.m., lo cual, una vez deducido el coste fijo, generaría un beneficio económico u operativo de 80 millones de u.m. La empresa se está planteando la modificación de la actual financiación de los 300 millones de u.m. que tiene de activos, por lo cual desea conocer sus niveles de apalancamiento financiero y total, así como su rentabilidad financiera, antes y después del impuesto sobre el beneficio (cuyo tipo de gravamen es del 35 por 100), para los siguientes valores del coeficiente recursos ajenos/recursos propios: 0; 0,5; 1; 1,5 y 2. El tipo de interés de las deudas es del 12 por 100.

RESOLUCIÓN

El margen de beneficio bruto, MB , es la ganancia obtenida antes de deducir los costes fijos, es decir,

RESOLUCIÓN

Lo que se desea saber es el valor de RE para el cual:

$$RE + (RE - k_i)L = 0$$

Es decir:

$$RE(1 + L) = k_i L \Rightarrow RE = k_i \frac{L}{1 + L} = 0,15 \frac{1}{1 + 1} = 0,075$$

Si la rentabilidad de los activos de esta empresa fuera inferior al 7,5 por 100, su rentabilidad financiera sería negativa y los accionistas experimentarían pérdidas.

**Problema
23**

La relación entre la rentabilidad financiera y la rentabilidad operativa

El coeficiente de endeudamiento de una empresa es el 50 por 100 y el coste de sus deudas es el 15 por 100. ¿Para qué nivel de rentabilidad económica sería nula su rentabilidad financiera?

RESOLUCIÓN

$$RE = k_i \frac{L}{1 + L} = 0,15 \frac{0,5}{1 + 0,5} = 0,05 \text{ por } 1 = 5 \text{ por } 100$$

**Problema
24**

La relación entre la rentabilidad financiera y la rentabilidad operativa

El coeficiente de endeudamiento de una empresa vale 2 y el coste anual de sus deudas es el 14 por 100. ¿Para qué nivel de rentabilidad económica pasaría a ser negativa la rentabilidad financiera de esta empresa?

RESOLUCIÓN

Como ya es sabido, la rentabilidad económica para la que la rentabilidad financiera es nula es:

$$RE = k_i \frac{L}{1 + L}$$

En este caso:

$$RE = 0,14 \frac{2}{1 + 2} = 0,0933 \text{ por } 1 = 9,33 \text{ por } 100$$

Si la rentabilidad económica de esta empresa fuera inferior al 9,33 por 100, su rentabilidad financiera sería negativa.

5.3. LA PROBABILIDAD DE INSOLVENCIA

Problema 25

La probabilidad de insolvencia

Probunedsa tiene unos recursos ajenos de 100 millones de u.m., a los que tiene que pagar unos intereses del 12 por 100 anual. Dada la multitud de factores acumulativos de los que depende el beneficio anual generado por su activo, se considera que es aplicable el teorema central del límite y que dicho beneficio sigue una distribución de probabilidad normal con una esperanza matemática de 50 millones de u.m. y una desviación típica de 30,4 millones de u.m. Se desea conocer la probabilidad de insolvencia de esta empresa; es decir, la probabilidad de que no pueda atender al pago de sus gastos financieros.

RESOLUCIÓN

Se trata de saber la probabilidad de que el beneficio generado por los activos no sea suficiente para pagar los intereses de las deudas; o, lo que es lo mismo, la probabilidad:

$$P(BE < F)$$

donde:

$$F = k_i \cdot RA = 0,12 \cdot 100 = 12 \text{ millones de u.m.}$$

Siendo ξ la variable que tiene una distribución normal de esperanza nula y desviación típica unitaria:

cuanto mayor sea el endeudamiento de la misma, es decir, cuanto más elevada sea la relación entre los recursos ajenos y los propios, L . Sin embargo, el riesgo también es cada vez más elevado, como lo muestran las evoluciones del apalancamiento financiero y del total, que, como ya se expuso anteriormente, son medidas de riesgo.

También la expresión (4) muestra que si los directivos se equivocaran en sus previsiones y la rentabilidad económica efectiva fuera inferior al coste de las deudas, la rentabilidad financiera sería tanto más baja cuanto mayor fuese el nivel de endeudamiento.

Las mismas conclusiones se obtienen al calcular la rentabilidad financiera después de impuestos, que, siendo t el tipo de gravamen, será:

$$RF_D = \frac{(BE - k_l \cdot RA)(1 - t)}{RP} = RF_A(1 - t) = [RE + (RE - k_p)L](1 - t)$$

En el presente caso ($t = 0,35$), se obtienen los resultados de la tabla 5.4.

TABLA 5.4

L	RF_D
0	0,1733
0,5	0,2210
1	0,2686
1,5	0,3163
2	0,3640

**Problema
21**

La relación entre la rentabilidad financiera y la rentabilidad operativa

Los directivos de Riesguned, S. A., estiman que los futuros beneficios anuales generados por los activos de la empresa pueden tomar los siguientes valores (en millones de u.m.): 300, 400 y 500. Sus activos valen 1.000 millones de u.m., y para efectuar la reestructuración financiera de la empresa estos directivos desean conocer la rentabilidad de sus accionistas, antes de deducir sus impuestos, para los siguientes valores del coeficiente de recursos ajenos sobre recursos propios: 0,5; 1; 1,5; 2; según cual sea el beneficio operativo obtenido. El tipo de interés de las deudas es el 15 por 100.

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

RESOLUCIÓN

Los posibles valores de la rentabilidad económica, RE , son:

$$\frac{300}{1.000} = 0,30 = 30 \text{ por } 100$$

$$\frac{400}{1.000} = 0,40 = 40 \text{ por } 100$$

$$\frac{500}{1.000} = 0,50 = 50 \text{ por } 100$$

Aplicando la expresión:

$$RF_A = RE + (RE - k_i)L$$

deducida en el problema anterior (siendo $k_i = 0,15$) se obtienen los resultados de la tabla 5.5.

TABLA 5.5

RE^1	L			
	0,5	1	1,5	2
0,30	0,375	0,450	0,525	0,600
0,40	0,525	0,650	0,775	0,900
0,50	0,675	0,850	1,025	1,200

Como puede observarse, siendo $RE > k_i$, para cada nivel de rentabilidad económica, la rentabilidad financiera es tanto mayor cuanto mayor sea el coeficiente de endeudamiento L .

Problema 22

La relación entre la rentabilidad financiera y la rentabilidad operativa

Suponiendo que los directivos de Riesgured, S. A., a la que se refiere el problema anterior, se hubieran decidido por un coeficiente de recursos ajenos sobre recursos propios igual a la unidad, ¿para qué nivel de rentabilidad económica pasaría a ser negativa la rentabilidad financiera de la empresa?

3. El 70 por 100 de las compras se pagan en el mismo mes en el que se efectúan y el 30 por 100 el mes siguiente.
4. El volumen de ventas del mes de noviembre fue de 6.000 u.m., en tanto que el del último mes (diciembre) importó 6.800 u.m. Las ventas previstas para los tres próximos meses son 5.200 u.m. en enero, 5.600 u.m. en febrero y 6.000 u.m. en marzo.
5. En cuanto a las compras, en diciembre totalizaron 3.600 u.m. y se prevé que importen 4.000 u.m. en enero, 3.800 u.m. en febrero y 4.000 u.m. en marzo.
6. Los costes fijos mensuales son 600 u.m., de los cuales 100 u.m. corresponden a amortizaciones. Los costes variables mensuales son, aproximadamente, el 15 por 100 de las ventas del mes anterior.
7. En enero hay que pagar 240 u.m. de impuestos y se comprará una máquina que cuesta 660 u.m., de las cuales la tercera parte se pagará al contado; el resto se abonará en veinte plazos mensuales iguales contados a partir de febrero. En enero hay que pagar, además, la prima de seguros anual, que totaliza 180 u.m.
8. Se espera que los flujos netos de caja generados por las inversiones financieras de la empresa sean de 20, 30 y 10 u.m., respectivamente, en los meses de enero, febrero y marzo.
9. La política de la empresa es mantener un saldo de tesorería, al final de cada mes, igual a la mitad de las necesidades estimadas para el mes siguiente.

Se desea preparar el presupuesto de tesorería de esta empresa para los meses de enero, febrero y marzo.

RESOLUCIÓN

En el presupuesto de tesorería se reflejan los flujos monetarios derivados de las corrientes de cobros y pagos. En la tabla 5.6 se recoge el correspondiente al próximo trimestre de esta empresa.

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

TABLA 5.6

	Enero	Febrero	Marzo
COBROS			
<i>Cobros a clientes</i>			
Por ventas de noviembre (6.000)	10 %: 600	—	—
Por ventas de diciembre (6.800)	40 %: 2.700	10 %: 680	—
Por ventas de enero (5.200)	50 %: 2.600	40 %: 2.080	10 %: 520
Por ventas de febrero (5.600)	—	50 %: 2.800	40 %: 2.240
Por ventas de marzo (6.000)	—	—	50 %: 3.000
Cobros por inversiones financieras	20	30	10
C. Total cobros	$C_1 = 5.940$	$C_2 = 5.590$	$C_3 = 5.770$
PAGOS			
<i>Pagos a proveedores</i>			
Por compras de diciembre (3.600)	30 %: 1.080	—	—
Por compras de enero (4.000)	70 %: 2.800	30 %: 1.200	—
Por compras de febrero (3.800)	—	70 %: 2.660	30 %: 1.140
Por compras de marzo (4.000)	—	—	70 %: 2.800
Pagos de costes fijos (600 - 100 ^a)	500	500	500
Pagos de costes variables ^b	1.020	780	840
Pago de impuestos	240	—	—
Pagos de maquinaria	220	22 ^c	22 ^c
Pago de prima de seguros	180	—	—
P. Total pagos	$P_1 = 6.040$	$P_2 = 5.162$	$P_3 = 5.302$
Flujo neto de caja ($C - P$)	(100)	428	468
Saldo al principio del mes	2.000	1.900	2.328
Saldo al final del mes	1.900	2.328	2.796
Saldo deseado ($0,5 \cdot P_{n+1}$)	2.581	2.651	
Exceso (déficit)	(681)	(323)	

^a Las amortizaciones son costes, pero no pagos.

^b $1.020 = 0,15 \cdot 6.800$; $780 = 0,15 \cdot 5.200$; $840 = 0,15 \cdot 5.600$.

^c $22 = (660 - 220)/20$.

Como puede observarse, si la empresa desea mantener su política, tendrá que modificar el sistema de cobros y pagos o acudir, por ejemplo, a un crédito bancario a corto plazo.

$$\xi = \frac{BE - E(BE)}{\sigma(BE)} = \frac{BE - 50}{30,4}$$

es obvio que:

$$\begin{aligned} P(BE < 12) &= P(\xi \cdot 30,4 + 50 < 12) = P\left(\xi < \frac{12 - 50}{30,4}\right) = P(\xi < -1,25) = \\ &= 0,5 - P(-1,25 \leq \xi \leq 0) = 0,5 - P(0 \leq \xi \leq 1,25) = \\ &= 0,5 - 0,3944 = 0,1056 = 10,56 \text{ por } 100 \end{aligned}$$

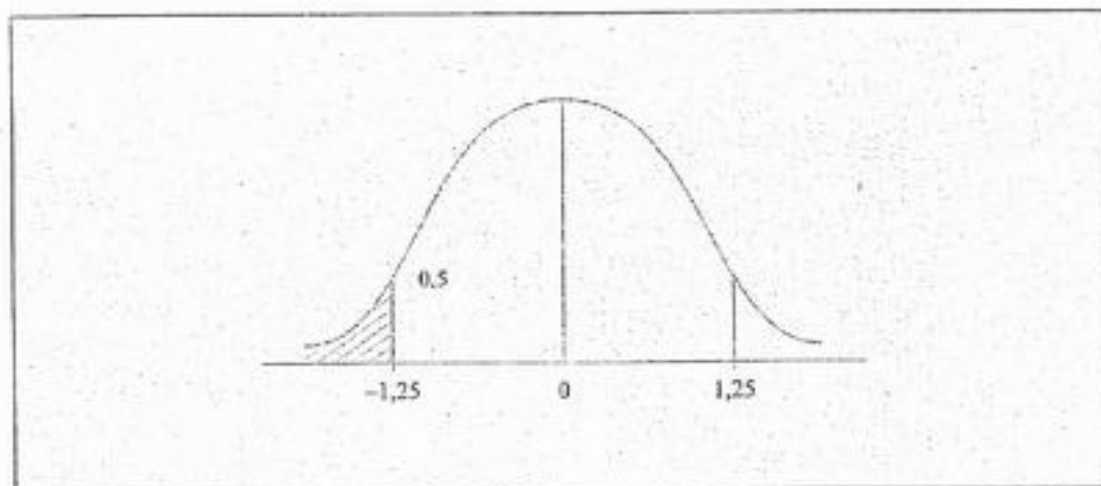


Figura 5.2.

La probabilidad de que esta empresa devenga insolvente es del 10,56 por 100.

Problema
26

La probabilidad de insolvencia

Probabunedsa se encuentra revisando su estructura financiera. El tipo de interés que le aplican sus acreedores es del 15 por 100. Su beneficio operativo, o económico, sigue una distribución normal con una esperanza matemática de 100 millones de u.m. y una desviación típica de 50 millones de u.m. Se desea conocer su probabilidad de insolvencia para los siguientes niveles de recursos ajenos: 50 millones, 100 millones y 150 millones de u.m.

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned}P(BE < 0,15RA) &= P[\xi \cdot \sigma(BE) + E(BE) < 0,15RA] = \\&= P(\xi 50 + 100 < 0,15RA) = P\left(\xi < \frac{0,15RA - 100}{50}\right)\end{aligned}$$

Cuando los recursos ajenos, RA , son 50 millones de u.m.:

$$\begin{aligned}P\left(\xi < \frac{0,15 \cdot 50 - 100}{50}\right) &= P(\xi < -1,85) = 0,5 - P(-1,85 \leq \xi \leq 0) = \\&= 0,5 - P(0 \leq \xi \leq 1,85) = 0,5 - 0,4678 = 0,0322 = 3,22 \text{ por } 100\end{aligned}$$

Si $RA = 100$, se obtiene:

$$\begin{aligned}P\left(\xi < \frac{0,15 \cdot 100 - 100}{50}\right) &= P(\xi < -1,7) = 0,5 - P(-1,7 \leq \xi \leq 0) = \\&= 0,5 - P(0 \leq \xi \leq 1,7) = 0,5 - 0,4554 = 0,0446 = 4,46 \text{ por } 100\end{aligned}$$

En el último caso, en el que $RA = 150$:

$$\begin{aligned}P\left(\xi < \frac{0,15 \cdot 150 - 100}{50}\right) &= P(\xi < -1,55) = \\&= 0,5 - P(-1,55 \leq \xi \leq 0) = 0,5 - P(0 \leq \xi \leq 1,55) = 0,5 - 0,4392 = \\&= 0,0608 = 6,08 \text{ por } 100\end{aligned}$$

A medida que aumentan los fondos ajenos, se eleva la probabilidad de insolvencia.

5.4. EL PRESUPUESTO DE TESORERÍA

Problema 27

El presupuesto de tesorería

A continuación se recogen algunos datos relativos a la empresa Zuned, S. A.:

1. Saldo de tesorería el 1 de enero: 2.000 u.m.
2. Todas las ventas se cobran aplazadamente: el 50 por 100 en el mes en el que se realizan, el 40 por 100 el mes siguiente y el 10 por 100 el tercer mes.

6

El coste del capital y la valoración de empresas

6.1. EL COSTE DE LOS PRÉSTAMOS Y EMPRÉSTITOS Y EL CÁLCULO DE UNA CUOTA DE AMORTIZACIÓN CONSTANTE

Problema 1

El coste de los préstamos y empréstitos

Auned, S. A., tiene que elegir entre los créditos que puede obtener en el banco A y en el banco B. El primero le ofrece los 2 millones de u.m. que Auned necesita durante dos años, cobrándole un 16 por 100 anual. El segundo le cobra unos intereses anuales del 15 por 100 y, además, una comisión inicial del 0,05 por 1 de los 2 millones de u.m. En cualquiera de los dos casos, la devolución del principal del crédito, es decir, de los 2 millones de u.m., ha de efectuarse al final del segundo año, junto con el pago de los intereses correspondientes a este período. Se desea saber cuál es el crédito que tiene menor coste.

RESOLUCIÓN

Cuando, como en este caso, no existen costes de intermediación, la rentabilidad de quien coloca los fondos (el banco) coincide con el coste de quien los recibe (Auned). Por consiguiente, el cálculo de la tasa de coste tiene las mismas dificultades que la determinación del tipo de rendimiento interno.

Al igual que la *TIR*, el coste de una fuente de financiación es el tipo de descuento que hace que el valor actual neto de sus flujos de caja sea nulo. Así, el coste del crédito del banco A sería el k_A , para el cual:

$$0 = 2.000.000 - \frac{0,16 \cdot 2.000.000}{1 + k_A} - \frac{0,16 \cdot 2.000.000}{(1 + k_A)^2} - \frac{2.000.000}{(1 + k_A)^2}$$

Problema
28
El presupuesto de tesorería

Unedtesina, S. A., sabe por experiencia que el 20 por 100 de las ventas se cobra en el mismo mes en el que se efectúan, que el 70 por 100 se cobra el mes siguiente y que el 10 por 100 se liquida el tercer mes. Esta empresa se dedica a la intermediación en instrumentos de ferretería y el precio en el que los compra es igual al 70 por 100 del precio en el que luego los vende. El período medio que transcurre entre la compra y la venta de los productos es de un mes y Unedtesina demora los pagos hasta dos meses después de las compras.

Mensualmente tiene que pagar el alquiler del local, que importa 125 u.m. Este local se encuentra situado en una ciudad turística de la costa, por lo cual la mayor actividad de la empresa se produce en los meses de julio y agosto, lo cual explica la evolución prevista de los gastos para los próximos cuatro meses, que es la mostrada en la tabla 5.7.

TABLA 5.7

	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre
Sueldos y salarios	400	500	300	300
Otros gastos	60	80	40	40

La misma razón explica la evolución prevista de las ventas que se recoge en la tabla 5.8.

TABLA 5.8

Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre
6.000	8.000	2.000	2.000	2.000

En mayo y junio las ventas totalizaron 2.000 u.m. mensuales. En agosto hay que pagar 160 u.m. de impuestos y en octubre hay que abonar el precio de un camión adquirido hace tiempo por 2.000 u.m. El saldo actual de tesorería, al final de junio, es de 3.000 u.m. Éste es el saldo que la empresa quiere mantener en el futuro. Se desea elaborar el presupuesto de efectivo para los cuatro próximos meses.

RESOLUCIÓN

La resolución puede efectuarse realizando previamente los cálculos de los cobros provenientes de las ventas y de los pagos derivados de las compras, conforme a la tabla 5.9.

Las fuentes de financiación y el efecto del endeudamiento

TABLA 5.9

	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre
Ventas	2.000	2.000	6.000	8.000	2.000	2.000
Cobros:						
En el primer mes (20 por 100)	400	400	1.200	1.600	400	400
En el segundo mes (70 por 100)	—	1.400	1.400	4.200	5.600	1.400
En el tercer mes (10 por 100)	—	—	200	200	600	800
Total			2.800	6.000	6.600	2.600
Compras (0,7 · Ventas del mes siguiente)	1.400	4.200	5.600	1.400	1.400	1.400
Pagos	—	—	1.400	4.200	5.600	1.400

El presupuesto de tesorería, o presupuesto de caja, de esta empresa será el presentado en la tabla 5.10.

TABLA 5.10

	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre
Cobros	2.800	6.000	6.600	2.600
Pagos:				
Compras	1.400	4.200	5.600	1.400
Sueldos y salarios	400	500	300	300
Alquiler	125	125	125	125
Otros gastos	60	80	40	40
Impuestos	—	160	—	—
Pago de camión	—	—	—	2.000
Total pagos	1.985	5.065	6.065	3.865
Flujo neto de caja	815	935	535	-1.265
Saldo al principio del mes	3.000	3.815	4.750	5.285
Saldo al final del mes	3.815	4.750	5.285	4.020
Saldo deseado	3.000	3.000	3.000	3.000
Exceso	815	1.750	2.285	1.020

La evolución prevista manifiesta la existencia de un evidente exceso de tesorería que podría aplicarse a la realización de inversiones rentables o a la devolución de préstamos.

$$= A - Q \left[\frac{1}{1+k_1} - \frac{1}{(1+k_1)^2} - \dots - \frac{1}{(1+k_1)^n} \right]$$

Por tanto:

$$0 = A - Q a_{n|k_1}$$

Así, en este caso:

$$0 = 57.000.000 - Q \frac{1 - (1 + 0,2)^{-4}}{0,2}$$

De donde se deduce que:

$$Q = 22.018.480 \text{ u.m.}$$

Si el cliente paga 22.018.480 u.m. al año, el préstamo estará amortizado en cuatro años y el interés efectivo será el 20 por 100.

b) En efecto, en la tabla 6.1 se recoge el *cuadro de amortización* del préstamo:

TABLA 6.1

Año	Intereses	Devolución de principal
1	11.400.000	10.618.480
2	9.276.304	12.742.176
3	6.727.869	15.290.611
4	3.669.747	18.348.733
Total		57.000.000

El primer año, el cliente dispone de un préstamo de 57.000.000 millones y, por tanto, los intereses han de ser 11.400.000 (el 20 por 100). El resto hasta 22.018.480 u.m. (10.618.480 u.m.) será devolución del principal. Con ello, el importe del préstamo durante el año siguiente será:

$$57.000.000 - 10.618.480 = 46.381.520 \text{ u.m.}$$

y al final del mismo tendrá que pagar como intereses el 20 por 100; es decir:

$$46.381.520 \cdot 0,2 = 9.276.304 \text{ u.m.}$$

El resto hasta 22.018.480 u.m. de cuota fija (12.742.176 u.m.) será devolución del principal. Con lo cual, el importe del préstamo durante el tercer año es de 33.639.344 u.m.

$$46.381.520 - 12.742.176 = 33.639.344 \text{ u.m.}$$

y en la siguiente cuota el 20 por 100 de esta cantidad corresponderá a intereses, siendo el resto devolución del principal, etcétera.

**Problema
4**

El sistema de cuotas constantes

¿Cuál será la cuota constante que deberá pagar el cliente del problema anterior si las cuotas son mensuales?

RESOLUCIÓN

Como ya es sabido, el tipo de interés mensual, k' , cuyo equivalente anual es el 20 por 100, es aquel para el cual:

$$(1 + k')^{12} = 1 + 0,2$$

Es decir:

$$k' = 1,2^{1/12} - 1 = 0,0153095$$

Por otra parte, cuatro años son 48 meses. Por tanto, la cuota mensual ha de ser el Q' que cumple la siguiente expresión:

$$0 = 57.000.000 - Q' a_{\overline{48}|0,0153095}$$

Es decir:

$$0 = 57.000.000 - Q' \frac{1 - (1 + 0,0153095)^{-48}}{0,0153095}$$

De donde se deduce que la cuota vale 1.685.457 u.m.
En la primera cuota serán intereses 872.642 u.m.:

$$57.000.000 \cdot 0,0153095 = 872.642 \text{ u.m.}$$

Para calcular su rentabilidad, que, evidentemente, resulta igual al 16 por 100 ($k_A = 0,16$), el banco aplicaría la misma expresión cambiando el signo a ambos lados de la igualdad. El coste del deudor, y la rentabilidad del acreedor, es el 16 por 100.

En cuanto al banco B, los fondos que él invierte, y que la empresa percibe, son el resultado de deducir, de los 2 millones de u.m., la comisión inicial retenida por el banco ($0,05 \cdot 2.000.000 = 100.000$ u.m.). Por tanto, la rentabilidad del banco y el coste de la empresa serán el valor de k_B , para el cual:

$$0 = 1.900.000 - \frac{0,15 \cdot 2.000.000}{1 + k_B} - \frac{0,15 \cdot 2.000.000}{(1 + k_B)^2} - \frac{2.000.000}{(1 + k_B)^2}$$

Se trata de una ecuación de segundo grado de la que se deduce que $k_B = 0,1820$ (la otra solución de la ecuación es negativa, lo cual no es posible económicamente); es decir, el 18,20 por 100.

Por tanto, para la empresa es preferible el crédito del banco A, por ser el más barato.

Problema
2

El coste de los préstamos y empréstitos

Buned, S. A., ha emitido, a través de un grupo bancario encargado de colocarlas entre sus clientes, 10.000 obligaciones a 5.000 u.m. cada una, a las que pagará un interés del 12 por 100 anual durante dos años, al final de los cuales las amortizará por su valor de emisión. El grupo bancario le ha cobrado una comisión, por la intermediación, del 0,1 por 100. ¿Cuál es el coste del empréstito para Buned? ¿Y la rentabilidad de estos títulos para los obligacionistas?

RESOLUCIÓN

Un empréstito es un crédito que percibe la empresa a través de partes alícuotas (obligaciones) colocadas entre quienes adquieren esas cuotas (obligacionistas). Por consiguiente, el cálculo de su coste es semejante al de un crédito. En este caso, la empresa percibe inicialmente la diferencia entre lo que los obligacionistas abonan y la retención que efectúa el banco por la comisión de intermediación; es decir, el importe:

$$\begin{aligned} 10.000 \cdot 5.000 - 0,001 \cdot 10.000 \cdot 5.000 &= 10.000 \cdot 5.000(1 - 0,001) = \\ &= 49.950.000 \end{aligned}$$

Por tanto, el coste de esta fuente financiera para la empresa es el valor de k_i para el cual:

$$0 = 49.950.000 - \frac{0,12 \cdot 5.000 \cdot 10.000}{1 + k_i} - \frac{0,12 \cdot 5.000 \cdot 10.000}{(1 + k_i)^2} - \frac{5.000 \cdot 10.000}{(1 + k_i)^2}$$

La única solución que tiene sentido económico es $k_i = 0,1206$. El coste para la empresa es el 12,06 por 100 anual. Sin embargo, suponiendo que no tuvieran ningún gasto de intermediación para el cobro de sus intereses ni que pagar impuestos sobre los mismos, la rentabilidad de los obligacionistas sería el valor de r para el cual:

$$0 = -5.000 \cdot 10.000 + \frac{0,12 \cdot 5.000 \cdot 10.000}{1 + r} + \frac{0,12 \cdot 5.000 \cdot 10.000}{(1 + r)^2} + \frac{5.000 \cdot 10.000}{(1 + r)^2}$$

Es decir, como es obvio, el 12 por 100.

**Problema
3**

El sistema de cuotas constantes

Don Unedio Gomis es el director de una oficina bancaria al que ha acudido un cliente solicitando un crédito a cuatro años por 57.000.000 de u.m. para comprarse un modesto apartamento en el cinturón de una capital de provincia. Don Unedio tiene orden de aplicar una *tasa anual equivalente (TAE)* del 20 por 100 en este tipo de créditos, y de utilizar el sistema de cuotas constantes. Se desea conocer:

- La cuota constante que deberá pagar el cliente si las cuotas son anuales.
- El cuadro de amortización del préstamo.

RESOLUCIÓN

a) En el sistema de cuotas constantes todos los años se paga la misma cuota, Q , en concepto de intereses y de devolución del principal. Por consiguiente, su coste será el k_i que cumple la ecuación:

$$0 = A - \frac{Q}{1 + k_i} - \frac{Q}{(1 + k_i)^2} - \dots - \frac{Q}{(1 + k_i)^n} =$$

RESOLUCIÓN

La tasa trimestral que equivale al 9 por 100 anual es:

$$k' = (1 + 0,09)^{1/4} - 1 = 0,0217782$$

Por otra parte, cinco años son 20 trimestres. Por tanto, la cuota trimestral que amortiza el préstamo es el valor de Q que cumple la expresión:

$$0 = 10.000 - Q \frac{1 - (1 + 0,0217782)^{-20}}{0,0217782}$$

Es decir:

$$Q = 622,112 \text{ u.m.}$$

El primer trimestre se dispone de 10.000 u.m. de préstamo, por lo que la parte de la cuota que corresponde a pago de intereses es:

$$10.000 \cdot 0,0217782 = 217,782 \text{ u.m.}$$

El resto, hasta el total de la cuota, es devolución de principal:

$$622,112 - 217,782 = 404,33 \text{ u.m.}$$

6.2. EL EFECTO DE LOS IMPUESTOS Y DE LA INFLACIÓN

Problema

9

El efecto de los impuestos

Tribuned es una empresa muy rentable que va a acometer un proyecto de inversión de 50 millones de u.m., cuya duración es de dos años. Para ello, cuenta con las siguientes fuentes de financiación alternativas:

- Un crédito bancario por el que tendría que pagar una comisión inicial del 1 por 100 del importe del crédito y un interés anual del 10 por 100. El principal del crédito se devolvería junto con los intereses del segundo año.
- Un empréstito de obligaciones al 9,5 por 100 anual de interés por el que tendría que pagar al banco que actuaría como intermediario de la

El coste del capital y la valoración de empresas

operación un 0,5 por 100 de comisión inicial sobre el importe del empréstito. Su amortización se realizaría al final del segundo año.

La empresa está sometida a un tipo de gravamen del 35 por 100 en el impuesto sobre la renta de las sociedades. Se desea saber el coste de cada una de las fuentes de financiación alternativas, y cuál es la preferible.

RESOLUCIÓN

La empresa necesita 50 millones de u.m. netos de comisiones iniciales. Por tanto, si M es el importe obtenido con la fuente de financiación y c es el tanto por uno de comisión inicial, habrá de cumplirse que:

$$M(1 - c) = 50.000.000 \text{ u.m.} \rightarrow M = \frac{50.000.000}{1 - c} \text{ u.m.}$$

Así, en el caso del crédito, el importe necesario será:

$$M = \frac{50.000.000}{1 - 0,01} = 50.505.050,50 \text{ de u.m.}$$

y en el del empréstito, el volumen de financiación preciso valdrá:

$$M = \frac{50.000.000}{1 - 0,005} = 50.251.256,28 \text{ de u.m.}$$

Tanto la comisión inicial ($0,01 \cdot 50.505.050,50 = 505.050,50$ u.m., en el caso del crédito, y $251.256,28$ u.m. en el caso del empréstito) como los intereses son gastos deducibles en el impuesto sobre el beneficio. Así, en el caso del crédito, con su consecución, los impuestos se reducirán en el 35 por 100 de la comisión inicial; y cada año la carga impositiva se reducirá en un 35 por 100 de los intereses abonados. Por tanto, al tener en cuenta este menor pago de impuestos, el coste del crédito es el valor de k para el cual:

$$0 = 50.000.000 + 0,35 \cdot 505.050,50 - \frac{0,10 \cdot 50.505.050,50(1 - 0,35)}{1 + k} - \frac{0,10 \cdot 50.505.050,50(1 - 0,35)}{(1 + k)^2} - \frac{50.505.050,50}{(1 + k)^2}$$

y el resto, hasta 1.685.457 u.m., será devolución de principal. Procediendo de este modo, como se hizo en el problema anterior, el lector paciente puede ahora realizar el cuadro de amortización de este préstamo para comprobar que las 48 devoluciones de principal totalizan 57.000.000 u.m. Dicho de otro modo, en un préstamo de 57 millones, que se contrapresta con el abono de 48 mensualidades consecutivas de 1.685.457 u.m. cada una, la tasa anual equivalente es el 20 por 100.

**Problema
5**

El sistema de cuotas constantes

¿Cuánto vale la cuota mensual constante que amortiza un préstamo de 2.850 u.m. en cuatro años, siendo la TAE aplicable el 20 por 100?

RESOLUCIÓN

La tasa mensual equivalente al 20 por 100 anual es:

$$k' = 1,2^{1/12} - 1 = 0,0153095 \text{ por 1}$$

Por tanto:

$$0 = 2.850 - Q \frac{1 - (1 + 0,0153095)^{-48}}{0,0153095}$$

de donde se deduce que:

$$Q = 87,27285 \text{ u.m.}$$

**Problema
6**

El sistema de cuotas constantes

¿Cuál es la cuota mensual constante que amortiza un préstamo de 25 millones de u.m. en 6 años con un tipo de interés del 10 por 100 anual?

RESOLUCIÓN

La tasa mensual equivalente al 10 por 100 anual es:

$$k' = 1,1^{1/12} - 1 = 0,0079741 \text{ por 1}$$

Por tanto:

$$0 = 25.000.000 - Q \frac{1 - (1 + 0,0079741)^{-72}}{0,0079741}$$

de donde se deduce que:

$$Q = 457.728,05 \text{ u.m.}$$

Problema
7

El sistema de cuotas constantes

Un importe de 30 millones de u.m. se financia con un préstamo de cuotas mensuales constantes que tiene un tipo de interés anual del 12 por 100. ¿Qué parte de la cuota del primer mes corresponderá a pago de intereses?

RESOLUCIÓN

La tasa mensual equivalente al 12 por 100 anual es:

$$k' = 1,12^{1/12} - 1 = 0,0094887 \text{ por 1}$$

Dado que, durante el primer mes, el prestatario dispone de 30 millones, la parte de la cuota del primer mes correspondiente a pago de intereses será:

$$0,0094887 \cdot 30.000.000 = 284.663,79 \text{ u.m.}$$

Problema
8

El sistema de cuotas constantes

Un préstamo de 10.000 u.m. a cinco años tiene una TAE del 9 por 100 y se amortiza con cuotas trimestrales constantes. De la cuota del primer trimestre, ¿qué parte corresponde a devolución de principal?

RESOLUCIÓN

Siendo C la cantidad que ha de pagar el cliente si aplaza el pago D días, y denominando s a la tasa de descuento por pronto pago, es obvio que si pagara al contado sólo abonaría:

$$C - sC = C(1 - s)$$

unidades monetarias. Por consiguiente, al aplazar el pago, está incurriendo en un coste de oportunidad, cada D días, igual al cociente entre lo que deja de ahorrarse por no pagar al contado, sC (en cierto sentido son intereses que el proveedor le aplica por el aplazamiento del pago), y el precio al contado:

$$h = \frac{sC}{C(1 - s)} = \frac{s}{1 - s}$$

Tomando un año comercial de 360 días, el número de veces que el plazo de pago, D , está comprendido dentro del año comercial es $360/D$. Por tanto, el coste anual será $360/D$ veces el importe h :

$$k_1 = \frac{360}{D} h = \frac{360}{D} \frac{s}{1 - s}$$

Esta forma de resolver, en la que el coste correspondiente a D días se multiplica por el número de veces que el año comprende ese período, para así obtener el coste anual, resulta de la aplicación de la denominada *capitalización simple*.

El procedimiento más correcto es la aplicación de la capitalización compuesta, utilizada en los ejercicios anteriores para calcular el valor actual de los flujos de caja, que se basa en la relación de equivalencia (figura 6.1):

$$(1 + h)^{360/D} = 1 + k_2$$

donde k_2 es el coste anual del crédito comercial bajo esta forma de cálculo. Por tanto:

$$k_2 = (1 + h)^{360/D} - 1$$

En este caso, s es el 10 por 100 y D vale 30 días. Por consiguiente:

$$h = \frac{0,10}{1 - 0,10} = 0,111\bar{1} = 11,1\bar{1} \text{ por } 100$$

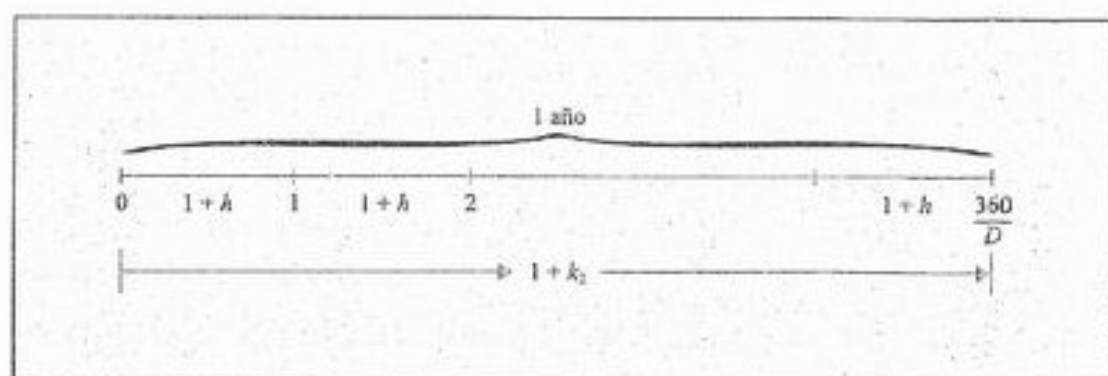


Figura 6.1.

$$k_1 = \frac{360}{30} 0,111\bar{1} = 1,333\bar{3} = 133,3\bar{3} \text{ por } 100$$

$$k_2 = (1 + 0,111\bar{1})^{360/30} - 1 = 2,5407 = 254,07 \text{ por } 100$$

Como puede observarse, el procedimiento basado en la capitalización simple constituye una mala aproximación al verdadero coste anual, que, en este caso, es del 254,07 por 100.

Problema
13

El efecto de los impuestos en el coste del crédito comercial

Se desea conocer el coste del crédito comercial de don Prunedzio (comerciante del problema anterior) si sus beneficios están gravados fiscalmente con un tipo del 33 por 100.

RESOLUCIÓN

Si el tipo de gravamen es el t por uno, el descuento neto de impuestos es:

$$sC - sCt = sC(1 - t)$$

y la tasa h ha de sustituirse por la h' siguiente:

$$h' = \frac{sC(1 - t)}{C(1 - s)} = h(1 - t)$$

Es decir:

$$k = 0,0686 = 6,86 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Del mismo modo, el coste del empréstito habrá de cumplir la expresión:

$$0 = 50.000.000 + 0,35 \cdot 251.256,28 - \frac{0,095 \cdot 50.251.256,28(1 - 0,35)}{(1 + k)} - \\ - \frac{0,095 \cdot 50.251.256,28(1 - 0,35)}{(1 + k)^2} - \frac{50.251.256,28}{(1 + k)^2}$$

de la que se deduce que:

$$k = 0,0635 = 6,35 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Es preferible la financiación mediante el empréstito.

**Problema
10**

El efecto de la inflación y del impuesto sobre el beneficio

Antes de tener en cuenta el impuesto sobre el beneficio (cuyo tipo de gravamen es el 33 por 100) ni la tasa de inflación (que es el 4 por 100), el coste de un empréstito es el 24 por 100. ¿Cuál es el coste después de tener en cuenta ambas cuestiones?

RESOLUCIÓN

$$k_A = 0,24(1 - 0,33) = 0,1608 \text{ por } 1$$

$$k_R = \frac{0,1608 - 0,04}{1 + 0,04} = 0,116154 \text{ por } 10 = 11,6154 \text{ por } 100$$

**Problema
11**

El efecto de la inflación y del impuesto sobre el beneficio

Se desea conocer el coste anual esperado, en términos reales, de un crédito de 100 u.m. a dos años, que tiene un interés del 15 por 100 cada año, de-

ducible en el impuesto sobre el beneficio, cuyo tipo de gravamen es del 35 por 100. La tasa de inflación esperada para los dos próximos años es del 8 por 100 anual.

RESOLUCIÓN

Si no hubiera inflación, el coste de este crédito sería el valor k_A para el cual:

$$0 = 100 - \frac{0,15 \cdot 100(1 - 0,35)}{1 + k_A} - \frac{0,15 \cdot 100(1 - 0,35)}{(1 + k_A)^2} - \frac{100}{(1 + k_A)^2}$$

es decir:

$$k_A = 0,0975 = 9,75 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Obsérvese que, siendo t el tipo de gravamen, en este caso, en el que no intervienen las comisiones, se cumple que el coste después de impuestos, k , es igual al producto entre el coste antes de impuestos, k' , y $(1 - t)$:

$$k_A = k'_A(1 - t) = 0,15(1 - 0,35) = 0,0975$$

Como ya se estudió en las áreas de equivalencia de capitales y de selección de inversiones, el coste real, k_R , de este crédito, es decir, el coste en términos de capacidad adquisitiva, será:

$$k_R = \frac{k_A - g}{1 + g} = \frac{0,0975 - 0,08}{1 + 0,08} = 0,0162 = 1,62 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

6.3. EL COSTE DEL CRÉDITO COMERCIAL

Problema 12

El coste del crédito comercial

Don Prunedsio tiene una próspera panadería situada en un céntrico barrio de una capital de provincia. El fabricante del pan le cobra 30 u.m. por cada kilo si don Prunedsio le paga a los treinta días, y le aplica un descuento del 10 por 100 si le paga al contado. Se desea conocer el coste anual del crédito comercial de este comerciante minorista.

Si, por el contrario, retuviera las m u.m. y las colocara en una inversión cuya rentabilidad anual esperada fuera del r por 1, el flujo de caja anual de esta inversión sería de $r \cdot m$ u.m., con lo cual los futuros dividendos pasarían a ser:

$$d + r \cdot m$$

La riqueza del accionista propietario de una acción por su pertenencia a la empresa, R' , sería el nuevo valor de su acción, P' , es decir, el resultado de actualizar este dividendo aplicando la rentabilidad requerida por los accionistas:

$$R' = P' = \frac{d + r \cdot m}{k_e}$$

Si se desea maximizar la riqueza del accionariado, la condición de retención de las m unidades será que:

$$R' \geq R$$

es decir:

$$\frac{d + r \cdot m}{k_e} \geq \frac{d}{k_e} + m \rightarrow \frac{d}{k_e} + \frac{r \cdot m}{k_e} \geq \frac{d}{k_e} + m \rightarrow r \geq k_e$$

La rentabilidad mínima exigible de las inversiones financiadas con beneficios retenidos (o, lo que es lo mismo, el coste del capital proveniente de la autofinanciación) es el coste del capital-acciones, k_e . En este caso, el coste de la autofinanciación de Ofuned, S. A., es el 10 por 100.

El análisis realizado permite concluir, en cuanto a las decisiones de distribución de los beneficios, que la política de dividendos óptima consiste en repartirlos siempre que la rentabilidad que se espere obtener en la empresa si se les retiene, r , sea inferior a la rentabilidad esperada requerida por los accionistas, que es el 10 por 100.

6.6. EL COSTE MEDIO PONDERADO DEL CAPITAL

Problema 21

El coste medio ponderado del capital

Ponduned, S. A., es una empresa muy rentable que tiene las fuentes de financiación cuyos importes y costes (antes de deducir los impuestos y sin tener en cuenta la incidencia de la inflación) se recogen en la tabla 6.2.

TABLA 6.2

	Importe (u.m.)	Coste anual (%)
Créditos	35	10
Empréstito de obligaciones	40	12
Capital propio	100	14
Total	175	

Se desea conocer el coste medio ponderado real de su capital, sabiendo que los únicos gastos financieros deducibles fiscalmente son los intereses de los créditos y del empréstito, que el tipo de gravamen es el 35 por 100 y que la inflación es del 6 por 100 anual.

RESOLUCIÓN

Conforme se expuso en un problema anterior, el coste después de tener en cuenta los impuestos será, en el caso del crédito:

$$k_{AC} = 0,10(1 - 0,35) = 0,0650 = 6,50 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Del mismo modo, el coste del empréstito será:

$$k_{AE} = 0,12(1 - 0,35) = 0,0780 = 7,80 \text{ por } 100 \text{ anual}$$

Dado que los dividendos no son deducibles en el impuesto sobre el beneficio, el coste del capital propio no resulta afectado por este impuesto.

Ponderando el coste de cada fuente de financiación por su importe, se obtiene el coste medio ponderado, que, en este caso, antes de tener en cuenta la inflación, será:

$$k_{AO} = \frac{0,0650 \cdot 35 + 0,0780 \cdot 40 + 0,14 \cdot 100}{175} = 0,1108 = 11,08 \text{ por } 100$$

Al tener en cuenta la inflación, se obtiene un coste medio en términos reales igual a:

$$k_{RO} = \frac{0,1108 - 0,06}{1 + 0,06} = 0,0479 = 4,79 \text{ por } 100$$

En este caso:

$$h' = 0,1111(1 - 0,33) = 0,074074$$

$$k_c = (1 + 0,074074)^{360/30} - 1 = 1,3572 = 135,72 \text{ por } 100$$

**Problema
14**

El efecto de los impuestos en el coste del crédito comercial

Un proveedor permite aplazar el pago 60 días y ofrece un descuento del 20 por 100 por el pago al contado. El impuesto sobre el beneficio es el 33 por 100. ¿Cuál es el coste anual neto de impuestos de este crédito comercial?

RESOLUCIÓN

$$h' = h(1 - t) = \frac{s}{1 - s} (1 - t) = \frac{0,2}{1 - 0,2} (1 - 0,33) = 0,1675 \text{ por } 1$$

$$k = (1 + h')^{360/D} - 1 = (1 + 0,1675)^{360/60} - 1 = 1,532453 \text{ por } 1 = 153,2453 \text{ por } 100$$

**Problema
15**

El efecto de los impuestos en el coste del crédito comercial

Un proveedor permite aplazar el pago medio año y ofrece un descuento del 20 por 100 por el pago al contado. El impuesto sobre el beneficio es el 33 por 100. ¿Cuál es el coste anual neto de impuestos de este crédito comercial?

RESOLUCIÓN

Hasta el cálculo de h' , este problema se resuelve igual que el anterior. Por tanto:

$$h' = 0,1675$$

En este caso, el coste anual es el 36,31 por 100:

$$k = (1 + h')^{360/D} - 1 = (1 + 0,1675)^2 - 1 = 0,3631 \text{ por } 1 = 36,31 \text{ por } 100$$

Problema
16

Crédito comercial versus crédito no comercial

Una empresa fabricante de tubos de vidrio tiene que realizar una compra de materias primas valorada en 100 millones de u.m. a pagar dentro de dos años. Si paga al contado, su proveedor le aplica un tipo de descuento del 20 por 100. La empresa no dispone de fondos para pagar ahora, por lo que, como alternativa a este crédito comercial, está pensando en tomar un crédito bancario a dos años que sea suficiente para poder pagar al contado. El banco le cobraría un tipo de interés del 10 por 100 anual, debiendo efectuar al final la devolución del principal junto con los intereses correspondientes al segundo año. Además, este banco cobra una comisión inicial, por apertura de crédito, de 500.000 u.m. ¿Qué fuente de financiación es preferible?

RESOLUCIÓN

En cuanto al crédito comercial:

$$h = \frac{0,20}{1 - 0,20} = 0,25$$

$$k = (1 + 0,25)^{360/360 \cdot 2} - 1 = 0,1180 = 11,80 \text{ por } 100$$

Dado que la empresa necesita 80 millones de u.m. para pagar al contado ($100 - 0,20 \cdot 100 = 80$), y que el banco cobra una comisión inicial de 0,5 millones de u.m., el crédito solicitado por la empresa habrá de ser de 80,5 millones de u.m. Por consiguiente, su coste será el valor de k_i para el cual los fondos netos obtenidos (80 millones de u.m.) son iguales al valor actual de los flujos de caja requeridos posteriormente por el banco:

$$0 = 80 - \frac{0,10 \cdot 80,5}{1 + k_i} - \frac{0,10 \cdot 80,5}{(1 + k_i)^2} - \frac{80,5}{(1 + k_i)^2}$$

La única solución que tiene sentido económico es:

$$k_i = 0,1036 = 10,36 \text{ por } 100$$

La fuente financiera preferible es la más barata, es decir, el crédito bancario. Dicho con otras palabras, la mejor alternativa es tomar el crédito y, con él, aprovechar el descuento del proveedor, con lo cual se consigue una economía

(que sería el coste de oportunidad si se aplazara el pago) del 11,80 por 100 anual (equivalente al 20 por 100 referido a dos años) debiéndose abonar por ello una tasa anual que es inferior (el 10,36 por 100).

Considerado desde otro punto de vista, el crédito comercial es semejante a un crédito bancario de 80 millones de u.m. por el que al cabo de dos años habrían de abonarse unos intereses de 20 millones de u.m. y devolver el principal ($80 + 20 = 100$). El coste de este crédito sería el valor de k para el cual:

$$0 = 80 - \frac{100}{(1+k)^2} \rightarrow k = 0,1180 = 11,80 \text{ por } 100$$

y, evidentemente, es preferible el otro crédito, en el que el coste es del 10,36 por 100.

6.4. EL COSTE DEL CAPITAL OBTENIDO MEDIANTE LA EMISIÓN DE ACCIONES

Problema 17

El coste del capital obtenido mediante la emisión de acciones

Las acciones de Capuned, S. A., cotizan en la bolsa de Finunedlandia a 300 u.m. cada una, y sus accionistas esperan que genere ilimitadamente un beneficio por acción constante e igual a 150 u.m. anuales, así como que aplique un coeficiente de reparto del 10 por 100. ¿Cuál es el coste del capital-acciones de esta empresa, si no desea que se reduzca su cotización bursátil?

RESOLUCIÓN

Siendo P el valor bursátil de una acción y d el dividendo constante esperado ilimitadamente de la misma, si el tipo de rentabilidad requerido por los accionistas es k_e , el valor actual neto de la inversión en una acción será:

$$VAN = -P + \frac{d}{k_e}$$

pues P es el desembolso inicial necesario para comprar una acción y d es el flujo de caja anual constante esperado, de forma ilimitada, por el accionista. Si este VAN fuera positivo ($d/k_e > P$), sería una inversión interesante, muchos in-

versores demandarían esta acción y pocos estarían dispuestos a venderla, con lo que su precio ascendería hasta que el VAN fuera nulo ($d/k_e = P$). Si, por el contrario, el VAN fuera negativo ($d/k_e < P$), la oferta de este título superaría a su demanda y su precio se reduciría hasta que el VAN fuera igual a cero ($d/k_e = P$). Por ello, en equilibrio se produce la igualdad:

$$P = \frac{d}{k_e}$$

y, con ello, la rentabilidad anual esperada por los accionistas, d/P , coincide con la que ellos requieren, k_e :

$$k_e = \frac{d}{P}$$

Si no fuera así, el precio se modificaría hasta alcanzarse el equilibrio.

En este caso, se espera que el beneficio anual por acción, B , sea de 150 u.m. y que el coeficiente de reparto, b , sea del 10 por 100. Por tanto:

$$d = B \cdot b = 150 \cdot 0,10 = 15 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente:

$$k_e = \frac{15}{300} = 0,05 = 5 \text{ por } 100$$

La rentabilidad esperada por los accionistas coincide con el coste de capital esperado por la empresa, que será del 5 por 100. Si la empresa abonara un dividendo inferior al 5 por 100 anual del precio de la acción ($0,05 \cdot 300 = 15$ u.m.), las expectativas de los inversores se verían defraudadas y el precio de las acciones se reduciría.

**Problema
18**

El coste del capital obtenido mediante la emisión de acciones

Los inversores de cierto mercado de capitales esperan que el próximo dividendo por acción de cierta empresa sea de 200 u.m. y que posteriormente crezca a una tasa interanual del 15 por 100. La cotización actual de cada acción es de 1.000 u.m. ¿Cuál es el coste del capital obtenido mediante emisión de acciones de esta empresa?

RESOLUCIÓN

Si los inversores esperan que el dividendo crezca según una tasa, f , el precio de la acción será el siguiente:

$$P_e = \frac{d_1}{1+k_e} + \frac{d_1(1+f)}{(1+k_e)^2} + \frac{d_1(1+f)^2}{(1+k_e)^3} + \frac{d_1(1+f)^3}{(1+k_e)^4} + \dots$$

Como se recordará, el valor actual de una serie ilimitada de flujos de caja (dividendos, en este caso) que crecen a una tasa constante es igual al cociente entre el primer flujo y la diferencia entre el tipo de descuento y la tasa de crecimiento. Por tanto, se obtiene:

$$P_e = \frac{d_1}{k_e - f}$$

De donde se deduce que:

$$k_e = \frac{d_1}{P_e} + f$$

Como también se recordará, ha de suponerse que k_e es superior a la tasa f , pues si no lo fuera la acción valdría infinitas unidades monetarias y no existe ninguna que tenga este precio, por lo que no hay ninguna acción de la que se espere que sus dividendos crezcan a una tasa superior a su rentabilidad requerida.

En el caso planteado, se obtiene:

$$k_e = \frac{200}{1.000} + 0,15 = 0,35 \text{ por } 1 = 35 \text{ por } 100$$

El coste del capital-acciones de esta empresa es el 35 por 100.

Problema
19

El coste del capital obtenido mediante la emisión de acciones

Sabemos que los dividendos de una acción crecen un 10 por 100 cada año y que su cotización actual es de 3.500 u.m. ¿Cuál será su cotización dentro de un año si se mantiene su rentabilidad requerida?

RESOLUCIÓN

Actualmente, el precio es:

$$P_{e0} = \frac{d_1}{k_e - f} = 3.500 \text{ u.m.}$$

Dentro de un año, el próximo dividendo será:

$$d_1(1 + 0,10)$$

Por ello, el precio de la acción será:

$$P_{e1} = \frac{d_1(1 + 0,10)}{k_e - f} = P_{e0}(1 + 0,10) = 3.500(1 + 0,10) = 3850 \text{ u}$$

Como puede observarse, el precio de la acción crece según la que los dividendos.

6.5. EL COSTE DE LA AUTOFINANCIACIÓN Y LAS DECISIONES DE DISTRIBUCIÓN DE DIVIDENDOS

Problema 20

El coste de la autofinanciación y las decisiones de distribución de dividendos

El coste del capital-acciones de Ofiuned, S. A., es del 10 por 100. La empresa dispone de m unidades monetarias de beneficio por acción y puede optar por repartirlas como dividendos o retenerlas como autofinanciación. ¿Cuál es el coste de estos fondos si la empresa los retiene?

RESOLUCIÓN

Si la empresa repartiera las m u.m. de dividendo por acción, la acciónista por su pertenencia a la empresa sería, por cada acción que resultara de añadir, al precio de la acción, el dividendo repartido:

$$R = P + m = \frac{d}{k_e} + m$$

coste del capital de una empresa, entendido como coste de su pasivo, es la rentabilidad requerida por quienes le confían sus fondos financieros. Si el crédito de esta empresa tuviera un interés variable (es decir, revisable por los acreedores) y su nivel de riesgo fuera el mismo que el de las inversiones financieras a las que el mercado paga un interés del 15 por 100, esta última sería la tasa requerida por los acreedores de Investuned en la inversión que ellos efectúan y, por tanto, el coste del pasivo de esta empresa.

Problema
24

El coste del capital y la selección de inversiones. El coste de oportunidad del capital

La financiación de una empresa se basa en un crédito a diez años que obtuvo hace dos años con un tipo de interés anual del 10 por 100. Actualmente, un crédito semejante a diez años costaría un interés del 12 por 100, siendo del 8 por 100 si fuera a ocho años. Esta empresa podría realizar una ampliación de capital emitiendo acciones, y esta fuente de financiación tendría un coste anual del 20 por 100. ¿Cuál es el coste del capital de esta empresa?

RESOLUCIÓN

La empresa dispone de un crédito a ocho años por el que ahora tendría que pagar un 8 por 100 anual. Por consiguiente, éste es el coste actual de su capital. En el sentido de coste de oportunidad, éste es el porcentaje anual que podría obtener cada año si colocara estos fondos de los que dispone durante ocho años.

6.8. VALORACIÓN DE EMPRESAS

Problema
25

Valoración de empresas

Al finalizar el ejercicio económico, cierta sociedad anónima presenta el siguiente balance de situación antes de la distribución del beneficio y según valores de reposición actualizados:

El coste del capital y la valoración de empresas

Activo (millones)		Pasivo (millones)	
Caja, ptas.	2	Proveedores	2
Clientes	3	Acreedores diversos	0,5
Deudores diversos	0,5	Préstamos a largo plazo	9
Existencias	6	Capital social	6
Inmovilizado neto	10	Reservas	3
Gastos de constitución	1	Pérdidas y ganancias	2
<hr/>		<hr/>	
TOTAL ACTIVO	22,5	TOTAL PASIVO	22,5

El beneficio del ejercicio se va a repartir del siguiente modo:

- Un 36 por 100 para el pago de impuestos.
- Un 14 por 100 se distribuye como dividendos.
- Un 50 por 100 se destina a la autofinanciación.

Suponiendo que el beneficio de esta sociedad se va a mantener constante en los sucesivos ejercicios, y que el horizonte económico es ilimitado, se desea conocer:

- a) Su valor sustancial neto.
- b) Su valor de rendimiento para un tipo de actualización del 10 por 100.
- c) Su fondo de comercio, según el método indirecto.
- d) Su valor global según el método alemán.

RESOLUCIÓN

a) Tras la distribución contable del beneficio, el balance, debidamente clasificado, sería, en millones, el siguiente:

Activo (millones)		Pasivo (millones)	
Disponibile	2	Exigible	12,5
Caja, pesetas	2	Proveedores	2
Realizable	3,5	Acreedores diversos	0,5
Clientes	3	Hacienda pública	
Deudores diversos	0,5	acreedora	0,72
Existencias	6	Acreedores por	
		dividendos activos	0,28
		Préstamos a plazo largo	9

Problema
22

El coste medio ponderado del capital

Una empresa muy rentable utiliza tres fuentes de financiación: créditos, por un importe de 40 u.m. con un coste anual del 12 por 100; un empréstito de obligaciones por un importe de 50 u.m. y con un coste anual del 13 por 100; y capital propio, por un importe de 110 u.m. con un coste anual del 14 por 100. En los mencionados costes no se han tenido en cuenta la inflación, que es el 5 por 100 anual, ni el Impuesto sobre la Renta de las Sociedades, que tiene un tipo de gravamen del 35 por 100. ¿Cuál es el coste medio ponderado real después de tener en cuenta ambas cuestiones?

RESOLUCIÓN

El coste de los créditos después de impuestos es:

$$k_{AC} = 0,12(1 - 0,35) = 0,078 \text{ por } 1$$

En cuanto al empréstito:

$$k_{AE} = 0,13(1 - 0,35) = 0,0845 \text{ por } 1$$

Al calcular el coste medio ponderado, se obtiene:

$$k_{AO} = \frac{0,078 \cdot 40 + 0,0845 \cdot 50 + 0,14 \cdot 110}{40 + 50 + 110} = 0,113725 \text{ por } 1$$

Finalmente, se corrige este importe por la inflación:

$$k_{RO} = \frac{0,113725 - 0,05}{1 + 0,05} = 0,06069 \text{ por } 1 = 6,069 \text{ por } 100$$

6.7. EL COSTE DEL CAPITAL Y LA SELECCIÓN DE INVERSIONES. EL COSTE DE OPORTUNIDAD DEL CAPITAL

Problema 23

El coste del capital y la selección de inversiones. El coste de oportunidad del capital

Investuned, S. A., es una empresa dedicada a la fabricación de aparatos de informática. Su financiación se basa en un crédito obtenido hace años y cuyo coste fijo es del 10 por 100 anual. Posteriormente, debido a la política económica del Gobierno y a otros factores, los tipos de interés subieron y actualmente pueden colocarse fondos en el mercado financiero a un tipo de interés del 15 por 100. ¿Cuál es el coste del capital de esta empresa? ¿Y la rentabilidad que ha de exigir de sus inversiones?

RESOLUCIÓN

Evidentemente, la tasa de rentabilidad, *TIR*, que ha de requerir de sus inversiones es el 15 por 100. Si sus inversiones rentaran menos, sería preferible invertir en el mercado financiero.

El coste de su capital, entendido como *coste de oportunidad*, es también del 15 por 100; es lo que deja de ganar por realizar una inversión. Más aún, si existieran otras oportunidades de inversión de mayor rentabilidad, su *TIR* sería el coste del capital de la empresa.

Este sencillo ejemplo muestra que el coste del capital no es algo que siempre debe buscarse en el *pasivo* del balance, atendiendo a las fuentes de financiación de la empresa. En ocasiones, ha de determinarse atendiendo a otros *activos* alternativos de la misma.

Estas conclusiones deben ser matizadas, además, atendiendo a la consideración del riesgo. La rentabilidad que habría de requerir Investuned de sus inversiones sería el 15 por 100 si tales inversiones tuvieran el mismo riesgo que las alternativas existentes en el mercado financiero. Si su riesgo fuera mayor, su rentabilidad requerida sería también más elevada; si fuera menor, podrían ser realizables aunque su *TIR* fuera más baja. En la decisión influye, además, como es evidente, la particular aversión al riesgo que tenga el decisor en cuestión.

Por otra parte, es evidente que el problema de la determinación del coste del capital puede enfocarse como un problema de selección de inversiones. El

RESOLUCIÓN

Denominando B al beneficio neto, según el método anglosajón el fondo de comercio se calcula actualizando la diferencia entre B y la renta normal ($k \cdot VS$). Añadiendo al fondo, así calculado, el valor sustancial, se obtiene el valor global:

$$VG = VS + \frac{B - k \cdot VS}{k'} = 9 + \frac{1,28 - 0,10 \cdot 9}{2 \cdot 0,10} = 10,9 \text{ millones de u.m.}$$

Problema
28

Valoración de empresas

Se desea conocer el valor en rendimiento, el fondo de comercio y el valor global de la empresa a la que se refieren los problemas anteriores, suponiendo que sólo durará veinte años, aplicando los diferentes procedimientos de valoración existentes.

RESOLUCIÓN

En tal caso, su valor de rendimiento (es decir, el valor actual de los futuros beneficios de la empresa) será:

$$\begin{aligned} VR &= B \cdot a_{\overline{n}|k} = B \frac{1 - (1 + k)^{-n}}{k} = 1,28 \frac{1 - (1 + 0,10)^{-20}}{0,10} = \\ &= 1,28 \cdot 8,51 = 10,90 \text{ millones de u.m.} \end{aligned}$$

En cuanto al fondo de comercio, según el método indirecto vale:

$$FC = VR - VS = 10,90 - 9 = 1,90 \text{ millones de u.m.}$$

y según el método directo será igual al resultado de actualizar los superrendimientos de los veinte años; es decir:

$$\begin{aligned} FC &= (r - k)VS \cdot a_{\overline{n}|k} = (r \cdot VS - k \cdot VS)a_{\overline{n}|k} = \\ &= (B - k \cdot VS) \cdot a_{\overline{n}|k} = (1,28 - 0,10 \cdot 9) \frac{1 - (1 + 0,10)^{-20}}{0,10} = \\ &= 0,38 \cdot 8,51 = 3,23 \text{ millones de u.m.} \end{aligned}$$

Éste es el procedimiento más correcto de cálculo directo del fondo de comercio, pero algunos autores lo determinan multiplicando el superrendimiento anual por el número de años en los que se produce; es decir, aplicando la siguiente expresión:

$$(r - k)VS \cdot n$$

o, lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}(r \cdot VS - k \cdot VS)n &= (B - k \cdot VS)n = (1,28 - 0,10 \cdot 9)20 = \\ &= 7,60 \text{ millones de u.m.}\end{aligned}$$

El método alemán de determinación del valor global parte de la medición indirecta del fondo de comercio y de la consideración de que, dada la elevada subjetividad que comporta su determinación, ha de repartirse por igual entre el comprador y el vendedor; por consiguiente:

$$\begin{aligned}VG &= VS + (1/2)(VR - VS) = (1/2)(VS + VR) = \\ &= (1/2)(9 + 10,90) = 9,95 \text{ millones de u.m.}\end{aligned}$$

Según el método anglosajón el valor global de la empresa será:

$$VG = VS + (B - k \cdot VS)a_{nk} = 9 + 3,23 = 12,23 \text{ millones de u.m.}$$

o bien, siguiendo el procedimiento alternativo señalado anteriormente (que, en general, no es correcto):

$$VG = VS + (B - k \cdot VS)n = 9 + 7,60 = 16,60 \text{ millones de u.m.}$$

Algunos autores señalan que el tipo de rendimiento normal k no ha de ser aplicado al valor sustancial sino al valor global de la empresa, pues es éste el importe en el que el adquirente de la misma tendría que comprarla y, por tanto, el tamaño de su inversión. El superrendimiento ha de ser la diferencia entre el beneficio anual que obtiene adquiriendo esta empresa, B , y el que obtendría con una inversión del mismo importe, VG , que tuviera un interés igual al que es normal en el mercado. Conforme a esta perspectiva:

$$\begin{aligned}VG &= VS + (B - k \cdot VG)a_{nk} \rightarrow \\ \rightarrow VG &= VS + Ba_{nk} - k \cdot VG \cdot a_{nk} \rightarrow \\ \rightarrow VG(1 + ka_{nk}) &= VS + Ba_{nk} \rightarrow\end{aligned}$$

Activo (millones)		Pasivo (millones)	
Inmovilizado neto	10	Fondos propios	10
Activo ficticio	1	Capital social	6
Gastos de constitución	1	Reservas	4
TOTAL ACTIVO		TOTAL PASIVO	
	22,5		22,5

El valor sustancial neto es el valor contable (patrimonio neto) calculado sobre valores de reposición actualizados:

$$\begin{aligned}
 \text{Valor sustancial neto} &= VS = \text{Valor de reposición actualizado del activo} \\
 &\quad \text{real} - \text{Pasivo exigible} = \\
 &= (\text{Valor de reposición actualizado del activo} \\
 &\quad \text{total} - \text{Activo ficticio}) - \text{Pasivo exigible} = \\
 &= (22,5 - 1) - 12,5 = 9 \text{ millones de u.m.}
 \end{aligned}$$

O bien, como es obvio, a la vista del balance actualizado según valores de reposición:

$$VS = \text{Fondos propios} - \text{Activo ficticio} = 10 - 1 = 9 \text{ millones de u.m.}$$

b) Cuando el beneficio es constante y el horizonte económico ilimitado, el valor de rendimiento (es decir, el resultado de actualizar los beneficios futuros) es igual a:

$$VR = \frac{\text{Beneficio neto de impuestos}}{\text{Tipo de actualización}} = \frac{2 - 0,36 \cdot 2}{0,10} = \frac{1,28}{0,10} = 12,8 \text{ millones de u.m.}$$

c) Según el método indirecto, el fondo de comercio es la diferencia entre el valor en rendimiento y el valor sustancial:

$$\text{Fondo de comercio} = FC = VR - VS = 12,8 - 9 = 3,8 \text{ millones de u.m.}$$

d) El valor global de la empresa es el resultado de añadir el fondo de comercio al valor sustancial, pero, dado que la determinación del FC entraña cierto margen de subjetividad, el método alemán sólo toma la mitad del mismo, resultando así:

$$VG = VS + \frac{1}{2} (VR - VS) = \frac{1}{2} (VS + VR) = \frac{1}{2} (9 + 12,8) = 10,9 \text{ millones de u.m.}$$

Problema
26

Valoración de empresas

¿Cuánto vale, según el método directo, el fondo de comercio de la empresa del problema anterior si sus accionistas pueden obtener en el mercado financiero un tipo de interés normal del 10 por 100?

RESOLUCIÓN

El valor sustancial o valor de los capitales propios invertidos en esta empresa renta anualmente 1,28 millones de pesetas (beneficio neto disponible para los accionistas). La rentabilidad que genera es, por consiguiente:

$$r = \frac{1,28}{VS} = \frac{1,28}{9} = 0,1422 = 14,22 \text{ por } 100$$

Si el importe del valor sustancial fuera invertido en el mercado financiero se obtendría una renta igual a:

$$k \cdot VS = 0,10 \cdot 9 = 0,9 \text{ millones de u.m.}$$

Los superrendimientos obtenidos son, por consiguiente:

$$r \cdot VS - k \cdot VS = 1,28 - 0,9 = 0,38 \text{ millones de u.m.}$$

Actualizando estos superrendimientos, se obtiene el fondo de comercio según el método directo:

$$FC = \frac{(r - k)VS}{k} = \frac{0,38}{0,10} = 3,8 \text{ millones de u.m.}$$

Problema
27

Valoración de empresas

¿Cuál es el valor global de la empresa de los problemas anteriores según el método anglosajón si, para calcular el fondo de comercio, se aplica un tipo de descuento igual, como es usual, al doble del interés normal del mercado?

- Valor global por el método alemán:

$$VG = VS + (1/2)(VR - VS) = (1/2)(VS + VR) = (1/2)(100 + 292,36) = 196,18 \text{ u.m.}$$

- Valor global por el método anglosajón correcto habitual:

$$VG = VS + (B - k \cdot VS)a_{\overline{nk}} = 100 + 222,20 = 322,20 \text{ u.m.}$$

- Valor global por el método anglosajón simplificado y generalmente incorrecto (pues lo adecuado es actualizar):

$$VG = VS + (B - k \cdot VS)n = 100 + (50 - 0,12 \cdot 100)15 = 670 \text{ u.m.}$$

- Valor global por el método anglosajón revisado. Aplicando el tipo de rentabilidad normal al propio valor global, se obtiene:

$$\begin{aligned} VG &= VS + (B - k \cdot VG)a_{\overline{nk}} \rightarrow VG = \frac{VS + B \cdot a_{\overline{nk}}}{1 + k \cdot a_{\overline{nk}}} = \\ &= \frac{100 + 50a_{\overline{150,15}}}{1 + 0,12a_{\overline{150,15}}} = \frac{100 + 50 \cdot 5,8474}{1 + 0,12 \cdot 5,8474} = 230,58 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Como puede observarse, los resultados obtenidos varían ostensiblemente según los modelos utilizados. Se trata, no obstante, de valoraciones a partir de las cuales comienza la negociación para la asignación definitiva de un valor a la empresa; valor que siempre dependerá de criterios subjetivos.

PARTE TERCERA
Producción

$$\rightarrow VG = \frac{VS + Ba_{rk}}{1 + ka_{rk}}$$

Así, en este caso:

$$VG = \frac{9 + 1,28a_{200,1}}{1 + 0,1a_{200,1}} = \frac{9 + 1,28 \cdot 8,51}{1 + 0,1 \cdot 8,51} = 10,75 \text{ millones de u.m.}$$

Problema

29

Valoración de empresas

El valor sustancial de Unedivalsa es de 100 u.m. y se espera que obtenga un beneficio anual de 50 u.m. Se desea conocer su valor de rendimiento, su fondo de comercio y su valor global considerando que el tipo de rentabilidad normal es el 12 por 100 y que, para actualizar los beneficios, ha de aplicarse un tipo del 15 por 100, en los dos supuestos siguientes:

- La empresa tiene una duración ilimitada.
- La empresa durará quince años.

RESOLUCIÓN

- En el caso de duración ilimitada se obtiene:

— Valor de rendimiento:

$$VR = \frac{B}{k'} = \frac{50}{0,15} = 333,3\bar{3} \text{ u.m.}$$

— Fondo de comercio por el método indirecto:

$$FC = VR - VS = 333,3\bar{3} - 100 = 233,3\bar{3} \text{ u.m.}$$

— Fondo de comercio por el método directo:

$$FC = \frac{B - k \cdot VS}{k'} = \frac{50 - 0,12 \cdot 100}{0,15} = 253,3\bar{3} \text{ u.m.}$$

— Valor global por el método alemán:

$$VG = VS + (1/2)(VR - VS) = (1/2)(VS + VR) = (1/2)(100 + 333,3\bar{3}) = 216,6\bar{6} \text{ u.m.}$$

— Valor global por el método anglosajón habitual:

$$VG = VS + \frac{(B - k \cdot VS)}{k'} = 100 + 253,3\bar{3} = 353,3\bar{3} \text{ u.m.}$$

— Valor global por el método anglosajón revisado. Aplicando el interés normal al propio valor global, se obtiene:

$$\begin{aligned} VG &= VS + \frac{(B - k \cdot VG)}{k'} \\ VG &= VS + \frac{B}{k'} - VG \frac{k}{k'} \rightarrow VG = \frac{VS + (B/k')}{1 + (k/k')} = \\ &= \frac{VS \cdot k' + B}{k' + k} = \frac{100 \cdot 0,15 + 50}{0,15 + 0,12} = 240,74 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

b) Si se supone que la empresa durará quince años, los resultados son los siguientes:

— Valor de rendimiento:

$$VR = Ba_{\overline{m}|k'} = 50a_{\overline{15}|0,15} = 50 \frac{1 - (1 + 0,15)^{-15}}{0,15} = 292,36 \text{ u.m.}$$

— Fondo de comercio por el método indirecto:

$$FC = VR - VS = 292,36 - 100 = 192,36 \text{ u.m.}$$

— Fondo de comercio por el método directo:

$$\begin{aligned} FC &= (B - k \cdot VS)a_{\overline{m}|k'} = (50 - 0,12 \cdot 100) \frac{1 - (1 + 0,15)^{-15}}{0,15} = \\ &= 38 \cdot 5,8474 = 222,20 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

En el caso planteado en el enunciado, se obtiene:

$$\frac{C_F}{p - c_v} = \frac{100.000}{5.000 - 2.500} = 40 \text{ componentes}$$

Puesto que cada vehículo requiere un componente, sólo interesará elaborar tales componentes cuando el número de vehículos fabricados supere los 40 vehículos anuales. En otro caso, es preferible adquirir los componentes en el exterior.

**Problema
2**

La decisión de producir o comprar

Una empresa necesita adquirir unos componentes que puede comprar en el exterior por 5.000 u.m. cada unidad, o fabricarlos ella con un coste variable de 2.500 u.m. y un coste fijo anual de 200.000 u.m. Se desea saber cuántos componentes debe necesitar al año como mínimo para que sea preferible fabricarlos.

RESOLUCIÓN

$$\frac{C_F}{p - c_v} = \frac{200.000}{5.000 - 2.500} = 80 \text{ u.f.}$$

**Problema
3**

La decisión de producir o comprar

La diferencia entre el precio de adquirir un componente fuera y su coste variable unitario si se fabrica dentro es el 0,25 por 100 del coste fijo anual total que requiere fabricarlo dentro. ¿Para qué volumen de componentes anuales es indiferente fabricarlos o comprarlos?

RESOLUCIÓN

$$\frac{C_F}{p - c_v} = \frac{1}{(p - c_v)/C_F} = \frac{1}{0,0025} = 400 \text{ u.f.}$$

7.2. LOS COSTES DE PRODUCCIÓN Y SU CONTROL

Problema
4

Los costes de producción y su control. *Direct costing*

Sea una empresa que fabrica dos tipos de productos: A y B. El mes pasado, por diferentes partidas, tuvo 1.100 u.m. de costes fijos, y elaboró 120 unidades de A y 180 de B, las cuales vendió inmediatamente a un precio unitario de 100 u.m. y 80 u.m., respectivamente. Al comienzo del mes la empresa no tenía existencias de productos en curso de fabricación ni terminados y los costes variables del período fueron:

	Producto A	Producto B
Materias primas	640	900
Mano de obra variable	500	500
Combustible	150	180
Materias auxiliares	150	220
Total costes variables	1.440 u.m.	1.800 u.m.

Se desea analizar la estructura de márgenes de esta empresa por el método del *direct costing*.

RESOLUCIÓN

Cuando una empresa elabora varios productos, para determinar el coste de cada uno de ellos es preciso distribuir los costes fijos, es decir, aquellos que no se modifican con el volumen de producción. En la técnica del *full-costing* los costes fijos se distribuyen prorrateándolos en proporción a los costes variables totales de los diversos productos o a los costes de los materiales que llevan incorporados, y el precio de coste es el resultado de añadir, al coste variable unitario, los costes fijos unitarios correspondientes. En la técnica del *direct costing* a cada producto se le imputa como precio de coste solamente su coste variable. A la diferencia entre el precio de venta y el coste variable unitario se le denomina *margen bruto unitario*. Al multiplicarle por el número de unidades vendidas resulta el *margen bruto total del producto*. Sumando los márgenes de los diversos productos, se obtiene el *margen bruto de la empresa*, del que, finalmente, se deducen los costes fijos para determinar el *beneficio neto*.

7

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

7.1. LA PRIMERA DECISIÓN: PRODUCIR O COMPRAR

Problema 1

La decisión de producir o comprar

Para elaborar su producto (un vehículo todoterreno capaz de sumergirse en el mar, denominado Autosubmarino GTI), la empresa Unedfuturos, S. A., va a necesitar el componente industrial TRX-II, del cual se precisa una unidad por cada vehículo fabricado. Las alternativas existentes son dos: adquirirlo en el exterior a un precio de 5.000 u.m. cada unidad o elaborarlo en la propia empresa. En este segundo caso, se incurriría en unos costes fijos valorados en 100.000 u.m. al año, y cada unidad tendría un coste variable igual a 2.500 u.m. Se desea saber para qué cantidad anual de vehículos fabricados comienza a ser preferible fabricar el TRX-II en la propia empresa.

RESOLUCIÓN

Siendo p el precio que habría que pagar por cada unidad si se adquiere fuera, c_v el coste variable asociado a la producción de una unidad, C_F los costes fijos anuales necesarios para acometer la elaboración del bien o servicio y P el número de unidades necesarias al año, interesará producir cuando:

$$C_F + c_v P < p \cdot P$$

es decir, cuando el coste total de «producir» sea inferior al coste de «comprar». Dicho de otro modo, la decisión óptima será la de elaborar el producto cuando:

$$P > \frac{C_F}{p - c_v}$$

cide con el previsto, medir la desviación entre el consumo real y el consumo estándar correspondiente a la producción efectiva. Así, en el presente caso, dado que, según el estándar, a cada unidad de producto le corresponde un consumo de 0,5 kg, a 4 u.m. cada uno, a las 3.600 u.f. realmente fabricadas le corresponderán:

$$3.600 \cdot 0,5 \cdot 4 = 7.200 \text{ u.m.}$$

con lo cual, la desviación ha sido:

$$D = \text{Consumo real} - \text{Consumo estándar correspondiente a la producción real} = 9.450 - 7.200 = 2.250 \text{ u.m.} = P_r x_r f_r - P_r x_s f_s = P_r (x_r f_r - x_s f_s)$$

Tanto una como otra desviación se han producido por variaciones en las cantidades y en los precios de las materias primas. Así, en cuanto a la primera, pueden distinguirse:

$$\text{Desviación en precio} = D_p = (f_r - f_s) F_r = (5 - 4) 1.890 = 1.890 \text{ u.m.}$$

$$\text{Desviación en cantidad} = D_c = (F_r - F_s) f_s = (1.890 - 2.000) 4 = -440 \text{ u.m.}$$

$$\text{Desviación total} = D_p + D_c = 1.890 - 440 = 1.450 \text{ u.m.}$$

En cuanto a la segunda:

$$\text{Desviación en precio o desviación económica} = D_p - (f_r - f_s) F_r = 1.890 \text{ u.m.}$$

$$\begin{aligned} \text{Desviación en cantidad o desviación técnica} &= D_c = (F_r - P_r x_s) f_s = 360 \text{ u.m.} \\ &= (1.890 - 3.600 \cdot 0,5) 4 = 360 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Desviación total} &= D = D_p + D_c = 1.890 + 360 = \\ &= 2.250 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Problema 6

Los costes de producción y su control. Costes estándares

La empresa PASA realizó a comienzo del mes pasado unas previsiones de costes. Tanto dichas previsiones como los consumos efectivos se recogen en la tabla 7.2.

La producción efectiva fue de 2.000 unidades, habiendo sido previsto un estándar de 2.500.

Se desea analizar las desviaciones del período.

TABLA 7.2

Concepto	Costes estándares			Costes reales		
	Cantidad	Precio	Total	Cantidad	Precio	Total
Mano de obra	3.000 h/h	1.000 u.m.	3.000.000 u.m.	3.100 h/h	1.200 u.m.	3.720.000 u.m.
Materias primas	1.500 kg	500 u.m.	750.000 u.m.	1.550 kg	525 u.m.	813.750 u.m.

RESOLUCIÓN

Dado que la producción real no coincidió con la estándar, el análisis de mayor interés es el que se expuso en segundo lugar en el problema anterior. Tal será el que se realizará seguidamente.

a) Desviaciones en mano de obra:

$$\text{Desviación económica} = D_p = (f_r - f_s)F_r = (1.200 - 1.000)3.100 = 620.000 \text{ u.m.}$$

$$\begin{aligned} \text{Desviación técnica} = D_e &= (F_r - P_r x_s) f_s = \left(3.100 - 2.000 \frac{3.000}{2.500} \right) 1.000 = \\ &= 700.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Desviación total} = D_T &= P_r (x_r f_r - x_s f_s) = 2.000 \left(\frac{3.100}{2.000} \cdot 1.200 - \frac{3.000}{2.500} \cdot 1.000 \right) = \\ &= 1.320.000 \text{ u.m.} = D_p + D_e \end{aligned}$$

Tanto en precios como en cantidades, las desviaciones han sido desfavorables. Se había previsto un consumo de $3.000/2.500 = 1,2$ horas/hombre por unidad de producto, y se consumieron $3.100/2.000 = 1,55$ horas/hombre. La diferencia es de $0,35$ horas/hombre por unidad de producción real; es decir, $0,35 \cdot 2.000 = 700$ horas/hombre en total, que, valoradas al precio estándar, representan una desviación técnica de $700 \cdot 1.000 = 700.000$ u.m. Además, el precio real ha sido 200 u.m. mayor que el estándar por cada hora empleada, por lo que la desviación económica resulta igual a $200 \cdot 3.100 = 620.000$. La desviación total es la suma de ambas.

b) Desviaciones en materias primas:

$$\text{Desviación económica} = D_p = (525 - 500)1.550 = 38.750 \text{ u.m.}$$

$$\text{Desviación técnica} = D_e = \left(1.550 - 2.000 \frac{1.500}{2.500} \right) 500 = 175.000 \text{ u.m.}$$

$$c_{VA} = \text{Coste variable unitario medio del producto A} = \frac{\text{Costes variables totales de A}}{\text{Producción de A}} = \frac{1.440}{120} = 12 \text{ u.m.}$$

$$c_{VB} = \text{Coste variable unitario medio del producto B} = \frac{1.880}{180} = 10 \text{ u.m.}$$

$$\text{Margen de beneficio bruto unitario del producto A} = m_A = \text{Precio de venta unitario de A} - c_{VA} = 100 - 12 = 88 \text{ u.m.}$$

$$\text{Margen de beneficio bruto unitario del producto B} = m_B = 80 - 10 = 70 \text{ u.m.}$$

$$\text{Margen de beneficio bruto total del producto A} = MB_A = m_A \cdot \text{Número de unidades vendidas de A} = 88 \cdot 120 = 10.560 \text{ u.m.}$$

$$\text{Margen de beneficio bruto total del producto B} = MB_B = 70 \cdot 180 = 12.600 \text{ u.m.}$$

$$\text{Margen de beneficio bruto total de la empresa} = MB = MB_A + MB_B = 23.160 \text{ u.m.}$$

$$\text{Beneficio neto total de la empresa} = MB - \text{Costes fijos} = 23.160 - 1.100 = 22.060 \text{ u.m.}$$

La información así elaborada puede ser ordenada en la tabla 7.1 de *direct costing*.

TABLA 7.1

Concepto	Producto A	Producto B	Total
Ventas (I)	120 · 100 = 12.000	180 · 80 = 14.400	26.400
Costes variables de las ventas:			
— Materias primas	640	900	1.540
— Mano de obra variable	500	500	1.000
— Combustible	150	180	330
— Materiales auxiliares	150	220	370
Total costes variables de las ventas (II)	1.440	1.800	3.240
Margen de beneficio bruto = III = I - II	10.560	12.600	23.160
Costes fijos (IV)			1.100
Beneficio neto total = III - IV			22.060

Problema

5

Los costes de producción y su control. Costes estándares

La empresa GUSA había estimado para el pasado mes una producción estándar de 4.000 unidades físicas (u.f.) de producto y los siguientes costes estándares de materias primas.

F_s = Unidades físicas a consumir para elaborar la producción estándar = 2.000 kg

f_s = Precio de adquisición estándar por unidad de materia prima = 4 u.m./kg

Finalizado el mes, la producción real fue de 3.600 u.f. con los siguientes consumos efectivos:

$$F_r = 1.890 \text{ kg}$$

$$f_r = 5 \text{ u.m./kg}$$

Se desea analizar las desviaciones producidas.

RESOLUCIÓN

Según las estimaciones, se iban a utilizar 2.000 kg de materia prima para obtener 4.000 unidades de producto; es decir, 0,5 kg (2.000/4.000) por unidad terminada. En realidad, se han empleado 1.890 kg para fabricar 3.600 u.f. de producto (1.890/3.600 = 0,525 kg por unidad terminada). Además, el precio del kilogramo de materia prima ha sido superior al previsto en una u.m.

Resumiendo:

$$\text{— Consumo real} = 1.890 \text{ kg} \cdot 5 \text{ u.m./kg} = (3.600 \cdot 0,525)5 = 9.450 \text{ u.m.}$$

$$\text{— Consumo estándar} = 2.000 \text{ kg} \cdot 4 \text{ u.m./kg} = (4.000 \cdot 0,5)4 = 8.000 \text{ u.m.}$$

Denominando Q a la producción y x a la cantidad consumida por unidad de producto, puede escribirse:

$$\text{Desviación total} = D_T = \text{Consumo real} - \text{Consumo previsto} =$$

$$= F_r f_r - F_s f_s = P_r x_r f_r - P_s x_s f_s = 9.450 - 8.000 = 1.450 \text{ u.m.}$$

Importa puntualizar que:

- Algunos autores miden la desviación de lo previsto respecto a lo real, en lugar de lo efectivo respecto al estándar. En tal caso, como es obvio, la desviación total será la misma, pero de signo contrario.
- Resulta de gran interés, cuando el volumen de fabricación real no coin-

Problema
8

La medida de la productividad

Botijuned es una cooperativa artesanal dedicada a la fabricación de botijos destinados, principalmente, a la exportación a países de clima cálido. El pasado año, los veinte socios de esta empresa trabajaron las 1.760 horas, cada uno, que constituyen el tiempo de trabajo previsto en condiciones normales, y produjeron 70.400 botijos. Este año, que ahora termina, se cambiaron los antiguos tornos manuales por otros eléctricos de mayor rapidez y, como consecuencia, a pesar de que la modernización impidió a estos operarios trabajar durante tres días, perdiéndose ocho horas diarias de trabajo en cada uno de ellos, la producción se ha elevado a 104.160 botijos. Se desea analizar la productividad de la mano de obra en cada uno de los años y su evolución

RESOLUCIÓN

La productividad el pasado año fue:

$$P_0 = \frac{70.400}{1.760 \times 20} = 2 \text{ botijos cada hora/hombre}$$

En el año actual, cabe distinguir entre la productividad bruta, que se mide en relación a las horas de trabajo habituales (sin descontar las horas perdidas), y la productividad neta, que se mide en relación a las horas de trabajo efectivas. La productividad bruta será:

$$P_{IB} = \frac{104.160}{1.760 \times 20} = 2,96 \text{ botijos cada hora/hombre}$$

mientras que la productividad neta valdrá:

$$P_{IN} = \frac{104.160}{(1.760 - 3 \times 8) \times 20} = 3 \text{ botijos cada hora/hombre}$$

La evolución de la productividad puede medirse tomando la productividad bruta o la neta. En el primer caso, se obtiene, como coeficiente de variación:

$$VP_B = \frac{2,96 - 2}{2} = 0,48 = 48 \text{ por } 100$$

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

en tanto que, en el segundo, se obtiene:

$$VP_N = \frac{3 - 2}{2} = 0,50 = 50 \text{ por } 100$$

Si la productividad se mide por hombre, en lugar de hacerse por hora/hombre, se obtiene, para el pasado año:

$$P'_0 = \frac{70.400}{20} = 3.520 \text{ botijos/hombre}$$

y para el presente:

$$P'_1 = \frac{104.160}{20} = 5.108 \text{ botijos/hombre}$$

El coeficiente de variación de la productividad coincide, en tal caso, con los cálculos efectuados para el caso en el que la productividad de la hora/hombre se mide en términos brutos:

$$VP' = \frac{5.208 - 3.520}{3.520} = 0,48 = 48 \text{ por } 100$$

Problema

9

La medida de la productividad

En Obunedsa utilizan los factores de producción *A*, *B* y *C* para elaborar los productos *X*, *Y* y *Z*. En la tabla 7.3 se recogen, en unidades físicas y en unidades monetarias, las cantidades elaboradas de los tres productos y las empleadas de los tres factores en dos años consecutivos.

Se desea conocer el Índice y la Tasa de Productividad Global que miden la evolución de la productividad de la empresa entre estos dos años.

$$\begin{aligned}\text{Desviación total} = D_T &= P_r(x_r f_r - x_s f_s) = 2.000 \left(\frac{1.550}{2.500} \cdot 525 - \frac{1.500}{2.500} \cdot 500 \right) = \\ &= 213.750 \text{ u.m.} = D_p + D_c\end{aligned}$$

También en este caso han sido desfavorables las dos desviaciones. Se han consumido $1.550/2.000 - 1.500/2.500 = 0,175$ kg, por unidad de producto, más de lo previsto, que, valoradas al precio estándar representan un total, para el conjunto de la producción real, igual a 175.000 (es decir, $0,175 \cdot 500 \cdot 2.000$). Por otra parte, el precio real ha sido superior, en 25 u.m., al estándar, lo que, para el total del consumo real (1.550 kg), representa una desviación igual a 38.750 u.m. La desviación total es, por consiguiente, de

$$175.000 + 38.750 = 213.750 \text{ u.m.}$$

c) Desviación total del período:

Será igual al resultado de añadir la desviación total en materias primas a la habida en mano de obra, obteniéndose:

$$1.320.000 + 213.750 = 1.533.750 \text{ u.m.}$$

7.3. LA MEDIDA DE LA PRODUCTIVIDAD

Problema 7

La medida de la productividad

Uned'art es una cooperativa de trabajadores que se dedica a la fabricación de cestos y maletas de mimbre. El pasado año contaba con veinte operarios dedicados a la fabricación de cestos y treinta asignados a la elaboración de maletas, siendo la producción de 15.000 cestos y 21.000 maletas. Este año se efectuó una reasignación por la cual diez trabajadores dedicados a la fabricación de maletas pasaron a la de cestos, con lo cual se elaboraron 24.000 cestos y 12.000 maletas. Se desea conocer la incidencia de la reasignación en la productividad de la mano de obra de la empresa, en cada tipo de producto, sabiendo que no se modificó el número de horas trabajadas por cada operario al cabo del año.

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

RESOLUCIÓN

La racionalidad de las decisiones depende de su contribución a los objetivos deseados. Un objetivo final o, más frecuentemente, intermedio para la consecución de otros objetivos es el referido a la productividad de los factores. La productividad es una medida técnica que relaciona la producción obtenida y los medios aplicados para alcanzarla. Así, en este caso, en el pasado año, la productividad de la sección de éstos fue:

$$P_{o,c} = \frac{\text{Producción}}{\text{Cantidad de factor aplicado}} = \frac{15.000}{20} = 750 \text{ cestos/hombre}$$

y de forma semejante se calcula la productividad de la sección de maletas el mismo año:

$$P_{o,m} = \frac{21.000}{30} = 700 \text{ maletas/hombre}$$

En cuanto a las productividades de las dos secciones este año, se obtiene:

$$P_{1,c} = \frac{24.000}{20 + 10} = 800 \text{ cestos/hombre}$$

$$P_{1,m} = \frac{12.000}{30 - 10} = 600 \text{ maletas/hombre}$$

Por consiguiente, la productividad de la sección de cestos aumentó un 6,67 por 100, mientras que la de maletas se redujo en un 14,29 por 100:

$$VP_c = \frac{800 - 750}{750} = 0,0667 = 6,67 \text{ por } 100$$

$$VP_m = \frac{600 - 700}{700} = -0,1429 = -14,29 \text{ por } 100$$

La razón puede encontrarse en que los operarios transferidos tienen una productividad superior a la media.

$$p_z = \frac{16.000}{400} = 40 \text{ u.m./u.f}$$

Por otra parte, según el enunciado:

$$\sum_{i=1}^m f_i F_i = 1.000 + 2.200 + 6.000 = 9.200 \text{ u.m.}$$

$$\sum_{j=1}^n p_j P_j = 8.000 + 7.500 + 16.000 = 31.500 \text{ u.m.}$$

$$F_A + \Delta F_A = 150$$

$$F_B + \Delta F_B = 120$$

$$F_C + \Delta F_C = 190$$

$$P_X + \Delta P_X = 210$$

$$P_Y + \Delta P_Y = 240$$

$$P_Z + \Delta P_Z = 500$$

En consecuencia:

$$\sum_{i=1}^m f_i (F_i + \Delta F_i) = 10 \cdot 150 + 20 \cdot 120 + 30 \cdot 190 = 9.600 \text{ u.m.}$$

$$\sum_{j=1}^n p_j (P_j + \Delta P_j) = 40 \cdot 210 + 30 \cdot 240 + 40 \cdot 500 = 35.600 \text{ u.m.}$$

Y, sustituyendo en las expresiones del *IPG* y de la *TPG*, se obtienen los siguientes resultados:

$$IPG = \frac{35.600}{9.600} \frac{9.200}{31.500} = 1,0831 = 108,31 \text{ por } 100$$

$$TPG = 1,0831 - 1 = 0,0831 = 8,31 \text{ por } 100$$

La productividad se elevó un 8,31 por 100; es decir, la productividad del año 1 representa un 108,31 por 100 respecto a la del año 0.

**Problema
10**

La medida de la productividad

Divuned, S. A., es una empresa que tiene dos divisiones, I y II. En la primera elabora los productos X, Y y Z, utilizando los factores A, B y C; en la segunda fabrica los productos U, V y W, con los factores D, E y F. En la tabla 7.4 se recogen los precios de los distintos factores y productos del pasado año (año 0), así como las cantidades utilizadas y elaboradas, de cada uno de ellos, en dicho año y en el que ahora termina (año 1).

TABLA 7.4

	Precios del año 0 (u.m.)	Cantidades (u.f.)	
		Año 0	Año 1
Factores			
A	100	1.000	1.100
B	120	2.000	2.050
C	50	5.000	4.500
D	70	800	1.000
E	60	1.400	1.450
F	200	90	1.200
Productos			
X	200	10.000	11.000
Y	100	15.000	20.000
Z	150	10.000	12.000
U	120	9.000	9.000
V	110	20.000	18.000
W	100	10.000	9.000

Se desea conocer, para cada una de las divisiones y para la empresa en su conjunto:

- Los índices de evolución de las cantidades producidas de Laspeyres.
- Los índices de evolución de las cantidades de factores empleados de Laspeyres.
- Los índices de Productividad Global.
- Las Tasas de Productividad Global.

RESOLUCIÓN

a) Los índices de cantidades de Laspeyres miden la evolución de los volúmenes valorándolos según los precios del período inicial. Así, utilizando la

TABLA 7.3

	Año 0		Año 1	
	u.f.	u.m.	u.f.	u.m.
Factor A	100	1.000	150	1.800
Factor B	110	2.200	120	2.880
Factor C	200	6.000	190	6.840
Producto X	200	8.000	210	10.920
Producto Y	250	7.500	240	8.640
Producto Z	400	16.000	500	26.000

RESOLUCIÓN

La productividad es una medida de carácter técnico que relaciona la producción obtenida y los recursos utilizados para obtenerla, y, como tal, tanto la producción como los medios han de ser medidos en unidades físicas. Pero, dado que los distintos factores y los diferentes productos son heterogéneos y, por tanto, sus cantidades físicas no son sumables, para medir la productividad global de una empresa, la producción total y la cantidad total de factores empleados han de ser valoradas en unidades monetarias.

No obstante, para poder efectuar comparaciones entre la productividad de un período y la de otro, sin que la evolución de los precios de los factores y de los productos influya en los resultados, las valoraciones han de realizarse aplicando precios constantes. Así, si una empresa utiliza m factores de producción con los que elabora n productos, denominando:

- P_j : al volumen elaborado, en unidades físicas, del producto j en el período 0, y p_j a su precio unitario en ese período;
- F_i : a la cantidad utilizada del factor i en el período 0, y f_i a su coste unitario en ese período;
- Δ : a la variación, positiva o negativa, experimentada por la variable ante la que se sitúa este símbolo, en el período 1 respecto al período 0;

efectuando las valoraciones con los precios y costes del período 0, la productividad de la empresa en dicho período sería:

$$\bar{P}_0 = \frac{\sum_{j=1}^n p_j P_j}{\sum_{i=1}^m f_i F_i}$$

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

siendo la del período 1:

$$\bar{P}_1 = \frac{\sum_{j=1}^n p_j P_j (P_j + \Delta P_j)}{\sum_{i=1}^n f_i (F_i + \Delta F_i)}$$

El coeficiente que mide la relación entre ambas productividades en el Índice de Productividad Global:

$$IPG = \frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_0} = \frac{\sum_{j=1}^n p_j (P_j + \Delta P_j)}{\sum_{i=1}^n f_i (F_i + \Delta F_i)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n f_i F_i}{\sum_{j=1}^n p_j P_j}$$

La Tasa de Productividad Global mide la proporción de variación de la productividad entre los dos períodos:

$$TPG = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_0}{\bar{P}_0} = IPG - 1$$

El precio o coste unitario habrá de ser igual al cociente entre el valor en unidades monetarias y la cantidad de unidades físicas del producto o factor en cuestión. Así, en este caso:

$$f_A = \frac{1.000}{100} = 10 \text{ u.m./u.f.}$$

$$f_B = \frac{2.200}{110} = 20 \text{ u.m./u.f.}$$

$$f_C = \frac{6.000}{200} = 30 \text{ u.m./u.f.}$$

$$p_X = \frac{8.000}{200} = 40 \text{ u.m./u.f.}$$

$$p_Y = \frac{7.500}{250} = 30 \text{ u.m./u.f.}$$

TABLA 4.12

Raquetas fabricadas y vendidas anualmente (V)	Costes totales de la fábrica grande ($C_{Tg} = 1.000.000 + 2.000V$)	Coste total unitario de la fábrica grande (C_{Tg}/V)	Costes totales de la fábrica pequeña ($C_{Tp} = 250.000 + 2.500V$)	Coste total unitario de la fábrica pequeña (C_{Tp}/V)
1.000	3.000.000	3.000	2.750.000	2.750
1.250	3.500.000	2.800	3.375.000	2.700
1.500	4.000.000	2.666,67	4.000.000	2.666,67
1.750	4.500.000	2.571,43	4.625.000	2.642,86
2.000	5.000.000	2.500	5.250.000	2.625

Problema
 20
Métodos estáticos. Comparación de costes

Una empresa fabricante de productos de arcilla va a instalar una planta industrial en una zona geográfica en la que no operaba anteriormente y en la que, según los estudios mercadotécnicos realizados, podrá vender anualmente 10.000 unidades físicas (u.f.) de ladrillo tipo A, 15.000 u.f. de ladrillo tipo B y 5.000 u.f. de tejas. Las tres posibilidades de inversión existentes, así como los costes fijos y variables que requieren, se recogen en la tabla 4.13.

TABLA 4.13

Posibilidades de inversión	Costes fijos anuales	Costes variables unitarios		
		Ladrillo A	Ladrillo B	Teja
Planta grande (G)	10.000.000 u.m.	1.000 u.m.	750 u.m.	1.100 u.m.
Planta mediana (M)	7.000.000 u.m.	1.050 u.m.	800 u.m.	1.150 u.m.
Planta pequeña (P)	5.000.000 u.m.	1.200 u.m.	850 u.m.	1.200 u.m.

¿Qué alternativa es preferible según el método de comparación de costes?

RESOLUCIÓN

Para tales volúmenes de ventas, los costes totales de cada una de las posibilidades son:

$$C_{TG} = 10.000.000 + 10.000 \times 1.000 + 15.000 \times 750 + 5.000 \times 1.100 = 36.750.000 \text{ u.m. anuales}$$

$$C_{TM} = 7.000.000 + 10.000 \times 1.050 + 15.000 \times 800 + 5.000 \times 1.150 = 35.250.000 \text{ u.m. anuales}$$

$$C_{TP} = 5.000.000 + 10.000 \times 1.200 + 15.000 \times 850 + 5.000 \times 1.200 = \\ = 35.750.000 \text{ u.m. anuales}$$

La alternativa preferible es, por consiguiente, la inversión en planta mediana, a la que le corresponden los costes totales más bajos.

**Problema
21**

Métodos estáticos. Comparación de costes

La empresa del problema anterior tiene certeza en relación a las ventas anuales de ladrillos, pero, en cuanto a la de tejas, existe alguna incertidumbre, dado que sus ventas dependen del estilo de la construcción que se vaya a realizar en la zona. ¿Para qué volúmenes de ventas de tejas se alteraría la decisión de inversión a la que se llegó anteriormente?

RESOLUCIÓN

El volumen de ventas de tejas para el cual resulta indiferente invertir en la planta mediana o en la grande será el valor de V_1 , que cumple:

$$C_{TG} = 10.000.000 + 10.000 \times 1.000 + 15.000 [3750 + V_1 \times 1.100] = \\ = 7.000.000 + 10.000 \times 1.050 + 15.000 \times 800 + V_1 \times 1.150 = C_{TM}$$

Es decir:

$$C_{TG} = 31.250.000 + V_1 \times 1.100 = 29.500.000 + V_1 \times 1.150 = C_{TM}$$

de donde se deduce que

$$V_1 = 35.000 \text{ u.f. anuales}$$

Para este volumen de ventas, $C_{TG} = C_{TM} = 69.750.000$.

Para un volumen superior, puede comprobarse que es preferible invertir en la planta grande. Para ventas inferiores es preferible la mediana.

De forma semejante, el volumen de ventas de tejas para el cual resulta indiferente invertir en planta pequeña o en mediana será el V_2 , que cumple:

$$C_{TM} = 7.000.000 + 10.000 \times 1.050 + 15.000 \times 800 + V_2 \times 1.150 = \\ = 5.000.000 + 10.000 \times 1.200 + 15.000 \times 850 + V_2 \times 1.200 = C_{TP}$$

simbología del problema anterior, el índice de la evolución de la producción entre los dos períodos sería:

$$IL_p = \frac{\sum_{j=1}^n p_j (P_j + \Delta P_j)}{\sum_{j=1}^n p_j P_j}$$

Por consiguiente, se obtiene:

— Para la división I, en la que se elaboran los productos X, Y y Z:

$$IL_{p,I} = \frac{200 \cdot 11.000 + 100 \cdot 20.000 + 150 \cdot 12.000}{200 \cdot 10.000 + 100 \cdot 15.000 + 150 \cdot 10.000} = \frac{6.000.000}{5.000.000} = 1,2 = 120 \text{ por } 100$$

— Para la división II, en la que se fabrican los productos U, V y W:

$$IL_{p,II} = \frac{120 \cdot 9.000 + 110 \cdot 18.000 + 100 \cdot 9.000}{120 \cdot 9.000 + 110 \cdot 20.000 + 100 \cdot 10.000} = \frac{3.960.000}{4.280.000} = 92,52 \text{ por } 100$$

— Para la empresa en su conjunto:

$$IL_{p,G} = \frac{6.000.000 + 3.960.000}{5.000.000 + 4.280.000} = 1,0733 = 107,33 \text{ por } 100$$

La relación entre la producción del año 1 y la del año 0 es de un 120 por 100 en la división I, de un 92,52 por 100 en la división II y de un 107,33 por 100 para la empresa en su conjunto.

b) De forma semejante, el índice de la evolución de los factores empleados entre los dos períodos será:

$$IL_f = \frac{\sum_{i=1}^m f_i (F_i + \Delta F_i)}{\sum_{i=1}^m f_i F_i}$$

Por tanto, se obtiene:

— Para la división I, en la que se utilizan los factores A, B y C:

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

$$IL_{F,I} = \frac{100 \cdot 1.000 + 120 \cdot 2.050 + 50 \cdot 4.500}{100 \cdot 1.000 + 120 \cdot 2.000 + 50 \cdot 5.000} = \frac{581.000}{590.000} = 0,9847 = 98,47 \text{ por } 100$$

— Para la división II, en la que se emplean los factores D , E y F :

$$IL_{F,II} = \frac{70 \cdot 1.000 + 60 \cdot 1.450 + 200 \cdot 1.200}{70 \cdot 800 + 60 \cdot 1.400 + 200 \cdot 90} = \frac{397.000}{158.000} = 2,5127 = 251,27 \text{ por } 100$$

— Para la empresa en general:

$$IL_{F,G} = \frac{581.000 + 397.000}{590.000 + 158.000} = 1,3075 = 130,75 \text{ por } 100$$

La relación entre los factores utilizados en el año 1 y los empleados en el año 0 es de un 98,47 por 100 en la división I, de un 251,27 por 100 en la división II y de un 130,75 por 100 en la empresa en su conjunto.

c) A la vista de los resultados obtenidos hasta el momento, puede concluirse que la evolución de la producción fue favorable en la división I y en la empresa en su conjunto, siendo desfavorable en la división II. En cuanto a la evolución de los factores aplicados para obtener estos resultados, también fue favorable en la división I, siendo desfavorable en la II y en la empresa en general. En el conjunto de la empresa, la producción del año 1 representa un 107,33 por 100 respecto a la del año 0, mientras que los factores empleados en el último año suponen un 130,75 por 100 de los utilizados en el pasado año. Por consiguiente, la evolución general de la productividad ha sido negativa. Pero, para cuantificarla y explicar cómo han influido las dos divisiones en la misma, adviértase que, según la expresión del IPG del problema anterior y las que, en éste, se han señalado para el IL_p y el IL_F , se deduce que:

$$IPG = \frac{IL_p}{IL_F}$$

Por tanto:

$$IPG_I = \frac{1,2}{0,9847} = 1,2186 = 121,86 \text{ por } 100$$

$$IPG_{II} = \frac{0,9252}{2,5127} = 0,3682 = 36,82 \text{ por } 100$$

$$IPG_G = \frac{1,0733}{1,3075} = 0,8209 = 82,09 \text{ por } 100$$

La productividad global de la empresa en el año que ahora termina representa un 82,09 por 100 respecto a la del pasado año, debido a la desfavorable evolución de la división II que no fue cubierta por la favorable evolución observada en la división I.

d) Conforme se expuso en el problema anterior, la tasa de productividad global es igual a:

$$TPG = IPG - 1$$

Por consiguiente:

$$TPG_I = 1,2186 - 1 = 0,2186 = 21,86 \text{ por } 100$$

$$TPG_{II} = 0,3682 - 1 = -0,6318 = -63,18 \text{ por } 100$$

$$TPG_G = 0,8209 - 1 = -0,1791 = -17,91 \text{ por } 100$$

Dada la desfavorable evolución experimentada en la división II, cuya productividad se redujo en un 63,18 por 100, la productividad general de la empresa disminuyó en un 17,91 por 100, a pesar de la favorable evolución de la productividad en la división I, que aumentó un 21,86 por 100 entre los dos períodos anuales.

**Problema
11**

La medida de la productividad

En una empresa, según los índices de Laspeyres, su producción ha aumentado un 15 por 100 y ha utilizado un 10 por 100 menos de factores. ¿En qué porcentaje se ha modificado su productividad global?

RESOLUCIÓN

$$IL_p = 1 + 0,15 = 1,15$$

$$IL_f = 1 - 0,10 = 0,9$$

$$IPG = \frac{IL_p}{IL_f} = \frac{1,15}{0,9} = 1,2778$$

$$TPG = IPG - 1 = 1,2778 - 1 = 0,2778 \text{ por } 1 = 27,78 \text{ por } 100$$

La productividad ha aumentado un 27,78 por 100.

Problema
12

La medida de la productividad

Si la tasa de productividad global de una empresa ha sido el 30 por 100 y su índice de evolución de los factores empleados de Laspeyres ha valido 95 por 100, ¿cuánto ha valido su índice de evolución de la producción de Laspeyres?

RESOLUCIÓN

$$IPG = TPG + 1 = 0,30 + 1 = 1,3$$

$$IPG = \frac{IL_p}{IL_f} = \frac{IL_p}{0,95} = 1,3$$

de donde se deduce que:

$$IL_p = 1,3 \cdot 0,95 = 1,235 \text{ por } 1 = 123,5 \text{ por } 100$$

Problema
13

La medida de la productividad

En una empresa, la productividad global ha subido un 20 por 100 y, según el índice de Laspeyres, su producción se ha reducido un 20 por 100. ¿En qué porcentaje se ha modificado la cantidad de factores que ha utilizado, según ese índice?

RESOLUCIÓN

$$IPG = TPG + 1 = 0,20 + 1 = 1,2$$

$$IPG = \frac{IL_p}{IL_f} = \frac{0,8}{IL_f} = 1,2$$

de donde se deduce que:

$$IL_f = \frac{0,8}{1,2} = 0,6667 \text{ por } 1 = 66,67 \text{ por } 100$$

Por tanto, la cantidad de factores que ha utilizado se ha reducido en un 33,33 por 100:

$$0,6667 - 1 = -0,3333 \text{ por } 1 = -33,33 \text{ por } 100$$

7.4. LOS BIENES DE EQUIPO

Problema 14

Los bienes de equipo. Selección

Papuned, S. A., es una empresa productora y distribuidora de distintos tipos de papel de diversos usos. Su departamento de investigación y desarrollo ha presentado a la dirección, y ésta ha aceptado, un proyecto de papel de triple capa, cuya denominación provisional es la marca Triplehigien, para cuya fabricación puede elegirse entre los equipos de producción A y B, cuyas características más relevantes se recogen en la tabla 7.5.

TABLA 7.5

Equipo	Desembolso inicial (u.m.)	Flujo de caja anual (u.m.)	Duración (años)
A	10	11	3
B	15	14	4

El coste del capital es del 8 por 100 y se desea saber qué equipo de producción es preferible suponiendo que la vida de la nueva marca es ilimitada y aplicando el criterio del valor actual neto.

RESOLUCIÓN

Si con el final de la vida del equipo finalizara la fabricación del papel, podría considerarse adecuado un criterio basado en la elección del equipo que tuviese el mayor VAN o la TIR más elevada. Pero, dado que el producto tiene una vida ilimitada, si se elige el equipo A, al cabo de los 3 años habría que comprar otro equipo para continuar la producción, abonando las 10 u.m., que tiene como desembolso inicial, y la misma operación habría que efectuar a los 6 años, a los 9 años, etc., con lo que el VAN de toda la cadena de renovaciones, VANC, valdría:

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

$$VAN_{CA} = -10 + \frac{11}{1,08} + \frac{11}{1,08^2} + \frac{11}{1,08^3} - \frac{10}{1,08^3} + \frac{11}{1,08^2} + \frac{11}{1,08^3} +$$

$$+ \frac{11}{1,08^6} - \frac{10}{1,08^6} + \dots$$

Dado que, en ausencia de renovaciones,

$$VAN_A = -10 + \frac{11}{1,08} + \frac{11}{1,08^2} + \frac{11}{1,08^3} = 18,3481 \text{ u.m.}$$

puede escribirse la siguiente expresión, deducida de las dos anteriores:

$$VAN_{CA} = VAN_A + \frac{VAN_A}{1,08^3} + \frac{VAN_A}{1,08^6} + \dots$$

o, lo que es lo mismo:

$$VAN_{CA} = VAN_A \left(1 + \frac{1}{1,08^3} + \frac{1}{1,08^6} + \dots \right) = VAN_A \frac{1}{1 - \frac{1}{1,08^3}} =$$

$$= VAN_A \frac{1,08^3}{1,08^3 - 1} = 18,3481 \frac{1,08^3}{1,08^3 - 1} = 89 \text{ u.m.}$$

En general, tratándose del equipo i , que dura n períodos, y siendo k el tipo de actualización (figura 7.5):

$$VAN_{Ci} = VAN_i \frac{(1+k)^n}{(1+k)^n - 1}$$

Así, en el caso del equipo B :

$$VAN_B = -15 + 14a_{\overline{4}|0,08} = -15 + 14 \frac{1 - (1 + 0,08)^{-4}}{0,08} = 31,3698 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{CB} = 31,3698 \frac{(1 + 0,08)^4}{(1 + 0,08)^4 - 1} = 118,39 \text{ u.m.}$$

Al tenerse en cuenta toda la cadena de renovaciones, resulta preferible el equipo B, cuyo valor actual neto (118,39 u.m.) es superior al del equipo A (89 u.m.).

Otra alternativa para la resolución del problema, que no precisa del supuesto de duración ilimitada del producto, es la basada en su planteamiento bajo una *base temporal homogénea* como puedan ser los 12 años, que es el mínimo común múltiplo de los años que dura el equipo A (3 años) y los que dura el equipo B (4 años). Con cuatro renovaciones del equipo A ($4 \cdot 3 = 12$ años) quedarían resueltas las necesidades de producción durante 12 años. Si se eligiera el equipo B, serían precisas tres renovaciones ($3 \cdot 4 = 12$ años). Basta observar la figura 7.5 para advertir que el valor actual neto correspondiente a 12 años de funcionamiento del equipo A es:

$$\begin{aligned} VANC_A &= 18,3481 \left(1 + \frac{1}{1,08^3} + \frac{1}{1,08^6} + \frac{1}{1,08^9} \right) = \\ &= 18,3481 \frac{1 - 1,08^{-9} \cdot 1,08^{-3}}{1 - 1,08^{-3}} = 53,65 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Del mismo modo, en cuanto al equipo B,

$$\begin{aligned} VANC_B &= 31,3698 \left(1 + \frac{1}{1,08^4} + \frac{1}{1,08^8} \right) = 31,3698 \frac{1 - (1,08)^{-8}(1,08)^{-4}}{1 - (1,08)^{-4}} = \\ &= 71,38 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

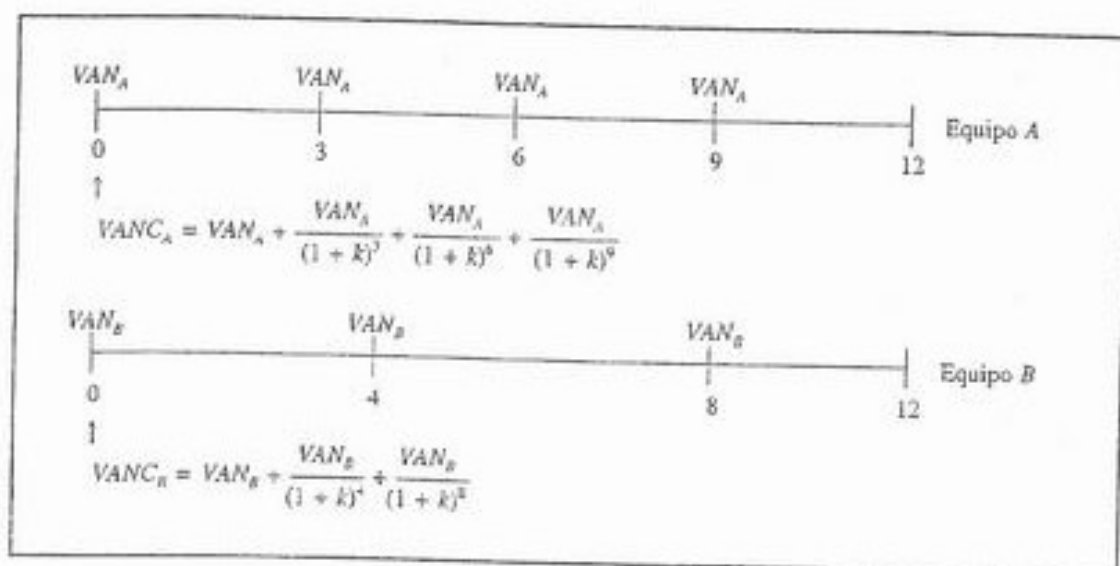


Figura 7.1.

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

Con lo cual, como es evidente, la decisión más conveniente es la misma a la que se llegó bajo el supuesto de duración ilimitada, es decir, la de elegir el equipo *B*.

Problema 15

Los bienes de equipo. Selección

La empresa Equiunedsa está modernizando las instalaciones de transporte interno de sus productos, para lo cual puede instalar un sistema de conducción en cadena (proyecto *C*) o unas furgonetas (proyecto *F*).

En la tabla 7.6 se recogen los flujos netos de caja esperados de ambos proyectos.

TABLA 7.6

Año	Proyecto C	Proyecto F
1	80	70
2	140	130
3	130	120
4	120	—
5	110	—
6	100	—

El desembolso inicial que precisa el proyecto *C* es de 400 u.m., siendo de 200 u.m. el requerido por el proyecto *F*. El tipo de descuento adecuado a este análisis es del 10 por 100. Se desea saber qué proyecto es preferible aplicando, para ello, los procedimientos siguientes:

- El del valor actual neto de una cadena de renovaciones ilimitada.
- El del valor actual neto de una cadena de renovaciones finita.
- El de la comparación de las rentas anuales equivalentes de los dos proyectos.

RESOLUCIÓN

- a) Según se expresó en la resolución del problema anterior:

$$\begin{aligned}VAN_C &= -400 + \frac{80}{1,10} + \frac{140}{1,10^2} + \frac{130}{1,10^3} + \frac{120}{1,10^4} + \frac{110}{1,10^5} + \frac{100}{1,10^6} = \\ &= 92,81 \text{ u.m.}\end{aligned}$$

$$VAN_C = VAN_C \frac{(1+k)^n}{(1+k)^n - 1} = 92,81 \frac{1,10^6}{1,10^6 - 1} = 213,10 \text{ u.m.}$$

$$VAN_F = -200 + \frac{70}{1,10} + \frac{130}{1,10^2} + \frac{120}{1,10^3} = 61,23 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{CF} = 61,26 \frac{1,10^3}{1,10^3 - 1} = 246,20 \text{ u.m.}$$

Es preferible el proyecto *F*.

b) El mínimo común múltiplo de las duraciones de los dos proyectos (6 años y 3 años) es 6 años. El VAN del proyecto *C* sobre esta duración común es $VAN_C = 92,81$ u.m., pues no es precisa ninguna renovación de este equipo. En cuanto al proyecto *F*, requeriría una renovación al final de los 3 años y, por tanto, el VAN de esta cadena será:

$$VAN_{CF} = 61,23 + \frac{61,23}{1,10^3} = 107,23 \text{ u.m.}$$

Lo cual muestra que es preferible el proyecto *F*.

c) La renta anual constante que es equivalente, en términos actuales, al equipo *C* es aquella que, teniendo su misma duración (6 años), produce el mismo valor actual neto (92,81 u.m.), es decir, aquella cuyo flujo de caja anual constante, Q'_C , es tal que:

$$\begin{aligned} VAN_C &= 92,81 = Q'_C a_{\overline{6}|0,10} \rightarrow \\ \rightarrow Q'_C &= \frac{92,81}{a_{\overline{6}|0,10}} = 92,81 \frac{0,10}{1 - 1,10^{-6}} = 21,31 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Del mismo modo, el flujo de caja anual constante que tiene el mismo VAN que el proyecto *F* es:

$$Q'_F = \frac{VAN_F}{a_{\overline{3}|0,10}} = 61,23 \frac{0,10}{1 - 1,10^{-3}} = 24,62 \text{ u.m.}$$

El proyecto *F* es equivalente a una renta de 24,62 u.m. anuales durante 3 años.

Suponiendo que al finalizar cada proyecto se van efectuando sucesivas renovaciones, estas rentas anuales equivalentes continuarán hasta el infinito, es decir, serán rentas perpetuas. Dado que es mejor una renta perpetua de 24,62 u.m. anuales que otra de 21,31 u.m. al año, es preferible invertir en el proyecto *F*.

**Problema
16**

Los bienes de equipo. Duración óptima

En la tabla 7.7 se recogen los flujos netos de caja esperados del equipo XRS y los valores en los que se podría vender este equipo en cada uno de los años (valores de retiro).

TABLA 7.7

Años	Flujos de caja	Valores de retiro
1	400	600
2	375	380
3	350	—

El desembolso inicial del equipo es de 960 u.m. ¿Cuál es su duración óptima si el tipo de descuento es el 10 por 100?

RESOLUCIÓN

Generalmente, los proyectos se analizan como si la empresa se comprometiera con ellos durante un cierto período. Sin embargo, en algunas ocasiones puede ser preferible retirar el proyecto antes de que finalice su duración potencial y esta posibilidad puede afectar al VAN y a la TIR del proyecto.

Si se mantiene el equipo hasta que ya no vale nada (3 años), se obtiene un VAN esperado igual a:

$$VAN_3 = -960 + \frac{400}{1,10} + \frac{375}{1,10^2} + \frac{350}{1,10^3} = -23,4 \text{ u.m.}$$

En tal caso, no se debe aceptar el equipo, pues su VAN es negativo.

Sin embargo, si se le retira al cabo de 2 años, se perciben los flujos de caja de esos 2 años y el valor de retiro al final del segundo año, con lo cual el VAN es de 27,6 u.m.:

$$VAN_2 = -960 + \frac{400}{1,10} + \frac{375}{1,10^2} + \frac{380}{1,10^2} = 27,6 \text{ u.m.}$$

Por tanto, si se piensa explotarlo durante 2 años y luego retirarlo, el proyecto es aceptable. Para completar el análisis, puede comprobarse que, si se le retira al cabo de un año, su VAN es de -51 u.m. Por tanto, la duración óptima

del proyecto es de 2 años. En realidad, ésta es la única duración para la cual el proyecto es efectuable.

Como regla general, cualquier proyecto ha de ser retirado cuando el valor en el que se le puede vender (valor de retiro) es superior al valor actual de todos los flujos de caja que restan, descontados al momento del retiro. Por ejemplo, si se acepta el proyecto y se le explota durante un año, el valor de retiro será 600 u.m., pero el valor actual al final del primer año de todos los flujos posteriores será:

$$\frac{375}{1,10} + \frac{350}{1,10^2} = 630,2 \text{ u.m.}$$

suponiendo que el proyecto continúa hasta el final del tercer año, y

$$\frac{375}{1,10} + \frac{380}{1,10} = 686,4 \text{ u.m.}$$

si se supone que el equipo se mantiene hasta el final del segundo año. Dado que el valor de retiro al final del primer año (lo que la empresa puede obtener vendiéndolo en el exterior) es inferior al valor actual, en ese momento, de los flujos de caja esperados (lo que vale, en términos actuales, lo que el equipo genera dentro de la empresa), bajo cualquiera de las dos alternativas de duración superiores, el proyecto no ha de ser retirado en ese momento.

Sin embargo, un análisis semejante efectuado para el final del segundo año muestra que el valor de retiro (380 u.m.) en ese momento es superior al valor descontado de los flujos de caja futuros, que es de 318,2 u.m.:

$$\frac{350}{1,10} = 318,2 \text{ u.m.}$$

Dado que, en ese momento, el valor que se obtiene vendiendo el equipo es superior al valor actual de los flujos de caja que generaría si no se le vende, ha de enajenarse.

En otros proyectos puede haber varios momentos, t , en los cuales el valor de retiro, V_t , sea superior al valor actual de los flujos restantes, VAR_t . En tal caso, el momento óptimo para el retiro es aquel en el cual es mayor el VAN en el momento 0 de la diferencia entre ambos, es decir, el importe:

$$\frac{1}{(1+k)^t} (V_t - VAR_t)$$

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

En efecto, el problema es determinar el valor de t para el cual es máximo el importe

$$\frac{Q_1}{1+k} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_t}{(1+k)^t} + \frac{V_t}{(1+k)^t}$$

Pero, para una duración de n años ($n \geq t$) el VAN del proyecto es:

$$\begin{aligned} VAN_n = & \frac{Q_1}{1+k} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{Q_t}{(1+k)^t} + \frac{Q_{t+1}}{(1+k)^{t+1}} + \dots + \\ & + \frac{Q_n}{(1+k)^n} + \frac{V_n}{(1+k)^n} \end{aligned}$$

Por consiguiente, se trata de determinar el valor de t para el cual es máximo el importe:

$$VAN_n + \frac{V_t}{(1+k)^t} - \frac{Q_{t+1}}{(1+k)^{t+1}} - \frac{Q_{t+2}}{(1+k)^{t+2}} - \dots - \frac{Q_n}{(1+k)^n} - \frac{V_n}{(1+k)^n}$$

El VAN_n será cierta cantidad que no depende de t , por lo cual lo que, en definitiva, se trata de maximizar es:

$$\begin{aligned} & \frac{V_t}{(1+k)^t} - \frac{Q_{t+1}}{(1+k)^{t+1}} - \frac{Q_{t+2}}{(1+k)^{t+2}} - \dots - \frac{Q_n}{(1+k)^n} - \frac{V_n}{(1+k)^n} = \\ & = \frac{1}{(1+k)^t} \left[V_t - \left(\frac{Q_{t+1}}{1+k} - \frac{Q_{t+2}}{(1+k)^2} - \dots - \frac{Q_n}{(1+k)^{n-t}} - \frac{V_n}{(1+k)^{n-t}} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{(1+k)^t} (V_t - VAR_t) \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado.

Problema 17

Los bienes de equipo. Selección

¿Cuál es la renta anual equivalente a un bien de equipo que requiere un desembolso inicial de 2.000 u.m. y que genera los siguientes flujos de caja: 700

el primer año, 1.300 el segundo y 1.200 el tercero. Tipo de descuento: 10 por 100.

RESOLUCIÓN

El valor actual neto del equipo vale 306,16 u.m.:

$$VAN = -2.000 + \frac{350}{1 + 0,1} + \frac{650}{(1 + 0,1)^2} + \frac{600}{(1 + 0,1)^3} = 306,16$$

Y su renta anual equivalente son 123,11 u.m.:

$$Q' = 306,16 \frac{0,1}{1 - 1,1^{-3}} = 123,11 \text{ u.m.}$$

Problema
18

Los bienes de equipo. Duración óptima

El desembolso inicial de un bien de equipo es de 50 u.m. y genera tres flujos de caja anuales: 35 el primer año, 50 el segundo y 6 el tercero. Si el tipo de descuento adecuado a este análisis es el 10 por 100, ¿cuánto vale la renta anual equivalente a este bien?

RESOLUCIÓN

El valor actual neto del equipo vale 27,65 u.m.:

$$VAN = -50 + \frac{35}{1 + 0,1} + \frac{50}{(1 + 0,1)^2} + \frac{6}{(1 + 0,1)^3} = 27,65$$

Y su renta anual equivalente son 11,12 u.m.:

$$Q' = 27,65 \frac{0,1}{1 - 1,1^{-3}} = 11,12 \text{ u.m.}$$

Problema
19

Los bienes de equipo. Duración óptima

En la tabla 7.8 se recogen los flujos de caja generados por el robot industrial XR-2010, utilizado por la Robotuned Corporation, Inc., así como sus valores de retiro, en los distintos años de su duración técnica.

TABLA 7.8

Años	Flujos de caja (u.m.)	Valores de retiro (u.m.)
1	210	300
2	180	190
3	180	120
4	130	—

El desembolso inicial del robot es de 500 u.m. Si el tipo de descuento adecuado a este análisis es el 10 por 100, ¿cuál es la duración económica óptima de este bien de equipo?

RESOLUCIÓN

De la forma expuesta en el problema anterior, se han calculado los valores actuales netos de este equipo, bajo los distintos supuestos de duración del mismo, que se recogen en la tabla 7.9.

TABLA 7.9

Duración (años)	VAN (u.m.)
1	-36,36
2	-3,30
3	65,06
4	63,70

La duración óptima es de tres años.

Otra forma de resolver el problema es calcular el valor actual de la diferencia entre el valor de retiro, V_r , correspondiente a cada momento y el valor de los flujos restantes referido a dicho momento, VAR_t , lo que se ha efectuado en la tabla 7.10 de la forma expuesta en el problema anterior y tomando para n el instante 4:

TABLA 7.10

t	$\frac{1}{(1+k)^t}$	V_t	VAR_t	$\frac{1}{(1+k)^t} (V_t - VAR_t)$
1	0,9091	300	410,07	-100,06
2	0,8264	190	271,07	-67,00
3	0,7513	120	118,18	1,37
4	0,6813	—	—	0

Con lo cual se llega a la misma conclusión: el momento en el que alcanza su máximo el valor actual de la diferencia entre lo que el mercado está dispuesto a pagar por el equipo y lo que éste vale para la empresa es el final del tercer año. Por tanto, la duración económica óptima del equipo es la de tres años.

**Problema
20**

Los bienes de equipo. Duración óptima

En la tabla 7.11 se recogen los valores de retiro (V_t) y el valor de los flujos restantes (VAR_t) de un equipo en los cuatro años de su duración técnica. ¿Cuál es su duración óptima si el tipo de descuento es el 10 por 100?

TABLA 7.11

Años (t)	V_t	VAR_t
1	150	205,035
2	95	135,535
3	60	59,090
4	0	0

RESOLUCIÓN

No hace falta hacer ningún cálculo para observar que la duración óptima es 3 años. Es la única duración para la que la diferencia entre V_t y VAR_t es mayor que cero. Por consiguiente, es la única para la cual también será mayor que cero el resultado de actualizar al momento 0 esa diferencia.

Problema
21

Los bienes de equipo. Duración óptima

Mapiunedita, S. A., cuenta, entre sus activos, con el equipo de producción TR7, que acaba de adquirir desembolsando 2.250.000 u.m. El TR7 es un equipo especialmente fabricado para esta empresa, que no sería útil para ninguna otra, por lo que sólo se le puede vender como chatarra en 250.000 u.m., cualquiera que sea el momento en el que se produzca su retiro. Según la empresa fabricante, el coste anual de mantenimiento del equipo es mayor a medida que éste envejece, pues requiere mayor gasto de entretenimiento y reparación, conforme a la tabla 7.12.

TABLA 7.12

Duración (años)	Coste medio anual de mantenimiento (u.m.)
1	25.000
2	25.000
3	25.500
4	27.000
5	28.500
6	31.000
7	36.000

Esta máquina, a la que se le aplica el método de amortización lineal (también llamado «de cuotas anuales constantes»), experimenta una «inferioridad de servicio», respecto al último modelo que podría utilizarse dados los avances tecnológicos, tanto mayor cuanto mayor sea el número de años transcurridos, de lo que se derivan unos costes de oportunidad anuales que, según se estima, se ajustan a la siguiente función lineal:

$$IS_t = 200.000t + 50.000$$

donde t es la variable tiempo (número de años que dura el bien de equipo). Se desea conocer la duración óptima de este equipo según el método MAPI del mínimo adverso, o método de Terborgh.

RESOLUCIÓN

Este bien de equipo comporta la existencia de dos tipos de costes:

- a) Costes que crecen con el paso del tiempo (el de mantenimiento y el de inferioridad de servicio).
- b) Costes que se reducen con el paso del tiempo. Los costes anuales por amortizaciones son tanto más pequeños cuanto mayor sea la duración del bien, pues la base amortizable total se reparte entre mayor número de años.

La duración óptima es aquella a la que le corresponde el mínimo coste total, y a este coste se le denomina *mínimo adverso*.

La depreciación del bien de equipo importa:

$$2.250.000 - 250.000 = 2.000.000 \text{ de u.m.}$$

Tal será, por tanto, la base amortizable, y la cuota de amortización anual valdrá

$$\frac{2.000.000}{t}$$

donde t es la duración del equipo. Así, si la máquina dura 2 años, la cuota de amortización anual será de 1.000.000 de u.m., siendo de 500.000 u.m. si dura 4 años, etc.

El coste de oportunidad por inferioridad de servicio se calcula, para cada duración, dando a t el valor correspondiente en la expresión de IS_t . Sumando, como se ha efectuado en la tabla 7.13, este coste, el de las amortizaciones y el de mantenimiento, se obtiene el coste anual total correspondiente a cada duración:

TABLA 7.13

Duración (años)	Amortización anual (u.m.)	Mantenimiento anual (u.m.)	Inferioridad de servicio anual (u.m.)	Coste anual total (u.m.)
1	2.000.000	25.000	250.000	2.275.000
2	1.000.000	25.000	450.000	1.475.000
3	666.666	25.500	650.000	1.342.166
4	500.000	27.000	850.000	1.377.000
5	400.000	28.500	1.050.000	1.478.500
6	333.333	31.000	1.250.000	1.614.333
7	285.714	36.000	1.450.000	1.771.714

El mínimo adverso es de 1.342.166 u.m. y la duración óptima es de 3 años.

Problema
22

Los bienes de equipo. Amortización

Mortizuned, S. A., ha adquirido recientemente el robot de limpieza de oficinas RBT25, pagando por él 400.000 u.m. La empresa fabricante del mismo se compromete a volver a comprarlo, al cabo de los cuatro años de su duración, por 50.000 u.m., que es, por consiguiente, su valor residual. Se desea conocer las cuotas de amortización anuales de este inmovilizado bajo los siguientes métodos de amortización:

- El método lineal o de cuotas fijas.
- El método de tanto fijo sobre una base amortizable decreciente.
- El método de los números dígitos crecientes.
- El método de los números dígitos decrecientes.

RESOLUCIÓN

a) El robot se deprecia, a lo largo de su duración, en un importe igual a la diferencia entre su valor inicial ($V_0 = 400.000$ u.m.) y su valor residual final ($V_r = 50.000$ u.m.). Por tanto, su *base amortizable*, que ha de amortizarse a lo largo de los cuatro años, es:

$$M = V_0 - V_r = 400.000 - 50.000 = 350.000 \text{ u.m.}$$

En el método lineal se amortiza la misma cantidad todos los años de la duración (n años) del bien. Por consiguiente, en este caso, la *cuota de amortización* anual, A , será:

$$A = \frac{M}{n} = \frac{350.000}{4} = 87.500 \text{ u.m.}$$

b) En el método del tanto fijo sobre una base amortizable decreciente todos los años se aplica una proporción de amortización constante, t , sobre la parte de V_0 que queda por amortizar. Por consiguiente, las cuotas de amortización de cada uno de los años serán las recogidas en la tabla 7.14.

Cada año, el tanto fijo de amortización se aplica a la diferencia entre el valor inicial del bien, V_0 , y las cuotas ya amortizadas los años anteriores. El total amortizado a lo largo de los n años que dura el bien será:

$$\begin{aligned} tV_0 + tV_0(1-t) + tV_0(1-t)^2 + \dots + tV_0(1-t)^{n-1} &= \\ = tV_0[1 + (1-t) + (1-t)^2 + \dots + (1-t)^{n-1}] \end{aligned}$$

TABLA 7.14

Año (<i>i</i>)	Cuotas de amortización (A_i)
Primero	$A_1 = iV_0$
Segundo	$A_2 = i(V_0 - iV_0) = iV_0(1 - i)$
Tercero	$A_3 = i[V_0 - iV_0 - iV_0(1 - i)] = iV_0(1 - i)^2$
Cuarto	$A_4 = i[V_0 - iV_0 - iV_0(1 - i) - iV_0(1 - i)^2] = iV_0(1 - i)^3$
...	...
n	$A_n = iV_0(1 - i)^{n-1}$

El importe situado entre corchetes es la suma de los términos de una progresión geométrica, cuyo primer término, T_1 , es 1, siendo $(1 - i)^{n-1}$ el último término, T_n . La razón, R , que multiplicando a cada término genera el siguiente vale $1 - i$. Como se sabe, la suma de los términos de una progresión geométrica es igual a:

$$\frac{T_1 - T_n R}{1 - R}$$

Así pues, el total amortizado a lo largo de los n años vale:

$$iV_0 \frac{1 - (1 - i)^n(1 - i)}{1 - (1 - i)} = V_0[1 - (1 - i)^n]$$

Pero en el conjunto de los n años ha de haberse amortizado totalmente la base amortizable $M = V_0 - V_r$. Por tanto:

$$V_0 - V_r = V_0[1 - (1 - i)^n]$$

de donde se deduce que el tanto que ha de aplicarse vale:

$$i = 1 - \left[\frac{V_r}{V_0} \right]^{1/n}$$

Obsérvese, además, que (según la tabla anterior) cada cuota es igual al resultado de multiplicar la anterior por $1 - i$. Así, en el caso planteado en este problema se obtienen los siguientes resultados:

$$i = 1 - \left(\frac{50.000}{400.000} \right)^{1/4} = 0,405396$$

$$1 - r = 0,594604$$

$$A_1 = 0,405396 \cdot 400.000 = 162.158,7 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 162.158,7 \cdot 0,594604 = 96.420,0 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = 96.420,0 \cdot 0,594604 = 57.331,7 \text{ u.m.}$$

$$A_4 = 57.331,7 \cdot 0,594604 = 34.089,6 \text{ u.m.}$$

Puede comprobarse que la suma de las cuatro cuotas anuales es igual a la base amortizable (350.000 u.m.). Obsérvese, además, que es un método de amortización acelerada (las amortizaciones son mayores los primeros años que los últimos).

c) En el método de los números dígitos crecientes, cada cuota de amortización es directamente proporcional a los años transcurridos desde la adquisición del bien. La cuota del primer año será directamente proporcional a 1, la del segundo a 2, la del tercero a 3, etc. La suma de los dígitos es igual a:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Por consiguiente, las sucesivas cuotas valdrán:

$$A_1 = \frac{2 \cdot 1}{n(n + 1)} M$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 2}{n(n + 1)} M = 2A_1$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{2 \cdot n}{n(n + 1)} M = \frac{2M}{n + 1} = nA_1$$

Así, en el presente caso:

$$n(n + 1) = 4(4 + 1) = 20$$

$$A_1 = \frac{2}{20} 350.000 = 35.000 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 35.000 \cdot 2 = 70.000 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = 35.000 \cdot 3 = 105.000 \text{ u.m.}$$

$$A_4 = 35.000 \cdot 4 = 140.000 \text{ u.m.}$$

Puede comprobarse que:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = M$$

En este método, las cuotas de amortización son crecientes.

d) El método de los números dígitos decrecientes es semejante al anterior, pero tomando la serie de los números naturales en sentido inverso. La primera cuota es directamente proporcional a n , la segunda a $n - 1$, la tercera a $n - 2$, ..., y la última es directamente proporcional a 1. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{2 \cdot n}{n(n+1)} M \\A_2 &= \frac{2 \cdot (n-1)}{n(n+1)} M \\&\vdots \\A_n &= \frac{2}{n(n+1)} M\end{aligned}$$

Es decir, una vez determinada A_n , las demás cuotas se calculan del siguiente modo:

$$\begin{aligned}A_1 &= nA_n \\A_2 &= (n-1)A_n \\A_3 &= (n-2)A_n \\&\vdots\end{aligned}$$

En este caso:

$$A_4 = \frac{2}{20} 350.000 = 35.000 \text{ u.m.}$$

$$A_1 = 4 \cdot 35.000 = 140.000 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 3 \cdot 35.000 = 105.000 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = 2 \cdot 35.000 = 70.000 \text{ u.m.}$$

Se trata de un método de amortización acelerada.

**Problema
23**

Los bienes de equipo. Amortización

Amoruned, S. A., acaba de construir un complejo valorado en 100.000 u.m., para la fabricación de pequeños submarinos de paseo. La duración estimada del complejo es de cuatro años, en cada uno de los cuales se espera fabricar y ven-

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

der 100, 300, 500 y 100 submarinos, respectivamente. Al final de los cuatro años se venderá el complejo en un valor residual estimado de 20.000 u.m. Se desea saber las cuotas de amortización anuales de este complejo bajo los diferentes métodos habitualmente empleados.

RESOLUCIÓN

$$M = V_0 - V_r = 100.000 - 20.000 = 80.000 \text{ u.m.}$$

— Método lineal:

$$A = \frac{M}{n} = \frac{80.000}{4} = 20.000 \text{ u.m. anuales}$$

— Método del tanto fijo sobre una base decreciente:

$$t = 1 - \left(\frac{V_r}{V_0} \right)^{1/n} = 1 - \left(\frac{20.000}{100.000} \right)^{1/4} = 0,331260$$

$$1 - t = 0,668740$$

$$A_1 = tV_0 = 0,331260 \cdot 100.000 = 33.126 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = A_1(1 - t) = 33.126 \cdot 0,668740 = 22.152,6 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = A_2(1 - t) = 22.152,6 \cdot 0,668740 = 14.814,4 \text{ u.m.}$$

$$A_4 = A_3(1 - t) = 14.814,4 \cdot 0,668740 = 9.907 \text{ u.m.}$$

— Método de los números dígitos crecientes:

$$n(n + 1) = 20$$

$$A_1 = \frac{2}{n(n + 1)} M = \frac{2}{20} 80.000 = 8.000 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 2A_1 = 2 \cdot 8.000 = 16.000 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = 3A_1 = 3 \cdot 8.000 = 24.000 \text{ u.m.}$$

$$A_4 = 4A_1 = 4 \cdot 8.000 = 32.000 \text{ u.m.}$$

— Método de los números dígitos decrecientes:

$$A_4 = \frac{2}{n(n + 1)} M = \frac{2}{20} 80.000 = 8.000 \text{ u.m.}$$

$$A_1 = nA_n = 4 \cdot 8.000 = 32.000 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = (n - 1)A_n = (4 - 1) \cdot 8.000 = 24.000 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = (n - 2)A_n = (4 - 2) \cdot 8.000 = 16.000 \text{ u.m.}$$

— Otro método es el que establece la amortización de cada año en función de la producción obtenida o de las unidades vendidas en el mismo. En este caso, la producción total, en los cuatro años, es igual a:

$$100 + 300 + 500 + 100 = 1.000 \text{ submarinos}$$

Por tanto, si las cuotas de cada año son directamente proporcionales a la producción y venta del mismo:

$$A_1 = \frac{100}{1.000} 80.000 = 8.000 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = \frac{300}{1.000} 80.000 = 24.000 \text{ u.m.}$$

$$A_3 = \frac{500}{1.000} 80.000 = 40.000 \text{ u.m.}$$

$$A_4 = \frac{100}{1.000} 80.000 = 8.000 \text{ u.m.}$$

Puede comprobarse que, en cualquiera de los métodos de amortización, se cumple que la base amortizable queda totalmente amortizada, es decir, que:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = M = 80.000 \text{ u.m.}$$

Problema
24

Los bienes de equipo. Amortización

Un bien de equipo tiene un valor inicial de 10.000 u.m. y un valor residual de 2.000. Si se le amortizara por el método de los números dígitos crecientes, la cuota del segundo año sería 1.600 u.m. ¿Cuál será la cuota del segundo año si se aplica el método del tanto fijo sobre una base decreciente?

La función productiva de la empresa y el proceso de producción

RESOLUCIÓN

En el método de los números dígitos crecientes la cuota del segundo año es:

$$A_2 = \frac{4}{n(n+1)} M$$

Por consiguiente:

$$\frac{4}{n(n+1)} (10.000 - 2.000) = 1.600$$

de donde se deduce que el bien de equipo dura cuatro años:

$$n = 4$$

Por consiguiente:

$$t = 1 - \left(\frac{V_r}{V_0} \right)^{1/n} = 1 - \left(\frac{2.000}{10.000} \right)^{1/4} = 0,331260$$

Al aplicar el método del tanto fijo, se obtiene:

$$A_1 = 0,331260 \cdot 10.000 = 3.312,6$$

$$A_2 = 3.312,6(1 - 0,331260) = 2.215,26$$

8

La capacidad de producción

8.1. LA CAPACIDAD DE LAS INSTALACIONES

Problema

1

La capacidad de las instalaciones

La empresa Musicaluned, S. A., va a instalar una fábrica de guitarras eléctricas en cierto país oriental. Según la dirección de marketing, la demanda anual sigue una distribución de probabilidad normal con un valor esperado de 2.500 guitarras (unidades físicas) y una desviación típica de 500 u.f. Los directivos de la empresa han decidido fijar como capacidad requerida (que coincidirá con la necesaria, al no haber una capacidad disponible previa) aquella para la cual la probabilidad de que quede sin utilizar un 15 por 100 o más de la capacidad de producción anual sea sólo de un 6 por 100. Se desea saber cuál es la capacidad requerida que cumple esa condición.

RESOLUCIÓN

Denominaremos q a la demanda anual y P a la capacidad de producción también anual.

Como es sabido, si q sigue una distribución normal, la variable:

$$y = \frac{q - 2.500}{500}$$

seguirá una distribución normal con esperanza matemática nula y desviación típica igual a la unidad. Se desea determinar el valor de P para el cual la probabilidad de que la demanda anual sea inferior al 85 por 100 de P es el 6 por 100; es decir:

$$P(q < 0,85P) = 0,06 \text{ por } 1$$

Operando, se obtienen las expresiones equivalentes siguientes:

$$P(500\gamma + 2.500 < 0,85P) = 0,06$$

$$P\left(\gamma < \frac{0,85P - 2.500}{500}\right) = 0,06$$

Definamos $-z$ del siguiente modo:

$$-z = \frac{0,85P - 2.500}{500}$$

A z se le ha asignado un valor negativo, pues tendrá que encontrarse a la izquierda del eje de la campana (a la izquierda del cero), dado que a su izquierda el área es 0,06, es decir, inferior a 0,5. Dicho de otro modo, el importe:

$$\frac{0,85P - 2.500}{500}$$

habrá de ser negativo.

Entonces, el primer paso será encontrar el valor de $-z$ tal que:

$$P(\gamma < -z) = 0,06$$

Como ya es bien sabido, esto es equivalente a determinar el valor de z para el cual la probabilidad de que la variable γ se encuentre entre 0 y $+z$ es 0,44. Consultando la tabla de la distribución normal estandarizada del apéndice de tablas estadísticas, se comprueba que $+z$ vale 1,56. Por tanto,

$$+z = -(-z) = -\frac{0,85P - 2.500}{500} = 1,56$$

De donde se deduce que la capacidad requerida es de 2.023 guitarras al año:

$$P = \frac{1,56 \cdot 500 - 2.500}{-0,85} = 2.023$$

Dado que los directivos de Musicaluned, S. A., lo único que pretenden evitar es tener una capacidad ociosa excesiva, han de establecer una capacidad requerida inferior a la demanda esperada (2.500 guitarras al año). En otras empresas prima el objetivo de que no quede demanda sin cubrir, o que no supere cierto límite la probabilidad de que no se pueda atender un porcentaje determinado de la demanda.

8.2. LA LOCALIZACIÓN DE LAS INSTALACIONES

Problema

2

La localización de las instalaciones

La empresa Localuned, S. A., se encuentra estudiando la localización de una nueva instalación independiente. Para ello, se consideran una serie de factores como:

- La rentabilidad, que, a su vez, depende del coste del terreno, local y equipo, del coste de la materia prima y otros materiales, del coste de la mano de obra, etc.
- Las garantías existentes de continuidad en el suministro de materias primas y otros materiales de producción.
- La disponibilidad de mano de obra con el nivel necesario de cualificación.
- Las relaciones laborales y sindicales y la conflictividad social.
- Las disposiciones y reglamentos de las entidades oficiales de la localidad.
- El nivel y la calidad de vida (clima, disponibilidad de viviendas y de servicios, como escuelas, lugares de recreo, etc.).

Estos factores se han numerado de 1 a 8 y se les ha ponderado. Las ponderaciones asignadas se recogen en la tabla 8.1.

TABLA 8.1

Factor	Ponderación
1	0,02
2	0,03
3	0,10
4	0,05
5	0,15
6	0,20
7	0,30
8	0,15

En cada una de ellas se ha asignado una puntuación de 0 a 10 a cada uno de los factores, según la medida en que tales efectos se cumplen en esa localidad. Los resultados son los recogidos en la tabla 8.2.

TABLA 8.2

Factor	Puntuación	
	Ciudad A	Ciudad B
1	0,1	5
2	1	4
3	2	5
4	1	4
5	7	6
6	9	5
7	5	6
8	7	5

Se desea saber qué localización es preferible según el modelo aditivo.

RESOLUCIÓN

Según el modelo aditivo, la puntuación de la localización j , T_j , es:

$$T_j = p_{1j} \cdot W_1 + p_{2j} \cdot W_2 + \dots + p_{mj} \cdot W_m$$

donde p_{ij} es el número de puntos asignados subjetivamente al factor i ($i = 1, 2, \dots, m$) en la localidad j según el nivel que se considera que alcanza dicho factor en esa localidad, W_i es la ponderación de ese factor i y m el número de factores considerados relevantes.

Así, en este caso, para la ciudad A se obtiene la siguiente puntuación:

$$T_A = 0,1 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,03 + 2 \cdot 0,10 + 1 \cdot 0,05 + 7 \cdot 0,15 + 9 \cdot 0,20 + 5 \cdot 0,30 + 7 \cdot 0,15 = 5,682 \text{ puntos}$$

En tanto que la puntuación de la ciudad B vale:

$$T_B = 5 \cdot 0,02 + 4 \cdot 0,03 + 5 \cdot 0,10 + 4 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,20 + 6 \cdot 0,30 + 5 \cdot 0,15 = 5,37 \text{ puntos}$$

Por ser mayor su puntuación, es preferible la localización en la ciudad A.

Problema

3

La localización de las instalaciones

¿Cuál sería la decisión de la empresa Localuned, S. A., del problema anterior, si aplica el modelo multiplicativo?

RESOLUCIÓN

Cuando se considera muy importante que la localidad elegida cumpla mínimamente en cada uno de los factores considerados, puede ser preferible el modelo multiplicativo siguiente:

$$T_j = p_{1j}^{w_1} \cdot p_{2j}^{w_2} \cdot \dots \cdot p_{nj}^{w_n}$$

En este segundo procedimiento, el que un único factor tenga poca puntuación hace que la puntuación global de la localización sea baja. Por tanto, da preferencia a aquellas alternativas que no tienen baja puntuación en ninguno de los factores.

Así, en cuanto a la ciudad A, el resultado es:

$$T_A = 0,1^{0,02} \cdot 1^{0,03} \cdot 2^{0,10} \cdot 1^{0,05} \cdot 7^{0,15} \cdot 9^{0,20} \cdot 5^{0,30} \cdot 7^{0,15} = 9,877 \text{ puntos}$$

En tanto que la puntuación de la ciudad B vale:

$$T_B = 5^{0,02} \cdot 4^{0,03} \cdot 5^{0,10} \cdot 4^{0,05} \cdot 6^{0,15} \cdot 5^{0,20} \cdot 6^{0,30} \cdot 5^{0,15} = 9,99 \text{ puntos}$$

Según este modelo es preferible la localización en la ciudad B.

Problema

4

La localización de las instalaciones

La empresa Distribuned, S. A., tiene dos almacenes: uno situado en la ciudad A y otro en la ciudad B. La dirección de la empresa estima que es necesario otro almacén y no sabe si situarlo en la ciudad P o en la ciudad Q. Desde los tres almacenes de los que, finalmente, disponga ha de servir a los mercados N, M y S. Evidentemente, la introducción de un nuevo almacén alterará las cantidades que actualmente se distribuyen desde los almacenes ya existentes, por lo que existe interdependencia entre las localizaciones. En la tabla 8.3 se refleja lo que cuesta transportar una unidad física de producto desde cada ciudad hasta cada mercado (en u.m.), así como la cantidad de unidades físicas requeridas mensualmente por cada uno de los mercados y las que ha de servir al mes cada almacén.

Se desea plantear el modelo de programación lineal que permite determinar qué localización es preferible si el objetivo es minimizar los costes totales de distribución.

TABLA 8.3

Almacenes	Mercados			u.f. a servir al mes
	N	M	S	
A	4	3	5	750
B	4	5	3	300
P	5	3	4	300
Q	5	4	3	300
u.f. precisas	750	400	200	

RESOLUCIÓN

Supongamos que el nuevo almacén se situara en la ciudad P. Denominando X_{ij} al número de unidades que debe servir cada mes el almacén i al mercado j , el modelo de programación lineal que permite determinar los valores de las X_{ij} que minimizan los costes totales de distribución es el siguiente:

Minimizar:

$$4X_{AN} + 3X_{AM} + 5X_{AS} + 4X_{BN} + 5X_{BM} + 3X_{BS} + 5X_{PN} + 3X_{PM} + 4X_{PS} \quad [1]$$

Con sujeción a las siguientes restricciones:

— Restricciones de servicio de los almacenes:

$$X_{AN} + X_{AM} + X_{AS} = 750$$

$$X_{BN} + X_{BM} + X_{BS} = 300$$

$$X_{PN} + X_{PM} + X_{PS} = 300$$

— Restricciones de necesidades de los mercados:

$$X_{AN} + X_{BN} + X_{PN} = 750$$

$$X_{AM} + X_{BM} + X_{PM} = 400$$

$$X_{AS} + X_{BS} + X_{PS} = 200$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_{ij} \geq 0 \quad \text{para todo } i \text{ y } j$$

Una vez resuelto el programa, es decir, una vez conocidos los valores óptimos de las variables, tales valores se introducen en la expresión del coste (expresión [1]), para determinar su valor en tales condiciones óptimas.

Supongamos ahora que el nuevo almacén se ubicara en la ciudad Q . En tal caso, el programa que permitiría determinar los valores de las variables que minimizan los costes totales de distribución sería el siguiente:

Minimizar:

$$4X_{AN} + 3X_{AM} + 5X_{AS} + 4X_{BN} + 5X_{BM} + 3X_{BS} + 5X_{QN} + 4X_{QM} + 3X_{QS} \quad [2]$$

Con sujeción a las siguientes restricciones:

— Restricciones de servicio de los almacenes:

$$X_{AN} + X_{AM} + X_{AS} = 750$$

$$X_{BN} + X_{BM} + X_{BS} = 300$$

$$X_{QN} + X_{QM} + X_{QS} = 300$$

— Restricciones de necesidades de los mercados:

$$X_{AN} + X_{BN} + X_{QN} = 750$$

$$X_{AM} + X_{BM} + X_{QM} = 400$$

$$X_{AS} + X_{BS} + X_{QS} = 200$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_{ij} \geq 0 \quad \text{para todo } i \text{ y } j$$

De la misma forma que en el caso de ubicación en la ciudad P , una vez resuelto el programa, es decir, una vez conocidos los valores óptimos de las variables, tales valores se introducen en la expresión del coste (expresión [2]), para determinar su valor en tales condiciones óptimas.

Dado que, cualquiera que sea la localización que se elija, se habrá de trabajar en condiciones óptimas, la mejor localización será aquella a la que, en tales condiciones, le corresponda el coste total más bajo.

8.3. LA PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN

Problema
5

Programación de la producción. Caso de maximización

La empresa Suruned, S. A., elabora los productos XADE y YULI. Cada unidad del primero contribuye en 12 u.m. al beneficio de la empresa. El segundo tiene una contribución unitaria de 9 u.m. Para elaborarlos, Suruned utiliza tres factores de producción. Las cantidades que, de cada uno de los factores, precisan cada uno de los productos, para elaborar una unidad física, se recogen en la tabla 8.4.

TABLA 8.4

Factor	Cantidad necesaria por unidad producida	
	XADE	YULI
I	1	1
II	3	0
III	4	2

Las cantidades máximas disponibles anualmente son 10 u.f. del factor I, 21 del II y 32 del III. Se desea determinar:

- Las cantidades que se deben fabricar cada año de cada uno de los productos para maximizar el beneficio de la empresa.
- El máximo beneficio que puede conseguirse con esas limitaciones.
- Las cantidades que se deben emplear de cada uno de los factores anualmente y las cantidades sobrantes.

RESOLUCIÓN

a) Si se elaboraran X unidades del producto XADE e Y unidades del producto YULI, el beneficio sería:

$$B = 12X + 9Y$$

Tal será, por consiguiente, la función a optimizar (maximizar, en este caso). En relación a las restricciones derivadas de las disponibilidades de factores, en

cuanto al primero, si se fabricaran tales cantidades de los productos, la cantidad de factor utilizada cada año sería: $1X + 1Y$ u.f. Dado que la cantidad anual máxima disponible es 10 u.f., la primera restricción será

$$X + Y \leq 10$$

De forma semejante, en cuanto al segundo factor, se tiene que:

$$3X \leq 21$$

y, en cuanto al tercero:

$$4X + 2Y \leq 32$$

La última restricción presente en los modelos de programación lineal es la de no negatividad: ni X ni Y pueden ser menores que cero; o se fabrica o no se fabrica, pero no tiene sentido económico el fabricar negativamente:

$$X, Y \geq 0$$

El programa es, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } B &= 12X + 9Y \\ X + Y &\leq 10 \\ 3X &\leq 21 \\ 4X + 2Y &\leq 32 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Existen diversos algoritmos de resolución que permiten determinar los valores de las variables X e Y que optimizan la función objetivo (en este caso, que maximizan el beneficio) cumpliéndose las restricciones. Como ya se sabe, cuando, como en este caso, solamente intervienen dos variables (X e Y), se puede resolver gráficamente. En la figura 8.1 se ha representado gráficamente el problema planteado. Lo primero que se hizo fue representar las rectas:

$$\begin{aligned} X + Y &= 10 \\ 3X &= 21 \\ 4X + 2Y &= 32 \end{aligned}$$

Se han tomado sólo los segmentos del primer cuadrante, pues X e Y han de ser no negativos y, por tanto, el punto (X^*, Y^*) , representativo de la solución óptima, ha de encontrarse en dicho cuadrante. Además, dado que ha de verificarse

$$X + Y \leq 10$$

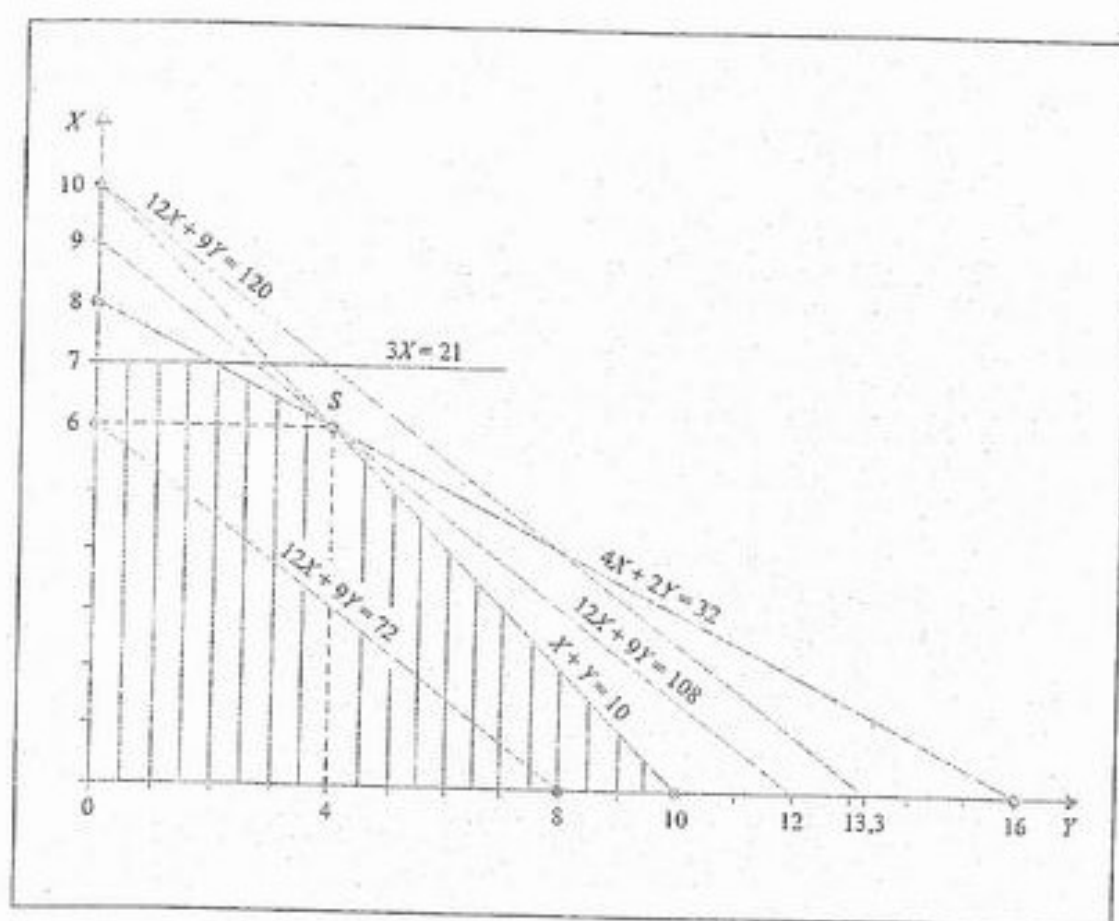


Figura 8.1.

la solución ha de encontrarse en la recta $X + Y = 10$, o por debajo de ella. De forma semejante, la solución ha de ser un punto situado en la recta $3X = 21$, o por debajo de la misma, y sobre la $4X + 2Y = 32$ o debajo de ella. Así se determina el área de las soluciones posibles, que será la zona rayada de la figura. Solamente los puntos (X, Y) que se encuentran dentro de esta área cumplen todas las restricciones; por tanto, sólo ellos representan soluciones posibles. Para determinar cuál representa la solución óptima, tomamos un valor cualquiera para B , por ejemplo $B = 120$, y representamos la recta correspondiente. Al tomar $B = 120$ se obtiene una recta que no tiene ningún punto dentro del área de soluciones posibles. Por tanto, no es posible alcanzar, cumpliéndose las restricciones, un beneficio de 120 u.m. Dando a B un valor inferior, por ejemplo, $B = 72$, se obtiene otra recta, que necesariamente ha de ser paralela a la anterior, cuyos puntos se encuentran dentro del área de las soluciones posibles. Cualquiera de ellos representa una solución posible, con la que se obtendría un beneficio de 72 u.m., pero ninguna de ellas es la solución óptima, pues cualquier punto de una paralela a esta recta situada más lejos del origen de coordenadas

representaría una solución mejor, dado que generaría un mayor beneficio. Trazando paralelas cada vez más alejadas del origen de coordenadas, llegamos a la recta $12X + 9Y = 108$. Este beneficio (108 u.m.) se puede obtener, pues el punto S , perteneciente a esta recta, se encuentra en el área de soluciones posibles (está en las rectas $4X + 2Y = 32$, y $X + Y = 10$, y bajo la recta $3X = 21$) y es, además, el máximo posible, pues cualquier recta situada por encima de ella representaría mayor beneficio, pero no tendría ningún punto situado en el área de soluciones posibles, y cualquier recta situada por debajo de ella, aunque tendría puntos situados en esa área, representaría un beneficio inferior.

Dado que el punto S se encuentra en dichas dos rectas, para determinar los valores de X e Y que le definen, es decir, para encontrar los valores óptimos de las variables, basta resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned}4X + 2Y &= 32 \\ X + Y &= 10\end{aligned}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned}X^* &= 6 \\ Y^* &= 4\end{aligned}$$

Por tanto, la solución óptima es fabricar, cada año, seis unidades físicas de XADE y 4 de YULI.

b) El máximo beneficio anual que puede conseguirse es, según se señaló anteriormente, 108 u.m.

$$B^* = 12X^* + 9Y^* = 12 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = 108 \text{ u.m.}$$

c) Del factor I se utilizarán anualmente

$$X^* + Y^* = 6 + 4 = 10 \text{ u.f.}$$

Por tanto, no sobrará nada de este factor.

En cuanto al factor II, se utilizarán:

$$3X^* = 3 \cdot 6 = 18 \text{ u.f.}$$

De este factor existe un exceso de 3 u.f. con relación al máximo disponible (21 u.f.).

En cuanto al factor III, se utilizarán:

$$4X^* + 2Y^* = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 32 \text{ u.f.}$$

y, por tanto, se emplearán todas las disponibilidades anuales.

Problema
6

Programación de la producción. Caso de maximización

Don Funedio es propietario de un telar en el que puede elaborar el tejido tipo I o el tipo II. Las necesidades de horas/máquina, por cada metro de tejido, son de 3 horas el primero y 4 el segundo. El tipo I requiere 2 horas/hombre por metro, y el tipo II precisa, también por cada metro, 6 horas/hombre. Además, dadas las limitaciones de la demanda, no se venderían más de 30 metros del tejido tipo I, cada quincena, por lo que no se desea superar ese nivel de producción. Se dispone de 120 horas/hombre y 120 horas/máquina cada 15 días y el margen de beneficio de cada metro de tejido es de 220 u.m. en el tipo I y de 140 u.m. en el tipo II. Se desea determinar:

- Los metros que deben elaborarse, cada 15 días, de cada tipo de tejido, para maximizar el beneficio de la empresa.
- El máximo beneficio quincenal que puede conseguirse.
- Las horas/máquina y las horas/hombre que han de utilizarse cada semana y las capacidades no empleadas de ambos tipos de recursos.

RESOLUCIÓN

a) Denominando X_1 a los metros fabricados del tejido tipo I, y X_2 a los elaborados del tipo II, el programa sería:

— Función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z = 220X_1 + 140X_2$$

— Restricciones de capacidad:

$$3X_1 + 4X_2 \leq 120$$

$$2X_1 + 6X_2 \leq 120$$

— Restricción derivada de la limitación de la demanda:

$$X_1 \leq 30$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

En la figura 8.2 se han representado las rectas que tienen como ecuaciones:

$$3X_1 + 4X_2 = 120$$

$$2X_1 + 6X_2 = 120$$

$$X_1 = 30$$

El área de soluciones posibles será la zona rayada de la figura, en la que también se ha dibujado la recta resultante al representar la función objetivo para un valor arbitrario de Z como puede ser 9.800, es decir, la recta que tiene por ecuación:

$$9.800 = 220X_1 + 140X_2$$

Trazando paralelas a esta recta más próximas al origen de coordenadas se observa que la primera que tiene un punto perteneciente al área de soluciones

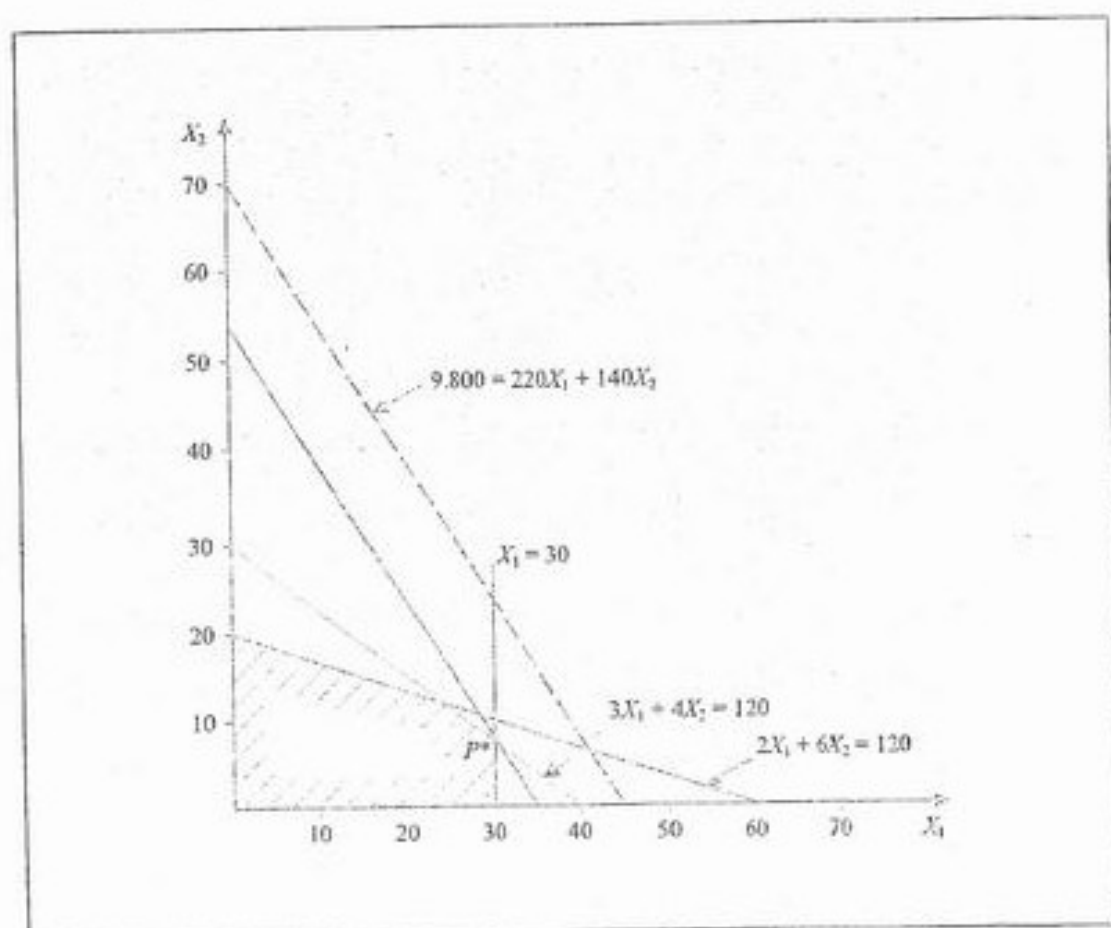


Figura 8.2.

posibles es la que pasa por el punto P^* , que tendrá como coordenadas las resultantes de resolver el sistema:

$$3X_1 + 4X_2 = 120$$

$$X_1 = 30$$

Es decir:

$$x_1^* = 30 \text{ metros}$$

y

$$x_2^* = 7,5 \text{ metros}$$

Por consiguiente, la solución óptima es fabricar 30 metros del tejido tipo I (el máximo que admite el mercado) y 7,5 metros del tejido tipo II, en cada quincena.

b) El máximo beneficio quincenal que puede obtenerse es el correspondiente a los valores óptimos de X_1 y X_2 , es decir:

$$Z^* = 220 \cdot 30 + 140 \cdot 7,5 = 7.650 \text{ u.m.}$$

c) El número de horas/máquina empleadas cada quincena será:

$$3 \cdot 30 + 4 \cdot 7,5 = 120 \text{ h/m}$$

es decir, todas las disponibles, sin que exista capacidad de este factor que no sea utilizada.

El número de horas/hombre utilizadas cada quincena será

$$2 \cdot 30 + 6 \cdot 7,5 = 105 \text{ h/h}$$

De lo cual se deduce que no se utilizarán $120 - 105 = 15$ h/h disponibles.

Problema
7

Programación de la producción. Caso de minimización

Unedespoj, S. A., es una empresa fabricante de un embutido elaborado con restos de carne de cerdo y de vaca. Los despojos de vaca contienen un 80 por

100 de carne y un 20 por 100 de grasa y cuestan 160 u.m. cada kg; los de cerdo contienen un 68 por 100 de carne y un 32 por 100 de grasa y cada kilogramo cuesta 120 u.m. Se desea determinar la cantidad que se debe emplear de cada tipo de despojo, por cada kilogramo de embutido, de forma que su coste de producción sea mínimo y que no se supere un contenido de grasa del 25 por 100.

RESOLUCIÓN

Denominando X_c y X_v a las cantidades de kilogramos de despojos de cerdo y de vaca, respectivamente, incluidos en cada kilogramo de embutido, el modelo será:

— Función objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = 160X_v + 120X_c$$

— Restricción de contenido de grasa:

$$0,20X_v + 0,32X_c \leq 0,25$$

— Restricción de cantidad (la cantidad de carne de vaca por kilogramo más la de cerdo por kilogramo han de totalizar el kilogramo de embutido):

$$X_v + X_c = 1$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_v, X_c \geq 0$$

En la figura 8.3 se han representado, en el primer cuadrante, las rectas correspondientes a las ecuaciones:

$$0,20X_v + 0,32X_c = 0,25 \quad (1)$$

$$X_v + X_c = 1 \quad (2)$$

El área de soluciones posibles es, en este caso, el segmento señalado con una línea gruesa en la figura.

Dando a Z un valor arbitrario, como 192, se obtiene la ecuación:

$$192 = 160X_v + 120X_c$$

a la que le corresponde la recta representada en la figura.

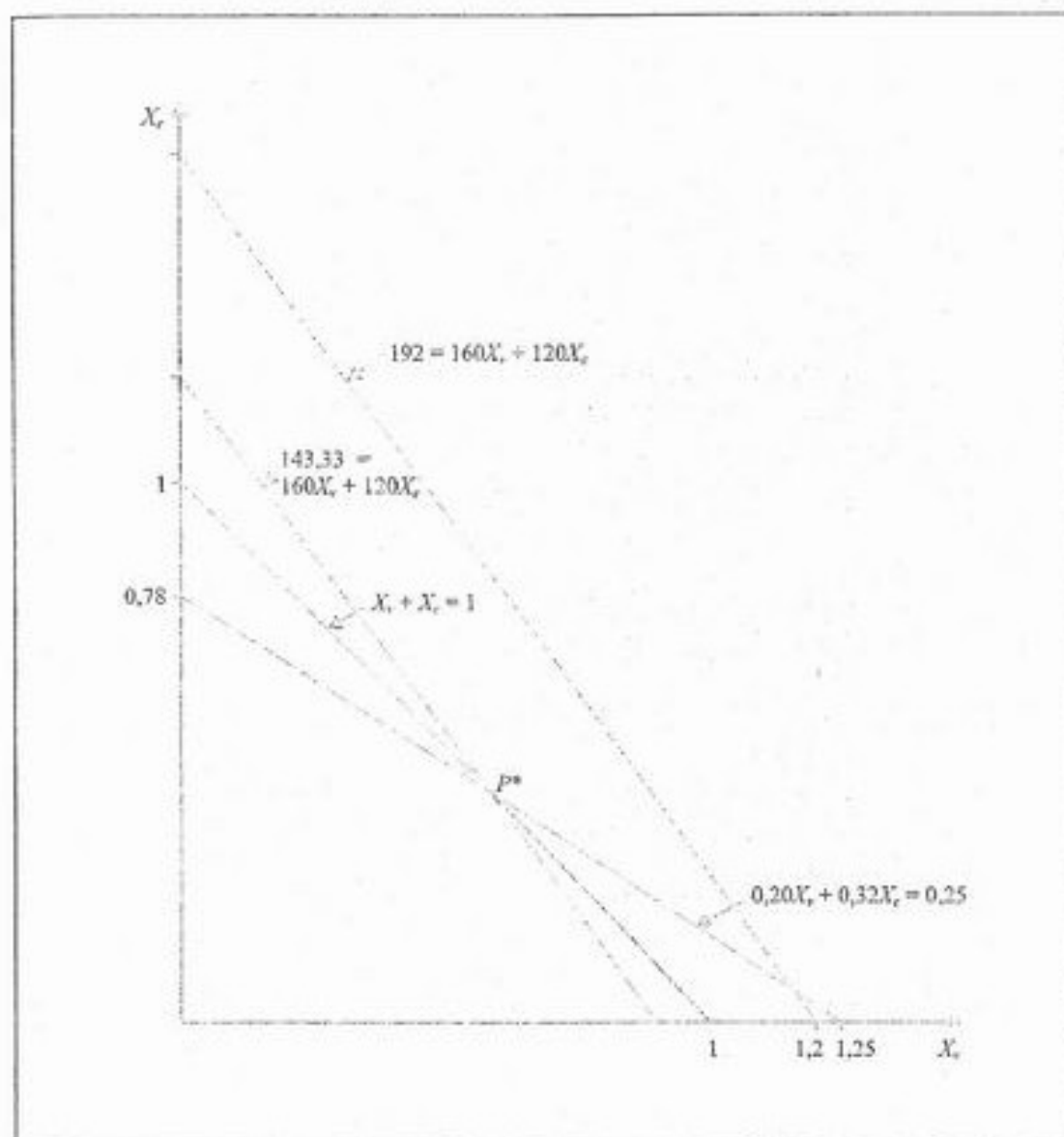


Figura 8.3.

La recta paralela a la anterior más próxima al origen de coordenadas que tiene algún punto situado en el segmento de soluciones posibles es la que pasa por el punto P^* , en el que se produce la intersección entre las rectas que tienen como ecuaciones la (1) y la (2). Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, se obtiene, como solución óptima:

$$X_v^* = \frac{7}{12} \text{ kg}$$

$$X_c^* = \frac{5}{12} \text{ kg}$$

El coste de cada kilogramo de embutido será:

$$160 \frac{7}{12} + 120 \frac{5}{12} = 143,33 \text{ u.m.}$$

**Problema
8**

Programación de la producción. Caso de maximización

Unedespoj, S. A., empresa a la que se refiere el caso anterior, ha cambiado de política. Ahora trata de maximizar la calidad de su embutido (medida por su contenido de carne) sin que su coste de producción supere las 150 u.m. cada kg. ¿Cuáles serán las cantidades óptimas de cada tipo de despojo incorporadas a cada kilogramo de embutido?

RESOLUCIÓN

El modelo será

— Función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z' = 0,80X_v + 0,68X_c$$

— Restricción de costes:

$$160X_v + 120X_c \leq 150$$

— Restricción de cantidad:

$$X_v + X_c = 1$$

— Restricciones de no negatividad:

$$X_v, X_c \geq 0$$

En la figura 8.4 se han representado, en el primer cuadrante, las ecuaciones:

TABLA 8.7

Operación	Operaciones precedentes
A	—
B	A
C	A
D	B
E	C
F	—
G	F
H	D, E
I	G
J	H, I

Por consiguiente, el camino crítico (aquel al que le corresponde la mayor duración) es el 1-2-3-5-8-9, que está integrado por las actividades A, B, D, H y J. Su duración es de 9 u.t.

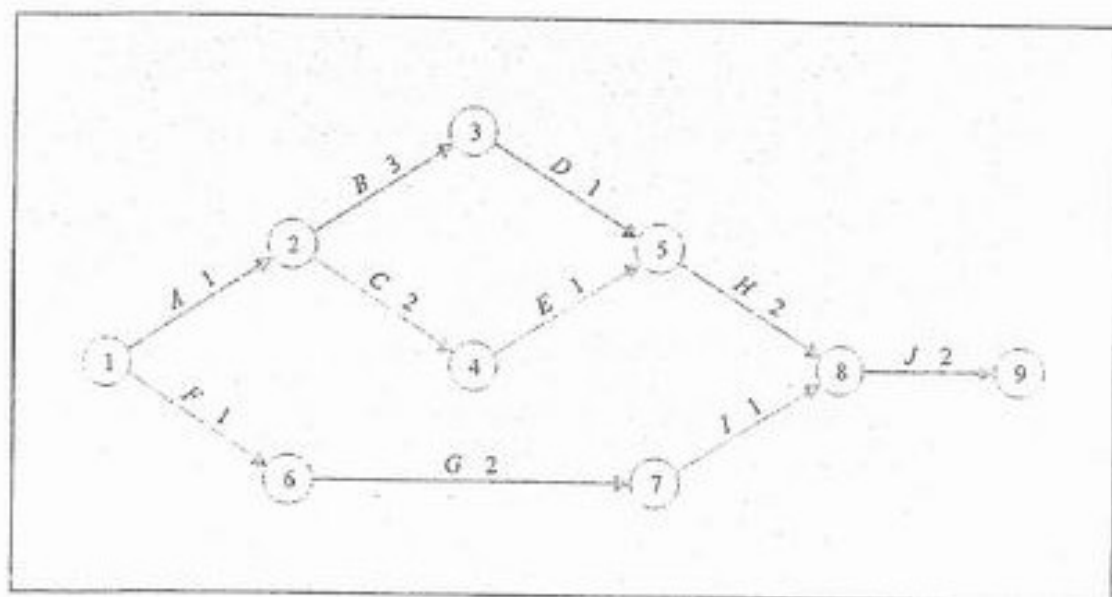


Figura 8.5.

d) y e) En las tablas 8.8 y 8.9 se recogen los tiempos *early* y *last* de los distintos nudos, así como sus oscilaciones y las holguras de las actividades.

TABLA 8.8

Nudo (i)	Tiempos		Oscilación (O_i)
	Early (E_i)	Last (L_i)	
1	0	0	0
2	1	1	0
3	4	4	0
4	3	4	1
5	5	5	0
6	1	4	3
7	3	6	3
8	7	7	0
9	9	9	0

TABLA 8.9

Operación	Nudo de origen (i)	Nudo de destino (j)	O_i	O_j	Holguras		
					$H_T = L_j - E_i - d_{ij}$	$H_L = H_T - O_j$	$H_i = H_L - O_i$
A	1	2	0	0	0	0	0
B	2	3	0	0	0	0	0
C	2	4	0	1	1	0	0
D	3	5	0	0	0	0	0
E	4	5	1	0	1	1	0
F	1	6	0	3	3	0	0
G	6	7	3	3	3	0	-3
H	5	8	0	0	0	0	0
I	7	8	3	0	3	3	0
J	8	9	0	0	0	0	0

f) El gráfico de Gantt correspondiente a este proceso de producción es el representado en la figura 8.6.

- I) Transportar el componente *R* al taller de ensamblaje.
 J) Ensamblar *ST* con *R* para obtener el producto final.

En la tabla 8.5 se recoge el tiempo mínimo necesario para efectuar cada operación (tiempo optimista), el que se considera normal (tiempo más probable) y el que se tardaría en el peor de los casos (tiempo pesimista), todos ellos en unidades de tiempo (u.t.).

TABLA 8.5

Operaciones	Tiempos (u.t.)		
	Pesimista	Más probable	Optimista
A	1,5	1	0,5
B	4	3	2
C	3	2	1
D	1,3	1,1	0,3
E	1,3	1,1	0,3
F	1,5	1	0,5
G	3	1,9	1,4
H	3	2	1
I	1,3	1,1	0,3
J	3	1,9	1,4

Se desea:

- Determinar la duración esperada de cada una de las actividades.
- Construir el grafo PERT de este proyecto.
- Determinar el camino crítico y su duración.
- Calcular los tiempos *early* y *last* de los distintos nudos, así como sus oscilaciones.
- Calcular las holguras de las distintas actividades.
- Representar el gráfico de Gantt del proceso de producción.

RESOLUCIÓN

- a) Denominando t_o al tiempo optimista de una actividad, t_m a su tiempo más probable y t_p a su tiempo pesimista, el denominado tiempo-PERT, o duración esperada de esta actividad, es la media ponderada:

$$d = \frac{t_o + 4t_m + t_p}{6}$$

Así, en este caso, se obtienen como duraciones esperadas las de la tabla 8.6. Por ejemplo, el tiempo-PERT de la actividad *A* vale:

$$\frac{1,5 + 4 \cdot 1 + 0,5}{6} = 1 \text{ u.t.}$$

y el de la *B* es:

$$\frac{4 + 4 \cdot 3 + 2}{6} = 3 \text{ u.t.}$$

TABLA 8.6

Operaciones	t_p	t_m	t_o	d
<i>A</i>	1,5	1	0,5	1
<i>B</i>	4	3	2	3
<i>C</i>	3	2	1	2
<i>D</i>	1,3	1,1	0,3	1
<i>E</i>	1,3	1,1	0,3	1
<i>F</i>	1,5	1	0,5	1
<i>G</i>	3	1,9	1,4	2
<i>H</i>	3	2	1	2
<i>I</i>	1,3	1,1	0,3	1
<i>J</i>	3	1,9	1,4	2

De la misma forma se han calculado las duraciones esperadas de las demás actividades.

b) Antes de construir el grafo PERT, conviene realizar la tabla de precedencias 8.7.

A esta tabla de precedencias, deducida de la información del enunciado, le corresponde el grafo PERT de la figura 8.5, en el que se han incorporado también las duraciones esperadas de las actividades.

c) Las duraciones de los caminos, según los tiempos-PERT de las actividades, son:

$$\text{Camino 1-2-3-5-8-9: } 1 + 3 + 1 + 2 + 2 = 9 \text{ u.t.}$$

$$\text{Camino 1-2-4-5-8-9: } 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8 \text{ u.t.}$$

$$\text{Camino 1-6-7-8-9: } 1 + 2 + 1 + 2 = 6 \text{ u.t.}$$

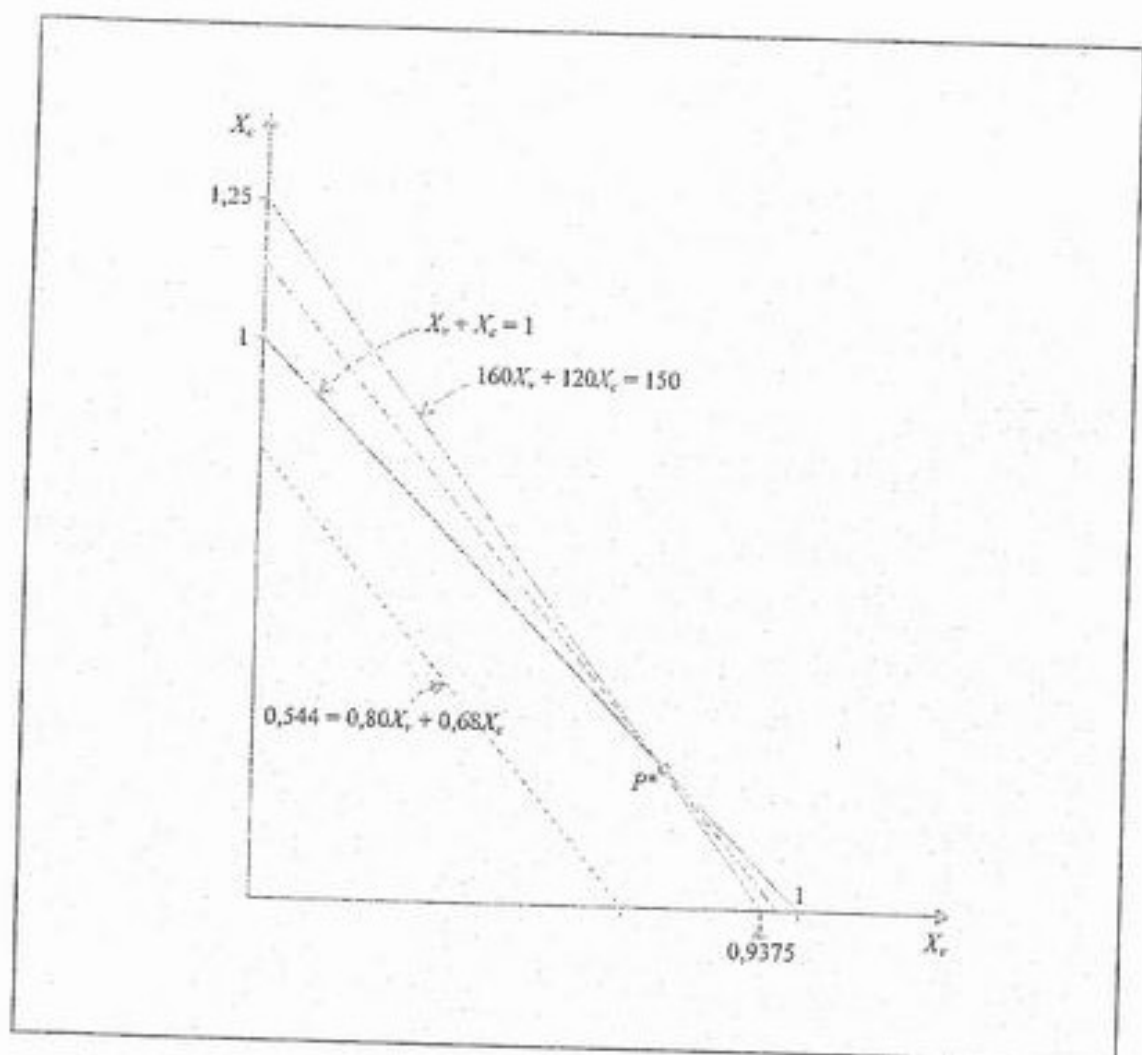


Figura 8.4.

$$160X_v + 120X_c = 150 \quad (1)$$

$$X_v + X_c = 1 \quad (2)$$

El área de soluciones posibles es el segmento señalado con una línea gruesa. Tomando, arbitrariamente, cualquier valor para Z' , como, por ejemplo, 0,544, se obtiene la ecuación

$$0,544 = 0,80X_v + 0,68X_c$$

que también se ha representado en la figura. La paralela a esta recta más alejada del origen de coordenadas que tiene algún punto en común con el área de soluciones posibles es la que pasa por el punto P^* , en el que se produce la in-

tersección entre las rectas que tienen por ecuaciones la (1) y la (2). Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$X_v^* = \frac{3}{4} \text{ kg}$$

$$X_c^* = \frac{1}{4} \text{ kg}$$

Bajo esta nueva política, cada kg de embutido ha de estar formado por 1/4 de kg de despojos de cerdo y 3/4 de kg de despojos de vaca. El coste de cada kg será de 150 u.m.:

$$160 \frac{3}{4} + 120 \frac{1}{4} = 150 \text{ u.m.}$$

y tendrá un 77 por 100 de carne y un 23 por 100 de grasa:

$$0,80 \frac{3}{4} + 0,68 \frac{1}{4} = 0,77 = 77 \text{ por } 100$$

8.4. LA PLANIFICACIÓN Y CONTROL DE LAS ACTIVIDADES PRODUCTIVAS

Problema 9

Planificación y control de las actividades productivas

Para elaborar cierto producto, la empresa Ensambluned, S. A., ha de realizar las siguientes operaciones:

- A) Recibir los materiales necesarios para elaborar los componentes *S* y *T* en el taller de fabricación.
- B) Fabricar el componente *S*.
- C) Fabricar el componente *T*.
- D) Transportar el componente *S* al taller de ensamblaje.
- E) Transportar el componente *T* al taller de ensamblaje.
- F) Recibir los materiales necesarios para elaborar el componente *R* en el taller de fabricación.
- G) Fabricar el componente *R*.
- H) Fabricar el componente *ST* (resultante de ensamblar *S* con *T*).

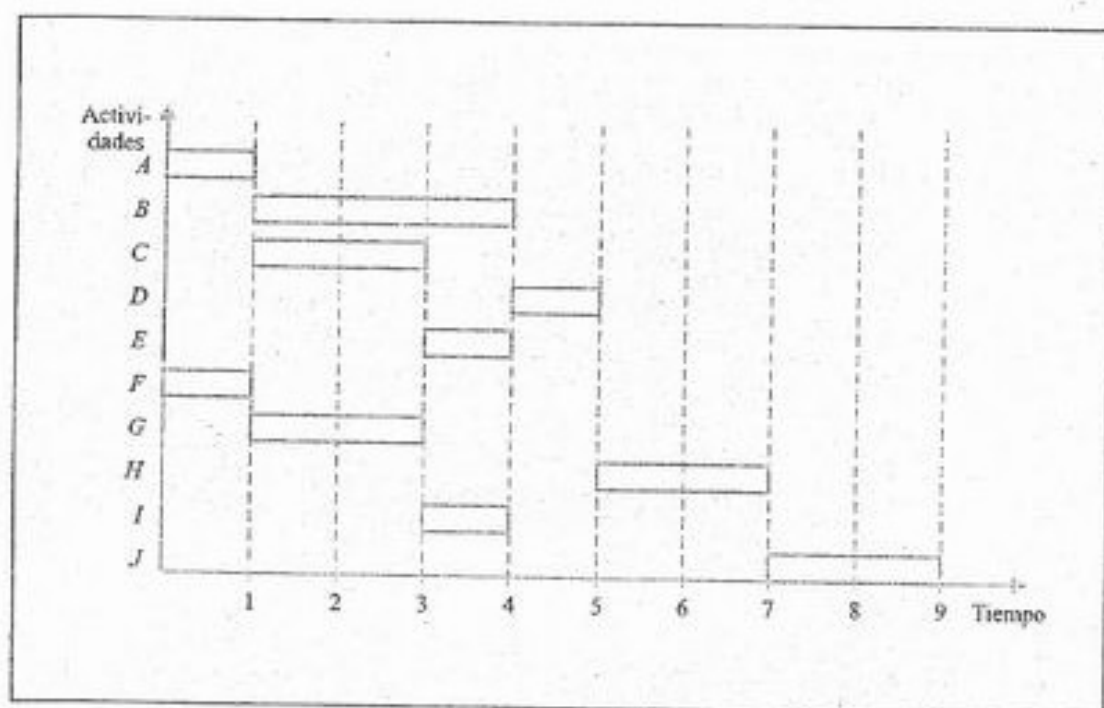


Figura 8.6.

**Problema
10**

Planificación y control de las actividades productivas

La empresa Consunedsa ha ganado un concurso público del Ayuntamiento de Coronalillo para construir un pantano que abastezca de agua al pueblo. Para realizar la obra, ha de llevar a cabo las siguientes actividades:

- A) Contratar personal local.
- B) Construir, con personal local, un camino de acceso a la zona en la que se va a construir el pantano.
- C) Montar, también con personal local, viviendas provisionales para el personal que ha de construirlo y almacenes para los materiales.
- D) Llevar los materiales de construcción y el personal de obra.
- E) Llevar e instalar la maquinaria de excavación con personal local.
- F) Con personal local, limpiar la zona.
- G) Realizar las excavaciones y efectuar la obra.
- H) Desviar el cauce del río Aljaralamiño, que ha de abastecer al pantano, con personal local.
- I) Dar la entrada de agua al pantano.

- J) Retirar el material y transportar al personal a su lugar de origen.
 K) Desmontar las viviendas y almacenes y retirarlos, con personal local.

Dados los medios técnicos y humanos disponibles, según la experiencia de la empresa los tiempos previstos para efectuar dichas actividades son los representados en la tabla 8.10 (u.t. = unidades de tiempo).

TABLA 8.10

Actividad	Tiempo (u.t.)	Actividad	Tiempo (u.t.)
A	2	G	100
B	30	H	30
C	10	I	2
D	2	J	4
E	10	K	3
F	50		

Tales actividades han de ser realizadas en un determinado orden. Por tanto, algunas de ellas dependen de la previa ejecución de otras. Así, no es posible montar las viviendas y almacenes sin antes construir el camino de acceso, ni llevar los materiales y el personal sin que antes se hayan montado aquéllos. Tampoco es posible instalar la maquinaria si no se cuenta con el personal, ni realizar las excavaciones si no está instalada la maquinaria y limpiada la zona, etc. Por tanto:

- La actividad A precede a la B, a la E, a la F y a la H.
- La B precede a la C y ésta a la D.
- La D, la E y la F preceden a la G.
- La G y la H preceden a la I.
- La I precede a la J, y ésta a la K.

Se desea:

- a) Construir el grafo PERT correspondiente a este proyecto.
- b) Determinar el camino crítico.
- c) Calcular los tiempos *early* y *last* de cada nudo y sus oscilaciones.
- d) Analizar las holguras o tiempos sobrantes.

RESOLUCIÓN

A partir de la información del enunciado, se ha construido la tabla de prelación 8.11.

TABLA 8.11

Actividades	Actividades precedentes	Actividades	Actividades precedentes
A	—	G	D, E, F
B	A	H	A
C	B	I	G, H
D	C	J	I
E	A	K	J
F	A		

Y, a su vez, a partir de esta tabla se ha construido el grafo PERT de la figura 8.7, sobre la cual se han incorporado las duraciones de las actividades, los tiempos *early* y *last*, las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades que no son críticas, efectuándose los cálculos de la forma habitual. La duración del camino crítico (marcado con trazo grueso) es de 161 u.t.

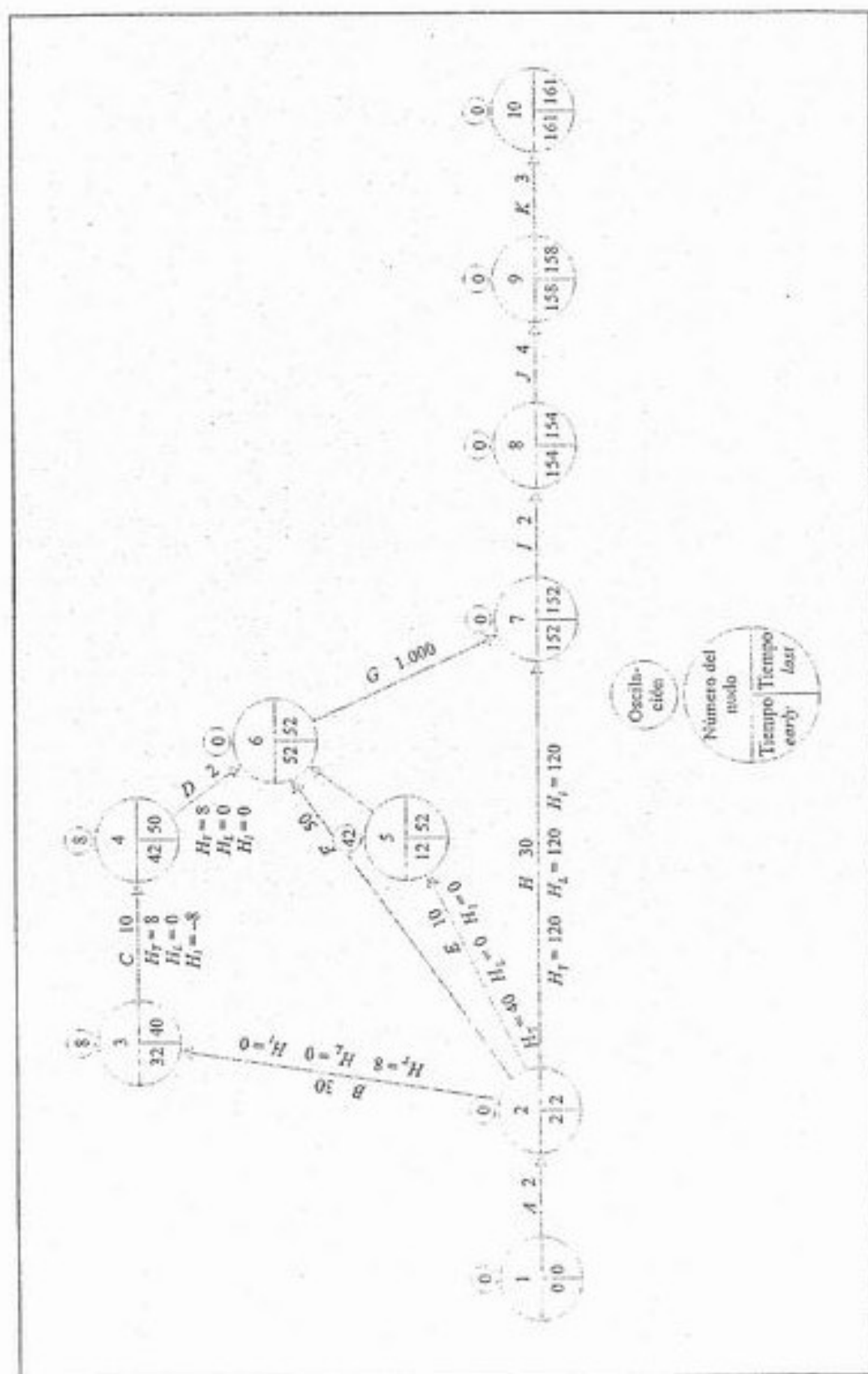
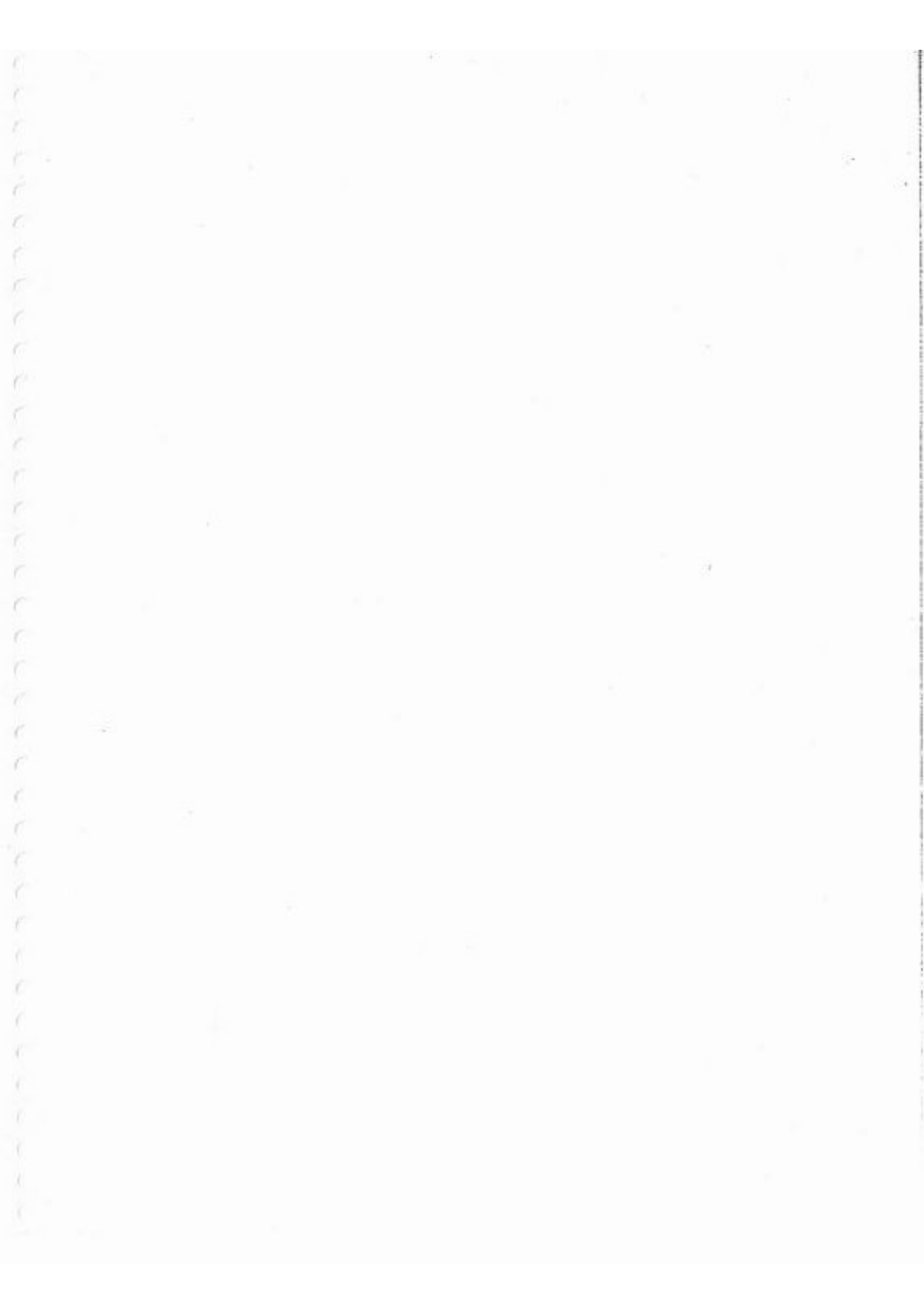


Figura 8.7.



9

Los inventarios

9.1. MODELOS DETERMINISTAS

Problema

1

Modelos deterministas

Gestunedinv, S. A., es una empresa dedicada a la distribución de electrodomésticos. Uno de los productos que adquiere y luego vende es la lavadora en seco Niusol, de la que anualmente distribuye cien unidades. El coste de tener una lavadora almacenada durante un año es de 20.000 u.m., en las que se incluye el coste financiero de la inmovilización de recursos. Con cada pedido de lavadoras que realiza al fabricante incurre en un coste de 10.000 u.m., independientemente del número de lavadoras que comprenda el pedido. Para evitar que un inesperado aumento de la demanda, o un retraso del fabricante en el servicio del pedido, produzcan una ruptura de stocks (es decir, una falta de productos en el almacén que detenga la actividad), se mantiene un inventario mínimo, o stock de seguridad, de 10 lavadoras. Se desea saber cuántas lavadoras se deben solicitar en cada pedido (el tamaño óptimo, o tamaño económico, del pedido), cuántos pedidos se deben efectuar al año, el número de días transcurridos entre dos pedidos, el nivel medio del almacén y el coste anual total del inventario.

RESOLUCIÓN

Suponiendo que el ritmo de salidas fuera constante, el nivel de un almacén evolucionaría de la forma representada en la figura 9.1, en la que S_s es el stock de seguridad, Q es el tamaño del pedido y \bar{S} es el nivel medio de existencia en el almacén. Como se puede observar en la figura:

y su remuneración total, también por cada tarea realizada, será:

$$S = s_0 t + P = s_0 t + I(T - t)$$

La diferencia entre unos y otros sistemas de remuneración por incentivos depende del valor que se le da a I . En este caso, la prima por tarea realizada vale:

$$P = 800 \cdot (12 - 10) = 1.600 \text{ u.m.}$$

y la remuneración total, también por cada tarea realizada, será:

$$S = 1.000 \cdot 10 + 1.600 = 11.600$$

En las 40 horas semanales realizará cuatro veces la tarea, por lo que la remuneración será:

$$4 \cdot 11.600 = 46.400$$

Si el trabajador realizara la tarea en el tiempo previsto correspondiente a un rendimiento normal, se tendría:

$$t = T = 12 \text{ horas}$$

$$P = I(T - t) = 0$$

$$S = s_0 t + P = 1.000 \cdot 12 = 12.000 \text{ u.m.}$$

Semanalmente realizaría la tarea 40/12 veces y su remuneración semanal sería:

$$\frac{40}{12} \cdot 12.000 = 40.000 \text{ u.m.}$$

Aunque la remuneración por tarea realizada es mayor si trabaja a ritmo normal, no ocurre así con la remuneración semanal, dado el mayor número de veces que puede realizar la tarea, cada semana, al trabajar a un ritmo superior.

**Problema
2**

Sistemas de remuneración por incentivos. El destajo

¿Cuál sería la remuneración, por tarea realizada, del trabajador del ejercicio anterior, si se le remunera a destajo? ¿Y su remuneración semanal?

RESOLUCIÓN

En la remuneración a destajo la tasa unitaria de incentivo es la propia tasa de remuneración del trabajo:

$$I = s_0$$

Con lo cual:

$$P = s_0(T - t)$$

$$S = s_0t + s_0(T - t) = s_0T$$

En este caso:

$$P = 1.000(12 - 10) = 2.000 \text{ u.m.}$$

$$S = 1.000 \cdot 12 = 12.000 \text{ u.m.}$$

La remuneración semanal será:

$$4 \cdot 12.000 = 48.000 \text{ u.m.}$$

Problema
3

Sistemas de remuneración por incentivos. El sistema Halsey

¿Cuál sería la remuneración por tarea realizada, y la remuneración semanal, del trabajador de los problemas anteriores, si se le aplica el sistema Halsey con un incentivo horario igual a la mitad de la remuneración del trabajo?

RESOLUCIÓN

En el sistema Halsey el ahorro de tiempo se remunera a una tasa unitaria que es la m -ésima parte de la que se aplica al tiempo de trabajo efectivo:

$$I = \frac{s_0}{m}$$

$$P = \frac{s_0}{m} (T - t)$$

El nivel medio del inventario será de 15 lavadoras:

$$\bar{S} = S_s + \frac{Q}{2} = 10 + \frac{10}{2} = 15 \text{ lavadoras}$$

El coste total del inventario valdrá:

$$C_T = k \frac{q}{Q} + g \left(S_s + \frac{Q}{2} \right) = 10.000 \cdot 10 + 20.000 \cdot 15 = 400.000 \text{ u.m. anuales}$$

**Problema
2**

Modelos deterministas

La Inventured Corporation, Inc., necesita anualmente un millón de unidades del componente XA2 para el montaje de robots domésticos de limpieza. Cada componente le cuesta 1.000 u.m. y, además, por cada pedido que efectúa ha de abonar 3.200 u.m. El coste de almacenamiento de un componente durante un año es de 300 u.m., excluyendo los costes financieros. El coste de oportunidad del capital invertido en stocks es del 10 por 100 anual. El stock de seguridad que mantiene la empresa es de 8.000 componentes. Se desea conocer:

- El tamaño óptimo del pedido.
- El nivel medio del almacén en unidades físicas.
- El número de pedidos que se debe efectuar al cabo del año.
- El coste anual de reaprovisionamientos.
- El coste anual de posesión del stock, o coste total de almacenamiento.
- El coste anual del inventario.

RESOLUCIÓN

a) Tener una unidad almacenada durante un año supone para la empresa dos tipos de costes:

- El coste de almacenamiento propiamente dicho ($a = 300$ u.m.).
- El coste del capital invertido en los stocks (es decir, el coste de su financiación). Si cada unidad física vale P u.m. y el coste anual de su financiación es i , el coste financiero unitario será de $P \cdot i$ u.m. al año.

Por consiguiente, el coste unitario total anual de almacenamiento vale, en este caso:

$$g = a + P \cdot i = 300 + 1.000 \cdot 0,10 = 400 \text{ u.m.}$$

Por tanto, el volumen económico del pedido es:

$$Q = \sqrt{\frac{2kq}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.200 \cdot 1.000.000}{400}} = 4.000 \text{ componentes}$$

b) Conforme se señaló en el problema anterior:

$$\bar{S} = S_s + \frac{Q}{2} = 8.000 + \frac{4.000}{2} = 10.000 \text{ componentes}$$

c) El número de pedidos al año será:

$$\frac{q}{Q} = \frac{1.000.000}{4.000} = 250 \text{ pedidos}$$

d) Si con cada pedido se incurre en un coste de 3.200 u.m. y se efectúan 250 pedidos al año, el coste anual de reaprovisionamiento será:

$$C_R = k \frac{q}{Q} = 3.200 \cdot 250 = 800.000 \text{ u.m.}$$

e) Conforme se explicó en la resolución del problema anterior:

$$C_P = g\bar{S} = 400 \cdot 10.000 = 4.000.000 \text{ u.m.}$$

f) Obviamente, el coste anual es:

$$C_T = C_R + C_P = 800.000 + 4.000.000 = 4.800.000 \text{ u.m.}$$

Problema 3

Modelos deterministas

La empresa Lunedesa se dedica a la compraventa de lanchas voladoras. Cada año compra en el extranjero y vende en la costa española 400 lanchas. El coste de gestión de cada pedido es de 195.312,5 u.m., y el coste de tener una lancha almacenada durante un año es de 250.000 u.m. ¿Cuál es el volumen óptimo de pedido?

Obteniéndose finalmente:

$$S = s_0 t + s_0 T = s_0(t + T)$$

En este caso:

$$P = s_0 \cdot T = 1.000 \cdot 12 = 12.000 \text{ u.m.}$$

$$S = s_0 \cdot t + P = 1.000 \cdot 10 + 12.000 = 22.000 \text{ u.m.}$$

La remuneración semanal será:

$$4 \cdot 22.000 = 88.000 \text{ u.m.}$$

**Problema
6**

Sistemas de remuneración por incentivos. Sistema Rowan

¿Para qué tiempo de ejecución de la tarea es máxima la prima por cada tarea realizada en el sistema Rowan?

RESOLUCIÓN

En el sistema Rowan, según se expuso en el problema anterior:

$$P = s_0 \cdot \frac{t}{T} (T - t) = s_0 t - s_0 \frac{t^2}{T}$$

Para determinar el valor de t que maximiza P , puede procederse fijando la condición necesaria de máximo:

$$\frac{dP}{dt} = s_0 - 2 \frac{s_0 t}{T} = 0$$

de donde se deduce que:

$$t = \frac{T}{2}$$

Cumpléndose la condición suficiente de máximo:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -2 \frac{s_0}{T} < 0$$

La máxima prima por tarea realizada se consigue para un tiempo de ejecución igual a la mitad del tiempo previsto para la realización de la tarea al rendimiento normal. Así, para el trabajador de los ejercicios anteriores se obtiene:

$$t = \frac{12}{2} = 6 \text{ horas}$$

La máxima prima que puede obtener es:

$$P = 1.000 \cdot \frac{6}{12} (12 - 6) = 3.000 \text{ u.m.}$$

Problema 7

Sistemas de remuneración por incentivos

Gruned y Cía. es una pequeña empresa de artesanía dedicada a la fabricación de cestos de mimbre. El tiempo previsto para elaborar un cesto es de 4 horas. Doña Lola López Laborinas tarda 3 horas en fabricar un cesto. Si la remuneración del tiempo de trabajo efectivo es de 500 u.m. cada hora, y la semana laborable es de 36 horas, determinar la remuneración que percibe esta señora por cada cesto que fabrica y su remuneración semanal bajo los siguientes sistemas de incentivos.

- Destajo.
- Sistema Halsey con un incentivo horario igual a la cuarta parte de la remuneración unitaria del tiempo de trabajo efectivo.
- Sistema Rowan.
- Sistema York.

RESOLUCIÓN

Semanalmente doña Lola fabricará $36/3 = 12$ cestos.

$$a) \quad S = s_0 T = 500 \cdot 4 = 2.000 \text{ u.m.}$$

$$\text{Remuneración semanal} = 12 \cdot 2.000 = 24.000 \text{ u.m.}$$

Problema
6

Modelo probabilístico

Enciclopedia Unedtánica, S. A., es una empresa dedicada a la distribución de una famosa obra científica editada por una institución de notorio prestigio. Dicha editorial le entrega un pedido al comienzo de cada mes. Actualmente existen en el almacén 20 enciclopedias y para el próximo mes se esperan unas ventas de 200 unidades con una desviación típica de 15. Suponiendo que las ventas siguen una distribución normal, ¿qué volumen de pedido ha de efectuarse de manera que la probabilidad de que se rompa el stock no supere el 15 por 100?

RESOLUCIÓN

Se desea determinar el valor del inventario inicial, S , tal que:

$$P(q > S) \leq 0,15$$

O, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} P(200 + 15\xi > S) &\leq 0,15 \rightarrow P\left(\xi > \frac{S - 200}{15}\right) \leq 0,15 \rightarrow \\ &\rightarrow 0,5 - P\left(0 \leq \xi \leq \frac{S - 200}{15}\right) \leq 0,15 \rightarrow P\left(0 \leq \xi \leq \frac{S - 200}{15}\right) \leq 0,35 \end{aligned}$$

Consultando las tablas, se observa que:

$$\frac{S - 200}{15} = 1,04$$

Por tanto,

$$S = 215,6 \approx 216 \text{ enciclopedias}$$

Dado que en el almacén hay 20 enciclopedias, habrá de efectuarse un pedido de

$$216 - 20 = 196 \text{ enciclopedias}$$

10

El factor humano en la producción

10.1. SISTEMAS DE REMUNERACIÓN POR INCENTIVOS

Problema

1

Sistemas de remuneración por incentivos

El tiempo previsto para la realización de una tarea, siguiendo un rendimiento normal, es de 12 horas. Cierta trabajador, que percibe una remuneración de 1.000 u.m. por hora, realiza la tarea en 10 horas. Si el incentivo con el que se remunera cada hora ahorrada en la ejecución de la tarea es de 800 u.m., ¿cuál es la remuneración total de este trabajador por tarea realizada? ¿y su remuneración semanal si la semana consta de 40 horas laborales? ¿Qué valor tomarían ambas remuneraciones si este trabajador realizara la tarea en el tiempo previsto correspondiente a un rendimiento normal?

RESOLUCIÓN

Denominando:

T : Unidades de tiempo (u.t.) previstas para la realización de la tarea siguiendo un rendimiento normal.

t : u.t. que efectivamente emplea el trabajador en cuestión.

I : Incentivo que remunera cada u.t. ahorrada.

s_0 : Remuneración que el trabajador percibe por cada u.t. que trabaja.

La prima de rendimiento por tarea realizada será:

$$P = I(T - t)$$

Prácticas de administración de empresas

Por consiguiente:

$$s_0 = \frac{8}{5} 6.250 = 10.000 \text{ u.m.}$$

Por tarea realizada cobrará:

$$s_0 T = 10.000 \cdot 8 = 80.000 \text{ u.m.}$$

PARTE CUARTA

Marketing

$$S = s_0 t + \frac{s_0}{m} (T - t)$$

En este caso:

$$I = \frac{1.000}{2} = 500 \text{ u.m.}$$

$$P = 500(12 - 10) = 1.000 \text{ u.m.}$$

$$S = 1.000 \cdot 10 + 1.000 = 11.000 \text{ u.m.}$$

La remuneración semanal será:

$$4 \cdot 11.000 = 44.000 \text{ u.m.}$$

Problema
4

Sistemas de remuneración por incentivos. Sistema Rowan

¿Cuáles serían las remuneraciones por tarea realizada y semanales del trabajador de los problemas anteriores, si se sigue el sistema Rowan?

RESOLUCIÓN

Bajo el sistema Rowan el incentivo unitario varía con el tiempo de ejecución, siendo igual al resultado de ponderar la remuneración unitaria del trabajo efectivo por un índice de esfuerzo que es el cociente entre los tiempos efectivo y previsto:

$$I = s_0 \cdot \frac{t}{T}$$

Por tanto:

$$P = s_0 \cdot \frac{t}{T} (T - t)$$

$$S = s_0 t + s_0 \cdot \frac{t}{T} (T - t)$$

En este caso:

$$I = 1.000 \cdot \frac{10}{12}$$

$$P = 1.000 \cdot \frac{10}{12} (12 - 10) = 1.666,6\bar{6} \text{ u.m.}$$

$$S = 1.000 \cdot 10 + 1.666,6\bar{6} = 11.666,6\bar{6} \text{ u.m.}$$

La remuneración semanal será:

$$4 \cdot 11.666,6\bar{6} = 46.666,6\bar{6} \text{ u.m.}$$

**Problema
5**

Sistemas de remuneración por incentivos. Sistema York

¿Cuáles serían las remuneraciones por tarea realizada y semanal del trabajador de los problemas anteriores si se sigue el sistema York?

RESOLUCIÓN

En el sistema York, o con prima por pieza, la proporción que representa el incentivo, I , sobre el salario unitario, s_0 , es igual a la que representa el tiempo estándar, T , sobre el ahorro de tiempo, $T - t$. Es decir:

$$\frac{I}{s_0} = \frac{T}{T - t}$$

De donde se deduce que:

$$I = s_0 \frac{T}{T - t}$$

Sustituyendo en la expresión de la prima, se obtiene:

$$P = s_0 \frac{T}{T - t} (T - t) = s_0 \cdot T$$

En cuanto al coeficiente de elasticidad de la demanda respecto a la promoción, se obtiene:

$$l_A = \frac{\Delta q/q}{\Delta A/A} = \frac{\Delta q}{\Delta A} \cdot \frac{A}{Q}$$

Dado que, en la mayor parte de los bienes, una variación del precio da lugar a una modificación de la cantidad demandada de signo contrario (si el precio sube, la demanda se reduce, y viceversa), para obtener una medida en términos absolutos, al ratio que mide la elasticidad de la demanda respecto al precio se le suele afectar de signo negativo del siguiente modo:

$$l_P = -\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p} = -\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

Si se toman variaciones infinitesimales se obtiene:

$$l_F = \frac{\partial q}{\partial F} \cdot \frac{F}{q}$$

$$l_A = \frac{\partial q}{\partial A} \cdot \frac{A}{q}$$

$$l_P = -\frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q}$$

La elasticidad correspondiente a una variable queda medida, así, por el producto de la derivada parcial de la demanda respecto a la variable y el cociente entre el valor de dicha variable y el nivel de la demanda.

En los ejercicios que siguen se muestra la utilidad del análisis de la demanda para la fijación de los valores óptimos de las variables mercadotécnicas. Debe advertirse que se trata de un planteamiento a corto plazo en el que se consideran constantes el coste variable unitario de producción y distribución y los costes fijos por ambos conceptos, siendo las variables, con las que se trata de incidir en la demanda, el precio, la venta personal y variables promocionales como la promoción de ventas y la publicidad. En los primeros ejercicios se considera, además, que la empresa tiene un producto lo suficientemente diferenciado como para que no tenga que considerar las reacciones de los competidores; dicho de otro modo, se encuentra en un mercado de competencia monopolística en el que los consumidores perciben que su producto difiere de cualquier otro y satisface deseos y necesidades que ningún otro satisface, al

menos del mismo modo. En los últimos problemas se introduce la consideración del caso en que existen varios competidores.

Se trata de un planteamiento marginalista basado en el conocimiento de la función de demanda.

11.2 LA FUNCIÓN DE DEMANDA A CORTO PLAZO Y SUS ELASTICIDADES. LA OPTIMIZACIÓN DEL PRESUPUESTO MERCADOTÉCNICO A CORTO PLAZO

Problema

1

Elasticidades de la demanda

Las investigaciones realizadas por la empresa Unedesa han permitido determinar la función de demanda de su producto, que adopta la siguiente expresión:

$$q = 100 - 2p + 10 \ln A + 8 \ln F$$

donde \ln denota logaritmo neperiano.

Actualmente vende en 30 u.m. cada unidad de producto y destina 300 u.m. anuales a publicidad y promoción de ventas y 100 u.m. a venta personal. ¿Cuáles son las elasticidades actuales de su demanda respecto a las tres variables de que depende?

RESOLUCIÓN

$$\text{Nivel actual de demanda} = 100 - 2 \times 30 + 10 \ln 300 + 8 \ln 100 = 133,88$$

$$l_p = -\frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} = -(-2) \frac{30}{133,88} = 0,45$$

$$l_A = \frac{\partial q}{\partial A} \cdot \frac{A}{q} = \frac{10}{A} \cdot \frac{A}{q} = \frac{10}{133,88} = 0,07$$

$$l_F = \frac{\partial q}{\partial F} \cdot \frac{F}{q} = \frac{8}{F} \cdot \frac{F}{q} = \frac{8}{q} = \frac{8}{133,88} = 0,06$$

$$b) \quad S = s_0 t + \frac{s_0}{m} (T - t) = 500 \cdot 3 + \frac{500}{4} (4 - 3) = 1.625 \text{ u.m.}$$

$$\text{Remuneración semanal} = 12 \cdot 1.625 = 19.500 \text{ u.m.}$$

$$c) \quad S = s_0 t + s_0 \frac{t}{T} (T - t) = 500 \cdot 3 + 500 \frac{3}{4} (4 - 3) = 1.875 \text{ u.m.}$$

$$\text{Remuneración semanal} = 12 \cdot 1.875 = 22.500 \text{ u.m.}$$

$$d) \quad S = s_0(t + T) = 500(3 + 4) = 3.500 \text{ u.m.}$$

$$\text{Remuneración semanal} = 12 \cdot 3.500 = 42.000 \text{ u.m.}$$

**Problema
8**

Sistemas de remuneración por incentivos

Una persona tarda 3 horas en realizar una tarea cuyo tiempo previsto es de 4 horas. El salario del tiempo de trabajo efectivo es de 2.500 u.m. por hora. ¿Qué remuneración percibe esta persona por tarea realizada según el sistema Rowan?

RESOLUCIÓN

$$S = s_0 t + s_0 \frac{t}{T} (T - t) = 2.500 \cdot 3 + 2.500 \frac{3}{4} (4 - 3) = 9.375 \text{ u.m.}$$

**Problema
9**

Sistemas de remuneración por incentivos

Si la remuneración de la hora de trabajo es 1.000 u.m. y con el destajo se percibirían 6.000 u.m. por tarea realizada, ¿para qué tiempo de ejecución de la tarea es máxima la prima por cada tarea realizada en el sistema Rowan?

RESOLUCIÓN

Los datos son:

$$s_0 = 1.000$$

$$s_0 T = 6.000$$

Por consiguiente:

$$T = 6 \text{ horas}$$

La prima máxima por cada tarea realizada en el sistema Rowan se consigue para un tiempo de ejecución igual a:

$$\frac{T}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ horas}$$

**Problema
10**

Sistemas de remuneración por incentivos

Si a una persona que tarda 5 horas en realizar la tarea se le pagase con el sistema Rowan, el incentivo horario valdría 6.250 u.m. y conseguiría la máxima prima realizando la tarea en 4 horas. ¿Cuánto cobra por tarea realizada si trabaja bajo el sistema de destajo?

RESOLUCIÓN

La prima máxima por cada tarea realizada en el sistema Rowan se consigue para un tiempo de ejecución igual a:

$$\frac{T}{2} = 4 \text{ horas}$$

Por tanto:

$$T = 4 \cdot 2 = 8 \text{ horas}$$

El incentivo horario en el sistema Rowan es:

$$s_0 \frac{t}{T} = s_0 \frac{5}{8} = 6.250$$

Problema

4

Elasticidades de la demanda y optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

Sea una empresa cuya demanda anual depende, a corto plazo, del precio de su producto y de sus gastos anuales en promoción y en venta personal. Se desea determinar, en términos de elasticidades, las reglas que permiten maximizar su beneficio.

RESOLUCIÓN

La demanda de esta empresa será una función de la forma

$$q = q(p, A, F)$$

Denominando C_v al coste variable unitario de producción y distribución y C_f a los costes fijos, también de producción y distribución, el beneficio de la empresa responderá a la expresión

$$B = pq - C_v q - (C_f + A + F) = (p - C_v)q - C_f - A - F$$

Las condiciones necesarias de máximo serán:

$$\frac{\partial B}{\partial p} = (p - C_v) \frac{\partial q}{\partial p} + q = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial F} = (p - C_v) \frac{\partial q}{\partial F} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial A} = (p - C_v) \frac{\partial q}{\partial A} - 1 = 0$$

Multiplicando los dos términos de estas tres relaciones por p/q , F/q y A/q , respectivamente, se obtiene:

$$(p - C_v) \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} + p = 0$$

$$(p - C_v) \frac{\partial q}{\partial F} \cdot \frac{F}{q} - \frac{F}{q} = 0$$

$$(p - C_v) \frac{\partial q}{\partial A} \cdot \frac{A}{q} - \frac{A}{q} = 0$$

O, lo que es lo mismo:

$$(p - C_v)(-l_p) + p = 0 \quad (1)$$

$$(p - C_v)l_F - \frac{F}{q} = 0 \quad (2)$$

$$(p - C_v)l_A - \frac{A}{q} = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (1) se deduce el precio óptimo:

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v \quad (4)$$

$$l_p = \frac{p}{p - C_v} \quad (5)$$

De la ecuación (2) se deduce, de forma semejante, el nivel óptimo de gastos en fuerza de ventas:

$$F = (p - C_v)ql_F = \frac{p}{l_p} ql_F = \frac{l_F}{l_p} pq \quad (6)$$

y

$$l_F = l_p \frac{F}{pq} \quad (7)$$

En cuanto al valor óptimo del gasto en promoción se obtiene:

$$A = (p - C_v)ql_A = \frac{p}{l_p} ql_A = \frac{l_A}{l_p} pq \quad (8)$$

y

$$l_A = l_p \frac{A}{pq} \quad (9)$$

Una vez determinado el precio óptimo con arreglo a la ecuación (4), los niveles óptimos de A y F pueden obtenerse, con arreglo a las expresiones (6) y (8), por producto entre el cociente de la elasticidad de la variable correspondiente y la del precio (l_F/l_p ; l_A/l_p) y el volumen óptimo de ventas expresado en unidades monetarias (Precio óptimo \times Cantidad óptima: pq). Los valores óptimos para estas variables también pueden obtenerse multiplicando sus co-

11

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

11.1. INTRODUCCIÓN

Por regla general, el producto y la distribución son variables estructurales a largo plazo. Las modificaciones del producto y de los canales de distribución requieren períodos de tiempo generalmente amplios, por lo que, una vez implantados un producto y un sistema de distribución, no suelen alterarse durante un largo plazo. Por el contrario, el precio, la venta personal y algunas variables promocionales, como la publicidad y la promoción de ventas, son variables a corto plazo que, además, en la mayor parte de los casos, se dejan sentir en las ventas de forma inmediata o en un período de tiempo no demasiado amplio. A largo plazo, la demanda depende de todas las variables mercadotécnicas, pero a corto plazo el producto y la distribución se consideran constantes, pues no se pueden alterar con rapidez, y las variables con las que se puede incidir en la demanda son el precio (p), la venta personal (F) y las mencionadas variables promocionales (A). Para tomar decisiones a corto plazo interesará conocer la función que relaciona la cantidad demandada (q) y esas variables mercadotécnicas, es decir, la función de demanda:

$$q = q(p, F, A)$$

Si ésta se conociera sería posible determinar el efecto que una variación en una de tales variables tendría sobre la cantidad demandada. A los ratios que miden, por cociente, el tanto por uno de modificación de la demanda sobre el tanto por uno de variación de la variable que provoca aquella modificación, se les denomina «coeficientes de elasticidad». Así, la elasticidad de la demanda respecto a la fuerza de ventas se mide por el coeficiente:

$$I_F = \frac{\Delta q/q}{\Delta F/F} = \frac{\Delta q}{\Delta F} \cdot \frac{F}{q}$$

**Problema
8**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

La función de demanda de un producto cuyo coste variable unitario de producción y de distribución vale 1.000 u.m. tiene la siguiente expresión:

$$q(p, A, F) = 1.000p^{-1,2}A^{0,25}F^{0,15}$$

¿Cuánto vale el precio que maximiza el beneficio?

RESOLUCIÓN

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v = \frac{1,2}{1,2 - 1} 1.000 = 6.000 \text{ u.m.}$$

**Problema
9**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

Las investigaciones desarrolladas por la empresa MKTG, S. A., han permitido determinar la función de demanda de su producto, que adopta la siguiente expresión:

$$q(p, A, F) = 1.000p^{-1,25}A^{0,25}F^{0,15}$$

Sabiendo que el coste variable unitario de producción y distribución del producto (C_v) es constante e igual a 1.000 u.m., se desea determinar los niveles de actuación de esas tres variables de marketing-mix, que permiten maximizar el beneficio de la empresa, si se supone que no habrá reacción alguna de las empresas competidoras.

RESOLUCIÓN

El beneficio será:

$$\begin{aligned} B &= (\text{Ingresos}) - (\text{Costes}) = \\ &= (\text{Ingresos}) - (\text{Costes variables}) - A - F - \text{Otros costes fijos} = \\ &= pq - C_v q - A - F - C_F = (p - C_v)q - A - F - C_F \end{aligned} \quad (1)$$

Para determinar el valor de las variables que maximizan el beneficio habrá de derivarse en la expresión anterior respecto a p , a A y a F , e igualar a cero las expresiones resultantes, obteniéndose:

$$(p - C_v) \frac{\partial q}{\partial p} + q(p, A, F) = 0 \quad (2)$$

$$(p - C_v) \frac{\partial q}{\partial A} - 1 = 0 \quad (3)$$

$$(p - C_v) \frac{\partial q}{\partial F} - 1 = 0 \quad (4)$$

En el caso del problema planteado, se obtiene:

— En cuanto a la variable precio:

$$\begin{aligned} (p - 1.000)1.000A^{0.25}F^{0.15}(-1,25)p^{-2.25} + 1.000p^{-1.25}A^{0.25}F^{0.15} &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 1.000A^{0.25}F^{0.15}p^{-1.25}[(p - 1.000)(-1,25)p^{-1} + 1] &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow -1,25 \frac{p - 1.000}{p} + 1 &= 0 \rightarrow -1,25 \left(1 - \frac{1.000}{p}\right) + 1 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow -\frac{1.000}{p} &= \frac{1}{1,25} - 1 = \frac{-0,25}{1,25} \rightarrow p = \frac{1,25 \times 1.000}{0,25} = 5.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

— En cuanto a la variable publicidad:

$$\begin{aligned} (p - 1.000)1.000p^{-1.25}F^{0.15}(0,25)A^{-0.75} - 1 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow (5.000 - 1.000)1.000 \times 5.000^{-1.25} \times 0,25F^{0.15}A^{-0.75} - 1 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 23,784142F^{0.15}A^{-0.75} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

— En cuanto a la variable fuerza de ventas:

$$\begin{aligned} (p - 1.000)1.000p^{-1.25}A^{0.25}(0,15)F^{-0.85} - 1 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow (5.000 - 1.000)1.000 \times 5.000^{-1.25} \times 0,15A^{0.25}F^{-0.85} - 1 &= 0 \rightarrow \\ \rightarrow 14,2704852A^{0.25}F^{-0.85} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. De la primera se deduce que:

Problema
2

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

¿Cuáles son los niveles de gastos de promoción y de venta personal de la empresa del problema anterior que le permitirían maximizar sus ventas con el presupuesto anual que tiene establecido para estas variables?

RESOLUCIÓN

A estas dos variables les dedica $300 + 100 = 400$ u.m.
Se trataría de maximizar

$$q = 100 - 2p + 10 \ln A + 8 \ln F$$

con la restricción de que

$$400 = A + F$$

Cabe proceder formando la función lagrangiana:

$$Z = (100 - 2p + 10 \ln A + 8 \ln F) + \lambda(400 - A - F)$$

derivando respecto a A , F y λ , e igualando a cero las expresiones resultantes, se obtienen las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial A} &= \frac{10}{A} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial F} &= \frac{8}{F} - \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{10}{A} = \frac{8}{F} \quad (1)$$

$$400 - A - F = 0 \rightarrow 400 = A + F \quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se sigue que

$$A = 222,22 \text{ u.m.}$$

$$F = 177,78 \text{ u.m.}$$

De esta forma las ventas serían

$$q = 100 - 2 \times 30 + 10 \ln 222,22 + 8 \ln 177,78 = 135,48$$

La ecuación (1) no recoge sino la condición de equilibrio:

$$\frac{\partial q}{\partial A} = \frac{\partial q}{\partial F}$$

Es decir, la condición de que la respuesta marginal de la demanda respecto de la promoción sea igual que su respuesta marginal a la fuerza de ventas. Si dicha respuesta fuera mayor para una de las dos variables, interesaría distraer fondos de la otra para aplicarlos a aquélla, hasta alcanzar el nivel en que la respuesta sea igual para ambas.

**Problema
3**

Elasticidades de la demanda

Demostrar que las funciones de demanda exponenciales del tipo

$$q = kp^{b_1} A^{b_2} F^{b_3}$$

tienen elasticidades constantes cualesquiera que sean los valores de las variables.

RESOLUCIÓN

$$I_p = -\frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} = -kb_1 p^{b_1-1} A^{b_2} F^{b_3} \cdot \frac{p}{q} = -b_1 kp^{b_1} A^{b_2} F^{b_3} \cdot \frac{1}{q} = -b_1 q \cdot \frac{1}{q} = -b_1$$

$$I_A = \frac{\partial q}{\partial A} \cdot \frac{A}{q} = kp^{b_1} b_2 A^{b_2-1} F^{b_3} \cdot \frac{A}{q} = b_2 kp^{b_1} A^{b_2} F^{b_3} \cdot \frac{1}{q} = b_2 q \cdot \frac{1}{q} = b_2$$

$$I_F = \frac{\partial q}{\partial F} \cdot \frac{F}{q} = kp^{b_1} A^{b_2} b_3 F^{b_3-1} \cdot \frac{F}{q} = b_3 kp^{b_1} A^{b_2} F^{b_3} \cdot \frac{1}{q} = b_3 q \cdot \frac{1}{q} = b_3$$

Por consiguiente, en las funciones de este tipo:

$$I_p = -b_1$$

$$I_A = b_2$$

$$I_F = b_3$$

cualesquiera que sean los valores de las variables y el correspondiente nivel de la demanda.

$$p = \frac{I_p}{I_p - 1} C_v = \frac{2}{2 - 1} \times 10 = 20 \text{ u.m.}$$

$$A = (p - C_v) q l_A = (20 - 10) \frac{1}{3} q = \frac{10}{3} q$$

$$F = (p - C_v) q l_F = (20 - 10) \frac{1}{6} q = \frac{5}{3} q$$

$$q = 25.000 \times 20^{-2} \left(\frac{10}{3}\right)^{1/3} q^{1/3} \left(\frac{5}{3}\right)^{1/6} q^{1/6} = 101,659445 q^{1/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow q^{1/2} = 101,659445 \rightarrow q = 10.334,64 \text{ u.f.}$$

$$A = \frac{10}{3} 10.334,64 = 34.448,81 \text{ u.m.}$$

$$F = \frac{5}{3} 10.334,64 = 17.224,40 \text{ u.m.}$$

El precio óptimo es de 20 u.m. Los niveles óptimos de gastos anuales en promoción y fuerza de ventas son 34.448,81 y 17.224,40 u.m., respectivamente. El nivel óptimo de demanda es de 10.334,64 u.f. anuales. El ingreso óptimo será:

$$pq = 20 \times 10.334,64 = 206.692,8 \text{ u.m.}$$

El máximo beneficio que puede conseguirse es

$$B = (p - C_v)q - C_F - A - F = (20 - 10) \times 10.334,64 - 20.000 - 34.448,81 - 17.224,40 = 31.673,19 \text{ u.m.}$$

**Problema
12**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

La empresa Suned, S. A., fabrica bolígrafos con un coste variable unitario de producción y distribución de C_v unidades monetarias. Su demanda depende, a corto plazo, del precio de venta unitario y de los gastos que realiza en promoción y en venta personal. Además, cada año destina una cantidad fija, para promoción y fuerza de ventas, igual a M u.m. ¿Cuáles son las condiciones que permiten optimizar la distribución de este presupuesto entre ambas variables?

RESOLUCIÓN

Se trata de maximizar:

$$B = (p - C_v)q - C_F - A - F$$

donde $q = q(p, A, F)$ y C_F son los costes fijos de producción y distribución. La restricción es que

$$M = A + F$$

Para determinar las condiciones de óptimo cabe formar la función lagrangiana

$$Z = (p - C_v)q - C_F - A - F + \lambda(M - A - F)$$

Derivando respecto a cada una de las variables (p, A, F) y respecto a λ e igualando a cero las expresiones resultantes, se obtienen las condiciones necesarias de óptimo:

$$\frac{\partial Z}{\partial p} = (p - C_v) \frac{\partial q}{\partial p} + q = 0 \rightarrow (p - C_v) \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} + p = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial A} &= (p - C_v) \frac{\partial q}{\partial A} - 1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial F} &= (p - C_v) \frac{\partial q}{\partial F} - 1 - \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial q}{\partial A} = \frac{\partial q}{\partial F} \quad (2)$$

$$M - A - F = 0 \rightarrow M = A + F \quad (3)$$

La condición (1) conduce a la ya conocida expresión

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v$$

La condición (2) señala que, en equilibrio, la respuesta marginal de la demanda ha de ser la misma ante ambas variables. Si la respuesta fuera mayor para una de las variables, interesaría atraer recursos para ella a costa de la variable a la que le correspondiera la menor respuesta, hasta que se produjera la igualdad. La condición (3) es la restricción presupuestaria.

respondientes elasticidades por el margen total óptimo sobre costes variables —producto del margen unitario óptimo ($p - C_v$) y el número óptimo de unidades vendidas (q).

Como puede observarse, a partir de las expresiones (7) y (9), en el óptimo:

$$\frac{l_F}{F} = \frac{l_A}{A} = \frac{l_p}{pq}$$

**Problema
5**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

Son muchas las empresas que establecen sus presupuestos anuales de promoción y venta personal como una proporción fija del volumen de ventas anual. ¿Cuáles son los niveles óptimos para tales proporciones si el objetivo de la empresa es maximizar su beneficio?

RESOLUCIÓN

Según los resultados alcanzados en el ejercicio anterior, resulta evidente que las proporciones óptimas son, para cada una de las variables:

$$\frac{A}{pq} = \frac{l_A}{l_p} \quad \text{y} \quad \frac{F}{pq} = \frac{l_F}{l_p}$$

En cuanto a la proporción óptima para el conjunto de ambas, será:

$$\frac{A + F}{pq} = \frac{l_A + l_F}{l_p}$$

El precio, la cantidad demandada y los valores de las elasticidades se entienden referidos a sus niveles óptimos (p es el precio óptimo de venta, l_A y l_F las elasticidades en el óptimo y q la cantidad demandada correspondiente a los valores óptimos de p , A y F).

**Problema
6**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

En el nivel de demanda que maximiza el beneficio, las elasticidades de la demanda a corto plazo del producto de una empresa son las siguientes:

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

- Respecto a la fuerza de ventas, 0,25.
- Respecto a la promoción, 0,75.
- Respecto al precio, 2.

En el óptimo, ¿qué proporciones deben representar el presupuesto de fuerza de ventas y el presupuesto conjunto de promoción y fuerza de ventas, respecto al ingreso o volumen de ventas?

RESOLUCIÓN

$$\frac{F}{pq} = \frac{l_F}{l_p} = \frac{0,25}{2} = 0,125$$

$$\frac{A + F}{pq} = \frac{l_A + l_F}{l_p} = \frac{0,75 + 0,25}{2} = 0,5$$

Problema 7

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

El objetivo de una empresa es maximizar su beneficio y, en el óptimo, la elasticidad de la demanda a corto plazo de su producto respecto a su fuerza de ventas vale 2, el nivel de la variable promociona vale 100 y el de la variable fuerza de ventas vale 200. ¿Cuánto vale en el óptimo la elasticidad de la demanda respecto a la promoción?

RESOLUCIÓN

En el máximo beneficio:

$$\frac{l_F}{F} = \frac{l_A}{A}$$

Por consiguiente:

$$l_A = A \frac{l_F}{F} = 100 \frac{2}{200} = 1$$

Este beneficio es el máximo que puede conseguirse a corto plazo, es decir, dados los actuales costes de producción y distribución y la actual función de demanda.

**Problema
14**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

¿Cuál sería la distribución óptima del presupuesto de promoción y fuerza de ventas del producto del problema anterior si la empresa no desea modificar los gastos totales anuales por estos dos conceptos? ¿Y el precio óptimo? ¿Qué beneficio se alcanzaría, como máximo, con ese presupuesto mercadotécnico?

RESOLUCIÓN

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v = \frac{100p/q}{(100p/q) - 1} 10 = \frac{100p}{(100p) - q} 10 \rightarrow q = 100p - 1.000 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial A} = \frac{\partial q}{\partial F} \rightarrow \frac{5}{2} A^{-1/2} = \frac{3}{2} F^{-1/2} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} A = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} F \rightarrow 0,16A = 0,44F \quad (2)$$

$$A + F = 70.000 \quad (3)$$

De (2) y (3) se sigue que

$$0,16(70.000 - F) = 0,44F \quad ; \quad F = 18.529,41$$

$$A = 70.000 - F = 70.000 - 18.529,41 = 51.470,58$$

Al sustituir estos valores en la ecuación de la demanda se obtiene:

$$q = 20.000 - 100p + 5(51.470,58)^{1/2} + 3(18.529,41)^{1/2} =$$

$$= 21.542,72 - 100p$$

De esta última expresión y de la (1) se deduce que:

$$100p - 1.000 = 21.542,72 - 100p \rightarrow p = \frac{22.542,72}{200} = 112,71 \text{ u.m.}$$

y, por tanto:

$$q = 21.542,72 - 100 \times 112,71 = 10.271,36 \text{ u.f.}$$

El máximo beneficio valdrá:

$$\begin{aligned} B &= (112,71 - 10)10.271,36 - 200.000 - 51.470,58 - 18.529,41 = \\ &= 784.971,15 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

**Problema
15**

**Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo.
Distribución por territorios**

Una empresa tiene un presupuesto mercadotécnico de 20 u.m. y vende su producto en dos territorios, A y B. En cada uno de ellos se ha estimado la relación existente entre la cantidad demandada (q) en el mismo y el esfuerzo mercadotécnico (E) que en él se realiza, medido por las u.m. gastadas en actividades mercadotécnicas, habiendo resultado, para el territorio A:

$$q_A = 50 + 10E_A - 0,25E_A^2$$

y para el B:

$$q_B = 60 + 9E_B - 0,2E_B^2$$

Se desea determinar la distribución del presupuesto, entre ambos territorios, que maximiza la demanda total, y el valor de esta última si se realiza dicha distribución.

RESOLUCIÓN

Se trata de maximizar

$$q_A + q_B = 50 + 10E_A - 0,25E_A^2 + 60 + 9E_B - 0,2E_B^2$$

con la limitación

$$20 = E_A + E_B$$

Para ello puede procederse formulando la función lagrangiana

$$Z = 50 + 10E_A - 0,25E_A^2 + 60 + 9E_B - 0,2E_B^2 + \lambda(20 - E_A - E_B)$$

$$A = \left(\frac{1}{23,784142 F^{0,15}} \right)^{1/0,75} = (23,784142 F^{0,15})^{1/0,75} =$$

$$= (23,784142)^{1/0,75} F^{0,15/0,75} = 68,399036 F^{0,2}$$

De forma semejante, de la segunda se obtiene:

$$A = \left(\frac{1}{14,2704852 F^{-0,85}} \right)^{1/0,25} = \left(\frac{F^{0,85}}{14,2704852} \right)^4 = \frac{F^{4 \times 0,85}}{14,2704852^4} = \frac{F^{3,4}}{14,2704852^4}$$

Igualando ambas expresiones de A se obtiene:

$$68,399036 F^{0,2} = \frac{F^{3,4}}{14,2704852^4} \rightarrow 68,399036 \times 14,2704852^4 =$$

$$= F^{3,4} F^{-0,2} = F^{3,2} \rightarrow F =$$

$$= (68,399036 \times 14,2704852^4)^{1/3,2} = 103,87273 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente:

$$A = 68,399036 (103,87273)^{0,2} = \frac{(103,87273)^{3,4}}{14,2704852^4} = 173,1212 \text{ u.m.}$$

**Problema
10**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

Resolver el problema de la empresa MKTG, S. A., del problema anterior, aplicando las condiciones de óptimo establecidas en términos de elasticidades.

RESOLUCIÓN

$$l_p = - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} = -1,000(-1,25) p^{-2,25} A^{0,25} F^{0,15} \frac{p}{q} =$$

$$= 1,25 \times 1,000 p^{-1,25} A^{0,25} F^{0,15} \frac{1}{q} = 1,25 q \frac{1}{q} = 1,25$$

$$l_A = \frac{\partial q}{\partial A} \cdot \frac{A}{q} = 1,000 p^{-1,25} \times 0,25 A^{-0,75} F^{0,15} \frac{A}{q} =$$

$$= 0,25 \times 1,000 p^{-1,25} A^{0,25} F^{0,15} \frac{1}{q} = 0,25 q \frac{1}{q} = 0,25$$

$$l_F = \frac{\partial q}{\partial F} \cdot \frac{F}{q} = 1,000 p^{-1,25} A^{0,25} \times 0,15 F^{-0,85} \frac{F}{q} =$$

$$= 0,15 \times 1,000 p^{-1,25} A^{0,25} F^{0,15} \frac{1}{q} = 0,15 q \frac{1}{q} = 0,15$$

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

Según se demostró en un ejercicio anterior, las elasticidades de las funciones de demanda de este tipo no varían con los valores de las variables.

Las condiciones de óptimo son:

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v = \frac{1,25}{1,25 - 1} \times 1.000 = 5.000 \text{ u.m.}$$

$$F = \frac{l_F}{l_p} pq = \frac{0,15}{1,25} \times 5.000q = (600q) \text{ u.m.}$$

$$A = \frac{l_A}{l_p} pq = \frac{0,25}{1,25} \times 5.000q = (1.000q) \text{ u.m.}$$

$$q = 1.000p^{-1,25}A^{0,25}F^{0,15} = 1.000 \times 5.000^{-1,25} \times 1.000^{0,25}q^{0,25} \times 600^{0,15}q^{0,15} =$$
$$= 0,3491485q^{0,4} \rightarrow q^{0,6} = 0,3491485 \rightarrow q = (0,3491485)^{1/0,6} = 0,1731212$$

$$F = 600 \times 0,1731212 = 103,87273 \text{ u.m.}$$

$$A = 1.000 \times 0,1731212 = 173,1212 \text{ u.m.}$$

Problema 11

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

Un fabricante de camisetas de deporte estima que la demanda anual de su producto responde a la siguiente ecuación:

$$q = 25.000p^{-2}A^{1/3}F^{1/6}$$

El coste variable unitario de producción y distribución de una camiseta es de 10 u.m. ¿Cuál es el precio óptimo del producto y cuáles los gastos anuales óptimos de promoción y fuerza de ventas si el objetivo es maximizar el beneficio? ¿Cuál es el nivel óptimo de la demanda? ¿Y el de ingresos? Determine el máximo beneficio que puede obtenerse si los costes fijos de producción y distribución son 20.000 u.m. anuales.

RESOLUCIÓN

$$l_p = 2$$

$$l_A = \frac{1}{3}$$

$$l_F = \frac{1}{6}$$

derivando e igualando a cero las expresiones resultantes se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial E_A} &= 15 - 0,2E_A - \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial E_B} &= 9 - 0,4E_B - \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 15 - 0,2E_A = 9 - 0,4E_B \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial E_C} &= 50 - 0,3E_C - \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 9 - 0,4E_B = 50 - 0,3E_C \quad (2)$$

$$318,33 - E_A - E_B - E_C = 0 \rightarrow 318,33 = E_A + E_B + E_C \quad (3)$$

Se dispone de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, del que se deduce que

$$E_A = 100 \text{ u.m.}$$

$$E_B = 35 \text{ u.m.}$$

$$E_C = 183,33 \text{ u.m.}$$

Obsérvese que el problema también puede resolverse aplicando la condición

$$\frac{dq_A}{dE_A} = \frac{dq_B}{dE_B} = \frac{dq_C}{dE_C}$$

—pues no significan otra cosa las ecuaciones (1) y (2)— y añadiendo la restricción presupuestaria (3). Sólo cuando la respuesta marginal de la demanda al esfuerzo mercadotécnico es igual en las tres zonas, puede afirmarse que no interesa traspasar recursos de un territorio a otro y que se ha llegado al equilibrio en el cual se maximiza la demanda total.

La demanda de cada una de las zonas será:

$$q_A = 40 + 15 \times 100 - 0,10 \times 100^2 = 540$$

$$q_B = 60 + 9 \times 35 - 0,2 \times 35^2 = 130$$

$$q_C = 50 + 50 \times 183,33 - 0,15 \times 183,33^2 = 4.175$$

La demanda total es, por consiguiente:

$$540 + 130 + 4.175 = 4.845$$

**Problema
17**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo.
Distribución por marcas, segmentos y variables

La empresa Sunedisa ha diferenciado su producto en dos marcas que presenta en envases diferentes y que distribuye por canales distintos, para dirigirlo a dos segmentos del mercado. La primera marca tiene una demanda anual a corto plazo cuya función es

$$q_1 = k_1 p_1^{b_1} A_1^{b_2} F_1^{b_3}$$

En cuanto a la segunda marca, su demanda anual a corto plazo es de la forma

$$q_2 = k_2 p_2^{c_1} A_2^{c_2} F_2^{c_3}$$

El coste variable unitario de fabricación y distribución es idéntico para ambas marcas e igual a C_v u.m. Además, por ambos conceptos se han de soportar unos costes fijos anuales de C_f u.m. Se desea determinar el precio óptimo en cada uno de los mercados y la distribución óptima del presupuesto de promoción y fuerza de ventas, en orden a maximizar el beneficio anual de la empresa.

RESOLUCIÓN

Se trata de maximizar

$$B = p_1 k_1 p_1^{b_1} A_1^{b_2} F_1^{b_3} + p_2 k_2 p_2^{c_1} A_2^{c_2} F_2^{c_3} - C_v (k_1 p_1^{b_1} A_1^{b_2} F_1^{b_3} + k_2 p_2^{c_1} A_2^{c_2} F_2^{c_3}) - C_f - A_1 - A_2 - F_1 - F_2$$

La condición necesaria de óptimo se cumple cuando

$$\frac{\partial B}{\partial p_1} = k_1 (1 + b_1) p_1^{b_1} A_1^{b_2} F_1^{b_3} - C_v k_1 b_1 p_1^{b_1-1} A_1^{b_2} F_1^{b_3} = 0 \rightarrow p_1 = C_v \frac{b_1}{1 + b_1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_2} = 0 \rightarrow p_2 = C_v \frac{c_1}{1 + c_1} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial A_1} &= p_1 k_1 p_1^{b_1} b_2 A_1^{b_2-1} F_1^{b_3} - C_v k_1 p_1^{b_1} b_2 A_1^{b_2-1} F_1^{b_3} - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow p_1 q_1 b_2 A_1^{-1} - C_v b_2 q_1 A_1^{-1} - 1 = 0 \rightarrow A_1 = b_2 q_1 (p_1 - C_v) \end{aligned} \quad (3)$$

Problema
13

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo

Un fabricante de juguetes tiene, entre sus productos, uno cuya función de demanda responde a la expresión:

$$q = 20.000 - 100p + 5A^{1/2} + 3F^{1/2}$$

El coste variable unitario de producción y distribución es de 10 u.m., se vende a 80 u.m. y actualmente dedica 40.000 u.m. a promoción y 30.000 u.m. a fuerza de ventas, anualmente. Tanto su director de promoción como el de fuerza de ventas consideran que sus respectivos presupuestos son escasos y han solicitado que se les aumenten. Los costes fijos de producción y distribución son de 200.000 u.m. anuales. ¿Cuál es el volumen actual de ventas de este producto? ¿Y sus ingresos y su beneficio? ¿Deberían aumentarse los presupuestos de promoción y venta personal? ¿Es correcto el precio al que se vende la unidad de producto?

RESOLUCIÓN

$$l_p = -\frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} = 100 \frac{p}{q}$$

$$l_A = \frac{\partial q}{\partial A} \cdot \frac{A}{q} = \frac{5}{2} A^{-1/2} \cdot \frac{A}{q} = \frac{5}{2} \cdot \frac{A^{1/2}}{q}$$

$$l_F = \frac{\partial q}{\partial F} \cdot \frac{F}{q} = \frac{3}{2} F^{-1/2} \cdot \frac{F}{q} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F^{1/2}}{q}$$

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v = \frac{100p/q}{(100p/q) - 1} 10 = \frac{100p}{100p - q} 10 \rightarrow q = 100p - 1.000 \quad (1)$$

$$A = (p - C_v)q l_A = (p - 10)q \frac{5}{2} \cdot \frac{A^{1/2}}{q} \rightarrow A^{1/2} = (p - 10) \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$F = (p - C_v)q l_F = (p - 10)q \frac{3}{2} \cdot \frac{F^{1/2}}{q} \rightarrow F^{1/2} = (p - 10) \frac{3}{2} \quad (3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en la ecuación de demanda se obtiene:

$$100p - 1.000 = 20.000 - 100p + 5(p - 10) \frac{5}{2} + 3(p - 10) \frac{3}{2}$$

de donde se deduce que el precio óptimo es

$$p = 113,825 \text{ u.m.}$$

Por tanto, ha de elevarse el precio de venta del producto.

En cuanto a los niveles óptimos de promoción y fuerza de ventas se obtiene:

$$A = \left[(113,825 - 10) \frac{5}{2} \right]^2 = 67.372,87 \text{ u.m.}$$

$$F = \left[(113,825 - 10) \frac{3}{2} \right]^2 = 24.254,23 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente, debe aumentarse el presupuesto destinado a promoción y reducirse el dedicado a fuerza de ventas.

El volumen *actual* de las ventas del producto será:

$$q = 20.000 - 100 \times 80 + 5 \times 40.000^{1/2} + 3 \times 30.000^{1/2} = 13.519,62 \text{ u.f.}$$

y sus ingresos valen:

$$pq = 80 \times 13.519,62 = 1.081.569,22 \text{ u.m.}$$

con lo que se obtiene un beneficio de

$$B = (p - C_v)q - C_F - A - F = (80 - 10) \times 13.519,62 - 200.000 - 40.000 - 30.000 = 676.373,4 \text{ u.m.}$$

Si se fijaran los niveles *óptimos* de precio, promoción y fuerza de ventas, se obtendría una demanda igual a [expresión (1)]

$$q = 100 \times 113,825 - 1.000 = 10.382,51 \text{ u.f.}$$

Es decir, más baja que con los niveles actuales. Pero los ingresos y los beneficios serían más elevados:

$$pq = 113,825 \times 10.382,51 = 1.181.791,04$$

$$B = (113,825 - 10)10.382,51 - 200.000 - 67.372,87 - 24.254,23 = 786.337 \text{ u.m.}$$

$$q_2 = 275,7636 \times 100^{-1,25} \times 40^{0,5} q_2^{0,5} \times 24^{0,3} q_2^{0,3} \rightarrow$$

$$\rightarrow q_2^{0,2} = 14,3097 \rightarrow q_2 = 600.000 \text{ u.f.}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} A_1 &= 45 \times 300.000 = & 13.500.000 \text{ u.m.} \\ A_2 &= 40 \times 600.000 = & 24.000.000 \text{ u.m.} \\ F_1 &= 108 \times 300.000 = & 32.400.000 \text{ u.m.} \\ F_2 &= 24 \times 600.000 = & 14.400.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Presupuesto total de promoción} \\ \text{y fuerza de ventas} &= & 84.300.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

En la tabla 11.1 se recoge la distribución óptima del presupuesto.

TABLA 11.1

	Promoción	Fuerza de ventas	Presupuesto total dedicado a la marca
Marca 1	13.500.000	32.400.000	45.900.000
Marca 2	24.000.000	14.400.000	38.400.000
Presupuesto total dedicado a la variable	37.500.000	46.800.000	Presupuesto total 84.300.000

El máximo beneficio que puede obtenerse es

$$\begin{aligned} B &= p_1 q_1 + p_2 q_2 - C_v(q_1 + q_2) - C_F - (A_1 + A_2) - (F_1 + F_2) = \\ &= 200 \times 300.000 + 100 \times 600.000 - 20(900.000) - 6.000.000 - \\ &\quad - 37.500.000 - 46.800.000 = 11.700.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

La marca distribuida en farmacias ha de recibir un precio elevado y el esfuerzo realizado en fuerza de ventas ha de ser muy superior al desarrollado en promoción de ventas y publicidad. Aunque sus ventas en u.f. son la mitad que las correspondientes a la otra marca, los ingresos que genera son iguales a los de ésta ($200 \times 300.000 = 100 \times 600.000 = 60.000.000$); adviértase que, sin embargo, la primera marca requiere un esfuerzo mercadotécnico total, en promoción y venta personal, superior al de segunda. Esta última, que es distribuida en droguerías y supermercados, requiere un esfuerzo de promoción de ventas y publicidad superior al de fuerza de ventas y su precio ha de ser más bajo que el de la marca distribuida en farmacias.

**Problema
19**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo.
Distribución por marcas, segmentos y variables

Una empresa distribuye su producto con dos marcas que dirige a dos segmentos distintos y que distribuye por canales diferentes. La demanda anual del primer segmento y marca responde, a corto plazo, a la expresión

$$q_1 = 10(p_1)^{-1,1}(A_1)^{0,25}(F_1)^{0,62}$$

La ecuación de la demanda a corto plazo del segundo segmento y marca es:

$$q_2 = 50(p_2)^{-1,2}(A_2)^{0,4}(F_2)^{0,31}$$

El coste variable unitario de producción y distribución es idéntico para ambas marcas e igual a 30. ¿Cuál es el precio óptimo de la primera marca y su nivel óptimo de promoción si el objetivo es maximizar el beneficio de la empresa?

RESOLUCIÓN

$$p_1 = 30 \frac{-1,1}{1 - 1,1} = 330 \text{ u.m.}$$

$$A_1 = 0,25q_1(330 - 30) = 75q_1$$

$$F_1 = 0,62q_1(330 - 30) = 186q_1$$

$$q_1 = 10 \cdot 330^{-1,1} 75^{0,25} 186^{0,62} q_1^{0,87} = 1,2749643 q_1^{0,87}$$

$$q_1^{0,13} = 1,2749643 \quad ; \quad q_1 = 6,4792261$$

$$A_1 = 75 \cdot 6,4792261 = 485,94 \text{ u.m.}$$

**Problema
20**

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo.
Equilibrio competitivo de dos empresas

Sean dos empresas, 1 y 2, que son las únicas que compiten en cierto mercado. Las ventas de la primera dependen de su nivel de promoción y del precio que fija para su producto, así como del precio que determina, para el suyo, la otra empresa, según la siguiente función:

$$q_1 = 2,5A_1 - A_1^2 - 1,5p_1 + 2,5p_2$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Derivando esta función respecto de cada una de las variables y con relación al multiplicador, e igualando a cero las expresiones resultantes, se obtienen las condiciones necesarias de máximo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial E_A} &= 10 - 0,5E_A - \lambda = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial E_B} &= 9 - 0,4E_B - \lambda = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 10 - 0,5E_A = 9 - 0,4E_B \quad (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 20 - E_A - E_B = 0 \rightarrow 20 = E_A + E_B \quad (2)$$

Se dispone de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, del que se deduce que

$$E_A = 10 \text{ u.m. y } E_B = 10 \text{ u.m.}$$

Obsérvese que la expresión (1) no es sino el resultado de aplicar la condición

$$\frac{dq_A}{dE_A} = \frac{dq_B}{dE_B}$$

Cuando la respuesta marginal de las ventas en el territorio *A* es mayor que en el territorio *B* ($dq_A/dE_A > dq_B/dE_B$), es decir, cuando una u.m. gastada en el sector *A* tiene mayor incidencia en las ventas que si se gasta en el sector *B*, deben trasladarse fondos presupuestarios de *B* a *A* hasta que se produzca la igualdad. Otro tanto ocurrirá si dicha respuesta es mayor en el territorio *B*: deberían trasladarse fondos, de *A* a *B*, hasta que se llegue a la igualdad. El equilibrio y la maximización de las ventas se alcanzan cuando la respuesta marginal de la demanda al esfuerzo mercadotécnico es idéntico en ambos territorios.

En el sector *A* la demanda sería:

$$q_A = 50 + 10 \times 10 - 0,25 \times 10^2 = 125$$

y en el sector *B*:

$$q_B = 60 + 9 \times 10 - 0,2 \times 10^2 = 130$$

La demanda total valdrá:

$$q_A + q_B = 125 + 130 = 255$$

Problema

16

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo.
Distribución por territorios

Una empresa dispone de un presupuesto mercadotécnico de 318,33 u.m. y vende su producto en tres territorios: A, B y C. En cada uno de ellos se ha estimado la relación existente entre la cantidad demandada (q) en el mismo y el esfuerzo mercadotécnico (E) que en él se realiza, medido por las u.m. gastadas en actividades de mercadotecnia, habiendo resultado, para el territorio A:

$$q_A = 40 + 15E_A - 0,10E_A^2$$

para el B:

$$q_B = 60 + 9E_B - 0,2E_B^2$$

y para el C:

$$q_C = 50 + 50E_C - 0,15E_C^2$$

Se desea determinar la distribución del presupuesto, entre los tres territorios, que maximiza la demanda total, y el valor que toma esta última en cada zona, y en el conjunto de ellas, si se desea realizar dicha distribución.

RESOLUCIÓN

Se trata de maximizar

$$q_A + q_B + q_C = 40 + 15E_A - 0,10E_A^2 + 60 + 9E_B - 0,2E_B^2 + 50 + 50E_C - 0,15E_C^2$$

con la limitación

$$318,33 = E_A + E_B + E_C$$

Para ello puede procederse formulando la función lagrangiana

$$\begin{aligned} Z = & 150 + 15E_A - 0,10E_A^2 + 9E_B - 0,2E_B^2 + 50E_C - 0,15E_C^2 + \\ & + \lambda(318,33 - E_A - E_B - E_C) \end{aligned}$$

llegándose a la ecuación cúbica:

$$2A_1^3 - 7,5A_1^2 - 3,25A_1 + 0,75 = 0$$

que puede factorizarse¹ del siguiente modo:

$$(A_1 - 0,7083)(2A_1^2 - 6,0834A_1 - 1,0588722) = 0$$

La primera solución es 0,7083. Para este valor de A_1 se obtienen:

$$p_1 = 1,4230 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 1,6991 \text{ u.m.}$$

$$q_1 = 1,3845 \text{ u.f.}$$

$$B_1 = 0,2696 \text{ u.m.}$$

$$B_2 = -1,4191 \text{ u.m.}$$

Resolviendo la ecuación resultante de igualar a cero la expresión situada en el segundo paréntesis, se obtiene una solución negativa (-0,1651), lo cual es económicamente inviable, y otra positiva, e igual a 3,2068, para la cual p_1 valdría 0,2445 y, por tanto, q_1 sería negativo (-0,38325), lo cual tampoco es viable económicamente.

Evidentemente, se trata de un planteamiento a corto plazo. Si la situación se mantiene, la segunda empresa, cuyo beneficio es negativo (tiene pérdidas) habrá de terminar retirando su producto del mercado.

En equilibrio competitivo, cada firma trata de maximizar su beneficio tomando las primeras derivadas del mismo, respecto a las variables que puede controlar, e igualándolas a cero. Ninguna de las empresas puede conseguir mayores beneficios modificando unilateralmente la combinación mercadotécnica así alcanzada. En tanto que una de las empresas fije sus variables de marketing en la solución a que así se llega, la otra obtendrá el máximo beneficio posible fijando las variables en los niveles indicados para ella.

¹ Para factorizar la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ puede utilizarse cualquier procedimiento al uso, incluyendo el de prueba y error, que permita obtener una de las tres máximas posibles soluciones, x_1 , de manera que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1) \frac{(ax^3 + bx^2 + cx + d)}{(x - x_1)} = (x - x_1)(a'x^2 + b'x + c') = 0$$

x_1 es uno de los valores (tres como máximo) que hace que $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, y

$$a'x^2 + b'x + c' = (ax^3 + bx^2 + cx + d)/(x - x_1)$$

**Problema
21**

Optimización del presupuesto mercadotécnico. Equilibrio competitivo de dos empresas

Las empresas 1 y 2 son las únicas que compiten en el mercado de cierto producto. Las ventas de cada una de ellas dependen de sus gastos en promoción y del precio de su producto, así como del precio que fija la otra empresa y de la promoción que ésta realiza, según las siguientes funciones:

$$q_1 = 2.908,3726p_1^{-1,5}A_1^{0,1}p_2^{1,4}A_2^{0,05}$$

$$q_2 = 11.880,6014p_2^{-1,2}A_2^{0,043}p_1^{1,1}A_1^{0,04}$$

Los costes variables unitarios de producción y distribución son de 50 u.m. en la primera empresa y de 25 u.m. en la segunda. Los costes fijos por esos conceptos son de 100.000 y 150.000 u.m. para la primera y segunda empresas, respectivamente. Suponiendo que cada empresa trata de maximizar sus beneficios, ¿qué valores asignarán a sus variables mercadotécnicas? ¿Cuáles serán las ventas de cada una de ellas en situación de equilibrio competitivo? ¿Y sus beneficios?

RESOLUCIÓN

Cada empresa, i , tratará de maximizar su beneficio, y éste es igual a

$$B_i = (p_i - C_{v_i})q_i - C_{F_i} - A_i$$

Para ello fijará, como condiciones necesarias:

$$\frac{\partial B_i}{\partial p_i} = (p_i - C_{v_i}) \frac{\partial q_i}{\partial p_i} + q_i = 0$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial A_i} = (p_i - C_{v_i}) \frac{\partial q_i}{\partial A_i} - 1 = 0$$

Así pues:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial p_1} &= (p_1 - 50)2.908,3726(-1,5)p_1^{-2,5}A_1^{0,1}p_2^{1,4}A_2^{0,05} + q_1 = \\ &= (p_1 - 50)(-1,5)q_1p_1^{-1} + q_1 = 0 \rightarrow p_1 = 50 \frac{1,5}{0,5} = 150 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B}{\partial A_2} = 0 \rightarrow A_2 = c_2 q_2 (p_2 - C_v) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial F_1} &= p_1 k_1 p_1^{b_1} A_1^{b_2} b_3 F_1^{b_3-1} - C_v k_1 p_1^{b_1} A_1^{b_2} b_3 F_1^{b_3-1} - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow p_1 q_1 b_3 F_1^{-1} - C_v q_1 b_3 F_1^{-1} - 1 = 0 \rightarrow F_1 = b_3 q_1 (p_1 - C_v) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial F_2} = 0 \rightarrow F_2 = c_3 q_2 (p_2 - C_v) \quad (6)$$

Las expresiones (1) y (2) definen los precios óptimos de cada una de las marcas. Las expresiones (3), (4), (5) y (6), en unión de las correspondientes a las de las demandas de cada una de las marcas, forman un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas (q_1 , A_1 , F_1 , q_2 , A_2 y F_2) que permite determinar los gastos óptimos en promoción y en fuerza de ventas, para cada marca, y los niveles óptimos de demanda en cada segmento.

El presupuesto total de promoción y venta personal es

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + F_1 + F_2 &= b_2 q_1 (p_1 - C_v) + c_2 q_2 (p_2 - C_v) + b_3 q_1 (p_1 - C_v) + \\ &+ c_3 q_2 (p_2 - C_v) = (b_2 + b_3) q_1 (p_1 - C_v) + (c_2 + c_3) q_2 (p_2 - C_v) \end{aligned}$$

El presupuesto total óptimo destinado a la primera marca es

$$A_1 + F_1 = (b_2 + b_3) q_1 (p_1 - C_v)$$

y el destinado a la segunda:

$$A_2 + F_2 = (c_2 + c_3) q_2 (p_2 - C_v)$$

El presupuesto óptimo total de promoción será:

$$A_1 + A_2 = b_2 q_1 (p_1 - C_v) + c_2 q_2 (p_2 - C_v)$$

y el destinado a fuerza de ventas:

$$F_1 + F_2 = b_3 q_1 (p_1 - C_v) + c_3 q_2 (p_2 - C_v)$$

Problema 18

Optimización del presupuesto mercadotécnico a corto plazo.
Distribución por marcas, segmentos y variables

La empresa Dunedisa se dedica a la fabricación y venta de un jabón dermatológico que ha diferenciado asignándole dos marcas, cada una de las cuales re-

cibe un envase diferente. La primera se distribuye en farmacias y se dirige a personas con enfermedades en la piel. La segunda se distribuye en droguerías y en supermercados y se dirige a personas con cierto nivel de renta que desean utilizar habitualmente un gel de baño de propiedades dermatológicas. La demanda anual del primer segmento y marca responde, a corto plazo, a la expresión

$$q_1 = 55,579 p_1^{-10/9} A_1^{0,25} F_1^{0,6}$$

Siendo la ecuación correspondiente a la demanda anual del segundo segmento y marca:

$$q_2 = 275,7636 p_2^{-1,25} A_2^{0,5} F_2^{0,3}$$

El coste variable unitario de fabricación y distribución es idéntico para ambas marcas e igual a 20 u.m. Además, por ambos conceptos ha de soportar unos costes fijos de 6.000.000 de u.m. anuales. Se desea determinar el precio óptimo en cada uno de los mercados y la distribución óptima del presupuesto de promoción y fuerza de ventas, en orden a maximizar el beneficio anual de la empresa, y el valor de este último.

RESOLUCIÓN

Aplicando las expresiones deducidas en el ejercicio anterior se obtiene:

$$p_1 = 20 \frac{(-10/9)}{1 + (-10/9)} = 20 \frac{-10}{9 - 10} = 200 \text{ u.m.}$$

$$p_2 = 20 \frac{-1,25}{1 + (-1,25)} = 100 \text{ u.m.}$$

$$A_1 = 0,25 q_1 (200 - 20) = 45 q_1$$

$$A_2 = 0,5 q_2 (100 - 20) = 40 q_2$$

$$F_1 = 0,6 q_1 (200 - 20) = 108 q_1$$

$$F_2 = 0,3 q_2 (100 - 20) = 24 q_2$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de demanda se obtiene:

$$\begin{aligned} q_1 &= 55,579 \times 200^{-10/9} \times 45^{0,25} q_1^{0,25} \times 108^{0,6} q_1^{0,6} \rightarrow \\ &\rightarrow q_1^{0,15} = 6,6308 \rightarrow q_1 = 300.000 \text{ u.f.} \end{aligned}$$

y esta desviación se puede desglosar como sigue:

$$D_T = (q_r m_r - q_s m_s) + (q_s m_s - q_s m_r)$$

donde el primer sumando es la desviación en márgenes:

$$D_M = (q_r m_r - q_s m_s) = q_r (m_r - m_s)$$

y el segundo es la desviación en cantidades:

$$D_Q = (q_s m_s - q_s m_r) = m_s (q_s - q_r)$$

La empresa Lunedosa había previsto unas ventas de 600.000 u.f. y un beneficio bruto de 12.000.000 de u.m. Por consiguiente:

$$BB_s = 12.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$q_s = 600.000 \text{ u.f.}$$

$$m_s = \frac{BB_s}{q_s} = \frac{12.000.000}{600.000} = 20 \text{ u.m.}$$

Las cantidades reales fueron:

$$BB_r = 16.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$q_r = 400.000 \text{ u.f.}$$

$$m_r = \frac{BB_r}{q_r} = \frac{16.000.000}{400.000} = 40 \text{ u.m.}$$

Por consiguiente:

$$D_T = BB_r - BB_s = 16.000.000 - 12.000.000 = 4.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$D_M = 400.000(40 - 20) = 8.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$D_Q = 20(400.000 - 600.000) = -4.000.000 \text{ de u.m.}$$

Como resulta evidente, la desviación total positiva que se observa se ha debido a una elevada desviación en márgenes que compensó la negativa desviación en la cantidad vendida. Para saber si la desviación en márgenes tiene su base en una elevación del precio o en una reducción del coste variable unitario, sobre los niveles previstos, sería precisa cierta información adicional.

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

También se precisaría más información para saber si la reducción de las ventas, sobre la magnitud prevista, se debe a una desfavorable evolución general del mercado del tipo de producto que elabora esta empresa o si se debe a una reducción de la participación en el mercado del PK.2000.

Problema 23

Control del presupuesto mercadotécnico

Sabiendo que la empresa del problema anterior había previsto un precio de venta de 1.000 u.m. y que éste resultó ser de 1.050 u.m., se desea analizar con mayor detalle su desviación en márgenes.

RESOLUCIÓN

La desviación en márgenes puede descomponerse del siguiente modo:

$$D_M = q_r(m_r - m_s) = q_r[(p_r - C_{v_r}) - (p_s - C_{v_s})] = q_r(p_r - p_s) + q_r(C_{v_s} - C_{v_r})$$

donde

$$D_P = q_r(p_r - p_s)$$

es la desviación en precios y

$$D_C = q_r(C_{v_s} - C_{v_r})$$

es la desviación en costes variables.

En el caso de la empresa Lunedosa se tiene que:

$$p_s = 1.000 \text{ u.m.}$$

$$C_{v_s} = p_s - m_s = 1.000 - 20 = 980 \text{ u.m.}$$

$$p_r = 1.050 \text{ u.m.}$$

$$C_{v_r} = p_r - m_r = 1.050 - 40 = 1.010 \text{ u.m.}$$

y, por tanto:

$$D_P = 400.000(1.050 - 1.000) = 20.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$D_C = 400.000(980 - 1.010) = -12.000.000 \text{ de u.m.}$$

La segunda empresa considera que sus ventas dependen de sus gastos de promoción, de los que realiza la primera y de los precios que ambas fijan, conforme a la expresión

$$q_2 = 2,5A_2 - 3p_2 - 2,5A_1 + p_1$$

El coste variable unitario de producción y distribución es idéntico para las dos empresas e igual a 0,5 u.m. Suponiendo que cada empresa trata de maximizar sus beneficios, ¿qué valores asignarán a sus variables de mezcla mercadotécnica? Si los costes fijos son de 0,3 u.m. para la primera empresa y de 0,2 u.m. para la segunda, ¿cuáles serán los beneficios de cada una de ellas en situación de equilibrio?

RESOLUCIÓN

Cada empresa i tratará de maximizar su beneficio, y éste es igual a

$$B_i = (p_i - C_v)q_i - C_F - A_i$$

Para ello fijará, como condiciones necesarias:

$$\frac{\partial B_i}{\partial p_i} = (p_i - C_v) \frac{\partial q_i}{\partial p_i} + q_i = 0$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial A_i} = (p_i - C_v) \frac{\partial q_i}{\partial A_i} - 1 = 0$$

Así pues:

$$\frac{\partial B_1}{\partial p_1} = (p_1 - 0,5)(-1,5) + q_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial A_1} = (p_1 - 0,5)(2,5 - 2A_1) - 1 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial p_2} = (p_2 - 0,5)(-3) + q_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial A_2} = (p_2 - 0,5)(2,5) - 1 = 0 \quad (4)$$

De la expresión (4) se deduce que

$$p_2 = 0,9 \text{ u.m.}$$

Al sustituir este resultado en la (3) se obtiene:

$$q_2 = 1,2 \text{ u.f.}$$

Introduciendo estos dos valores en la ecuación de la demanda de la segunda empresa, se llega a la expresión

$$1,2 = 2,5A_2 - 3 \times 0,9 - 2,5A_1 + p_1 \rightarrow 2,5A_2 = 3,9 + 2,5A_1 - p_1 \quad (5)$$

Por otra parte, de la expresión (1) se deduce que

$$q_1 = 1,5p_1 - 0,75$$

Al sustituir esta expresión, y el valor de p_2 , en la ecuación de la demanda de la primera empresa, tras agrupar los términos, se obtiene:

$$2,5A_1 - A_1^2 - 3p_1 + 3 = 0 \quad (6)$$

De la ecuación (2) se deduce que

$$2,5p_1 - 2A_1p_1 + A_1 - 2,25 = 0 \quad (7)$$

Despejando A_2 en la ecuación (5) se obtiene

$$A_2 = 1,56 + A_1 - 0,4p_1$$

Despejando, semejantemente, p_1 en la ecuación (7) se deduce que

$$p_1 = \frac{2,25 - A_1}{2,5 - 2A_1}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (6) se obtiene

$$2,5A_1 - A_1^2 - 3 \frac{2,25 - A_1}{2,5 - 2A_1} + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (2,5A_1 - A_1^2)(2,5 - 2A_1) - 3(2,25 - A_1) + 3(2,5 - 2A_1) = 0$$

$$m_s = p_s - C_{v_s} = 250$$

$$p_r = 750$$

$$C_{v_r} = 600$$

$$m_r = p_r - C_{v_r} = 150$$

$$Q_s = 40.000.000$$

$$q_s = 5.000.000$$

$$t_s = \frac{q_s}{Q_s} = \frac{1}{8}$$

$$Q_r = 35.000.000$$

$$q_r = 7.000.000$$

$$t_r = \frac{q_r}{Q_r} = \frac{1}{5}$$

Con estos datos se han realizado los cálculos de las desviaciones en la tabla 11.3.

La negativa desviación total se explica por una negativa desviación en márgenes que no fue compensada con la favorable desviación en la cantidad vendida. Dicha desviación en márgenes se debe a la sustancial inferioridad del pre-

TABLA 11.3

<p>Desviación total:</p> $D_T = q_r m_r - q_s m_s =$ $= 7.000.000 \times 150 -$ $- 5.000.000 \times 250 =$ $= -200.000.000$	<p>Desviación en márgenes:</p> $D_M = q_r(m_r - m_s) =$ $= 7.000.000(150 - 250) =$ $= -700.000.000$	<p>Desviación en precios:</p> $D_P = q_r(p_r - p_s) =$ $= 7.000.000(750 - 1.000) =$ $= -1.750.000.000$
		<p>Desviación en costes:</p> $D_C = q_r(C_{v_r} - C_{v_s}) =$ $= 7.000.000(750 - 600) =$ $= 1.050.000.000$
	<p>Desviación en cantidades:</p> $D_Q = m_s(q_r - q_s) =$ $= 250(7.000.000 -$ $- 5.000.000) =$ $= 500.000.000$	<p>Desviación en cuotas:</p> $D_K = m_s Q_r(t_r - t_s) =$ $= 250 \times 35.000.000(1/5 - 1/8) =$ $= 656.250.000$
		<p>Desviación en el tamaño del mercado:</p> $D_G = m_s t_s(Q_r - Q_s) = 250$ $(1/8)(35.000.000 - 40.000.000) =$ $= -156.250.000$

cio real respecto al previsto, que provoca una desviación que no fue cubierta con la favorable evolución del coste variable unitario. En cuanto a la desviación en cantidades, su importe positivo se alcanzó gracias a la mayor participación del producto en las ventas del mercado que compensó la negativa evolución de las ventas globales de la industria. Si bien no se cuenta con información suficiente para asegurarlo, dicho aumento de participación sobre la cifra prevista puede haber sido conseguido gracias a la fijación de un precio de venta inferior al que se había estimado inicialmente.

**Problema
26**

Control del presupuesto mercadotécnico

Una empresa tenía previsto para el pasado año obtener un margen unitario de 250 u.m. vendiendo su producto a un precio unitario de 1.000 u.m. En realidad ha vendido 7.000.000 de u.f. con un coste variable unitario de 600 u.m. ¿Cuánto ha valido su desviación en costes?

RESOLUCIÓN

$$m_s = p_s - C_{vs}$$

de donde

$$C_{vs} = p_s - m_s = 1.000 - 250 = 750$$

Por consiguiente:

$$D_C = q_r(C_{vs} - C_{vr}) = 7.000.000(750 - 600) = 1.050.000.000 \text{ u.m.}$$

**Problema
27**

Control del presupuesto mercadotécnico

El beneficio bruto estándar previsto para un producto era de 1.250.000.000 de u.m., con un margen de beneficio bruto unitario de 250 u.m. En realidad se han vendido 7.000.000 de u.f. ¿Cuánto ha valido la desviación en cantidades?

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_Q &= m_s(q_r - q_s) = m_s q_r - m_s q_s = m_s q_r - BB_s = \\ &= 250 \cdot 7.000.000 - 1.250.000.000 = 500.000.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_1}{\partial A_1} &= (p_1 - 50)2.908,3726p_1^{-1.5} \times 0,1A_1^{-0.9}p_2^{-1.4}A_2^{0.05} - 1 = \\ &= (150 - 50)0,1q_1A_1^{-1} - 1 = 0 \rightarrow A_1 = 10q_1\end{aligned}$$

De forma semejante, para la segunda empresa se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_2}{\partial p_2} &= (p_2 - 25)(-1,2)q_2p_2^{-1} + q_2 = 0 \rightarrow p_2 = 25 \frac{1,2}{0,2} = 150 \text{ u.m.} \\ \frac{\partial B_2}{\partial A_2} &= (150 - 25)0,048q_2A_2^{-1} - 1 = 0 \rightarrow A_2 = 6q_2\end{aligned}$$

Al sustituir estos resultados en las ecuaciones de demanda de los productos de ambas empresas, se deduce que

$$\begin{aligned}q_1 &= 2.908,3726 \times 150^{-1.5} \times 10^{0.1}q_1^{0.1} \times 150^{1.4} \times 6^{0.05}q_2^{0.05} = \\ &= 2.426,3221q_1^{0.1}q_2^{0.05} \rightarrow q_1 = 2.426,3221^{1/0.9}q_2^{0.05/0.9}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}q_2 &= 11.880,6014 \times 150^{-1.2} \times 6^{0.048}q_2^{0.048} \times 150^{1.1} \times 10^{0.04}q_1^{0.04} = \\ &= 8.601,6263q_2^{0.048}q_1^{0.04} \rightarrow q_2 = 8.601,6263^{1/0.952}q_1^{0.04/0.952}\end{aligned}\quad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce que²

$$\begin{aligned}q_1 &= 2.426,3221^{1/0.9} \times 8.601,6263^{0.05/0.952 \times 0.9} q_1^{0.04/0.952 \times 0.9} \rightarrow \\ &\rightarrow q_1 = 10.000 \text{ u.f.} \\ q_2 &= 8.601,6263^{1/0.952} \times 10.000^{0.04/0.952} = 20.000 \text{ u.f.}\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$A_1 = 10 \times 10.000 = 100.000 \text{ u.m.}$$

$$A_2 = 6q_2 = 120.000 \text{ u.m.}$$

² También puede operarse con logaritmos haciendo:

$$\left. \begin{aligned} \ln q_1 \frac{1}{0.9} \ln 2.426,3221 + \frac{0.05}{0.9} \ln q_2 \\ \ln q_2 \frac{1}{0.952} \ln 8.601,6263 + \frac{0.4}{0.952} \ln q_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \ln q_1 = 9,21034 \rightarrow q_1 = 10.000 \text{ u.f.} \\ \ln q_2 = 9,90349 \rightarrow q_2 = 20.000 \text{ u.f.} \end{cases}$$

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

El beneficio de cada una de las empresas se obtiene, ya sin dificultad, haciendo:

$$B_1 = (150 - 50)10.000 - 100.000 - 100.000 = 800.000 \text{ u.m.}$$

$$B_2 = (150 - 25)20.000 - 150.000 - 120.000 = 2.230.000 \text{ u.m.}$$

Ninguna de las empresas podría mejorar sus beneficios modificando unilateralmente su combinación mercadotécnica por otra. En tanto que una de las empresas fije sus variables en la solución indicada, la otra obtendrá el máximo beneficio fijando las suyas en la solución indicada para ella.

11.3. EL CONTROL DEL PRESUPUESTO MERCADOTÉCNICO

Problema 22

Control del presupuesto mercadotécnico

A finales del pasado año la empresa Lunedosa había previsto, para el ejercicio que ahora termina, la venta de 600.000 u.f. de su producto PK.2000, lo que supondría, según tales estimaciones, un margen de beneficio bruto de 12.000.000 de u.m. Las ventas reales han resultado ser de 400.000 u.f. y el beneficio bruto ha sido de 16.000.000 de u.m. Se desea analizar la desviación total del beneficio dividiéndola en desviación en cantidades y desviación en márgenes.

RESOLUCIÓN

Denominando m al margen de beneficio bruto unitario, o diferencia entre el precio de venta y el coste variable unitario:

$$m = p - C_v$$

y llamando q a la cantidad vendida, el beneficio bruto (es decir, antes de deducir los costes fijos) será:

$$BB = qm$$

Denotando con el subíndice r a las cantidades reales y con el s a las cantidades presupuestadas, la desviación entre el beneficio real y el previsto será:

$$D_T = BB_r - BB_s = q_r m_r - q_s m_s$$

$$\hat{y}_t = \ln \hat{V}_t$$

$$a = \ln d$$

$$b = \ln c$$

$$x_t = 1/t$$

Pero la variable tiempo no es la única que explica las ventas y, por consiguiente:

$$y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$$

donde $y_t = \ln V_t$ y ε_t es una variable que recoge las denominadas «perturbaciones aleatorias», o residuos, es decir, todos aquellos factores que influyen en V_t diferentes del factor tiempo. Se estima que estos residuos tienen escasa relevancia y que se compensan entre sí, por lo que el valor medio de ε_t es nulo¹.

En el método de los mínimos cuadrados se trata de minimizar la suma de los cuadrados de esta variable que recoge la diferencia entre y_t e \hat{y}_t ; es decir:

$$\min: H = \sum_{t=1}^m \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^m (y_t - a - bx_t)^2$$

donde m es el número de observaciones registradas (diez en este caso). La condición necesaria exige que las derivadas parciales de H con respecto a los parámetros a estimar (a y b) se anulen y, por tanto:

$$\frac{\partial H}{\partial a} = -2 \sum_{t=1}^m (y_t - a - bx_t) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial b} = -2 \sum_{t=1}^m (y_t - a - bx_t)x_t = 0$$

de donde se obtiene el denominado «sistema de ecuaciones normales»:

$$\sum_{t=1}^m y_t = ma + b \sum_{t=1}^m x_t$$

$$\sum_{t=1}^m y_t x_t = a \sum_{t=1}^m x_t + b \sum_{t=1}^m x_t^2$$

¹ Más rigurosamente, se supone que esta variable aleatoria:

1. Sigue una distribución normal con esperanza matemática nula y desviación típica constante, cualquiera que sea el valor de la variable explicativa ($1/t$ en este caso).
2. No está correlacionada con sus valores pasados ni con la variable explicativa ($1/t$ en este caso).

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a y b), del que se obtiene:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m y_i x_i - m \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^m x_i^2 - m(\bar{x})^2} ; \quad a = \bar{y} - b \bar{x}$$

donde \bar{y} y \bar{x} son las medias aritméticas de las variables y_i y x_i , respectivamente; es decir:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m} ; \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}$$

Los cálculos precisos para resolver el problema y realizar otras estimaciones posteriores se contienen en la tabla 11.5.

TABLA 11.5

$y_i = \ln V_i$	$x_i = 1/W_i$	y_i^2	x_i^2	$y_i x_i$
5,5215	1	30,4870	1	5,5215
6,2146	0,5	38,6213	0,25	3,1073
6,4377	0,33	41,4440	0,11	2,1459
6,5862	0,25	43,3780	0,0625	1,6466
6,6201	0,20	43,8257	0,04	1,3240
6,6846	0,166	44,6839	0,0277	1,1141
6,7153	0,142857	45,0953	0,0204	0,9599
6,7334	0,125	45,3387	0,015625	0,8417
6,7569	0,11	45,6557	0,012346	0,7508
6,7685	0,1	45,8126	0,01	0,67685
65,0389	2,928968	424,3433	1,5498	18,0887

Así pues:

$$\bar{x} = \frac{2,928968}{10} = 0,2928968$$

$$\bar{y} = \frac{65,0389}{10} = 6,50389$$

$$b = \frac{18,0887 - 10 \times 6,50389 \times 0,2928968}{1,5498 - 10 \times 0,2928968^2} = -1,388879$$

Así pues, el favorable resultado obtenido en márgenes se debe a la asignación de un precio por encima del previsto que permitió compensar la desfavorable evolución de los costes variables, cuyo importe unitario fue 30 u.m. superior al estimado.

**Problema
24**

Control del presupuesto mercadotécnico

Sabiendo que la empresa de los problemas anteriores había previsto que las ventas totales del mercado al que se dirige el producto PK.2000 fueran, para el conjunto de las empresas que compiten en el mismo, de 24.000.000 de u.f., y que éstas resultaron ser de 28.000.000, se desea analizar, con mayor detalle, su desviación en cantidades.

RESOLUCIÓN

Denominando Q a las ventas totales del conjunto de empresas que compiten en el mercado y t a la proporción de las mismas correspondiente al producto de Lunedosa (cuota de ventas de este producto), como es obvio:

$$q = tQ$$

y, por tanto, la desviación en cantidades puede descomponerse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} D_Q &= m_s(q_r - q_s) = m_s(t_r Q_r - t_s Q_s) = m_s[(t_r Q_r - t_s Q_r) + (t_s Q_r - t_s Q_s)] = \\ &= m_s Q_r (t_r - t_s) + m_s t_s (Q_r - Q_s) \end{aligned}$$

donde el primer sumando es la desviación en cuotas:

$$D_K = m_s Q_r (t_r - t_s)$$

y el segundo es la desviación en el tamaño global del mercado:

$$D_G = m_s t_s (Q_r - Q_s)$$

En el caso del producto PK.2000 se tiene que:

$$Q_s = 24.000.000$$

$$t_s = \frac{q_s}{Q_s} = \frac{600.000}{24.000.000} = \frac{1}{40}$$

$$Q_r = 28.000.000$$

$$t_r = \frac{q_r}{Q_r} = \frac{400.000}{28.000.000} = \frac{1}{70}$$

y, por consiguiente:

$$D_K = 20 \times 28.000.000 \left(\frac{1}{70} - \frac{1}{40} \right) = -6.000.000 \text{ de u.m.}$$

$$D_G = 20 \frac{1}{40} (28.000.000 - 24.000.000) = 2.000.000 \text{ de u.m.}$$

La desfavorable desviación en cantidades observada (-4.000.000) se debe a una participación en las ventas del mercado inferior a la prevista, pues dichas ventas globales fueron superiores a las que se habían estimado. Falta información para saberlo, pero es posible que la asignación de un precio unitario mayor que el previsto haya redundado en una reducción de la cuota de ventas del producto. No obstante, si el objetivo de la empresa es maximizar su beneficio, la decisión puede considerarse acertada.

**Problema
25**

Control del presupuesto mercadotécnico

En la tabla 11.2 se comparan las previsiones y los resultados reales del producto D2DρSA, fabricado y distribuido por la empresa Unedonsa.

TABLA 11.2

	Previsiones	Cantidades reales
Ventas globales de todo el sector (u.f.)	40.000.000	35.000.000
Ventas de D2DρSA (u.f.)	5.000.000	7.000.000
Precio unitario de venta de D2DρSA (u.m.)	1.000	750
Coste variable unitario de D2DρSA (u.m.)	750	600

Se desea analizar la desviación total del beneficio bruto generado por este producto.

RESOLUCIÓN

Los datos previos para el análisis son, según el enunciado del problema, los siguientes:

$$p_s = 1.000$$

$$C_v = 750$$

Pero, según se señaló en el problema anterior, esta variable tiene media nula y, por consiguiente:

$$\sigma^2(\varepsilon_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2$$

Al minimizarse, en el método de los mínimos cuadrados, la suma de los cuadrados de los residuos $\left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2\right)$, se está minimizando la variabilidad de la variable residual.

Se demuestra, sin dificultad, que la relación existente entre la varianza de la variable explicada ($\sigma^2(y_i)$), la de la variable explicativa ($\sigma^2(x_i)$) y la de la variable residual ($\sigma^2(\varepsilon_i)$) es la siguiente:

$$\sigma^2(y_i) = b^2 \sigma^2(x_i) + \sigma^2(\varepsilon_i) \quad (1)$$

Así pues, en este caso:

$$\sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2(y_i) - b^2 \sigma^2(x_i) = 0,133745 - (-1,388879)^2 0,069191 = 0,0002766$$

La varianza mide la variabilidad, o dispersión, de los datos en torno a su media. Es el promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. En la expresión (1) cabe observar cómo una parte de la variabilidad de la variable explicada proviene de la variabilidad de la variable explicativa ($b^2 \sigma^2(x_i)$) y el resto proviene de la variabilidad de los residuos $\sigma^2(\varepsilon_i)$. A la primera se le denomina variabilidad, o dispersión, *explicada* o *factorial*, y a la segunda, que es la que se trata de minimizar, se le llama variabilidad, o dispersión, *no explicada* o *residual*. Al tanto por uno que de la variabilidad total representa la parte factorial se le denomina *coeficiente de determinación simple*:

$$r = \frac{b^2 \sigma^2(x_i)}{\sigma^2(y_i)} = \frac{\sigma^2(y_i) - \sigma^2(\varepsilon_i)}{\sigma^2(y_i)}$$

Como es obvio, el valor de r no puede ser inferior a cero ni superior a la unidad. El ajuste de regresión será tanto mejor cuanto menor sea $\sigma^2(\varepsilon_i)$ y, por consiguiente, cuanto más próximo a la unidad se encuentre r .

En este caso se obtiene:

$$r = \frac{(-1,388879)^2 0,069191}{0,133745} = 0,9979$$

Otro coeficiente que puede dar idea de la bondad del ajuste es la raíz cuadrada del coeficiente de determinación, que se denomina *coeficiente de correlación simple*:

$$\rho = r^{1/2} = \frac{b\sigma(x_i)}{\sigma(y_i)}$$

Su valor puede oscilar entre -1 (en cuyo caso se dice que la correlación entre las variables y_i y x_i es perfecta y negativa) y 1 (correlación perfecta y positiva). Se dice que no existe correlación, o que las variables no están correlacionadas, cuando vale cero.

En este problema se obtiene:

$$\rho = \frac{(-1,388879)\sqrt{0,069191}}{\sqrt{0,133745}} = -0,999$$

La correlación es casi perfecta y negativa.

Para estudiar la bondad del ajuste también puede realizarse un análisis de la varianza y un test en F como el que se estudiará en el capítulo siguiente en experimentación comercial.

c) Las estimaciones para los cuatro próximos bimestres serán:

$$\hat{V}_{11} = 1.002,9372 \times 0,249355^{1/11} = 883,97 \text{ u.f.}$$

$$\hat{V}_{12} = 1.002,9372 \times 0,249355^{1/12} = 893,32 \text{ u.f.}$$

$$\hat{V}_{13} = 1.002,9372 \times 0,249355^{1/13} = 901,31 \text{ u.f.}$$

$$\hat{V}_{14} = 1.002,9372 \times 0,249355^{1/14} = 908,22 \text{ u.f.}$$

Problema
32

Previsión de la demanda. Modelos de extrapolación

El valor medio de la variable y es 12 y el de la variable x es 10. La recta de regresión lineal de y sobre x corta el eje de ordenadas a una altura igual a 3. ¿Cuánto vale el otro parámetro de regresión?

RESOLUCIÓN

En general:

$$\bar{y} = a + b\bar{x}$$

**Problema
28**
Control del presupuesto mercadotécnico

Las ventas globales de un producto en todo el sector han sido de 35.000.000 de u.f. Se preveía un margen de beneficio unitario estándar de 250 u.m., una cuota de ventas estándar de un 12,5 por 100 y un beneficio bruto estándar de 1.250.000.000 de u.m. ¿Cuál ha sido su desviación en el tamaño del mercado?

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} D_G &= m_s t_s (Q_r - Q_s) = m_s t_s Q_r - m_s t_s Q_s = m_s t_s Q_r - m_s q_s = \\ &= m_s t_s Q_s - BB_s = 250 \cdot 0,125 \cdot 35.000.000 - 1.250.000.000 = \\ &= -156.250.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

**Problema
29**
Control del presupuesto mercadotécnico

Una empresa tenía previsto vender el pasado año 5.000.000 de u.f. de su producto, suponiendo que las ventas totales de la industria fueran 40.000.000 de u.f. En ese caso habría obtenido un beneficio bruto de 10.000.000.000 de u.m. En realidad, las ventas totales de toda la industria han sido 35.000.000 de u.f. ¿Cuánto vale la desviación en el tamaño del mercado?

RESOLUCIÓN

Es el mismo caso del problema anterior aunque partiendo de unos datos diferentes.

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{q_s}{Q_s} = \frac{5.000.000}{40.000.000} = \frac{1}{8} \\ m_s &= \frac{BB_s}{q_s} = \frac{10.000.000.000}{5.000.000} = 2.000 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

$$D_G = m_s t_s (Q_r - Q_s) = 2.000 \cdot \frac{1}{8} (35.000.000 - 40.000.000) = -1.250.000.000 \text{ u.m.}$$

11.4. ESTIMACIÓN Y PREVISIÓN DE LA DEMANDA

Problema
30

Previsión de la demanda. Modelos de extrapolación

La empresa Farmunedsa lanzó hace veinte meses un nuevo producto químico-farmacéutico. Las ventas registradas, en unidades físicas, en los diez bimestres transcurridos se recogen en la tabla 11.4.

TABLA 11.4

Bimestres (t)	Ventas (V_t)
1	250
2	500
3	625
4	725
5	750
6	800
7	825
8	840
9	860
10	870

Aparentemente, la evolución de las ventas podría ajustarse a una ecuación de crecimiento exponencial inverso. Se desea estimar dicha ecuación mediante regresión por mínimos cuadrados.

RESOLUCIÓN

La función de crecimiento exponencial inverso responde a la expresión

$$\hat{V}_t = dc^{1/t}$$

donde \hat{V}_t son las ventas previstas para el período t , y d y c son los parámetros que han de estimarse.

Tomando logaritmos, para conseguir una relación lineal, se obtiene:

$$\hat{y}_t = a + bx_t$$

donde:

Problema
34

Previsión de la demanda. Modelos de extrapolación

Estudiar la bondad del ajuste del problema anterior.

RESOLUCIÓN

La varianza de la variable explicativa ($\ln t$) vale:

$$\sigma^2(x_t) = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m x_t^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{10} 27,65024685 - (1,5104413)^2 = 0,4835917$$

Por consiguiente, la varianza de la variable residual será:

$$\sigma^2(\varepsilon_t) = \sigma^2(V) - b^2 \sigma^2(x_t) = 483.895 - 1.000,309852^2 \times 0,4835917 = 3,5049$$

y el coeficiente de determinación valdrá:

$$r = \frac{\sigma^2(V) - \sigma^2(\varepsilon_t)}{\sigma^2(V)} = \frac{483.895 - 3,5049}{483.895} = 0,999993$$

es decir, casi la unidad. En cuanto al coeficiente de correlación, se obtiene:

$$\rho = r^{1/2} = 0,999996$$

La correlación es positiva y casi perfecta.

Problema
35

Previsión de la demanda. Modelos de extrapolación

Se desea prever las ventas de los próximos cuatro meses del producto «ZCO, BT, D, AI» de la empresa Sinunedisa de los problemas anteriores.

RESOLUCIÓN

Las ventas previstas del próximo mes ($t = 11$) serán:

$$\hat{V}_{11} = 99,09 + 1.000,31 \ln 11 = 2.497,73$$

En cuanto a los tres meses siguientes ($t = 12$, $t = 13$ y $t = 14$), se obtiene:

$$\hat{V}_{12} = 99,09 + 1.000,31 \ln 12 = 2.584,77$$

$$\hat{V}_{13} = 99,09 + 1.000,31 \ln 13 = 2.664,83$$

$$\hat{V}_{14} = 99,09 + 1.000,31 \ln 14 = 2.738,97$$

**Problema
36**

Previsión de la demanda. Modelos explicativos

Una empresa ha medido las ventas de su producto en diez meses consecutivos, en cada uno de los cuales el precio unitario fue diferente. Los resultados obtenidos se recogen en la tabla 11.9

TABLA 11.9

Mes	Precio (u.m.)	Ventas (u.f.)
1	100	1.580
2	105	1.550
3	110	1.530
4	115	1.500
5	120	1.470
6	112	1.510
7	108	1.540
8	102	1.570
9	95	1.620
10	90	1.650

Se desea estimar la función exponencial que, presumiblemente, relaciona ambas variables; es decir, una función del tipo

$$\hat{V}_i = kp_i^{-c}$$

Se desea, asimismo, estudiar la bondad del ajuste.

RESOLUCIÓN

Tomando logaritmos se obtiene:

$$\ln \hat{V}_i = \ln k + (-c) \ln p_i$$

$$a = 6,50389 - (-1,388879)0,2928968 = 6,910688$$

$$c = e^b = e^{-1,388879} = 0,249355$$

$$d = e^a = e^{6,910688} = 1.002,9372$$

La ecuación estimada es

$$\hat{y}_t = 6,910688 - 1,388879x_t$$

o, lo que es lo mismo:

$$\hat{V}_t = 1.002,9372 \times 0,249255^{1/t}$$

Problema
31

Previsión de la demanda. Modelos de extrapolación

Se desea:

- Determinar la dispersión de las ventas del producto anterior en torno a su media.
- Estudiar la bondad del ajuste.
- Prever las ventas de los próximos cuatro bimestres.

RESOLUCIÓN

a) La desviación de las ventas respecto a su media en el bimestre t será $V_t - \bar{V}$. Para medir la dispersión media de las ventas respecto a \bar{V} , en los m bimestres observados, se puede utilizar su varianza, que es la media de los cuadrados de esas desviaciones; es decir:

$$\begin{aligned}\sigma^2(V_t) &= \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (V_t - \bar{V})^2 = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (V_t^2 - 2V_t\bar{V} + \bar{V}^2) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m V_t^2 - \frac{1}{m} 2\bar{V} \sum_{t=1}^m V_t + \frac{1}{m} m\bar{V}^2 = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m V_t^2 - 2\bar{V}^2 + \bar{V}^2 = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m V_t^2 - (\bar{V})^2\end{aligned}$$

En la tabla 11.6 se recogen los cálculos precisos para la resolución.

TABLA 11.6

Ventas (V_i)	V_i^2	
250	62.500	$\bar{V} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i = \frac{1}{10} 7.045 = 704,5$ $\sigma^2(V_i) = \frac{1}{10} 5.313.975 - (704,5)^2 = 35.077,25$
500	250.000	
625	390.625	
725	525.625	
750	562.500	
800	640.000	
825	680.625	
840	705.600	
860	739.600	
870	756.900	
7.045	5.313.975	

A la raíz cuadrada positiva de la varianza se le denomina «desviación de la variable» en cuestión y también puede constituir una medida de dispersión de la misma:

$$\sigma(V_i) = 35.077,25^{1/2} = 187,29$$

b) De forma semejante se calculan las varianzas de las variables de regresión lineal, x_i e y_i , definidas anteriormente:

$$\sigma^2(y_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^2 - (\bar{y})^2$$

$$\sigma^2(x_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\bar{x})^2$$

Con los cálculos efectuados en el problema anterior se deduce que

$$\sigma^2(y_i) = \frac{1}{10} 424,3433 - (6,50389)^2 = 0,133745$$

$$\sigma^2(x_i) = \frac{1}{10} 1,5498 - (0,2928968)^2 = 0,069191$$

La varianza de la variable residual sería:

$$\sigma^2(\varepsilon_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\varepsilon_i^2 - \bar{\varepsilon})^2$$

- En relación a la marca 2, de cada cien que la adquirieron la pasada semana, ochenta la volverán a adquirir, diez cambiarán a la 1 y otros diez a la 3.
- Y en cuanto a la marca 3, de cada cien adquirentes la última semana, treinta cambiarán a la 1, veinte a la 2 y el resto volverán a adquirir la misma.

Se desea estimar las cuotas de mercado de las tres marcas en la semana finalizada y prever las de la próxima.

RESOLUCIÓN

Obviamente, en la semana que ahora finaliza la cuota de mercado de la marca 1 fue del 10 por 100, siendo del 20 por 100 la que correspondió a la marca 2 y del 70 por 100 la de la marca 3:

$$p_1(0) = 0,1$$

$$p_2(0) = 0,2$$

$$p_3(0) = 0,7$$

Dicho en terminología de cadenas de Markov, el vector de estado de ese período fue:

$$P(0) = [p_1(0) \quad p_2(0) \quad p_3(0)] = [0,1 \quad 0,2 \quad 0,7]$$

Para prever la cuota de la próxima semana de la marca 1, $q_1(1)$, basta considerar que, de cada cien consumidores del producto:

- Diez adquirieron esta marca la pasada semana y el 50 por 100 de ellos piensa volver a adquirirla. Cinco consumirán nuevamente esta marca.
- Veinte adquirieron la marca 2 la semana pasada y el 10 por 100 de éstos piensan cambiar a la 1. Por consiguiente, de estos veinte, dos consumirán la marca 1.
- Setenta compraron la marca 3 la semana finalizada y el 30 por 100 de ellos piensa adquirir la marca 1. Por tanto, de este grupo, veintiuno adquirirán la marca 1.

Por consiguiente, de cada cien consumidores del producto, veintiocho (es decir, $5 + 2 + 21$) serán los que, presumiblemente, consumirán la marca 1. La cuota de mercado de esta marca se prevé que sea del 28 por 100.

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

Dicho de otro modo, designando como p_{ij} a la proporción de consumidores que cambian de la marca i a la marca j :

$$\begin{aligned}q_1(1) &= p_1(0)p_{11} + p_2(0)p_{21} + p_3(0)p_{31} = \\&= 0,1 \times 0,5 + 0,2 \times 0,1 + 0,7 \times 0,3 = 0,28\end{aligned}$$

De forma semejante, en cuanto a las marcas 2 y 3 se obtiene:

$$\begin{aligned}q_2(1) &= p_1(0)p_{12} + p_2(0)p_{22} + p_3(0)p_{32} = \\&= 0,1 \times 0,1 + 0,2 \times 0,8 + 0,7 \times 0,2 = 0,31\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3(1) &= p_1(0)p_{13} + p_2(0)p_{23} + p_3(0)p_{33} = \\&= 0,1 \times 0,4 + 0,2 \times 0,1 + 0,7 \times 0,5 = 0,41\end{aligned}$$

Se prevé que el 28 por 100 de los consumidores adquirirán la marca 1, el 31 por 100 la marca 2 y el 41 por 100 la marca 3. El vector de estado previsto para la próxima semana es

$$Q(1) = [q_1(1) \quad q_2(1) \quad q_3(1)] = [0,28 \quad 0,31 \quad 0,41]$$

Obviamente, ha de cumplirse que

$$q_1(1) + q_2(1) + q_3(1) = 1$$

Problema 38

Previsión de cuotas de mercado y cadenas de Markov

Suponiendo que no se modifiquen las proporciones de consumidores que, entre semanas consecutivas, desean cambiar de cada marca a cada una de las otras, se desea estimar las cuotas de ventas de las tres marcas del ejercicio anterior la semana siguiente a la próxima.

RESOLUCIÓN

De forma semejante:

$$\begin{aligned}q_1(2) &= q_1(1)p_{11} + q_2(1)p_{21} + q_3(1)p_{31} = 0,28 \times 0,5 + \\&+ 0,31 \times 0,1 + 0,41 \times 0,3 = 0,294\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_2(2) &= q_1(1)p_{12} + q_2(1)p_{22} + q_3(1)p_{32} = 0,28 \times 0,1 + \\&+ 0,31 \times 0,8 + 0,41 \times 0,2 = 0,358\end{aligned}$$

En este caso:

$$12 = 3 + b \cdot 10$$

de donde se deduce que b vale 0,9.

**Problema
33**

Previsión de la demanda. Modelos de extrapolación

La empresa Sinunedisa lanzó hace diez meses su producto «ZCO, BT, D, AI». Las ventas registradas en los mismos se recogen en la tabla 11.7.

TABLA 11.7

Mes (t)	Ventas (V_t)
1	100
2	790
3	1.200
4	1.485
5	1.710
6	1.890
7	2.045
8	2.180
9	2.300
10	2.400

Se desea estimar la función de crecimiento logarítmico neperiano, en el tiempo, de las ventas, mediante regresión, así como la dispersión de las ventas en torno a su media.

RESOLUCIÓN

La función de crecimiento logarítmico responde a la expresión

$$\hat{V}_t = a + b \ln t$$

o bien:

$$\hat{V}_t = a + bx_t$$

donde $x_t = \ln t$.

En la tabla 11.8 se recogen los cálculos precisos y otras estimaciones ulteriores.

TABLA 11.8

t	V_t	$x_t = \ln t$	V_t^2
1	100	0	10.000
2	790	0,693147	624.100
3	1.200	1,098612	1.440.000
4	1.485	1,386294	2.205.225
5	1.710	1,609438	2.924.100
6	1.890	1,791760	3.572.100
7	2.045	1,945910	4.182.025
8	2.180	2,079442	4.752.400
9	2.300	2,197225	5.290.000
10	2.400	2,302585	5.760.000
	16.100	15,104413	30.759.950

Así pues:

$$\bar{V} = \frac{16.100}{10} = 1.610$$

$$\bar{x} = \frac{15,104413}{10} = 1,5104413$$

$$b = \frac{\sum_{t=1}^m V_t x_t - m \bar{V} \bar{x}}{\sum_{t=1}^m x_t^2 - m (\bar{x})^2} = \frac{29.155.521 - 10 \times 1.610}{27,65024685 - 10(1,5104413)^2}$$

$$= 1.000,309852$$

$$a = \bar{V} - b \bar{x} = 1.610 - 1.000,3098 \times 1,5104413$$

Por consiguiente, la función es

$$\hat{V}_t = 99,09 + 1.000,31 \ln t$$

La dispersión de las ventas en torno a su media

$$\sigma^2(V_t) = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m V_t^2 - (\bar{V})^2 = \frac{1}{10} 30.759.950$$

Como se señaló en el problema anterior:

$$\underline{Q}(n) = \underline{Q}(n-1)M$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = [\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n-1)]M$$

y denominando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n]$$

se deduce que

$$[l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_N] = [l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_N]M$$

lo cual permite obtener un sistema de ecuaciones del que deducir los valores de l_1, l_2, \dots, l_N :

$$\begin{aligned}0 &= l_1(p_{11} - 1) + l_2 p_{21} + \cdots + l_N p_{N1} \\0 &= l_1 p_{12} + l_2(p_{22} - 1) + \cdots + l_N p_{N2} \\&\vdots \\0 &= l_1 p_{1N} + l_2 p_{2N} + \cdots + l_N(p_{NN} - 1)\end{aligned}$$

Pero dado que, como es obvio,

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}} p_{\beta} = 1, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, N$$

las ecuaciones anteriores son complementarias, por lo que resulta preciso sustituir cualquiera de ellas por la siguiente:

$$\sum_{i=1}^N l_i = 1$$

En el presente ejercicio el sistema es

$$0 = l_1(-0,5) + l_2 \times 0,1 + l_3 \times 0,3$$

$$0 = l_1 \times 0,1 + l_2(-0,2) + l_3 \times 0,2$$

$$1 = l_1 + l_2 + l_3$$

deduciéndose que

$$l_1 = 0,266\bar{6}$$

$$l_2 = 0,433\bar{3}$$

$$l_3 = 0,3$$

Si la matriz de transición no se modifica por cualquier causa, como pueda ser la relativa a los esfuerzos comerciales de las empresas concurrentes, la marca 2 acabará consiguiendo una cuota próxima al 43 por 100, siendo del 27 por 100 la cuota aproximada que tenderá a conseguir la primera y del 30 por 100 la correspondiente a la tercera.

Problema
40

Previsión de cuotas de mercado y cadenas de Markov

En cierto mercado compiten tres marcas de cierto producto de consumo que se adquiere quincenalmente. Efectuando un sondeo entre los establecimientos minoristas, se estima que de cada cien consumidores del producto, en la quincena que ahora termina treinta adquirieron la marca 1, otros treinta la marca 2 y cuarenta la marca 3. Se ha realizado, además, un sondeo sobre la intención de compra de los consumidores, llegándose a la conclusión de que la próxima quincena piensan adquirir la marca 1 el 25 por 100 de los que ya la adquirieron la quincena que ahora finaliza, el 30 por 100 de los que adquirieron la marca 2 y el 20 por 100 de los que adquirieron la marca 3. Desean adquirir la marca 2 el 40 por 100 de los que la adquirieron la última quincena, el 20 por 100 de los que compraron la marca 1 y el 25 por 100 de los que adquirieron la marca 3. Finalmente, piensan adquirir la marca 3 el 55 por 100 de los que adquirieron la marca 1, el 30 por 100 de los que compraron la marca 2 y el 55 por 100 de los que ya la adquirieron la quincena pasada. Se desea prever las cuotas para las próximas dos quincenas y las previsibles a largo plazo suponiendo que la matriz de transición es estacionaria.

Se trata, por tanto, de estimar los parámetros de la ecuación de regresión:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$$

donde:

$$y_i = \ln V_i$$

$$a = \ln k$$

$$b = -c$$

$$x_i = \ln p_i$$

y ε_i es la variable residual.

En la tabla 11.10 se realizan los cálculos previos necesarios para la resolución.

TABLA 11.10

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	4,605170	7,365180	21,207593	54,245878	33,917906
2	4,653960	7,346010	21,659347	53,963866	34,188038
3	4,700480	7,333023	22,094516	53,773226	34,468731
4	4,744932	7,313220	22,514381	53,483193	34,700733
5	4,787492	7,293018	22,920077	53,188107	34,915264
6	4,718499	7,319865	22,264232	53,580422	34,538775
7	4,682131	7,339538	21,922353	53,868814	34,364677
8	4,624973	7,358831	21,390373	54,152392	34,034394
9	4,553877	7,390181	20,737795	54,614781	33,653977
10	4,499810	7,408531	20,248287	54,886326	33,336980
	46,571324	73,467397	216,958953	539,757004	342,119475

Así pues:

$$\bar{y} = 7,3467397$$

$$\bar{x} = 4,6571324$$

$$b = \frac{342,119475 - 10 \times 7,3467397 \times 4,6571324}{216,958953 - 10 \times 4,6571324^2} = -0,398110$$

$$a = 7,3467397 - (-0,398110)4,6571324 = 9,2007912$$

$$c = -b = 0,398110$$

$$k = e^a = 9.904,9627$$

El mercado, la demanda, el marketing y el presupuesto mercadotécnico

La función estimada es, por consiguiente:

$$\hat{y}_i = 9,2007912 - 0,398110x_i$$

es decir:

$$\hat{V}_i = 9,904,9627p_i^{-0,398110}$$

En la tabla 11.11 se realizan los cálculos precisos para estudiar la bondad del ajuste.

TABLA 11.11

$\sigma^2(y_i) = \frac{1}{10} 539,757004 - (7,3467397)^2 = 0,0011162$
$\sigma^2(x_i) = \frac{1}{10} 216,958953 - (4,6571324)^2 = 0,0070131$
$\sigma^2(\varepsilon_i) = 0,0011162 - (-0,398110)^2 0,0070131 = 0,00000468$
$r = \frac{(-0,398110)^2 0,0070131}{0,0011162} = 0,9958$
$\rho = \frac{(-0,398110) \sqrt{0,0070131}}{\sqrt{0,0011162}} = -0,9979 \text{ (correlación negativa y casi perfecta)}$

11.5. LA PREVISIÓN DE CUOTAS DE MERCADO Y LAS CADENAS DE MARKOV

Problema

37

Previsión de cuotas de mercado y cadenas de Markov

En cierto mercado compiten tres marcas de cierto producto de consumo que se adquiere semanalmente. Efectuando un sondeo entre los establecimientos minoristas en los que se venden se estima que, de cada cien consumidores del producto, en la semana que ahora termina diez adquirieron la marca 1, veinte la marca 2 y setenta la marca 3. Se ha realizado, además, un sondeo sobre la intención de compra de los consumidores y se ha llegado a la conclusión de que:

- De cada cien consumidores que adquirieron la marca 1 la pasada semana, cincuenta volverán a adquirirla, diez cambiarán a la 2 y el resto adquirirá la 3.

12

Investigación de mercados, segmentación y experimentación comercial

12.1. SISTEMAS DE AFIJACIÓN EN INVESTIGACIÓN DE MERCADOS

Problema 1

Sistemas de afijación

Una población de 100.000 personas se ha dividido en cuatro estratos, A, B, C y D, de 50.000, 12.500, 25.000 y 12.500 personas, respectivamente. Si se desea encuestar a 1.000 personas, ¿cuál será la distribución de la muestra según el criterio de afijación por igual?

RESOLUCIÓN

En la afijación por igual se toman muestras del mismo tamaño en todos los estratos del siguiente modo:

$$n_1 = n_2 = \dots = n_m = \frac{n}{m}$$

donde:

- n_i : Número de elementos que integran la muestra del estrato i ($i = 1, 2, \dots, m$).
- n : Tamaño de la muestra total ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$).
- m : Número de estratos.

En este caso:

$$n_A = n_B = n_C = n_D = \frac{1.000}{4} = 250$$

En cada estrato se habrá de encuestar a 250 personas.

$$q_3(2) = q_1(1)p_{13} + q_2(1)p_{23} + q_3(1)p_{33} = 0,28 \times 0,4 + \\ + 0,31 \times 0,1 + 0,41 \times 0,5 = 0,348$$

Se comprueba que

$$q_1(2) + q_2(2) + q_3(2) = 1$$

El vector de estado previsto para la segunda semana es

$$Q(2) = [q_1(2) \quad q_2(2) \quad q_3(2)] = [0,294 \quad 0,358 \quad 0,348]$$

Obsérvese que si hubiera N marcas, en general:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^N q_j(t-1)p_{ji} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

y, por consiguiente:

$$Q(t) = \left[\sum_{j=1}^N q_j(t-1)p_{j1} \quad \sum_{j=1}^N q_j(t-1)p_{j2} \quad \sum_{j=1}^N q_j(t-1)p_{jN} \right]$$

o, lo que es lo mismo, en notación matricial:

$$Q(t) = Q(t-1)M$$

donde M es la denominada «matriz de transición o de cambios de estado»:

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}$$

Así, en este caso:

$$Q(2) = Q(1)M = [0,28 \quad 0,31 \quad 0,41] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} = [0,294 \quad 0,358 \quad 0,348]$$

Pero, de forma semejante:

$$Q(1) = P(0)M$$

Por lo que también podría haberse calculado $Q(2)$ del siguiente modo:

$$Q(2) = P(0)M^2 = [0,1 \quad 0,2 \quad 0,7] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}^2$$

Por consiguiente, en general:

$$Q(n) = P(0)M^n$$

Problema
39

Previsión de cuotas de mercado y cadenas de Markov

Suponiendo que no se alteren las proporciones de consumidores que, entre semanas consecutivas, desean cambiar de cada marca a cada una de las otras, se desea estimar las cuotas de ventas hacia las que tiende el mercado a largo plazo.

RESOLUCIÓN

Cuando las proporciones p_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$) se mantengan estables en el tiempo, se mantendrá estable, como es obvio, la matriz M , pues aquéllas no son sino los elementos de ésta. Entonces se dice que es una matriz estacionaria.

El enunciado pide la determinación del límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)$$

Pero, según se expuso en la resolución del ejercicio anterior:

$$Q(n) = P(0)M^n$$

y, por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = P(0) \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$$

Cuando M^n tiene límite al tender n a infinito, se dice que la cadena de Markov es asintóticamente ergódica.

RESOLUCIÓN

En la afijación óptima con costes variables el tamaño de la muestra de cada estrato, i , es directamente proporcional a su población, N_i , y a la desviación típica de la variable relevante, S_i , e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del coste de obtención de información de un elemento del estrato (C_i).

$$\frac{n_1}{N_1 S_1 / C_1^{1/2}} = \frac{n_2}{N_2 S_2 / C_2^{1/2}} = \dots = \frac{n_m}{N_m S_m / C_m^{1/2}} =$$

$$= \frac{n}{(N_1 S_1 / C_1^{1/2}) + (N_2 S_2 / C_2^{1/2}) + \dots + (N_m S_m / C_m^{1/2})}$$

Es decir:

$$n_i = \frac{n}{(N_1 S_1 / C_1^{1/2}) + (N_2 S_2 / C_2^{1/2}) + \dots + (N_m S_m / C_m^{1/2})} \cdot \frac{N_i S_i}{C_i^{1/2}} \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

En este caso:

$$\frac{n}{(N_A S_A / C_A^{1/2}) + (N_B S_B / C_B^{1/2}) + (N_C S_C / C_C^{1/2}) + (N_D S_D / C_D^{1/2})} =$$

$$= \frac{1.000}{(5.000 \times 5/5) + (12.500 \times 4/2) + (25.000 \times 4/4) + (12.500 \times 8/4)} = 0,008$$

y, por consiguiente:

$$n_A = 0,008 \times \frac{50.000 \times 5}{2} = 400$$

$$n_B = 0,008 \times \frac{12.500 \times 4}{2} = 200$$

$$n_C = 0,008 \times \frac{25.000 \times 4}{4} = 200$$

$$n_D = 0,008 \times \frac{12.500 \times 8}{4} = 200$$

12.2. MÉTODOS DE SEGMENTACIÓN DE MERCADOS

Problema

5

Segmentación de mercados. El método de Belson

Una empresa de asesoría mercadotécnica ha recibido el encargo, por parte de uno de sus clientes, de determinar qué criterio es preferible, si la clase social o la edad, para explicar el consumo de cierta marca de cigarrillos y así segmentar su mercado. Para ello se ha seleccionado una muestra de 2.000 personas, de las que 200 resultaron consumidores de la marca. La distribución por edades y clases sociales de las 2.000 personas y de las 200 que resultaron consumidoras se recoge en la tabla 12.1.

TABLA 12.1

	Muestra	Consumidores
<i>Clase social</i>		
A. Baja	260	40
B. Media	720	76
C. Alta	1.020	84
Total	2.000	200
<i>Edad</i>		
I. Hasta 30 años	250	62
II. 31-50 años	680	70
III. Más de 50 años	1.070	68

Se desea determinar el criterio de segmentación preferible según el método de Belson.

RESOLUCIÓN

El método de Belson trata de estimar el poder discriminante de diferentes variables explicativas dicotómicas (que sólo pueden tomar dos estados alternativos; por ejemplo, x_1 = Jóvenes y x_2 = Adultos, o bien, x_1 = Hembras y x_2 = Varones) con las que se trata de explicar el comportamiento o una característica de una población que es la variable a explicar (por ejemplo, y_1 = Consumen, y_2 = No consumen). Cuando, como en el presente caso, las variables explicativas, entre las que hay que seleccionar la de mayor poder dis-

RESOLUCIÓN

Del enunciado se deduce que

$$P(0) = [0,3 \quad 0,3 \quad 0,4]$$

$$p_{11} = 0,25, \quad p_{21} = 0,30, \quad p_{31} = 0,20$$

$$p_{12} = 0,20, \quad p_{22} = 0,40, \quad p_{32} = 0,25$$

$$p_{13} = 0,55, \quad p_{23} = 0,30, \quad p_{33} = 0,55$$

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,20 & 0,55 \\ 0,30 & 0,40 & 0,30 \\ 0,20 & 0,25 & 0,55 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$Q(1) = P(0)M \rightarrow \begin{cases} q_1(1) = 0,3 \times 0,25 + 0,3 \times 0,30 + 0,4 \times 0,20 = 0,245 \\ q_2(1) = 0,3 \times 0,20 + 0,3 \times 0,40 + 0,4 \times 0,25 = 0,280 \\ q_3(1) = 0,3 \times 0,55 + 0,3 \times 0,30 + 0,4 \times 0,55 = 0,475 \end{cases}$$

$$Q(2) = Q(1)M \rightarrow \begin{cases} q_1(2) = 0,245 \times 0,25 + 0,280 \times 0,30 + 0,475 \times 0,20 = 0,24025 \\ q_2(2) = 0,245 \times 0,20 + 0,280 \times 0,40 + 0,475 \times 0,25 = 0,27975 \\ q_3(2) = 0,245 \times 0,55 + 0,280 \times 0,30 + 0,475 \times 0,55 = 0,48 \end{cases}$$

Si las proporciones de cambio se mantienen constantes, al próximo período corresponderán unas cuotas del 24,5 por 100 para la marca 1, del 28 por 100 para la marca 2 y del 47,5 por 100 para la marca 3. En cuanto a la segunda quincena, las cuotas serían un 24,025 por 100 para la marca 1, un 27,975 por 100 para la marca 2 y un 48 por 100 para la marca 3.

En cuanto al sistema que permite determinar las cuotas a largo plazo, se tiene que:

$$0 = l_1(-0,75) + l_2 \times 0,30 + l_3 \times 0,20$$

$$0 = l_1 \times 0,20 + l_2(-0,60) + l_3 \times 0,25$$

$$0 = l_1 \times 0,55 + l_2 \times 0,30 + l_3(-0,45)$$

Tomando la ecuación $l_1 + l_2 + l_3 = 1$ y dos cualesquiera de las tres anteriores se obtiene un sistema del que se deduce que

$$I_1 = 0,24$$

$$I_2 = 0,28$$

$$I_3 = 0,48$$

Si no se altera la matriz de transición, a largo plazo la marca 3 tenderá a una cuota de mercado del 48 por 100, siendo del 28 por 100 y del 24 por 100, respectivamente, las cuotas hacia las que tienden las marcas 2 y 1. La tendencia es, además, rapidísima, de manera que en la segunda quincena, según se calculó anteriormente, ya casi se habrían alcanzado esos porcentajes.

TABLA 12.4

	Muestra	Consumidores
<i>Nivel de ingresos</i>		
A. Alto	3.020	511
M. Medio	3.335	412
B. Bajo	3.645	277
Total	10.000	1.200
<i>Región geográfica</i>		
N. Norte	3.200	350
M. Media	2.995	451
S. Sur	3.805	399
Total	10.000	1.200
<i>Edad</i>		
J. Jóvenes	2.842	340
A. Adultos	5.573	750
N. Ancianos	1.585	110
Total	10.000	1.200
<i>Sexo</i>		
H. Hembras	4.910	510
V. Varones	5.090	690
Total	10.000	1.200
<i>Estado civil</i>		
S. Solteros	7.108	820
C. Casados	2.892	380
Total	10.000	1.200

RESOLUCIÓN

En la tabla 12.5 se recogen los porcentajes de consumidores en cada grupo de los criterios de segmentación que precisan reagrupamiento dicotómico y en el total.

TABLA 12.5

	Porcentaje de consumidores
Total	12
<i>Nivel de ingresos</i>	
A	16,92 (> 12)
M	12,35 (> 12)
B	7,60 (< 12)
<i>Región geográfica</i>	
N	10,94 (< 12)
M	15,06 (> 12)
S	10,49 (< 12)
<i>Edad</i>	
J	11,96 (< 12)
A	13,46 (> 12)
N	6,94 (< 12)

La distribución en categorías dicotómicas es la que figura en la tabla 12.6.

TABLA 12.6

	Muestra	Consumidores
<i>Nivel de ingresos</i>		
A + M	6.355	923
B	3.645	277
<i>Región geográfica</i>		
N + S	7.005	749
M	2.995	451
<i>Edad</i>		
J + N	4.427	450
A	5.573	750
<i>Sexo</i>		
H	4.910	510
V	5.090	690
<i>Estado civil</i>		
S	7.108	820
C	2.892	380

**Problema
2**

Sistemas de afiliación

¿Cuál sería la distribución de la muestra en el muestreo estratificado del ejercicio anterior si se desea realizar una afiliación proporcional?

RESOLUCIÓN

En la afiliación proporcional, la muestra total se reparte proporcionalmente a la población de cada estrato. Si N_i es la población del estrato i y N es la población total de los m estratos, la distribución de la muestra se hará del siguiente modo:

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \dots = \frac{n_m}{N_m} = \frac{n}{N}$$

Es decir:

$$n_i = \frac{n}{N} N_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

En este caso se tendría:

$$n_A = \frac{1.000}{100.000} \times 50.000 = 500$$

$$n_B = \frac{1.000}{100.000} \times 12.500 = 125$$

$$n_C = \frac{1.000}{100.000} \times 25.000 = 250$$

$$n_D = \frac{1.000}{100.000} \times 12.500 = 125$$

**Problema
3**

Sistemas de afiliación

Una vez estimadas las desviaciones típicas de la variable relevante en los cuatro estratos de los ejercicios anteriores, resultaron valer: 5 en el A, 4 en el

B, 4 en el C y 8 en el D. ¿Cuál es la distribución de la muestra según la afijación óptima?

RESOLUCIÓN

En la denominada «afijación óptima», el reparto de la muestra es proporcional al tamaño de la población de cada estrato y a la desviación típica de la variable en el estrato (raíz cuadrada de su varianza). Es decir, denominando S_i a la desviación típica de la variable en el estrato i :

$$\frac{n_1}{N_1 S_1} = \frac{n_2}{N_2 S_2} = \dots = \frac{n_m}{N_m S_m} = \frac{n}{N_1 S_1 + N_2 S_2 + \dots + N_m S_m}$$

$$n_i = \frac{n}{N_1 S_1 + N_2 S_2 + \dots + N_m S_m} N_i S_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

En este problema:

$$\frac{n}{N_A S_A + N_B S_B + N_C S_C + N_D S_D} =$$

$$= \frac{1.000}{50.000 \times 5 + 12.500 \times 4 + 25.000 \times 4 + 12.500 \times 8} = 0,002$$

y, por consiguiente:

$$n_A = 0,002 \times 50.000 \times 5 = 500$$

$$n_B = 0,002 \times 12.500 \times 4 = 100$$

$$n_C = 0,002 \times 25.000 \times 4 = 200$$

$$n_D = 0,002 \times 12.500 \times 8 = 200$$

Problema

4

Sistemas de afijación

Si los costes de recogida de información de un elemento son, en los distintos estratos, 25 u.m. en el A, 4 en el B, 16 en el C y 16 también en el D, ¿cuál será la distribución de la muestra entre los distintos estratos según la afijación óptima con costes variables?

Categorías (i)	Distribución efectiva (E_i)	Distribución teórica (T_i)
J + A	720	600
N	30	150

La diferencia es de 120 en la primera categoría y de (-120) en la segunda. El método χ^2 estima la desviación entre la distribución efectiva y la teórica por la suma de los ratios resultantes de elevar al cuadrado esas diferencias y dividir el resultado entre los respectivos valores teóricos. Es decir:

$$S = \frac{(120)^2}{600} + \frac{(-120)^2}{150} = 120$$

El poder discriminador de un criterio es tanto más elevado cuanto mayor es la diferencia entre la distribución efectiva y la que correspondería en caso de que la distribución se produjera con arreglo a la media. Por tanto, el coeficiente S es una medida de la capacidad de discriminación de un criterio. Pero las categorías dicotómicas pueden formarse realizando distintas agrupaciones de las clases originales (J + A, N; J, A + N; J + N, A). Obviamente, entre las distintas agrupaciones que pueden realizarse debe preferirse, en cada criterio, aquella para la cual es máximo el valor obtenido para S . Se dispone, así, de un procedimiento de selección de formas de agrupación en cada criterio y de un método para seleccionar entre los criterios disponibles, comparando los valores que el ratio S toma en las agrupaciones óptimas de los mismos. Pero, además, es posible determinar si la diferencia entre la distribución efectiva y la teórica, en cada caso, es o no significativa, pues, cuando los efectivos de cada categoría son lo suficientemente grandes, puede estimarse que S sigue una distribución χ^2 con un grado de libertad, y esta distribución se encuentra tabulada (véase tabla en apéndice). Así, para un nivel de confianza del 95 por 100 se observa que $\chi^2(1; 0,05) = 3,84$. Dado que el valor obtenido para S (120) es superior, puede decirse que la diferencia entre la distribución observada y la teórica es significativa a ese nivel de confianza.

En la tabla 12.8 se recogen los cálculos precisos para resolver el problema enunciado.

El agrupamiento óptimo bajo el criterio de edad es el que sitúa en una categoría a los jóvenes y adultos, que es aquella en la que el número de consumidores está por encima de la media ($720 > 600$) y en la otra a los ancianos, en la que el número de consumidores es inferior al término medio ($30 < 150$). Bajo el criterio de clase social, el agrupamiento óptimo es el realizado situando en una categoría a la clase media, en la que el número de consumidores es superior al que le correspondería si se ajustase a la proporción media, y

TABLA 12.8

	Muestra	Consumidores (E_i)	Distribución teórica (T_i)	$E_i - T_i$	$(E_i - T_i)^2$	$\frac{(E_i - T_i)^2}{T_i}$	S
<i>Edad</i>							
J + A	12.000	720	600	120	14.400	24	120
N	3.000	30	150	-120	14.400	96	
J + N	6.000	240	300	-60	3.600	12	20
A	9.000	510	450	60	3.600	8	
J	3.000	210	150	-60	3.600	24	30
A + N	12.000	540	600	-60	3.600	6	
<i>Clase soc.</i>							
A + M	11.000	690	550	140	19.600	35,64	133,64
B	4.000	60	200	-140	19.600	98	
A + B	6.500	160	325	-165	27.225	83,77	147,83
M	8.500	590	425	165	27.225	64,06	
A	2.500	100	125	-25	625	5,1	6
M + B	12.500	650	625	25	625	1	

en la otra a las clases alta y baja. Entre los dos criterios, el mayor poder discriminante, según el método χ^2 , corresponde al basado en la clase social (147,83 > 120). Pero cualquiera que sea el criterio de segmentación y las categorías que se formen, la diferencia entre la distribución observada y la que correspondería si todas las categorías se ajustasen a la proporción media de consumidores es significativa a un nivel de confianza del 95 por 100, pues S es superior a 3,84 en cualquier caso.

En general, la técnica χ^2 proporciona segmentos más homogéneos *en sí* y más heterogéneos *entre sí* que el método de Belson. Por otra parte, al igual que con éste, si se dispusiera de más información sería posible continuar la segmentación en tanto ésta sea operativa.

Problema 8

Segmentación de mercados. El método de la χ^2

Una empresa fabricante de cierto producto ha de segmentar su mercado. Para ello ha tomado una muestra de 10.000 personas, a las que ha encuestado para determinar el segmento en que se encuentra cada una de ellas, con arre-

criminante (clase social y edad), pueden tomar tres estados o más, habrán de agruparse (por ejemplo, x_1 = Clase media-baja y x_2 = Clase alta; x'_1 = Hasta 50 años y x'_2 = Más de 50 años).

En la tabla 12.2 se tabulan las proporciones de personas que tienen la característica estudiada (consumen).

TABLA 12.2

	Porcentaje de consumidores
<i>Clase social</i>	
A	$(40/260)100 = 15,38 (> 10)$
B	$(76/720)100 = 10,56 (> 10)$
C	$(84/1.020)100 = 8,23 (< 10)$
Total	$(200/2.000)100 = 10$
<i>Edad</i>	
I	$(62/250)100 = 24,80 (> 10)$
II	$(70/680)100 = 10,29 (> 10)$
III	$(68/1.070)100 = 6,36 (< 10)$

Según el método de Belson, el criterio óptimo de agrupación en cada variable explicativa es situar en una clase a los estados en los que la proporción de su población que tiene la característica estudiada (consumen) es mayor que la existente a nivel general (10 por 100) y en otra a aquellos en los que la proporción es menor. Así se formaría la tabla 12.3.

TABLA 12.3

	Muestra	Consumidores
<i>Clase social</i>		
A + B	980	116
C	1.020	84
Total	2.000	200
<i>Edad</i>		
I + II	930	132
III	1.070	68

Por término medio la proporción de consumidores (p) es del 10 por 100. Si esta proporción se mantuviera en la clase social A + B, salvando errores de muestreo, por término medio resultarían consumidoras 98 personas (el 10 por 100 de las 980 existentes en la muestra). La diferencia entre las 116 personas

que se obtuvieron como consumidores y las 98 que corresponderían en caso de homogeneidad entre las clases es

$$116 - 98 = 18$$

Obsérvese que, utilizando el mencionado criterio de agrupación, en la otra clase se obtiene como diferencia el mismo resultando en términos absolutos:

$$184 - 0,10 \times 1.020 = 184 - 102 = 18$$

Esta diferencia es tomada por Belson como medida del poder discriminante de la variable explicativa. El poder discriminante de la variable edad es

$$1132 - 0,10 \times 930 = 168 - 0,10 \times 1.070 = 39$$

El poder discriminante de la edad es superior al de la clase social y, por consiguiente, la edad es el mejor criterio de segmentación según el método de Belson.

Si se dispusiera de más información relativa a la distribución de la población en los dos segmentos de edades obtenidos se podría continuar dividiendo cada uno de ellos en otros dos y, procediendo así de forma sucesiva, se obtendrían más segmentos de tamaño más reducido. Ahora bien, la excesiva segmentación puede no resultar operativa, al tenerse que trabajar con gran número de segmentos de escaso tamaño.

Problema 6

Segmentación de mercados. El método de Belson

Una empresa fabricante de un refresco con cierto contenido de alcohol ha tomado una muestra de 10.000 personas, situadas en distintos estratos sociológicos, demográficos y geográficos, que reproducen con fidelidad las características del mercado global del producto. La distribución de la muestra, de acuerdo con los criterios alternativos de segmentación que han sido seleccionados a priori, se recoge en la tabla 12.4.

Se desea determinar el criterio que tiene mayor capacidad discriminante según el método de Belson.

Problema
9
Segmentación de mercados. El método de la χ^2

Una población se ha dividido en dos categorías dicotómicas, A y B. Se ha tomado una muestra de 15.000 personas, de las que 2.500 resultaron pertenecer a la categoría A. El número de personas que resultan ser consumidoras del producto en cuestión es de 750, de las que 650 pertenecen a la categoría B. ¿Cuánto vale el coeficiente S, correspondiente al método de la χ^2 ?

RESOLUCIÓN

	Muestra	E_i	T_i	$\frac{(E_i - T_i)^2}{T_i}$	S
A	2.500	100	125	5	6
B	12.500	650	625	1	

Problema
10

Segmentación de mercados. El método del análisis de la varianza

La empresa Dunedesa cuenta, entre los productos de su cartera, con un detergente que presenta especialmente elaborado para lavadoras automáticas. Para segmentar su mercado ha realizado una encuesta entre 10.000 familias, de las que 2.000 resultaron ser consumidoras del mismo. La distribución de las familias, de acuerdo con los dos criterios de segmentación que fueron elegidos a priori, se recoge en la tabla 12.11.

TABLA 12.11

	Muestra	Consumidores
<i>Nivel de venta</i>		
A	3.200	650
B	3.600	680
C	3.200	670
<i>Nivel cultural</i>		
P	3.500	500
Q	3.200	600
R	3.300	900

Se desea determinar el criterio de segmentación óptimo según el método del análisis de la varianza.

RESOLUCIÓN

Sea una población formada por N ítems y sea y_i el valor tomado por el ítem i -ésimo. El valor medio de los ítems será:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

El análisis de la varianza se basa en la descomposición de la suma de las desviaciones cuadráticas respecto a la media:

$$\begin{aligned} SDC_T &= \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N (y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2) = \sum_{i=1}^N y_i^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^N y_i + N\bar{y}^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N y_i^2 - 2N\bar{y}^2 + N\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 - N\bar{y}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

La $SDCT_T$ mide la dispersión de los valores de la variable y en torno a su media. Supóngase que se divide la población en dos grupos formados por N_1 y N_2 ítems, respectivamente ($N_1 + N_2 = N$). De forma semejante a la población total se demuestra que para el primer grupo:

$$SDC_1 = \sum_{i=1}^{N_1} (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 = \sum_{i=1}^{N_1} y_{1i}^2 - N_1\bar{y}_1^2 \quad (2)$$

donde

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} y_{1i}}{N_1}$$

y para el segundo:

$$SDC_2 = \sum_{i=1}^{N_2} (y_{2i} - \bar{y}_2)^2 = \sum_{i=1}^{N_2} y_{2i}^2 - N_2\bar{y}_2^2 \quad (3)$$

El poder discriminante de los distintos criterios puede calcularse ya como sigue:

— Nivel de ingresos:

$$1923 - 0,12 \times 6.3551 = 1277 - 0,12 \times 3.6451 = 160,4$$

— Región geográfica:

$$1749 - 0,12 \times 7.0051 = 1451 - 0,12 \times 2.9951 = 91,6$$

— Edad:

$$1450 - 0,12 \times 4.4271 = 1750 - 0,12 \times 5.5731 = 81,24$$

— Sexo:

$$1510 - 0,12 \times 4.9101 = 1690 - 0,12 \times 5.0901 = 79,2$$

— Estado civil:

$$1820 - 0,12 \times 7.1081 = 1380 - 0,12 \times 2.8921 = 32,96$$

Según el método de Belson, el criterio que tiene mayor capacidad discriminante es el nivel de ingresos.

Problema
7

Segmentación de mercados. El método de la χ^2

Una empresa de asesoramiento mercadotécnico ha recibido de uno de sus clientes el encargo de determinar el criterio que tiene mayor poder discriminante para segmentar el mercado de cierto perfume para hombres. Para ello se ha tomado una muestra de 15.000 hombres que se considera que reproduce con fidelidad las características de ese mercado. La distribución de dicha muestra y de los 750 que resultaron consumidores, según los dos criterios seleccionados a priori (edad y clase social), se recoge en la tabla 12.7.

TABLA 12.7

	Muestra	Consumidores
<i>Edad</i>		
J. Jóvenes	3.000	210
A. Adultos	9.000	510
N. Ancianos	3.000	30
<i>Clase social</i>		
A. Alta	2.500	100
M. Media	8.500	590
B. Baja	4.000	60
Totales	15.000	750

¿Qué criterio tiene mayor poder discriminante según el método de la χ^2 ?

RESOLUCIÓN

El método χ^2 es utilizado para comprobar si la diferencia entre dos distribuciones de frecuencias es significativa. En este caso se trata de comparar la distribución efectiva de los consumidores en las distintas categorías de cada criterio con la que correspondería si se distribuyeran según el porcentaje medio de consumidores. Sin embargo, al igual que en el método de Belson, previamente es preciso un reagrupamiento dicotómico en el criterio. Así, por ejemplo, la distribución del criterio edad podría agruparse del siguiente modo:

Categorías	Muestra	Consumidores
J + A	12.000	720
N	3.000	30

Por término medio el porcentaje de consumidores es

$$\frac{750}{15.000} 100 = 5 \text{ por } 100$$

Si los consumidores se distribuyeran conforme a la media en los distintos grupos del criterio «edad», en la categoría J + A habría 600 consumidores (el 5 por 100 sobre 12.000) y en la categoría N habrían aparecido 150 (el 5 por 100 sobre 3.000), salvando, obviamente, los errores de muestreo. Se trata, por tanto, de comparar las siguientes distribuciones de frecuencia:

TABLA 12.12

	Muestra N_i	Consumi- dores E_i	$\frac{N_i N_j}{N}$	$f_i = \frac{E_i}{N}$	$\frac{N_i N_j}{N} (f_i - f_j)^2$
<i>Nivel de renta</i>					
A + B	6.800	1.330	2.176	0,1956	0,4136
C	3.200	670		0,2094	
A + C	6.400	1.320	2.304	0,2063	0,69
B	3.600	680		0,1889	
A	3.200	650	2.176	0,2031	0,4016
B + C	6.800	1.350		0,1985	
<i>Nivel cultural</i>					
P + Q	6.700	1.100	2.211	0,1642	26,05
R	3.300	900		0,2727	
P + R	6.800	1.400	2.176	0,2059	0,7353
Q	3.200	600		0,1875	
P	3.500	500	2.275	0,1429	17,58
Q + R	6.500	1.500		0,2308	

En general, el análisis de la varianza proporciona segmentos más homogéneos *en sí* y más heterogéneos *entre sí* que el método de Belson. Por otra parte, al igual que con éste y con la técnica χ^2 , si se dispusiera de más información sobre la distribución de la población, sería posible seguir subdividiendo el mercado en segmentos más pequeños en tanto que su gran número y reducido tamaño no resulten poco operativos.

Problema 11

Segmentación de mercados. El método del análisis de la varianza

Una empresa promotora de cierto tipo de espectáculos teatrales en una ciudad ha realizado una encuesta a 10.000 personas de la misma, de las que sólo 1.000 resultaron asistentes habituales a esta clase de espectáculos. La distribución de las mismas, según distintos criterios de segmentación, se presenta en la tabla 12.13.

TABLA 12.13

	Muestra	Asistentes
<i>Edad</i>		
J. Jóvenes	3.500	200
A. Adultos	4.000	500
N. Ancianos	2.500	300
<i>Clase social</i>		
A	2.500	250
M	4.000	600
B	3.500	150
<i>Estado civil</i>		
S	4.000	425
C	5.000	500
D	500	60
V	500	15
<i>Sexo</i>		
H	5.000	400
V	5.000	600

Se desea determinar qué criterio de segmentación es preferible según el análisis de la varianza.

RESOLUCIÓN

El porcentaje medio general de consumidores, \bar{y} , de este servicio es el 10 por 100 $((1.000/10.000)100)$. Los restantes cálculos precisos se recogen en la tabla 12.14.

glo a los criterios de segmentación que fueron seleccionados a priori, y para saber si consumen su producto. Una vez tabulados los resultados de la encuesta, se dispone de los datos relativos a las 10.000 personas y a las 1.000 que de ellas resultaron consumidoras del producto en cuestión (véase tabla 12.9).

TABLA 12.9

	Muestra	Consumidores
<i>Clase social</i>		
A	3.500	200
B	3.500	300
C	3.000	500
<i>Edad</i>		
J. Jóvenes	3.000	250
A. Adultos	5.000	600
N. Ancianos	2.000	150
<i>Lugar de residencia</i>		
R. Zona rural	4.000	600
U. Zona urbana	6.000	400
<i>Nivel cultural</i>		
A. Alto	5.000	400
M. Medio	4.000	450
B. Bajo	1.000	150
<i>Sexo</i>		
V	5.000	600
H	5.000	400

Se desea determinar cuál es el criterio al que le corresponde la mayor capacidad discriminante según el método χ^2 .

RESOLUCIÓN

La proporción media es del 10 por 100 $((1.000/10.000) \times 100)$. En la tabla 12.10 se realizan los cálculos precisos para resolver el problema.

El criterio de segmentación de mayor poder discriminante es el basado en la clase social, dividiendo la población en una categoría formada por las clases A y B, a la que le corresponde una proporción de consumidores inferior a la media $((500/7.000) \times 100 = 7,14$ por 100 < 10 por 100) y en otra categoría, integrada por la clase C, en la que la proporción de consumidores de este producto es superior a la media $(500/3.000 \times 100 = 16,67$ por 100 > 10 por 100). Pero el poder discriminante de cualquiera de los criterios seleccionados a prio-

TABLA 12.10

	Muestra	Consumi- dores (E_i)	Distribu- ción teórica (T_i)	$E_i - T_i$	$(E_i - T_i)^2$	$\frac{(E_i - T_i)^2}{T_i}$	S
<i>Clase soc.</i>							
A + B	7.000	500	700	-200	40.000	57,14	(190,47)
C	3.000	500	300	200	40.000	133,33	
A + C	6.500	700	650	-50	2.500	3,85	10,99
B	3.500	300	350	-50	2.500	7,14	
A	3.500	200	350	-150	22.500	64,29	98,91
B + C	6.500	800	650	150	22.500	34,62	
<i>Edad</i>							
J + A	8.000	850	800	-50	2.500	3,12	15,62
N	2.000	150	200	-50	2.500	12,50	
J + N	5.000	400	500	-100	10.000	20	(40)
A	5.000	600	500	100	10.000	20	
J	3.000	250	300	-50	2.500	8,33	11,90
A + N	7.000	750	700	50	2.500	3,57	
<i>Lugar de residencia</i>							
R	4.000	600	400	200	40.000	100	(166,66)
U	6.000	400	600	-200	40.000	66,66	
<i>Nivel cultural</i>							
A+M	9.000	850	900	-50	2.500	2,78	27,78
B	1.000	150	100	50	2.500	25	
A + B	6.000	550	600	-50	2.500	4,17	10,42
M	4.000	450	400	50	2.500	6,25	
A	5.000	400	500	-100	10.000	20	(40)
B + M	5.000	600	500	100	10.000	20	
<i>Sexo</i>							
V	5.000	600	500	100	10.000	20	(40)
H	5.000	400	500	-100	10.000	20	

ri es significativo a un nivel de confianza del 95 por 100, en el sentido de que la diferencia entre las distribuciones observadas y las que corresponderían si todas las categorías se ajustasen a la proporción media de consumidores es significativa a un nivel de confianza del 95 por 100, pues todos los valores obtenidos para S son superiores a $\chi^2(1, 0,05) = 3,84$.

$$\bar{S} = S_r + \frac{Q}{2}$$

Los momentos t_0, t_1, t_2 , etc., representan los instantes del tiempo en los que se reciben pedidos. Tras la recepción, el nivel de almacén se va reduciendo y, para que dicho nivel no sea inferior que el stock de seguridad, cuando un pedido se agota ha de recibirse el siguiente.

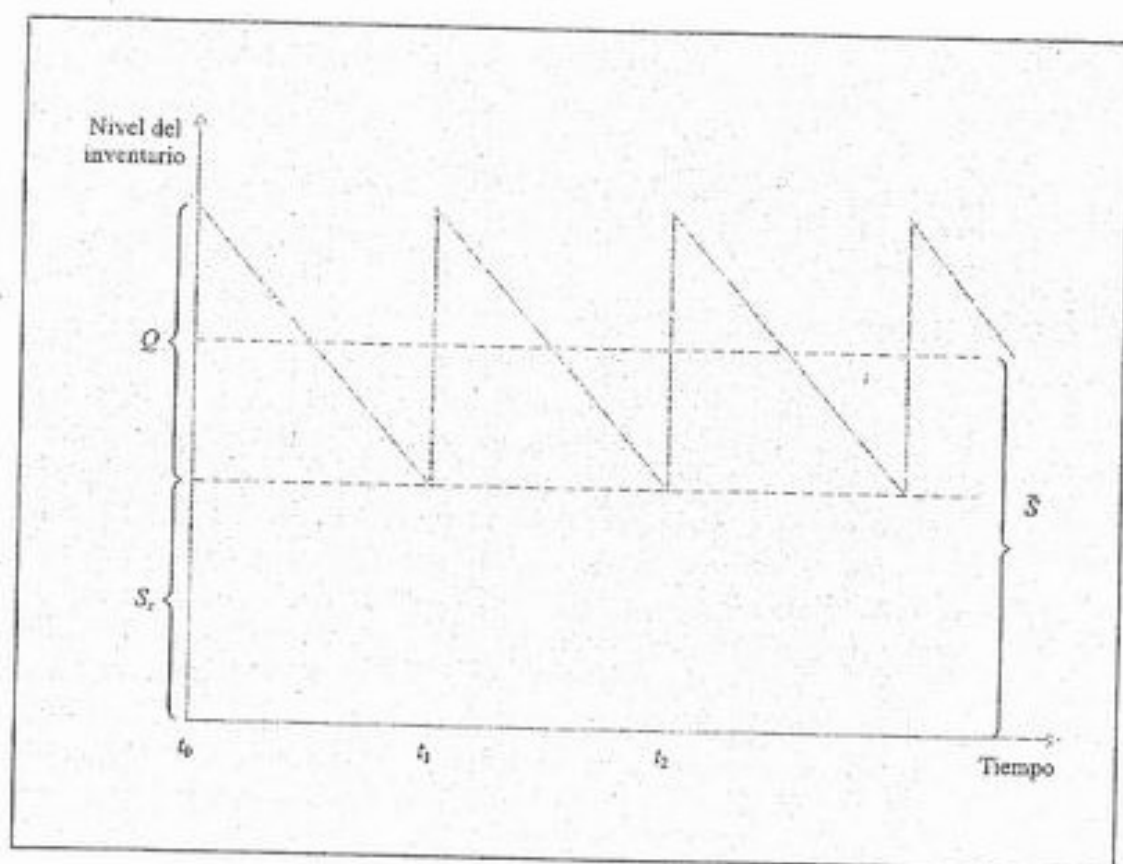


Figura 9.1.

Denominemos:

q a la cantidad de producto comprada y vendida al año en unidades físicas (u.f.).

Q al tamaño del pedido en u.f. (incógnita del problema).

$\frac{q}{Q}$ será el número de pedidos realizados cada año.

k a lo que cuesta efectuar cada pedido (coste del reaprovechamiento).

$C_R = k \frac{q}{Q}$ será el coste anual de reaprovechamiento, o coste anual de renovación.

g a lo que cuesta tener una unidad física de producto almacenada durante un año.

$C_P = g\bar{S} = g\left(S_s + \frac{Q}{2}\right)$ será el coste anual de almacenamiento, o coste anual de posesión del stock.

$C_T = C_R + C_P$ será el coste total anual.

El nivel óptimo del pedido será el valor de Q para el cual sea mínima la función de costes totales:

$$C_T = k \frac{q}{Q} + g\left(S_s + \frac{Q}{2}\right)$$

Es decir, el valor de Q para el cual:

$$\frac{dC_T}{dQ} = -k \frac{q}{Q^2} + g \frac{1}{2} = 0$$

de donde se deduce que el tamaño óptimo del pedido es:

$$Q = \sqrt{\frac{2kq}{g}}$$

En el presente caso:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 10.000 \cdot 100}{20.000}} = 10 \text{ lavadoras en cada pedido}$$

Con ello, el número de pedidos realizados cada año será:

$$\frac{q}{Q} = \frac{100}{10} = 10 \text{ pedidos al año}$$

Tomando el año comercial de 360 días, el número de días transcurridos entre dos pedidos será igual a:

$$\frac{360}{10} = 36 \text{ días}$$

donde

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_2} y_{2i}}{N_2}$$

Ahora bien:

$$\sum_{i=1}^{N_1} y_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{N_2} y_{2i}^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2$$

y, por otra parte, sumando las expresiones (2) y (3), se obtiene:

$$\begin{aligned} SDC_1 + SDC_2 &= \sum_{i=1}^{N_1} y_{1i}^2 + \sum_{i=1}^{N_2} y_{2i}^2 - N_1 \bar{y}_1^2 - N_2 \bar{y}_2^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 - N_1 \bar{y}_1^2 - N_2 \bar{y}_2^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{i=1}^N y_i^2 = SDC_1 + SDC_2 + N_1 \bar{y}_1^2 + N_2 \bar{y}_2^2 \end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en la expresión (1), se obtiene:

$$SDC_T = SDC_1 + SDC_2 + N_1 \bar{y}_1^2 + N_2 \bar{y}_2^2 - N \bar{y}^2 \quad (4)$$

Pero:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} y_{1i}}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{N_2} y_{2i}}{N} = \bar{y}_1 \frac{N_1}{N} + \bar{y}_2 \frac{N_2}{N} = \frac{1}{N} (\bar{y}_1 N_1 + \bar{y}_2 N_2)$$

Por consiguiente, los tres últimos sumandos de la expresión (4) son iguales a

$$\begin{aligned} N_1 \bar{y}_1^2 + N_2 \bar{y}_2^2 - N \bar{y}^2 &= N_1 \bar{y}_1^2 + N_2 \bar{y}_2^2 - N \frac{1}{N^2} (\bar{y}_1 N_1 + \bar{y}_2 N_2)^2 = \\ &= \frac{1}{N} [(N_1 \bar{y}_1^2 + N_2 \bar{y}_2^2)(N_1 + N_2) - (\bar{y}_1^2 N_1^2 + \bar{y}_2^2 N_2^2 + 2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 N_1 N_2)] = \\ &= \frac{1}{N} (N_1 N_2 \bar{y}_1^2 + N_1 N_2 \bar{y}_2^2 - 2 N_1 N_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2) = \frac{N_1 N_2}{N} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (4) se obtiene:

$$SDC_T = SDC_1 + SDC_2 + \frac{N_1 N_2}{N} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2$$

Como se señaló anteriormente, la suma de las desviaciones cuadráticas totales mide la dispersión, o variabilidad, respecto a su media, existente en la población (D_T). Ésta ha quedado dividida en tres partes:

- La dispersión, o variabilidad, respecto a su media, existente en el primer grupo ($D_1 = SDC_1$).
- La dispersión, o variabilidad, respecto a su media, existente en el segundo grupo ($D_2 = SDC_2$).
- La dispersión, o variabilidad, existente entre los dos grupos ($D_{1-2} = (N_1 N_2 / N) (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2$).

Es decir:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_{1-2}$$

Dado que se desea obtener grupos homogéneos *en sí* y tan heterogéneos *entre sí* como sea posible, entre los distintos criterios de división en grupos (segmentación) ha de darse preferencia a los que hagan más bajo $D_1 + D_2$ y más elevado D_{1-2} . Pero, dado que D_T (la suma de las desviaciones cuadráticas de la población) es un valor independiente de la forma en que la población se divide, el criterio que maximice D_{1-2} será el que minimice $D_1 + D_2$. Por consiguiente, la mejor forma de agrupar la población en categorías dicotómicas, bajo cada criterio de segmentación, será la que haga máximo

$$D_{1-2} = \frac{N_1 N_2}{N} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2$$

Entre los criterios debe darse preferencia a aquel para el que D_{1-2} sea mayor.

Los cálculos precisos para resolver el problema planteado se recogen en la tabla 12.12 ($N = 10.000$).

Si el mercado se segmenta según el criterio del nivel de renta, la segmentación óptima es la que sitúa en una categoría los niveles A y C, en los que la proporción media de consumidores es superior a la media general (20,63 por 100 > 20 por 100) y en otra el nivel B, al que le corresponde una proporción media inferior al promedio general (18,89 por 100 < 20 por 100). Pero es preferible segmentarlo utilizando el criterio del nivel cultural, situando en una categoría los miembros de los niveles P y Q, en los que la proporción conjunta de consumidores es, por término medio, inferior al promedio de la muestra total (16,42 por 100 < 20 por 100), y en otra, al nivel R cuya proporción media de consumidores (27,27 por 100) es superior a la media global del 20 por 100.

RESOLUCIÓN

$$Q = \sqrt{\frac{2kq}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 195.312,5 \cdot 400}{250.000}} = 25 \text{ lanchas en cada pedido}$$

Problema
4

Modelos deterministas

Una empresa se dedica a comprar en el extranjero, por un precio unitario de 812.500 u.m., un producto que vende en España. Cada año compra y vende 400 u.f. del producto. El coste de gestión de cada pedido es de 781.250 u.m. y el coste de tener una unidad de producto almacenada durante un año es de 168.750 u.m., excluyendo los costes financieros. El coste de oportunidad de capital es el 10 por 100. ¿Cuántos pedidos debe realizar al año? Tómese el año comercial.

RESOLUCIÓN

$$g = a + p \cdot i = 168.750 + 0,10 \cdot 812.500 = 250.000 \text{ u.m.}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2kq}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 781.250 \cdot 400}{250.000}} = 50 \text{ u.f.}$$

Si con cada pedido se solicitan 50 u.f., y al cabo de un año se necesitan 400 u.f., el número de pedidos que hay que efectuar al año es:

$$\frac{400}{50} = 8 \text{ pedidos}$$

9.1. MODELO PROBABILÍSTICO

Problema
5

Modelo probabilístico

Nuñed Asociados, S. A., es una empresa dedicada a la distribución de claves. Sus ventas mensuales siguen una distribución de probabilidad normal con

una media (esperanza matemática de ventas) igual a 1.000 u.f. y una desviación típica igual a 60 u.f. ¿Qué stock de seguridad ha de mantener esta empresa para que la probabilidad de que se produzca una ruptura de stocks no supere el 10 por 100?

RESOLUCIÓN

Si S es el nivel de las existencias al comienzo del período y las ventas esperadas para dicho período son $E(q)$, el stock de seguridad será:

$$S_s = S - E(q)$$

En este caso, se supone que las ventas mensuales, q , siguen una distribución normal y se desea limitar al 10 por 100 la probabilidad de que las ventas del período superen su nivel inicial de existencias. Es decir:

$$P(q > S) \leq 0,10$$

O, lo que es lo mismo, siendo ξ la variable que tiene una distribución normal de esperanza nula y desviación típica unitaria:

$$\begin{aligned} P\left(1.000 + 60\xi > S\right) &\leq 0,10 \rightarrow P\left(\xi > \frac{S - 1.000}{60}\right) \leq 0,10 \rightarrow \\ \rightarrow 0,5 - P\left(0 \leq \xi \leq \frac{S - 1.000}{60}\right) &\leq 0,10 \rightarrow P\left(0 \leq \xi \leq \frac{S - 1.000}{60}\right) \geq 0,4 \end{aligned}$$

En las tablas de la curva normal tipificada del apéndice de este libro se comprueba que

$$\frac{S - 1.000}{60} = 1,29$$

Por consiguiente:

$$S = 1.077,4 \text{ u.f.}$$

El stock de seguridad será:

$$S_s = S - E(q) = 1.077,4 - 1.000 = 77,4 \text{ u.f.}$$

TABLA 12.14

	Muestra N_i	Asistentes E_i	$N_1 N_2 / N$	$y_i = E_i / N_i$	$(N_1 N_2 / N)(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2$
<i>Edad</i>					
J	3.500	200	2.275	0,0571	(9,89)
A + N	6.500	800		0,1231	
J + A	7.500	700	1.875	0,0933	1,33
N	2.500	300		0,12	
J + N	6.000	500	2.400	0,0833	4,16
A	4.000	500		0,125	
<i>Clase social</i>					
A	2.500	250	1.875	0,10	0
M + B	7.500	750		0,10	
A + M	6.500	850	2.275	0,1308	(17,58)
B	3.500	150		0,0429	
A + B	6.000	400	2.400	0,0667	16,67
M	4.000	600		0,15	
<i>Estado civil</i>					
S + C	9.000	925	900	0,1028	0,6944
D + V	1.000	75		0,075	
S + D	4.500	485	2.475	0,1078	0,4947
C + V	5.500	515		0,0936	
S + V	4.500	440	2.475	0,0978	0,0403
D + C	5.500	560		0,1018	
S	4.000	425	2.400	0,1063	0,2604
C + D + V	6.000	575		0,0958	
C	5.000	500	2.500	0,10	0
S + D + V	5.000	500		0,10	
V	500	60	475	0,12	0,2105
S + C + D	9.500	940		0,0989	
D	500	15	475	0,03	(2,5789)
S + C + V	9.500	985		0,1036	
<i>Sexo</i>					
H	5.000	400	2.500	0,08	(4)
V	5.000	600		0,12	

El criterio preferible es la clase social, segmentando la población en dos categorías: las clases A y M por un lado y la B por otro.

12.3. LA EXPERIMENTACIÓN COMERCIAL

Problema
12

Experimentación comercial

La empresa Sunedsa desea estimar el carácter significativo de los efectos promocionales de la fuerza de ventas en la venta de sus productos. Para ello ha realizado un experimento consistente en medir las ventas en tres establecimientos minoristas que, por lo demás, son semejantes entre sí, en diez meses consecutivos. En el establecimiento 1 realizó un importante esfuerzo promocional, siendo de nivel medio el realizado en el 2 y prácticamente nulo el desarrollado en el establecimiento 3. Las ventas registradas se recogen en la tabla 12.15.

TABLA 12.15

Mes (t)	Ventas (u.f.)		
	Establecimiento 1	Establecimiento 2	Establecimiento 3
1	100	80	60
2	110	70	60
3	100	90	50
4	100	100	70
5	100	80	70
6	90	80	80
7	90	90	80
8	100	110	90
9	80	70	60
10	110	100	70
Ventas totales	980	870	700
Gran total = 980 + 870 + 700 = 2.550			

¿Es significativo el efecto de esta variable en las ventas para niveles de significación del 5 y del 1 por 100?

RESOLUCIÓN

Siendo X_{ik} las ventas del día t en el establecimiento k , la venta media mensual por establecimiento fue:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^3 \sum_{t=1}^{10} X_{kt}}{30} = \frac{2.550}{30} = 85 \text{ u.f.}$$

En el primer establecimiento la venta media fue:

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{10} X_{t1}}{10} = \frac{980}{10} = 98 \text{ u.f.}$$

y en el segundo y tercero:

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{10} X_{t2}}{10} = \frac{870}{10} = 87 \text{ u.f.} ; \bar{X}_3 = \frac{\sum_{t=1}^{10} X_{t3}}{10} = \frac{700}{10} = 70 \text{ u.f.}$$

Las diferencias observadas entre las ventas en los distintos meses de los diversos establecimientos y el nivel medio de ventas general (dispersión total) puede atribuirse a dos tipos de causas:

- La dispersión o variabilidad de las ventas de los establecimientos respecto a las ventas medias de los mismos (dispersión residual).
- La diferencia de las ventas medias de los establecimientos respecto al nivel medio general de ventas (dispersión factorial).

La variabilidad total (dispersión total) se mide por el coeficiente definido por la suma de las desviaciones cuadráticas respecto a la media general:

$$D_T = \sum_{k=1}^m \sum_{t=1}^n (X_{kt} - \bar{X})^2$$

donde n es el número de observaciones de cada grupo (diez en este caso) y m el número de grupos (tres en este problema).

El análisis de la varianza permite distinguir la parte de variabilidad debida a factores incontrolados (dispersión residual), de la parte debida a la variable explicativa (dispersión factorial) y verificar su carácter significativo. La dispersión factorial se mide por el coeficiente

$$D_f = n \sum_{k=1}^m (\bar{X}_k - \bar{X})^2$$

y la residual por

$$D_r = \sum_{k=1}^m \sum_{t=1}^n (X_{kt} - \bar{X}_k)^2$$

Denominando N al número total de observaciones ($N = mn$) (treinta en este problema), se deduce, mediante simples operaciones aritméticas, que

$$\begin{aligned} D_T &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (X_{ik} - \bar{X})^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (X_{ik}^2 - 2X_{ik}\bar{X} + \bar{X}^2) = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik}^2 - 2\bar{X} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik} + N(\bar{X})^2 = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik}^2 - 2\bar{X}N\bar{X} + N(\bar{X})^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik}^2 + N(\bar{X})^2 \end{aligned}$$

De forma semejante se obtienen las siguientes expresiones:

$$D_f = n \sum_{k=1}^m (\bar{X}_k)^2 - N(\bar{X})^2 ; D_r = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik}^2 - n \sum_{k=1}^m (\bar{X}_k)^2$$

Así:

$$D_f + D_r = D_T$$

pues

$$\left[n \sum_{k=1}^m (\bar{X}_k)^2 - N(\bar{X})^2 \right] + \left[\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik}^2 - n \sum_{k=1}^m (\bar{X}_k)^2 \right] = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik}^2 - N(\bar{X})^2$$

En la figura 12.1 se sintetizan los resultados obtenidos.

La dispersión factorial mide la variabilidad de las medias de los grupos respecto a la media general. Por el contrario, la dispersión residual, al calcularse dentro de los grupos, tiende a reflejar la variabilidad derivada de factores incontrolados. Si la variabilidad factorial fuera significativamente superior a la residual, se podría concluir que existe un efecto diferencial debido a la variable explicativa o variable controlada en el experimento. Para determinar si la diferencia es significativa, se calcula el estadístico F , y con las tablas estadísticas apropiadas (véase apéndice de tablas) se verifica si el cociente entre ambas es significativamente superior a la unidad. El estadístico F se define como sigue:

$$F = \frac{S_f^2}{S_r^2}$$

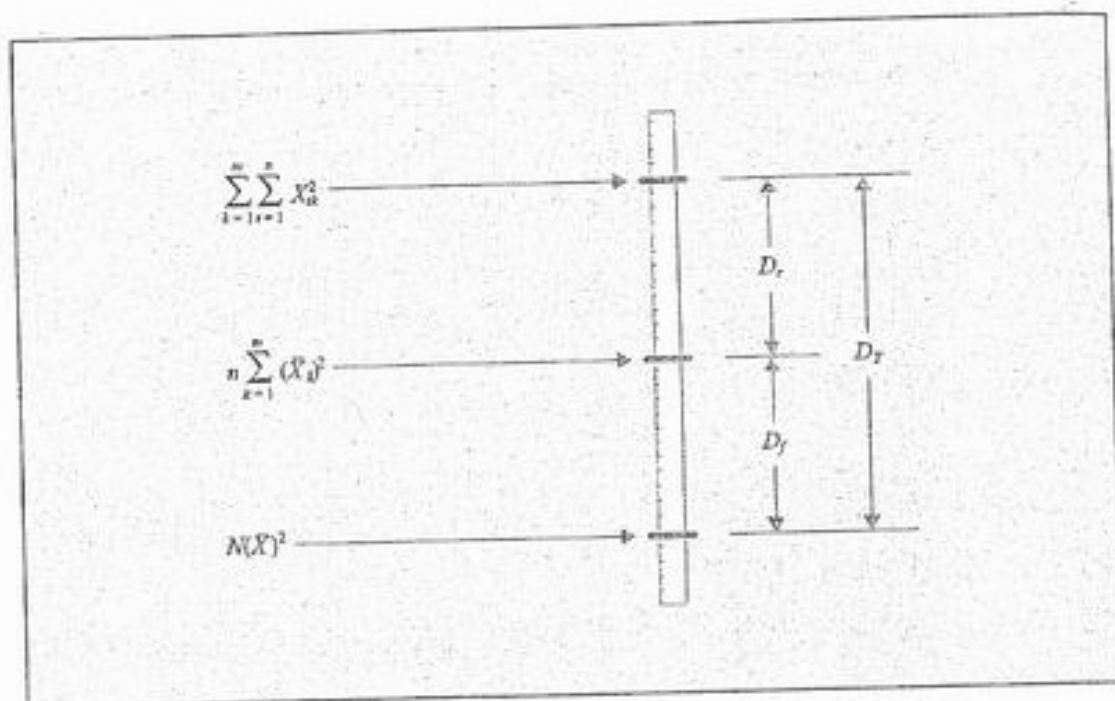


Figura 12.1.

donde S_f^2 es la cuasivarianza factorial:

$$S_f^2 = \frac{D_f}{m - 1}$$

y S_r^2 la cuasivarianza residual:

$$S_r^2 = \frac{D_r}{N - m}$$

La cuasivarianza total vale

$$S_T^2 = \frac{D_T}{N - 1}$$

Los denominadores de estos tres últimos cocientes son los denominados «grados de libertad» de cada uno de ellos.

En la tabla 12.16 se recogen los cálculos precisos para resolver el problema enunciado.

A la vista de estos resultados, la contribución de la dispersión factorial a la variabilidad total es apreciable. El efecto diferencial de la variable «fuerza de ventas» es acusado, pues incluso a un nivel de significación del 1 por 100, el valor de F correspondiente, según tablas, al cociente en el que el numerador tiene dos grados de libertad y el denominador 27 ($F_{0.01}(2,27)$) es sustancialmente inferior al calculado. El efecto de esta variable en las ventas es significativo tanto a un nivel de significación del 5 por 100 como a un nivel del 1 por 100.

TABLA 12.16

i	X_{ia}^2	X_{ib}^2	X_{ic}^2	$n \sum_{k=1}^m (\bar{X}_k)^2 = 10(98^2 + 87^2 + 70^2) = 220.730$ $N(\bar{X})^2 = 30(85)^2 = 216.750$ $D_f = 220.730 - 216.750 = 3.980$ $D_g = 224.100 - 220.730 = 3.370$ $D_r = 224.100 - 216.750 = 7.350$ $S_f^2 = \frac{3.980}{3-1} = 1.990$ $S_g^2 = \frac{3.370}{30-3} = 124,81$ $F = \frac{1.990}{124,81} = 15,94$ $F_{0.01}(2,27) = 5,5$ $F_{0.05}(2,27) = 3,3$
1	10.000	6.400	3.600	
2	12.100	4.900	3.600	
3	10.000	8.100	3.600	
4	10.000	10.000	4.900	
5	10.000	6.400	4.900	
6	8.100	6.400	6.400	
7	8.100	8.100	6.400	
8	10.000	12.100	8.100	
9	6.400	4.900	3.600	
10	12.100	10.000	4.900	
Total	96.800	77.300	50.000	
Gran total = $96.800 + 77.300 + 50.000 = 224.100 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n X_{ik}^2$				

Problema 13

Experimentación comercial

La empresa Aunedosa desea estudiar el carácter significativo del efecto del precio en la venta de su producto. Para ello ha realizado un experimento consistente en medir las ventas en tres establecimientos minoristas distanciados y que, por lo demás, son semejantes entre sí, en doce días consecutivos. En el primer establecimiento, el producto se vende a un precio bajo, siendo intermedio el fijado en el segundo establecimiento y elevado el del tercer establecimiento. Las ventas registradas se recogen en la tabla 12.17.

TABLA 12.17

Día (t)	Ventas (u.f.)		
	Establecimiento 1	Establecimiento 2	Establecimiento 3
1	200	160	130
2	200	150	120
3	210	160	130
4	210	160	130
5	200	160	130
6	200	150	120
7	190	150	120
8	200	170	120
9	190	170	130
10	190	160	130
11	210	170	120
12	210	170	110
Total	2.410	1.930	1.490
Gran total $2.410 + 1.930 + 1.490 = 5.830$			

¿Se puede considerar significativo el efecto de esta variable en las ventas?

RESOLUCIÓN

La venta media diaria general fue:

$$\bar{X} = \frac{5.830}{36} = 161,94$$

En cuanto a las ventas medias de cada uno de los establecimientos se tiene:

$$\bar{X}_1 = \frac{2.410}{12} = 200,8\bar{3}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1.930}{12} = 160,8\bar{3}$$

$$\bar{X}_3 = \frac{1.490}{12} = 124,1\bar{6}$$

Los restantes cálculos se recogen en la tabla 12.18.

TABLA 12.18

i	X_{ni}^2	X_n^2	X_{ij}^2	$n \sum_{i=1}^m (\bar{X}_i)^2 = 12(200,83^2 + 160,83^2 + 124,16^2) +$ $= 979.425$ $N(\bar{X})^2 = 36(161,94)^2 = 944.136$ $D_f = 979.425 - 944.136 = 35.289$ $D_r = 981.300 - 979.425 = 1.875$ $D_T = 981.300 - 944.136 = 37.164$ $S_f^2 = \frac{35.289}{3-1} = 17.644,5$ $S_r^2 = \frac{1.875}{36-3} = 56,818$ $F = \frac{17.644,5}{56,818} = 310,53$ $F_{0,01}(2,33) = 5,3$ $F_{0,05}(2,33) = 3,3$
1	40.000	25.600	16.900	
2	40.000	22.500	14.400	
3	44.100	25.600	16.900	
4	44.100	25.600	16.900	
5	40.000	25.600	16.900	
6	40.000	22.500	14.400	
7	36.100	22.500	14.400	
8	40.000	28.900	14.400	
9	36.100	28.900	16.900	
10	36.100	25.600	16.900	
11	44.100	28.900	14.400	
12	44.100	28.900	12.100	
Total	484.700	311.100	185.500	
Gran total = 981.300 = $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{nj}^2$				

La contribución de la dispersión factorial a la variabilidad total es apreciable. El efecto diferencial de la variable «precio» es acusado, pues, incluso a un nivel de significación del 1 por 100, el valor de F , en tablas, correspondiente a estos grados de libertad es sustancialmente inferior al calculado. El efecto de esta variable es significativo tanto a un nivel de significación del 5 por 100 como a un nivel del 1 por 100.

Problema 14

Experimentación comercial

Para estudiar la eficacia de la publicidad en vallas se han tomado tres ciudades similares, realizándose una campaña fuerte en la primera, una intermedia en la segunda y ninguna en la tercera. Transcurrido un tiempo, se midieron las ventas en ocho semanas y se calcularon las ventas medias semanales, que resultaron ser 230 en la primera ciudad, 170 en la segunda y 80 en la tercera. Se desea conocer la dispersión factorial.

RESOLUCIÓN

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3}{3} = \frac{230 + 170 + 80}{3} = 160$$

$$D_f = 8[(\bar{X}_1)^2 + (\bar{X}_2)^2 + (\bar{X}_3)^2] - N(\bar{X})^2 = \\ = 8(230^2 + 170^2 + 80^2) - 24 \cdot 160^2 = 91.200 \text{ u.m.}$$

Problema
15

Experimentación comercial

La empresa Reunedesa se dedica a la fabricación y venta de un licor extraído de caña de azúcar y mondas de patatas. Hasta el momento, su promoción se ha basado en publicidad en prensa de ámbito nacional. Actualmente, sus directivos están considerando la posibilidad de introducir la publicidad en vallas. Para estudiar los efectos de esta variable en las ventas, han realizado un experimento consistente en tomar tres ciudades de características similares y realizar una fuerte campaña de publicidad de este tipo en una de ellas (ciudad 1), una campaña de tipo medio en otra ciudad (ciudad 2) y ninguna en la tercera. Transcurrido cierto tiempo desde el comienzo de las campañas, se midieron las ventas en las tres ciudades durante ocho semanas. Los resultados obtenidos se recogen en la tabla 12.19.

TABLA 12.19

Semana	Ventas (u.L.)		
	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
1	110	90	85
2	115	95	90
3	120	100	95
4	125	110	100
5	130	115	100
6	120	110	90
7	115	100	90
8	110	100	90
Total	945	820	740
Gran total = 945 + 820 + 740 = 2.505			

¿Se puede considerar significativo el efecto de la publicidad en vallas en las ventas de este licor?

RESOLUCIÓN

El nivel medio semanal de ventas fue

$$\bar{X} = \frac{2.505}{24} = 104,375$$

En cuanto a las ventas semanales medias de las tres ciudades, se obtiene:

$$\bar{X}_1 = \frac{945}{8} = 118,125$$

$$\bar{X}_2 = \frac{820}{8} = 102,5$$

$$\bar{X}_3 = \frac{740}{8} = 92,5$$

Los restantes cálculos se recogen en la tabla 12.20.

TABLA 12.20

i	X_{ia}^2	X_{ia}^2	X_{ia}^3	$n \sum (\bar{X}_i)^2 = 8(118,125^2 + 102,5^2 + 92,5^2) = 264.128,12$ $N(\bar{X})^2 = 24(104,375)^2 = 261.459,37$ $D_f = 264.128,12 - 261.459,37 = 2.668,75$ $D_r = 265,175 - 264.128,12 = 1.046,88$ $D_T = 265,175 - 261.459,37 = 3.715,63$ $S_f^2 = \frac{2.668,75}{3 - 1} = 1.334,375$ $S_r^2 = \frac{1.046,88}{24 - 3} = 49,851 \quad F_{0,05}(2,21) = 3,47$ $F = \frac{1.334,375}{49,851} = 26,77 \quad F_{0,01}(2,21) = 5,78$
1	12.100	8.100	7.225	
2	13.225	9.025	8.100	
3	14.400	10.000	9.025	
4	15.625	12.100	10.000	
5	16.900	13.225	10.000	
6	14.400	12.100	8.100	
7	13.225	10.000	8.100	
8	12.100	10.000	8.100	
Total	111.975	84.550	68.650	
$\text{Gran total} = 265,175 = \sum_{i=1}^m \sum_{a=1}^n X_{ia}^2$				

La contribución de la dispersión factorial (2.668,75) a la variabilidad total (3.715,63) es apreciable. El efecto diferencial de la variable controlada «publicidad en vallas» es acusado, pues incluso a un nivel de significación del 1 por 100 el valor de F obtenido es sustancialmente superior al que corresponde, según tablas, a estos grados de libertad.

13

El producto y el precio

13.1. EL POSICIONAMIENTO DE MARCAS

Problema

1

Posicionamiento de marcas

La empresa Oranguned ha realizado una encuesta en la que los consumidores encuestados calificaron las cuatro marcas de refrescos de naranja que compiten en el mercado en base a los dos criterios que se consideran determinantes en la selección de los consumidores: su nivel de burbujas y su dulzor. Los consumidores puntuaron las marcas, de menor a mayor percepción de nivel de burbujas, asignándoles de uno a diez puntos. De la misma forma puntuaron de uno a diez las marcas según percibieran menor o mayor nivel de dulzor. Los resultados promedios se recogen en la tabla 13.1.

TABLA 13.1

Marcas	Burbujas	Dulzor
A	4	7
B	7	6
C	3	8
D	5	5

De la encuesta se deduce además que la posición considerada ideal, por el segmento al que pertenecen los consumidores encuestados, tiene una puntuación de 5 en burbujas y de 6 en dulzor. Se desea determinar:

- La posición que ocupa cada marca en relación a las demás y a la ideal.

- b) La ordenación de la participación en el mercado de las cuatro marcas suponiendo que ésta depende sólo de la proximidad de cada una de ellas a la posición ideal.

RESOLUCIÓN

En la figura 13.1 se representan las posiciones de dos marcas, 1 y 2, con arreglo a dos atributos de posicionamiento, x e y .

Por el teorema de Pitágoras, la distancia entre ellas será:

$$D_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En la figura 13.2 se representan las posiciones de las cuatro marcas de refrescos con relación a los dos atributos seleccionados, y en la tabla 13.2 se recogen los cálculos precisos para determinar las distancias entre las distintas marcas.

Siendo D_{ij} la distancia de la marca i respecto a la posición ideal ($i = A, B, C, D$), obviamente resulta:

$$D_{DI} < D_{AI} < D_{BI} < D_{CI}$$

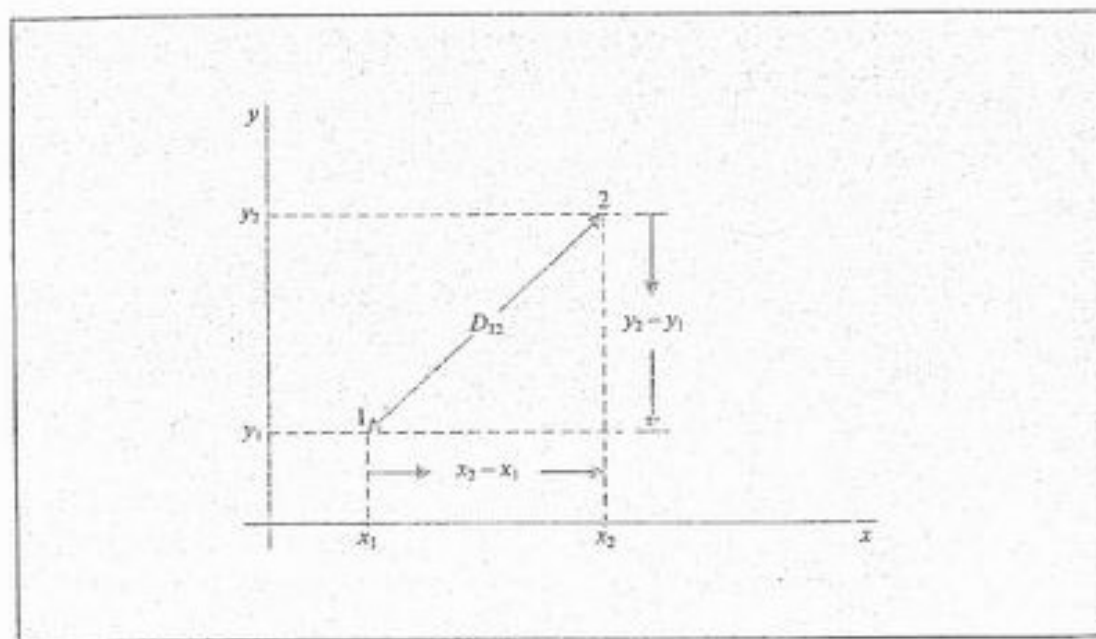


Figura 13.1.

TABLA 13.2

	A $x=7, y=4$	B $x=6, y=7$	C $x=8, y=3$	D $x=5, y=5$	Ideal $x=6, y=5$
A $x=7, y=4$		$\sqrt{(7-6)^2 + (4-7)^2} = 3.16$	$\sqrt{(7-8)^2 + (4-3)^2} = 1.41$	$\sqrt{(7-5)^2 + (4-5)^2} = 2.24$	$\sqrt{(7-6)^2 + (4-5)^2} = 1.41$
B $x=6, y=7$			$\sqrt{(6-8)^2 + (7-3)^2} = 4.47$	$\sqrt{(6-5)^2 + (7-5)^2} = 2.24$	$\sqrt{(6-6)^2 + (7-5)^2} = 2$
C $x=8, y=3$				$\sqrt{(8-5)^2 + (3-5)^2} = 3.61$	$\sqrt{(8-6)^2 + (3-5)^2} = 2.83$
D $x=5, y=5$					$\sqrt{(5-6)^2 + (5-5)^2} = 1$

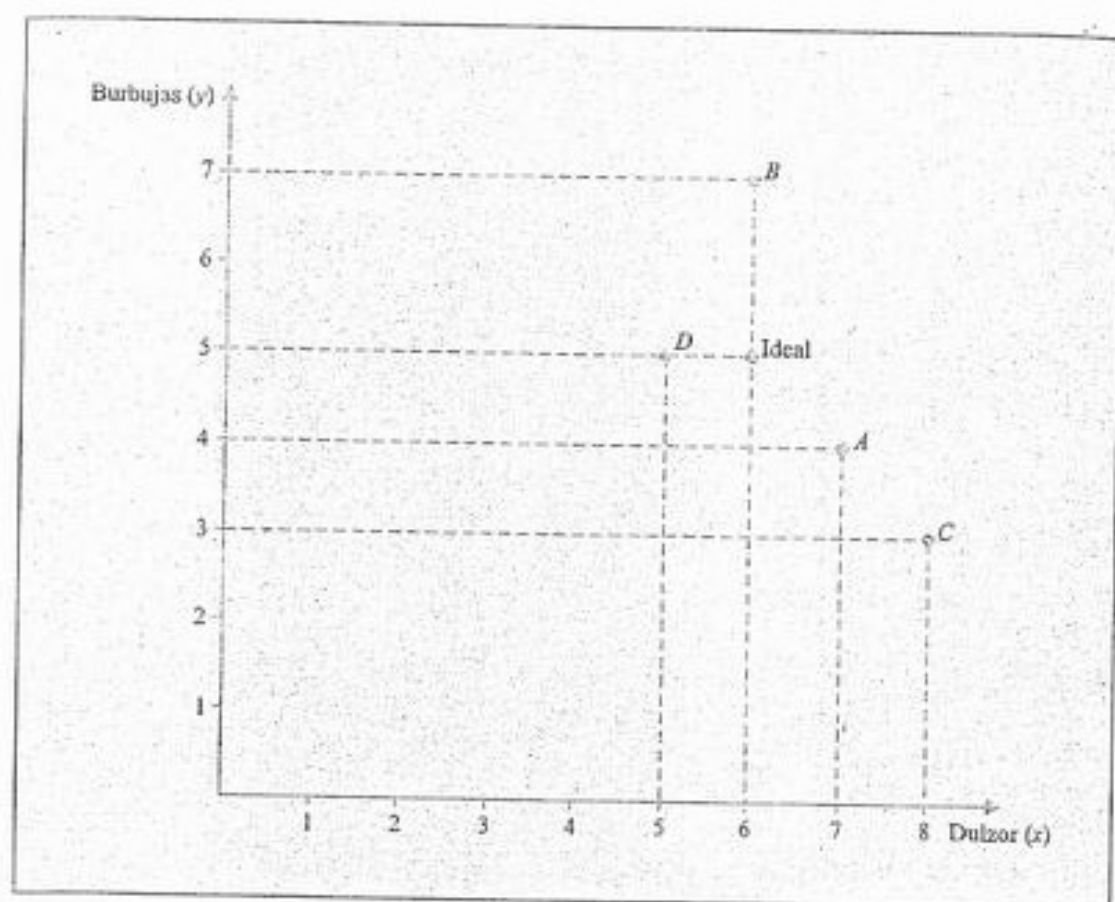


Figura 13.2.

La marca más próxima a la posición ideal es la D, seguida de la A, ésta de la B y por último la marca C. Por consiguiente, si la cuota de mercado de la marca i se designa por q_i , se cumplirá que

$$q_D > q_A > q_B > q_C$$

Problema

2

Posicionamiento de marcas

Según los consumidores consultados, la marca de refrescos A tiene 3 puntos en burbujas y 8 en dulzor, en tanto que la posición ideal es 5 en burbujas y 6 en dulzor. ¿Cuál es la distancia de la marca A a la posición ideal?

RESOLUCIÓN

$$D_{AI} = [(3 - 5)^2 + (8 - 6)^2]^{1/2} = 2,83$$

Problema
3
Posicionamiento de marcas

La empresa Refrunedolsa ha realizado una encuesta entre los consumidores de cierto segmento de un mercado de cierto tipo de refresco con alcohol, en el que los encuestados puntuaron de uno a diez, a cada una de las cuatro marcas que compiten en él, según el grado de burbujas, alcohol y dulzor que perciben en las mismas. Los resultados promedios se recogen en la tabla 13.3.

TABLA 13.3

Marcas	Burbujas	Alcohol	Dulzor
A	4	7	4
B	2	6	5
C	2	8	6
D	3	7	6

De la encuesta se deduce, además, que la posición que se considera ideal en este segmento tiene una puntuación de tres puntos en burbujas, ocho en alcohol y cinco en dulzor. Se desea determinar:

- La distancia de la posición que ocupa cada marca en relación a las posiciones de las demás y a la ideal.
- La ordenación de la participación en el mercado de las cuatro marcas, suponiendo que ésta depende solamente de la proximidad de cada una de ellas a la posición ideal.

RESOLUCIÓN

Generalizando a tres atributos de posicionamiento x , y y z los resultados del primer problema, la distancia entre las marcas 1 y 2 se medirá por el coeficiente

$$D_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

En la tabla 13.4 recogen los cálculos precisos para determinar las distancias entre las diferentes marcas.

La máxima participación en el mercado corresponderá a las marcas C y D seguidas de la A y en último lugar la marca B.

TABLA 13.4

	A $x=4$ $y=7$ $z=4$	B $x=2$ $y=6$ $z=5$	C $x=2$ $y=8$ $z=6$	D $x=3$ $y=7$ $z=6$	Ident $x=3$ $y=8$ $z=5$
A $x=4$ $y=7$ $z=4$	—	$\sqrt{(4-2)^2 + (7-6)^2 + (4-5)^2} = 2.45$	$\sqrt{(4-2)^2 + (7-8)^2 + (4-6)^2} = 3$	$\sqrt{(4-3)^2 + (7-7)^2 + (4-6)^2} = 2.24$	$\sqrt{(4-3)^2 + (7-8)^2 + (4-5)^2} = 1.73$
B $x=2$ $y=6$ $z=5$	—	—	$\sqrt{(2-2)^2 + (6-8)^2 + (5-6)^2} = 2.24$	$\sqrt{(2-3)^2 + (6-7)^2 + (5-6)^2} = 1.73$	$\sqrt{(2-3)^2 + (6-8)^2 + (5-5)^2} = 2.24$
C $x=2$ $y=8$ $z=6$	—	—	—	$\sqrt{(2-3)^2 + (8-7)^2 + (6-6)^2} = 1.41$	$\sqrt{(2-3)^2 + (8-8)^2 + (6-5)^2} = 1.41$
D $x=3$ $y=7$ $z=6$	—	—	—	—	$\sqrt{(3-3)^2 + (7-8)^2 + (6-5)^2} = 1.41$

13.2. LA CREACIÓN DE NUEVOS PRODUCTOS

Problema

4

La creación de nuevos productos. Selección

La empresa Unedelectra, S. A., se dedica a la fabricación y venta de aparatos de vídeo y sonido. Para competir en cierto segmento ha decidido incorporar un nuevo modelo de aparato de vídeo a su gama de productos. Las opciones existentes con los medios técnicos y financieros disponibles son:

- Lanzar el modelo tipo A, que requiere una inversión de 1.000 millones de u.m. para obtener una capacidad de producción de 50.000 unidades/año, con un flujo neto de caja, por unidad vendida, de 15.000 u.m.
- Lanzar el modelo tipo B, que requiere una inversión de 1.500 millones de u.m., con una capacidad productiva de 100.000 unidades/año, siendo el flujo neto de caja, por unidad vendida, de 20.000 u.m.

Tras los necesarios estudios se estima que el primer año la demanda puede ser alta (100.000 unidades/año) con una probabilidad del 70 por 100, y baja (40.000 unidades/año) con una probabilidad del 30 por 100. Para el segundo año se considera que la demanda se mantendrá al mismo nivel que el año anterior con una probabilidad del 80 por 100. Se estima un coste variable adicional de 5.000 u.m. por cada unidad en que la capacidad de producción excede a las ventas anuales.

Al finalizar el primer año, si la empresa lanzó el modelo tipo A puede modificar las instalaciones y pasar a producir el modelo tipo B, pero con una inversión adicional de 750 millones de u.m.

Se desea determinar la decisión óptima aplicando el criterio del valor actual neto esperado para un tipo de descuento del 10 por 100 y suponiendo que coinciden ingresos y cobros, así como costes y pagos.

RESOLUCIÓN

Veamos la figura 13.3.

Los valores actuales netos de los distintos caminos se calculan del siguiente modo:

$$VAN_1 = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 50.000}{1,1} - \frac{15.000 \times 50.000}{1,1^2} =$$

$$= 301.652.893 \text{ u.m.}$$

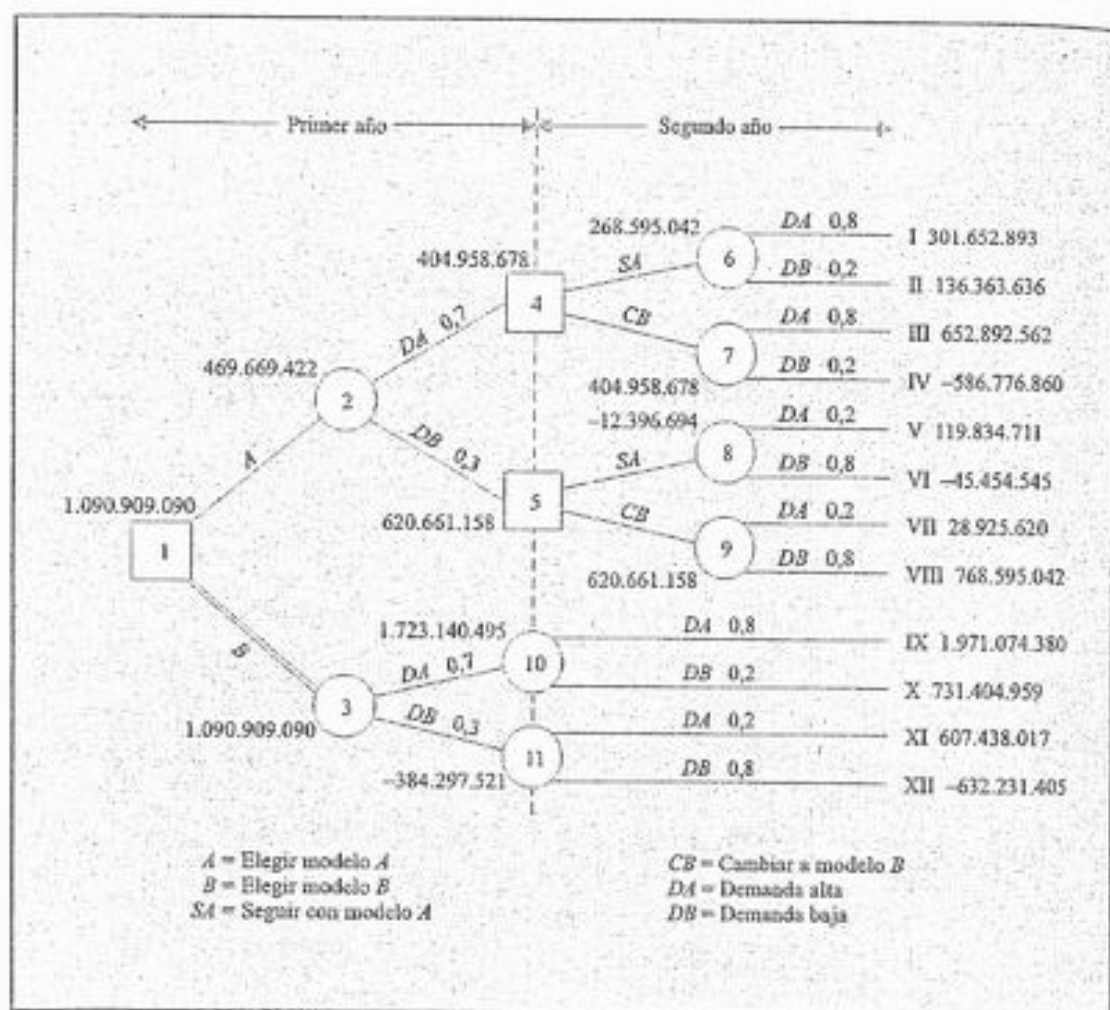


Figura 13.3.

$$VAN_{II} = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 50.000}{1,1} + \frac{15.000 \times 40.000 - 5.000 \times 10.000}{1,1^2} =$$

$$= 136.363.636 \text{ u.m.}$$

En este segundo camino, la demanda es baja en el segundo año, por lo que sólo se venden 40.000 u.f. y existe un coste adicional de 5.000 u.m. por cada unidad en que la capacidad de producción (50.000 u.f.) excede a esas ventas.

$$VAN_{III} = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 50.000}{1,1} - \frac{750.000.000}{1,1} + \frac{20.000 \times 100.000}{1,1^2} =$$

$$= 652.892.562 \text{ u.m.}$$

En el camino III, al final del primer año la empresa modifica sus instalaciones abonando 750 millones de u.m., con lo que pasa a poder producir 100.000 unidades a 20.000 u.m. de flujo, cada una; unidades que se producen y venden al ser alta la demanda del segundo año.

$$VAN_{IV} = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 50.000}{1,1} - \frac{750.000.000}{1,1} + \frac{20.000 \times 40.000 - 5.000 \times 60.000}{1,1^2} = -586.776.860 \text{ u.m.}$$

$$VAN_V = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 40.000 - 5.000 \times 10.000}{1,1} + \frac{15.000 \times 50.000}{1,1^2} = 119.834.711 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{VI} = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 40.000 - 5.000 \times 1.000}{1,1} + \frac{15.000 \times 40.000 - 5.000 \times 10.000}{1,1^2} = -45.454.545 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{VII} = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 40.000 - 5.000 \times 10.000}{1,1} - \frac{750.000.000}{1,1} + \frac{20.000 \times 100.000}{1,1^2} = 28.925.620 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{VIII} = -1.000.000.000 + \frac{15.000 \times 40.000 - 5.000 \times 10.000}{1,1} - \frac{750.000.000}{1,1} + \frac{20.000 \times 40.000 - 5.000 \times 60.000}{1,1^2} = 768.595.042 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{IX} = -1.500.000.000 + \frac{20.000 \times 100.000}{1,1} + \frac{20.000 \times 100.000}{1,1^2} = 1.971.074.380 \text{ u.m.}$$

$$VAN_X = -1.500.000.000 + \frac{20.000 \times 100.000}{1,1} + \frac{20.000 \times 40.000 - 5.000 \times 60.000}{1,1^2} = 731.404.959 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{XI} = -1.500.000.000 + \frac{20.000 \times 40.000 - 5.000 \times 60.000}{1,1} +$$

$$+ \frac{20.000 \times 100.000}{1,1^2} = 607.438.017 \text{ u.m.}$$

$$VAN_{XII} = -1.500.000.000 + \frac{20.000 \times 40.000 - 5.000 \times 60.000}{1,1} +$$

$$+ \frac{20.000 \times 40.000 - 5.000 \times 60.000}{1,1^2} = -632.231.405 \text{ u.m.}$$

Los valores actuales esperados de los nudos aleatorios y decisionales se calculan de la forma habitual. Siguiendo este criterio, la decisión óptima es lanzar el modelo tipo B, con lo que se consigue un valor actual neto esperado (1.090.909.090) superior que si se lanza el modelo tipo A (469.669.422).

Problema
5

La creación de nuevos productos. Viabilidad

La empresa Abuluned, S. A., se encuentra estudiando la posibilidad de lanzar un nuevo producto que supondría, en concepto de costes fijos anuales, 10.000 u.m., con independencia de la cantidad que fuera elaborada y vendida. Tales costes incluyen las amortizaciones de las inversiones efectuadas en el diseño y desarrollo del producto, en el montaje y puesta en marcha de las cadenas de producción, en el lanzamiento del producto, etc. Además, se estima que, con cada unidad producida, se incurriría en un coste variable unitario de 20 u.m. que incluye las materias primas y la mano de obra incorporada, así como costes de distribución y otros varios. De los sondeos realizados se deduce que cada unidad de producto podría ser vendida en un precio igual a 60 u.m. Se está realizando la previsión de ventas del producto. ¿Qué volumen de ventas anual es preciso para que el producto genere beneficios?

RESOLUCIÓN

Igualando los ingresos correspondientes a un volumen de ventas X, y los costes que le corresponden, se obtiene:

$$60X = 10.000 + 20X \rightarrow X = \frac{10.000}{40} = 250 \text{ u.f.}$$

A 250 u.f. de ventas (punto muerto o umbral de rentabilidad) le corresponde un beneficio nulo. A partir de ese volumen de ventas anual comenzará a generar beneficios.

Problema
6
La creación de nuevos productos. Planificación y desarrollo

En la empresa Electruned, S. A., se han realizado los primeros estudios preliminares para la planificación y desarrollo de su nuevo producto Heliman, un helicóptero plegable de bolsillo para uso individual. El desarrollo del proyecto requiere la realización de las ocho actividades siguientes:

- A: Investigación mercadotécnica.
- B: Desarrollo de un modelo prototipo.
- C: Al mismo tiempo se diseña y desarrolla el planteamiento de la campaña publicitaria inicial.
- D: Realización de pruebas técnicas del producto.
- E: Pruebas mercadotécnicas para analizar las reacciones de los consumidores al nuevo producto.
- F: Análisis financiero de las necesidades mercadotécnicas y productivas.
- G: Modificaciones de la idea inicial derivadas de las pruebas mercadotécnicas y del análisis financiero.
- H: Decisión final sobre la comercialización o no del producto.

En la tabla 13.5 se detallan las actividades que es necesario realizar con anterioridad a cada una de ellas y sus duraciones probables.

Se desea establecer el grafo PERT para el desarrollo de este producto, con indicación de las duraciones esperadas de las actividades, tiempos *early* y *last*, holguras y camino crítico.

RESOLUCIÓN

Resolviendo de la forma habitual se obtiene el grafo de la figura 13.4.

TABLA 13.5

Actividades	Actividades previas necesarias	Tiempo de realización		
		Pesimista	Más probable	Optimista
A	—	5	3	1
B	A	3	2	1
C	A	4	3	2
D	B	5	3	1
E	C	7	4	1
F	D	5	3	1
G	E, F	6	4	2
H	G	3	2	1

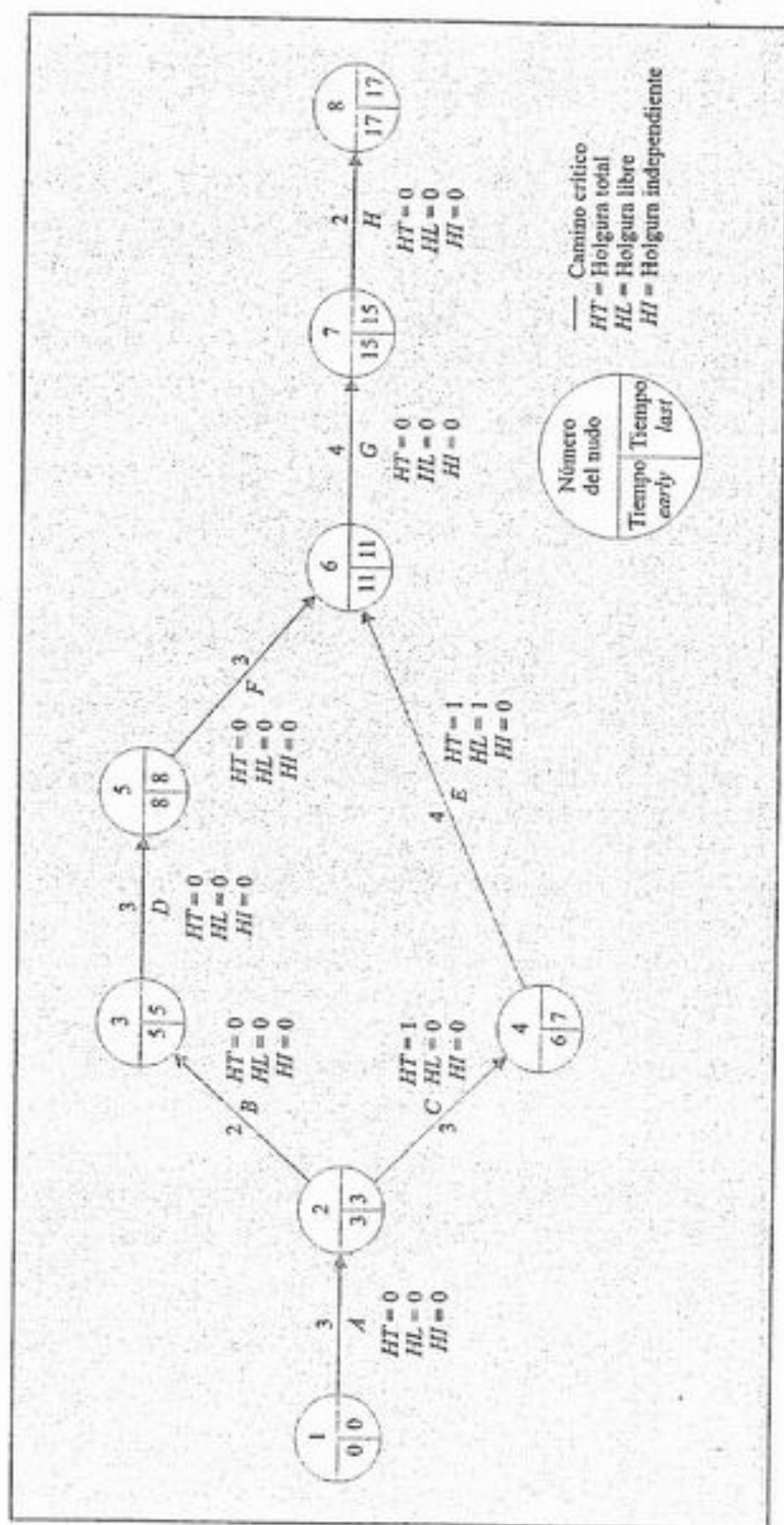


Figura 13.4.

13.3. LA DECISIÓN DE DETERMINACIÓN DE PRECIOS Y SUS LIMITACIONES

Problema 7

Elasticidad media de la demanda respecto al precio

La empresa Peluned, S. A., ha observado que al aumentar el precio de su producto B.O.T., de 100 a 120 u.m., sus ventas mensuales se han reducido de 1.000 u.f. a 900 u.f. sin que exista otra razón que pueda explicar esta disminución. Se desea estimar la elasticidad de la demanda, respecto al precio, en ese intervalo.

RESOLUCIÓN

Como ya se sabe, la elasticidad de la demanda (q) respecto al precio (p), en un punto de la curva de demanda, se define como

$$l = - \frac{dq/q}{dp/p}$$

Pero, al tomar un *intervalo* finito, en el que se modifican precios y cantidades demandadas, ha de definirse un coeficiente de elasticidad medio en el intervalo. Así, si el precio inicial es p_1 y se modifica hasta p_2 , con lo cual, como consecuencia, la demanda varía desde q_1 hasta q_2 , la elasticidad media en el intervalo vale

$$e = - \frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}$$

donde:

$$\Delta q = q_2 - q_1$$

$$\Delta p = p_2 - p_1$$

$$q = \frac{q_2 + q_1}{2}$$

$$p = \frac{p_2 + p_1}{2}$$

Con lo cual:

$$e = \frac{p_2 + p_1}{q_2 + q_1} \cdot \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}$$

En el caso del producto B.O.T. de la empresa Peluned, se obtiene:

$$e = \frac{120 + 100}{900 + 1.000} \times \frac{900 - 1.000}{120 - 100} = 0,6053$$

**Problema
8**

Elasticidad de la demanda respecto al precio y variación de precios e ingresos

¿Puede considerarse adecuada la decisión de la empresa del problema anterior, desde el punto de vista de la maximización de los ingresos?

RESOLUCIÓN

Los ingresos antes de la modificación de los precios eran:

$$q_1 p_1 = 1.000 \times 100 = 100.000 \text{ u.m.}$$

y después de dicha modificación son:

$$q_2 p_2 = 900 \times 120 = 108.000 \text{ u.m.}$$

Por tanto, desde el punto de vista de la maximización de los ingresos (que no tiene por qué coincidir con la maximización de los beneficios) la decisión es adecuada.

En las zonas de la curva de demanda en las que, como en este caso, la demanda es inelástica ($e < 1$), una modificación de los precios da lugar a una variación de la demanda de menor proporción. Así, aumentando el precio, la demanda se reduce en una proporción inferior y los ingresos crecen. Por el contrario, cuando la demanda es elástica ($e > 1$) a las variaciones de precios siguen modificaciones de la cantidad demandada de proporciones más elevadas, por lo que lo correcto, desde este punto de vista, es reducir los precios. El ingreso máximo se consigue en el precio para el cual se alcanza el punto de la curva en el que la elasticidad es normal ($e = 1$).

Problema
9
Elasticidad media de la demanda respecto al precio

Al aumentar el precio de un producto de 50 a 60 u.m., sus ventas mensuales se han reducido de 500 a 400 u.f., sin que exista otra razón que pueda explicar esa disminución. ¿Cuánto vale la elasticidad de la demanda respecto al precio en ese intervalo?

RESOLUCIÓN

$$e = - \frac{p_2 + p_1}{q_2 + q_1} \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = - \frac{60 + 50}{400 + 500} \frac{400 - 500}{60 - 50} = 1,2222$$

Problema
10
Competencia y precios

La empresa B viene actuando monopolísticamente, en cierto mercado, con su producto. La empresa A va a comercializar una marca para competir, en ese mercado, con la marca de la empresa B. Ambas han de fijar los precios de sus marcas para el próximo período. El volumen de ventas que la empresa B perderá, y ganará la A, para cada combinación de precios fijados por ambas, se recoge en la tabla 13.6.

TABLA 13.6

		B		
		p_{B1}	p_{B2}	p_{B3}
A	p_{A1}	300	25	150
	p_{A2}	70	80	450
	p_{A3}	400	100	160
	p_{A4}	50	95	200

¿Cuál es la solución del juego si el ganador sigue el criterio maximin y el perdedor decide con el criterio minimax? ¿Existen estrategias dominadas?

RESOLUCIÓN

Se trata de un sencillo juego de suma cero. Por ejemplo, si la empresa B sigue la estrategia consistente en fijar el precio p_{B3} y la A la de fijar el p_{A1} ,

aquella perderá 150 unidades de ventas que ésta ganará. Si la empresa B fija el precio p_{B3} , puede llegar a perder 450 unidades; si fija el p_{B2} , podría perder 100, y 400 si fija el p_{B1} . Con un criterio prudente puede actuar limitando su pérdida máxima (criterio minimax) y fijar el precio p_{B2} . De forma semejante, en la columna derecha de la tabla 13.7 se han recogido las ventas que, cuando menos, ganará la empresa A, bajo cada posibilidad de actuación. Con el mismo criterio prudente, basado en garantizarse una ganancia tan elevada como sea posible (criterio maximin), fijaría el precio p_{A3} , con lo cual se asegura un aumento de ventas no inferior a 100 unidades. Si los dos jugadores actúan de este modo, la solución del juego es que la empresa A gana y la B pierde 100 unidades de venta.

TABLA 13.7

		B			Mínimos
		p_{B1}	p_{B2}	p_{B3}	
A	p_{A1}	300	25	150	25
	p_{A2}	70	80	450	70
	p_{A3}	400	100	160	100
	p_{A4}	50	95	200	50
Máximos		400	100	450	

Maximin

Minimax

La empresa A nunca fijaría el precio p_{A1} , pues, cualquiera que sea la estrategia seleccionada por B, sus ganancias serán superiores si fija el precio p_{A3} . De forma semejante, la estrategia p_{B3} , de la empresa B, es dominada por la p_{B2} , pues, cualquiera que sea la elección de A, las pérdidas de B serían mayores si sigue aquella que si selecciona ésta. Las estrategias p_{A1} y p_{B3} son estrategias dominadas por otras.

13.4. ALGUNOS MÉTODOS DE DETERMINACIÓN DE PRECIOS

Problema 11

La fijación de precios basada en la maximización del beneficio

El producto Edgo, elaborado por la empresa Susuned, S. A., tiene un coste variable de 15 u.m. y un coste fijo anual de 150.000 u.m. Si se ha estimado que la demanda anual tiene la siguiente ecuación:

$$q = 175.000 - 300p$$

se desea determinar el precio que permite maximizar el beneficio anual.

RESOLUCIÓN

Los ingresos anuales tendrán la siguiente función:

$$I = pq = p(175.000 - 300p) = 175.000p - 300p^2$$

Siendo la de los costes totales anuales:

$$\begin{aligned} C_T &= 150.000 + 15q = 150.000 + 15(175.000 - 300p) = \\ &= 2.775.000 - 4.500p \end{aligned}$$

La función de beneficio anual es, en consecuencia:

$$\begin{aligned} B &= I - C_T = 175.000p - 300p^2 - 2.775.000 + 4.500p = \\ &= -2.775.000 + 179.500p - 300p^2 \end{aligned}$$

Derivando se obtiene la condición necesaria de óptimo:

$$\frac{dB}{dp} = 179.500 - 600p = 0$$

El precio óptimo es

$$p = \frac{179.500}{600} = 299,1\bar{6} \text{ u.m.}$$

pues se cumple la condición suficiente de máximo:

$$\frac{d^2B}{dp^2} = -600 < 0$$

Puede observarse que se cumple la condición necesaria de óptimo establecida en uno de los primeros ejercicios del área mercadotécnica de este libro:

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v$$

En efecto, en el precio óptimo:

$$I_p = -\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -(-300) \frac{299,16}{175.000 - 300 \times 299,16} = 1,052785922$$

y, sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$p = \frac{1,05278922}{1,05278922 - 1} \times 15 = 299,16$$

**Problema
12**

La fijación de precios basada en la maximización de Ingresos

¿Cuál es el precio que permite maximizar los ingresos del producto Edgo de la empresa del problema anterior?

RESOLUCIÓN

Se trata de maximizar

$$I = pq$$

La condición necesaria será:

$$\frac{dI}{dp} = 0$$

Es decir:

$$p \frac{dq}{dp} + q = 0 \rightarrow -\frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = 1 \rightarrow I_p = 1$$

Como se señaló anteriormente, los máximos ingresos son los correspondientes al precio para el cual la elasticidad es normal. En este caso:

$$I_p = -(-300) \frac{p}{175.000 - 300p} = 1 \rightarrow p = 291,7 \text{ u.m.}$$

Como puede observarse, el precio que maximiza los ingresos no coincide con el que maximiza los beneficios.

Problema
13
La fijación de precios basada en los costes

La empresa Guned, S. A., se dedica a la fabricación y venta del producto XR9, para lo cual soporta unos costes fijos de 600.000 u.m. cada año, y un coste variable por unidad fabricada y vendida de 30 u.m. Trabajando a ritmo normal, tiene capacidad para producir y vender 30.000 u.f. anuales. ¿Qué precio ha de fijar esta empresa a su producto si desea obtener un margen de beneficio del 15 por 100 sobre el precio de coste, o coste total unitario?

RESOLUCIÓN

Dividiendo el coste total entre el número de unidades de producto se obtiene el coste total unitario o precio de coste:

$$C_{TU} = \frac{600.000 + 30 \times 30.000}{30.000} = 50 \text{ u.m.}$$

Si se desea obtener un margen de beneficio del 15 por 100 sobre ese precio de coste, el precio de venta será:

$$p = 50 + 0,15 \times 50 = 1,15 \times 50 = 57,5 \text{ u.m.}$$

Problema
14
La fijación de precios basada en el punto muerto

¿Cuáles son el precio mínimo y el precio técnico del producto XR9 de la empresa Guned, S. A., del problema anterior?

RESOLUCIÓN

Como se sabe, el punto muerto (X) es el número de veces que los costes fijos (C_F) comprenden el margen bruto unitario ($p - C_v$):

$$X = \frac{C_F}{p - C_v}$$

Cuando el precio de venta es superior al coste variable unitario ($p > C_v$), con cada unidad vendida se «absorben» costes fijos en una cuantía igual al mar-

gen bruto unitario. El punto muerto es el nivel de ventas en el cual los costes fijos son cubiertos en su totalidad con el margen bruto total generado $((p - C_v)X = C_F)$. A partir de ese nivel de ventas la empresa comienza a obtener beneficios. Para que el producto tenga capacidad de absorción de costes fijos, su precio ha de ser superior a su coste variable unitario. De ahí que a este último se le denomine *precio mínimo* (p_m). En este caso:

$$p_m = 30 \text{ u.m.}$$

Se denomina *precio técnico* a aquel que hace que el beneficio total generado por el producto durante el ejercicio sea nulo; es decir, aquel p_t para el cual

$$qp_t = C_F + C_v q$$

o, lo que es lo mismo,

$$p_t = \frac{C_F + C_v q}{q} = C_{TV}$$

El precio técnico es el coste total unitario. En este caso:

$$p_t = 50 \text{ u.m.}$$

**Problema
15**

La fijación de precios basada en el punto muerto

Una empresa tiene un coste fijo anual de 300.000 u.m. y un coste variable unitario de 15 u.m. A ritmo normal produce 30.000 u.f. anuales. ¿Cuál es su precio mínimo?

RESOLUCIÓN

El precio mínimo es el coste variable unitario, es decir, 15 u.m.

**Problema
16**

La fijación de precios basada en el punto muerto

Una empresa tiene un coste fijo anual de 500.000 u.m. y un coste variable unitario de 20 u.m. A ritmo normal produce 20.000 u.f. anuales. ¿Cuál es su precio mínimo?

RESOLUCIÓN

El precio mínimo es el coste variable unitario, es decir, 20 u.m.

Problema

17

La fijación de precios basada en el punto muerto

El coste total anual de la fabricación de un producto es de 500.000.000 de u.m. y se fabrican 100.000 u.f. al año. ¿Cuánto vale su precio mínimo?

RESOLUCIÓN

No se puede resolver porque el precio mínimo es el coste variable unitario y el enunciado no da este dato.

Problema

18

La fijación de precios basada en la rentabilidad

La empresa Duruned, S. A., tiene un activo de 1.000 millones de u.m., destinado a la fabricación y venta del producto Tol, con unos costes fijos no financieros, o cargas de estructura, de 120 millones anuales y un coste variable unitario de 360 u.m. Se desea determinar el precio de venta que permite a esta empresa obtener una rentabilidad económica del 20 por 100 anual, para el ritmo de producción y ventas normal, que es de 500.000 u.f. anuales.

RESOLUCIÓN

La rentabilidad económica es la rentabilidad generada por los activos, es decir, el cociente entre el beneficio de la empresa, antes de deducir los costes financieros (cuya cuantía no depende del activo de la empresa, sino de la composición del pasivo), y el volumen de activos. En este caso:

$$r_E = \frac{p \cdot 500.000 - 120.000.000 - 360 \times 500.000}{1.000.000.000} = 0,20 \rightarrow p = 1.000 \text{ u.m.}$$

Problema

19

La fijación de precios basada en la rentabilidad

¿Qué precio debería fijar la empresa del problema anterior si en su financiación participan por igual los capitales propios y los ajenos, y el coste me-

dio anual de estos últimos es de un 12 por 100, para obtener una rentabilidad financiera del 25 por 100?

RESOLUCIÓN

La rentabilidad financiera, o rentabilidad de los capitales propios, es la rentabilidad que obtiene el propietario de la empresa o sus accionistas. Éstos han aportado cierto volumen de capitales propios (K) y anualmente les corresponde un beneficio (sea o no repartido en forma de dividendos) igual al generado por los activos (B) menos las cargas financieras o intereses de los capitales ajenos (F). Su rentabilidad anual será:

$$r_F = \frac{B - F}{K}$$

En este caso, el activo (1.000 millones de u.m.) está financiado por capitales propios y ajenos por igual. Por consiguiente, tanto aquéllos como éstos importan 500 millones. El coste anual de las deudas es del 12 por 100 y, por tanto:

$$F = 0,12 \times 500.000.000 = 60.000.000 \text{ u.m.}$$

Así pues:

$$r_F = \frac{p500.000 - 120.000.000 - 360 \times 500.000 - 60.000.000}{500.000.000} = 0,25 \rightarrow$$
$$\rightarrow p = 970 \text{ u.m.}$$

Problema 20

La fijación de precios basada en la rentabilidad

Distribuidores Unedos, S. A., es una empresa dedicada a la compraventa y distribución del producto telefónico Oid. El precio en que lo adquiere y otros costes variables importan 300 u.m. por unidad de producto. Los costes fijos de esta empresa son 1.200.000 u.m. anuales. El volumen anual de ventas, a ritmo de trabajo normal, se estima en 20.000 u.f. Se desea determinar el precio que ha de fijar para obtener un margen bruto unitario del 25 por 100 de los costes variables. ¿Qué porcentaje mínimo de margen es preciso para la cobertura de los costes fijos?

RESOLUCIÓN

$$p - C_v = 0,25C_v \rightarrow p = 1,25C_v = 1,25 \times 300 = 375 \text{ u.m.}$$

Para que se cubran los costes fijos ha de cumplirse:

$$(p - C_v)q \geq C_F$$

Pero, siendo s el tanto por uno de margen:

$$p - C_v = sC_v$$

Por consiguiente, la condición de cobertura de costes fijos puede escribirse como

$$sC_vq \geq C_F$$

Entonces:

$$s \geq \frac{C_F}{C_vq}$$

En este caso:

$$s \geq \frac{1.200.000}{300 \times 20.000} = 0,2 = 20 \text{ por } 100$$

Problema
21

La fijación de precios basada en la rentabilidad

¿Qué precio habría de fijar la empresa del problema anterior si desea obtener un margen bruto unitario, sobre precio de venta, del 20 por 100? ¿Qué porcentaje mínimo ha de establecer para que se cubran los costes fijos?

RESOLUCIÓN

$$p - C_v = 0,20p \rightarrow 0,80p = C_v \rightarrow p = \frac{C_v}{0,80} = \frac{300}{0,8} = 375 \text{ u.m.}$$

Denominando t al porcentaje establecido sobre precio de venta, la condición de cobertura de costes fijos se puede establecer de la siguiente forma:

$$(p - C_v)q \geq C_F$$

donde

$$\begin{aligned}
 p - C_v &= tp \rightarrow p = \frac{C_v}{1-t} \rightarrow p - C_v = \frac{C_v}{1-t} - C_v = \\
 &= \frac{C_v - C_v + tC_v}{1-t} = \frac{tC_v}{1-t} \\
 t \frac{C_v}{1-t} q &\geq C_F \rightarrow \frac{1-t}{t} \leq \frac{C_v q}{C_F} \rightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{C_v q}{C_F} + 1 = \frac{C_F + C_v q}{C_F} \rightarrow t \geq \frac{C_F}{C_F + C_v q}
 \end{aligned}$$

En este caso:

$$t \geq \frac{1.200.000}{1.200.000 + 300 \times 20.000} = 0,16\bar{6} = 16,6\bar{6} \text{ por } 100$$

**Problema
22**

La fijación de precios basada en la percepción de la relación calidad/precio

Una empresa fabricante de mecheros no recargables ha realizado una encuesta entre 1.000 personas para fijar el precio de su producto. Se les entregó una lista de precios de 20 u.m. a 180 u.m. y se les pidió que señalaran el precio máximo al que comprarían el mechero, considerándolo excesivamente caro para ese precio o cualquier otro superior, y el precio al cual, o por debajo del cual, ya no lo comprarían por considerarlo de baja calidad. Los resultados obtenidos, una vez tabulados, se recogen en la tabla 13.8.

TABLA 13.8

Precios excesivos	Número de personas	Precios excesivamente bajos	Número de personas
80	5	20	—
90	10	30	50
100	150	40	100
110	150	50	100
120	200	60	200
130	300	70	250
140	100	80	150
150	50	90	100
160	30	100	50
170	5	110	—
180	—	120	—
Total	1.000	Total	1.000

La interpretación de la tabla es sencilla. Por ejemplo, existen cinco personas que no pagarían 80 u.m., o más, por un mechero; diez que pagarían 80 pero no 90 o más, etc. De forma semejante, de las 1.000 personas, 50 no comprarían un mechero que costara menos de 110 u.m., 100 lo comprarían a más de 90 u.m., pero no por ese importe o menos, etc.

Se desea determinar el precio para el cual el producto es aceptado por el mayor número de consumidores.

RESOLUCIÓN

En la tabla 13.9 se recogen los cálculos precisos para la resolución. La columna *A* recoge el número de personas que no consideran excesivo cada uno de los precios. Así, de las 1.000 personas, cinco dejan de aceptar el producto a las 80 u.m. de precio, restando 995 que lo aceptan. De éstas, diez dejan de aceptarlo para un precio igual a 90 u.m., quedando 985 aceptantes, y así sucesivamente. De forma semejante, la columna *B* refleja el número de personas que rechaza el producto por considerar su precio excesivamente bajo. Así, por ejemplo, un precio de 100 u.m. es excesivamente bajo para 50 personas; el de 90 u.m. es significativo de baja calidad para 150 personas (las 50 anteriores, que rechazaban cualquiera igual o inferior a 100, y las 100 que rechazaban cual-

TABLA 13.9

Precios	A Frecuencia de aceptación como precio excesivo	B Frecuencia de re- chazo como precio excesivamente bajo	C = A - B Frecuencia de aceptación neta
20	1.000	1.000	0
30	1.000	1.000	0
40	1.000	950	50
50	1.000	850	150
60	1.000	750	250
70	1.000	550	450
80	995	300	695
90	985	150	835
100	835	50	785
110	685	0	685
120	485	0	485
130	185	0	185
140	85	0	85
150	35	0	35
160	5	0	5
170	0	0	0
180	0	0	0

quiera menor o igual que 90). Un precio de 80 u.m. es rechazado por 300 personas (las 150 anteriores más las 150 que rechazaban cualquier precio no superior a 80 u.m.), y así sucesivamente. La columna *C* recoge el número de personas que aceptan el precio, sin considerarlo ni excesivamente elevado ni significativo de escasa calidad. Es la diferencia entre las columnas *A* y *B*. El precio para el cual el producto es aceptado por mayor número de consumidores (835) es el de 90 u.m.

En la tabla 13.10 se recoge otra forma semejante de resolver el problema.

TABLA 13.10

Precios	A Frecuencia de aceptación como precio excesivamente bajo	B Frecuencia de rechazo como precio excesivo	C = A - B Frecuencia de aceptación neta
20	0	0	0
30	0	0	0
40	50	0	50
50	150	0	150
60	250	0	250
70	450	0	450
80	700	5	695
90	850	15	835
100	950	165	785
110	1.000	315	685
120	1.000	515	485
130	1.000	815	185
140	1.000	915	85
150	1.000	965	35
160	1.000	995	5
170	1.000	1.000	0
180	1.000	1.000	0

**Problema
23**

La fijación de precios basada en la percepción de la relación calidad/precio

Una empresa fabricante de diversos utensilios desechables va a lanzar al mercado un nuevo bolígrafo. Para fijarle precio, ha realizado una encuesta a 500 personas a las que entregó una lista de precios de 15 a 50 u.m., en la que estas personas marcaron el precio máximo para el cual, y por encima del cual, no comprarían el bolígrafo, y aquel tan bajo que les resultaría indicativo de baja calidad y dejarían de adquirirlo a ese precio o a cualquier otro inferior. Los resultados, una vez tabulados, se recogen en la tabla 13.11.

TABLA 13.11

Precios excesivos	Número de personas	Precios excesivamente bajos	Número de personas
15	—	15	—
20	—	20	50
25	50	25	200
30	100	30	170
35	150	35	65
40	150	40	15
45	50	45	—
50	—	50	—

Se desea determinar el precio para el cual el producto es aceptado por el mayor número de consumidores.

RESOLUCIÓN

En la tabla 13.12 se recogen los cálculos precisos para la resolución.

TABLA 13.12

Precios	A Frecuencia de aceptación como precio excesivo	B Frecuencia de rechazo como precio excesivamente bajo	C = A - B Frecuencia de aceptación neta
15	500	500	0
20	500	500	0
25	450	450	0
30	350	250	100
35	200	80	120
40	50	15	35
45	0	0	0
50	0	0	0

13.5. DIFERENCIACIÓN Y DISCRIMINACIÓN DE PRECIOS

Problema
24

Diferenciación y discriminación de precios

Una empresa elabora y vende cierto producto diferenciado en N marcas, cada una de las cuales se dirige a un segmento de mercado diferente. Si se co-

nocen las funciones de demanda de estos segmentos y la función de costes de la empresa, se desea determinar las reglas que, en términos de elasticidades respecto al precio, permitan fijar los precios de cada una de las marcas, siendo el objetivo la maximización del beneficio de la empresa.

RESOLUCIÓN

Dicho beneficio será:

$$B = (I_1 + I_2 + \dots + I_N) - C_T$$

donde I_i son los ingresos del segmento i ($I_i = p_i q_i$) y C_T son los costes totales de la empresa. Es decir:

$$B = (p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_N q_N) - C_T$$

donde C_T (los costes totales de la empresa) dependerá del volumen de producción. Derivando respecto a cada uno de los p_i ¹ se obtienen las condiciones necesarias de óptimo:

$$\frac{\partial B}{\partial p_1} = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + q_1 - \frac{\partial C_T}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_2} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial p_2} + q_2 - \frac{\partial C_T}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_N} = p_N \frac{\partial q_N}{\partial p_N} + q_N - \frac{\partial C_T}{\partial q_N} \cdot \frac{\partial q_N}{\partial p_N} = 0$$

En general, para cualquier segmento i puede escribirse:

$$\frac{\partial B}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial q_i}{\partial p_i} + q_i - C' \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = 0, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

donde C' es el denominado «coste marginal», o modificación que experimenta el coste total por una nueva unidad de modificación de la cantidad producida y vendida:

$$C' = \frac{\partial C_T}{\partial Q} = \frac{\partial C_T}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial Q} = \frac{\partial C_T}{\partial q_i}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N$$

¹ Otra forma de optimizar es derivando respecto a cada uno de los q_i , dado que $q_i = f(p_i)$. Véase Pérez Gorostegui, E.: *Economía de la Empresa (introducción)*, CEURA, Madrid, 1989, pág. 536.

pues Q es la cantidad total producida y vendida y, por consiguiente:

$$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_N \rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial Q} = \frac{1}{\partial Q / \partial q_i} = \frac{1}{1} = 1$$

Dividiendo entre $(-q_i)$ en la expresión (1), se obtiene:

$$-\frac{p_i}{q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial p_i} - 1 + C' \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \cdot \frac{1}{q_i} = 0, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N$$

de donde se deduce que

$$l_i - 1 - C' \frac{l_i}{p_i} = 0, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N$$

(donde l_i es la elasticidad de la demanda, respecto al precio, en el segmento i)
o, lo que es lo mismo:

$$p_i \frac{l_i}{l_i - 1} = C', \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N$$

o bien:

$$p_i \left(1 - \frac{1}{l_i}\right) = C', \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, N$$

Por consiguiente, en el óptimo:

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{l_1}\right) = p_2 \left(1 - \frac{1}{l_2}\right) = \dots = p_N \left(1 - \frac{1}{l_N}\right) = C'$$

Problema 25

Diferenciación y discriminación de precios

La empresa Luned, S. A., fabrica y vende un detergente diferenciado en dos marcas, denominadas R23 y Limpol, la primera de las cuales dirige a un mercado industrial de empresas de limpieza, destinando el segundo al mercado de consumo. La función de demanda del mercado industrial tiene como ecuación:

$$q_1 = 275.000.000 p_1^{-1,25}$$

en tanto que la del mercado de consumo es

$$q_2 = 60.000.000 p_2^{-10/9}$$

El coste variable unitario es idéntico para ambas marcas e igual a 20 u.m. Además, ha de soportar unos costes fijos de 2.000.000 de u.m. anuales. Se desea determinar el precio óptimo en cada uno de los segmentos, en orden a maximizar el beneficio anual de la empresa, y el valor de este último.

RESOLUCIÓN

La función de costes de esta empresa es

$$C_T = 2.000.000 + 20(q_1 + q_2)$$

Por consiguiente, el coste marginal es constante e igual a

$$C' = \frac{\partial C_T}{\partial q_1} = \frac{\partial C_T}{\partial q_2} = 20$$

En cuanto a las elasticidades de la demanda en ambos segmentos, son también constantes por tratarse de funciones exponenciales:

$$\begin{aligned} l_1 &= -275.000.000(-1,25)p_1^{-2,25} \frac{p_1}{q_1} = \\ &= 275.000.000 \times 1,25 p_1^{-1,25} \frac{1}{275.000.000 p_1^{-1,25}} = 1,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= -60.000.000 \left(-\frac{10}{9} \right) p_2^{-(10/9)-1} \frac{p_2}{q_2} = \\ &= 60.000.000 \frac{10}{9} p_2^{-10/9} \frac{1}{60.000.000 p_2^{-10/9}} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Aplicando la regla de optimización desarrollada en el ejercicio anterior se obtiene:

$$p_1 = \frac{l_1}{l_1 - 1} C' = \frac{1,25}{1,25 - 1} \times 20 = 100 \text{ u.m.}$$

$$p_2 = \frac{l_2}{l_2 - 1} C' = \frac{10/9}{(10/9) - 1} \times 20 = 200 \text{ u.m.}$$

En el mercado industrial, el precio óptimo es de 100 u.m., en tanto que en el de consumo es de 200 u.m. El beneficio así obtenido es

$$B = 100q_1 + 200q_2 - 2.000.000 - 20(q_1 + q_2)$$

donde:

$$q_1 = 275.000.000 \times 100^{-1,25} = 869.626,37$$

$$q_2 = 60.000.000 \times 200^{-1,09} = 166.514,20$$

Por consiguiente, el beneficio es

$$B = 100 \times 869.626,37 + 200 \times 166.514,20 - 2.000.000 - 20(869.626,37 + 166.514,20) = 117.229.336,5 \text{ u.m.}$$

**Problema
26**

Diferenciación y discriminación de precios

La empresa fabricante distribuye su producto en dos mercados, A y B. La elasticidad de la demanda respecto al precio vale 2 en el mercado A y 1,5 en el mercado B. El objetivo de la empresa es maximizar su beneficio. Si el precio óptimo en el mercado B es 30, ¿cuál es el precio óptimo en el mercado A?

RESOLUCIÓN

En el óptimo:

$$p_A \left(1 - \frac{1}{l_A}\right) = p_B \left(1 - \frac{1}{l_B}\right)$$

En este caso:

$$p_A \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 30 \left(1 - \frac{1}{1,5}\right)$$

De donde se deduce que:

$$p_A = 20$$

13.6. CANAL DE DISTRIBUCIÓN Y PRECIOS

**Problema
27**

Canal de distribución y precios

El canal por el que se distribuye cierto producto está formado por cuatro intermediarios, cada uno de los cuales fija su precio de venta aplicando un margen del 20 por 100 sobre el precio en que lo compra. Si el precio en el que el fabricante se lo vende al primer intermediario es de 100 u.m., ¿en qué precio lo adquiere el consumidor final?

RESOLUCIÓN

Denominando p_i al precio en que lo vende el intermediario i , se obtiene:

$$p_1 = 100(1 + 0,20) = 120 \text{ u.m.}$$

$$p_2 = 120(1 + 0,20) = 100(1 + 0,20)^2 = 144 \text{ u.m.}$$

$$p_3 = 100(1 + 0,20)^3 = 172,8 \text{ u.m.}$$

$$p_4 = 100(1 + 0,20)^4 = 207,36 \text{ u.m.} = \text{Precio en que adquiere el producto el consumidor final}$$

**Problema
28**

Canal de distribución y precios

¿Cuál sería el precio en el que adquiriría el producto el consumidor final del ejercicio anterior si los intermediarios fijaran sus precios de venta de manera que obtuvieran un margen del 20 por 100 sobre tales precios de venta?

RESOLUCIÓN

Cada intermediario fija su precio de venta añadiendo un 20 por 100 del mismo a su precio de compra (precio de venta del miembro anterior del canal):

$$p_i = p_{i-1} + 0,20p_{i-1} \rightarrow p_i = \frac{p_{i-1}}{1 - 0,2} = \frac{p_{i-1}}{0,8}$$

$$p_1 = \frac{100}{0,8} = 125 \text{ u.m.}$$

$$p_2 = \frac{125}{0,8} = \frac{100}{0,8^2} = 156,25 \text{ u.m.}$$

$$p_3 = \frac{100}{0,8^3} = 195,31$$

$$p_4 = \frac{100}{0,8^4} = 244,14 = \text{Precio en que adquiere el producto el consumidor final}$$

**Problema
29**
Canal de distribución y precios

Hasta llegar al consumidor, cierto producto sigue un canal formado por cinco intermediarios, cada uno de los cuales lo vende a un precio resultante de aplicar un 12 por 100 de margen sobre el precio en que lo adquiere. Si el fabricante desea que el precio de venta final al consumidor sea de 200 u.m., ¿qué precio deberá aplicarle en su venta al primer intermediario?

RESOLUCIÓN

Precio de venta al consumidor = p_5 .

Precio de venta del fabricante = p_0 .

$$p_5 = p_0(1,12)^5 \rightarrow p_0 = \frac{p_5}{1,12^5} = \frac{200}{1,12^5} = 113,49 \text{ u.m.}$$

**Problema
30**
Canal de distribución y precios

¿Qué precio debería fijar el fabricante del ejercicio anterior para que el pagado por el consumidor sea de 200 u.m., si los cinco intermediarios fijan el margen del 12 por 100 sobre el precio en que ellos venden el producto?

RESOLUCIÓN

$$p_1 = p_0 + 0,12p_1 \rightarrow p_1 = \frac{p_0}{1 - 0,12}$$

$$p_2 = p_1 + 0,12p_2 \rightarrow p_2 = \frac{p_1}{1 - 0,12} = \frac{p_0}{(1 - 0,12)^2}$$

$$p_5 = \frac{p_0}{(1 - 0,12)^5} = 200 \rightarrow p_0 = 200(1 - 0,12)^5 = 105,55 \text{ u.m.}$$

14

Comunicación y distribución

14.1. LA PUBLICIDAD

Problema

1

Optimización del presupuesto publicitario

La empresa Unedorosa ha realizado diversas investigaciones para determinar la función de demanda de su producto, la cual se adapta a la siguiente ecuación:

$$q = 100.000 p^{-1,25} L^{0,25}$$

Sabiendo que el coste variable unitario de producción y distribución del producto es constante e igual a 100 u.m., se desea determinar los niveles de actuación de las variables precio (p) y gasto anual en publicidad (L) que permiten maximizar el beneficio anual generado por dicho producto.

RESOLUCIÓN

Como ya se expuso en los primeros ejercicios relativos a la optimización del presupuesto mercadotécnico y a la función de demanda, en el óptimo:

$$p = \frac{l_p}{l_p - 1} C_v$$

$$L = \frac{l_L}{l_p} p q$$

donde l_p y l_L son las elasticidades de la demanda respecto al precio y a la publicidad, respectivamente:

$$l_p = - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q} = 1,25$$

$$l_L = \frac{\partial q}{\partial L} \cdot \frac{L}{q} = 0,25$$

Por consiguiente:

$$p = \frac{1,25}{1,25 - 1} \times 100 = 500 \text{ u.m.}$$

$$L = \frac{0,25}{1,25} \times 500q = (100q) \text{ u.m.}$$

Sustituyendo en la ecuación de demanda, se obtiene:

$$q = 100.000 \times 500^{-1,25} \times 100^{0,25} q^{0,25} \rightarrow \\ \rightarrow q^{0,75} = 133,7481 \rightarrow q = 684 \text{ u.f.}$$

Por tanto:

$$L = 100 \times 684 = 68.400 \text{ u.m. anuales}$$

Problema 2

Selección de medios y soportes publicitarios

La empresa Funed, S. A., dispone de los soportes S_1 , S_2 y S_3 para dirigirse a una población objetivo de 100.000 personas. Las audiencias brutas de tales soportes son de 20.000, 30.000 y 40.000 personas, respectivamente. Existen 5.000 personas expuestas al 1 y al 2, 10.000 al 2 y al 3 y 8.000 expuestas al 1 y al 3. El número de personas expuestas a los tres soportes es de 1.000. Se desea determinar las penetraciones de los soportes, sus penetraciones conjuntas, la audiencia neta y la penetración neta.

RESOLUCIÓN

Se llama penetración del soporte i a la proporción que, de las personas a las que se dirige el mensaje (N), representa a las que resultan expuestas al mismo (n_i), es decir, al cociente (véase figura 14.1):

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

En este caso:

$$p_1 = \frac{20.000}{100.000} = 0,2$$

$$p_2 = \frac{30.000}{100.000} = 0,3$$

$$p_3 = \frac{40.000}{100.000} = 0,4$$

De forma semejante se define la penetración conjunta de los soportes i y j (p_{ij}). Siendo n_{ij} el número de personas expuestas simultáneamente a los soportes i y j :

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$$

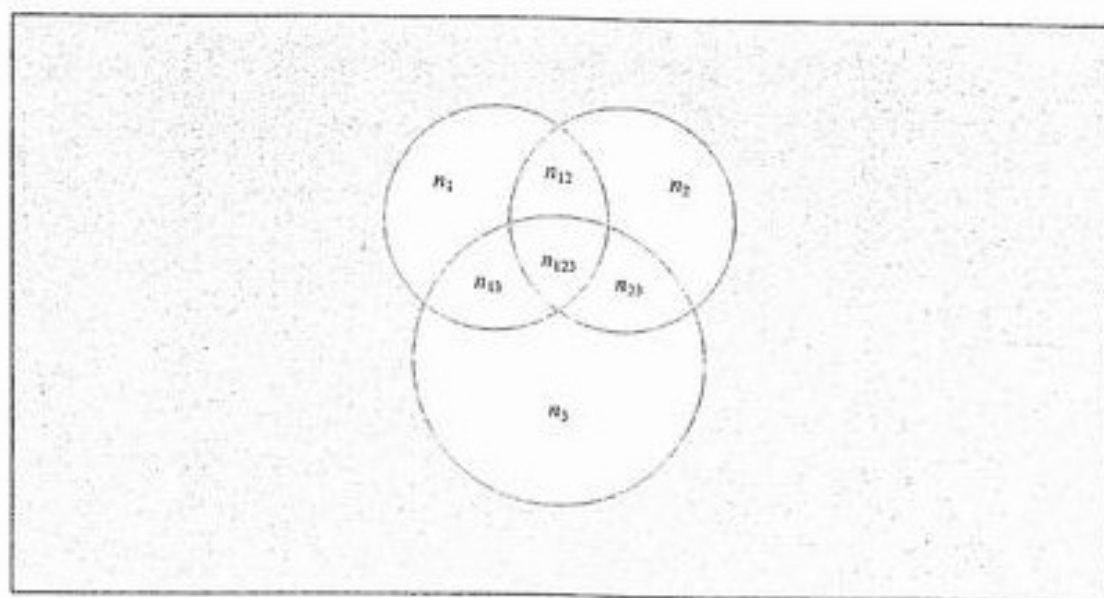


Figura 14.1.

Así pues:

$$p_{12} = \frac{5.000}{100.000} = 0,05$$

$$p_{13} = \frac{8.000}{100.000} = 0,08$$

$$p_{23} = \frac{10.000}{100.000} = 0,10$$

En cuanto a la penetración de los tres soportes, se obtiene:

$$p_{123} = \frac{n_{123}}{N} = \frac{1.000}{100.000} = 0,01$$

La audiencia neta será:

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123} = \\ &= 20.000 + 30.000 + 40.000 - 5.000 - 8.000 - 10.000 + 1.000 = \\ &= 68.000 \text{ personas} \end{aligned}$$

y la penetración neta:

$$p = \frac{n}{N} = \frac{68.000}{100.000} = 0,68$$

que también puede calcularse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} p &= \frac{n}{N} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123}}{N} = \\ &= p_1 + p_2 + p_3 - p_{12} - p_{13} - p_{23} + p_{123} = \\ &= 0,2 + 0,3 + 0,4 - 0,05 - 0,08 - 0,1 + 0,01 = 0,68 \end{aligned}$$

Utilizando los tres soportes resultaría expuesta al mensaje el 68 por 100 de la población objetivo.

Problema

3

Selección de medios y soportes publicitarios

La empresa Brunedisa va a lanzar una campaña publicitaria con la que pretende obtener una audiencia neta de 900.000 personas de una población objetivo formada por 1.000.000 de personas. Se va a realizar una sola inserción en cada uno de los soportes disponibles y las posibles combinaciones de éstos son las siguientes:

- Plan A: Utilización de los soportes 1 y 2.
- Plan B: Utilización de los soportes 2 y 3.
- Plan C: Utilización de los soportes 1, 2 y 3.

Las audiencias de los soportes y el coste por inserción en los mismos se recogen en la tabla 14.1.

TABLA 14.1

Soporte	Audiencia bruta	Coste (u.m.)
1	400.000	160.000
2	500.000	190.000
3	600.000	200.000
Soportes	Audiencia conjunta	
1 y 2	100.000	
1 y 3	350.000	
2 y 3	200.000	
1, 2 y 3	75.000	

Se desea determinar el plan más eficaz y el de mayor eficiencia.

RESOLUCIÓN

— Plan A:

$$\text{Audiencia neta} = 400.000 + 500.000 - 100.000 = 800.000 \text{ personas}$$

$$\text{Penetración neta} = \frac{800.000}{1.000.000} = 0,8$$

$$\text{Coste} = 160.000 + 190.000 = 350.000 \text{ u.m.}$$

$$\text{Ratio de coste unit.} = \frac{\text{Coste}}{\text{Audiencia neta}} = \frac{350.000}{800.000} = 0,4375 \text{ u.m./persona}$$

— Plan B:

$$\text{Audiencia neta} = 500.000 + 600.000 - 200.000 = 900.000 \text{ personas}$$

$$\text{Penetración neta} = \frac{900.000}{1.000.000} = 0,9$$

$$\text{Coste} = 190.000 + 200.000 = 390.000 \text{ u.m.}$$

$$\text{Ratio de coste unit.} = \frac{\text{Coste}}{\text{Audiencia neta}} = \frac{390.000}{900.000} = 0,4333 \text{ u.m./persona}$$

— Plan C:

$$\begin{aligned} \text{Audiencia neta} &= 400.000 + 500.000 + 600.000 - 100.000 - \\ &- 350.000 - 200.000 + 75.000 = 925.000 \text{ personas} \end{aligned}$$

$$\text{Penetración neta} = \frac{925.000}{1.000.000} = 0,925$$

$$\text{Coste} = 160.000 + 190.000 + 200.000 = 550.000 \text{ u.m.}$$

$$\text{Ratio de coste unit.} = \frac{\text{Coste}}{\text{Audiencia neta}} = \frac{550.000}{925.000} = 0,5946 \text{ u.m./persona}$$

La eficacia se mide en relación a la consecución de los objetivos. El plan más eficaz es el C, que permite obtener una penetración neta del 92,5 por 100. La eficiencia se mide en relación al cumplimiento de los objetivos con los mínimos costes. El plan más eficiente es el B, que permite alcanzar el objetivo de obtener una audiencia de 900.000 personas, con el coste unitario más bajo (0,4333 u.m./persona).

Problema
4

Selección de medios y soportes publicitarios

En una campaña publicitaria pueden utilizarse tres soportes: A, B y C. Las penetraciones de cada uno de ellos son las siguientes, en tanto por uno: 0,6 el A, 0,2 el B y 0,5 el C. Las penetraciones conjuntas son: 0,1 el A y el B; 0,2 el A y el C; 0,1 el B y el C, y 0,025 el A, el B y el C. ¿Cuánto vale la penetración neta de los tres soportes en tanto por uno?

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P &= P_A + P_B + P_C - P_{AB} - P_{AC} - P_{BC} + P_{ABC} = \\ &= 0,6 + 0,2 + 0,5 - 0,1 - 0,2 - 0,1 + 0,025 = 0,925 \end{aligned}$$

Problema

5

Selección de estrategias publicitarias en situación de competencia

Los beneficios anuales futuros de la empresa Runed, S. A., dependen de la estrategia publicitaria que siga y de la reacción de la competencia. Las estrategias alternativas de esta empresa son E_1 , E_2 , E_3 y E_4 , y la competencia puede reaccionar de las formas R_1 , R_2 o R_3 . Así, los beneficios (en u.m.) que Runed, S. A., obtendría bajo cada estrategia, según sea la reacción de los competidores, se recogen en la tabla 14.2.

TABLA 14.2

Estrategias publicitarias	Reacciones de la competencia		
	R_1	R_2	R_3
E_1	100	200	300
E_2	150	140	303
E_3	160	110	350
E_4	200	100	190

Se desea determinar qué estrategia es preferible según distintos criterios de decisión, asignando, en el criterio de Hurwicz, un coeficiente de optimismo del 60 por 100.

RESOLUCIÓN

- a) Criterio de Laplace, o de igual verosimilitud (tabla 14.3):

TABLA 14.3

Estrategias publicitarias	Esperanzas medias de beneficio (u.m.)
E_1	$(100 + 200 + 300)/3 = 200$
E_2	$(150 + 140 + 303)/3 = 197,67$
E_3	$(160 + 110 + 350)/3 = 206,67$
E_4	$(200 + 100 + 190)/3 = 163,33$

La estrategia preferible es la E_3 , a la que le corresponde el máximo beneficio esperado cuando las estrategias tienen igual verosimilitud.

- b) Criterio maximax u optimista (tabla 14.4):

TABLA 14.4

Estrategias publicitarias	Máximo beneficio
E_1	300
E_2	303
E_3	350
E_4	200

La estrategia preferible es la E_3 , a la que le corresponde el máximo beneficio posible.

c) Criterio maximin, pesimista, o de Wald (tabla 14.5):

TABLA 14.5

Estrategias publicitarias	Máximo beneficio
E_1	100
E_2	140
E_3	110
E_4	100

Bajo este criterio, la estrategia preferible es la E_2 ; siguiéndola, la empresa se asegura de que, cualquiera que sea la reacción de la competencia, su beneficio nunca será inferior a 140 u.m.

d) Criterio de optimismo parcial de Hurwicz ($\alpha = 0,6$) (tabla 14.6):

TABLA 14.6

Estrategias publicitarias	Máximos (M_i)	Mínimos (m_i)	$H_i = 0,6M_i + 0,4m_i$
E_1	300	100	220
E_2	303	140	237,8
E_3	350	110	254
E_4	200	100	180

Bajo este criterio la estrategia preferible es la E_3 .

e) Criterio de Savage. La matriz de pesares sería la de la tabla 14.7.

TABLA 14.7

	R_1	R_2	R_3	Máximo pesar
E_1	100	0	50	100
E_2	50	60	47	60
E_3	40	90	0	90
E_4	0	100	160	160

La estrategia preferible sería la E_2 , a la que le corresponde el mínimo pesar.

Problema
6

Control de la eficacia de la publicidad

La empresa Turunedsa se dedica a la fabricación y venta de un producto alimenticio carente de alimento alguno, especialmente apropiado para dietas de rápido adelgazamiento. Hasta hace algún tiempo, lo ha distribuido sólo en farmacias bajo la marca Adelgamin y su promoción se ha basado en la labor desarrollada, especialmente entre médicos y farmacéuticos, por su fuerza de ventas. Hace tres meses ha comenzado a distribuirlo, además, en tiendas de alimentación, bajo la marca Mini Figura 2000, y su promoción se ha centrado en publicidad en vallas. Para estudiar la eficacia de este medio publicitario se tomaron tres ciudades de características similares, realizándose una fuerte campaña en la primera, una campaña de tipo medio en la segunda y ninguna en la tercera. Transcurrido cierto tiempo desde el comienzo de las campañas, se midieron las ventas en las tres ciudades durante un período de ocho semanas. Los resultados obtenidos se recogen en la tabla 14.8.

TABLA 14.8

Semana	Ventas (u.f.)		
	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
1	110	85	45
2	100	80	50
3	110	75	45
4	100	80	40
5	120	80	40
6	125	85	40
7	130	85	45
8	135	90	45
Total	930	660	350
Gran total = 930 + 660 + 350 = 1.940			

¿Se puede considerar significativo el efecto de la publicidad en vallas en la venta de este producto?

RESOLUCIÓN

El nivel medio semanal de ventas fue

$$\bar{x} = \frac{1.940}{24} = 80,8\bar{3}$$

En cuanto a las ventas semanales medias de las tres ciudades, se obtiene:

$$\bar{x}_1 = \frac{930}{8} = 116,25$$

$$\bar{x}_2 = \frac{660}{8} = 82,50$$

$$\bar{x}_3 = \frac{350}{8} = 43,75$$

Los restantes cálculos necesarios, ya explicados en el área de experimentación comercial, se recogen en la tabla 14.9.

TABLA 14.9

t	X_{ti}^2	X_{tj}^2	$X_{t.}^2$	
1	12.100	7.225	2.025	$n \sum (X_{tj})^2 = 8(116,25^2 + 82,5^2 + 43,75^2) = 477.875$ $N(\bar{x})^2 = 24(80,8\bar{3})^2 = 156.816,66$ $D_1 = 177.875 - 156.816,66 = 21.058,33$ $D_2 = 179.350 - 177.875 = 1.475$ $D_3 = 179.350 - 156.816,66 = 22.533,33$ $S_1 = \frac{21.058,33}{3-1} = 10.529,17$ $S_2 = \frac{1.475}{24-3} = 70,238$ $F = \frac{10.529,17}{70,238} = 149,91 \begin{cases} F_{0,05}(2,21) = 3,47 \\ F_{0,01}(2,21) = 5,78 \end{cases}$
2	10.000	6.400	2.500	
3	12.100	5.625	2.025	
4	10.000	6.400	1.600	
5	14.400	6.400	1.600	
6	15.625	7.225	1.600	
7	16.900	7.225	2.025	
8	18.225	8.100	2.025	
Total	109.350	54.600	15.400	
Gran total = $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij}^2 = 179.350$				

La contribución de la dispersión factorial (21.058,33) a la variabilidad total (22.533,33) es apreciable. El efecto diferencial de la variable controlada «pu-

blicidad en vallas» es acusado, pues, incluso a un nivel de significación del 1 por 100, el valor de F obtenido es sustancialmente superior al que corresponde, según tablas, a estos grados de libertad.

Problema
7

Control de la eficacia de la publicidad

La empresa Truned, S. A., para controlar la incidencia de los gastos publicitarios en la venta de sus productos, ha recogido y tabulado la información de la tabla 14.10.

TABLA 14.10

L_i Gasto en publicidad (u.m.)	V_i Ventas (u.f.)
10	1.230
20	1.300
30	1.335
40	1.378
50	1.390
60	1.410
70	1.425

A la vista de la misma, la relación entre ambas variables parece ajustarse a una ecuación logarítmica de la forma

$$V_i = a + b \ln L_i + \xi_i$$

Se desea estimar dicha función, así como el coeficiente de determinación del ajuste y la elasticidad de la demanda para un gasto en publicidad de 50 u.m.

RESOLUCIÓN

Se trata de estimar los parámetros a y b de la ecuación de regresión lineal simple:

$$V_i = a + bx_i + \xi_i$$

donde $x_i = \ln L_i$.

En la tabla 14.11 se recogen los cálculos precisos para realizar tal estimación por el método de los mínimos cuadrados de la forma expuesta en los casos del área dedicada a la previsión de ventas.

TABLA 14.11

V_i	$x_i = \ln L_i$	x_i^2	$V_i x_i$	V_i^2
1.230	2,3026	5,3019	2.832,18	1.512,900
1.300	2,9957	8,9744	3.894,45	1.690,000
1.335	3,4012	11,5681	4.540,60	1.782,225
1.370	3,6889	13,6078	5.053,76	1.876,900
1.390	3,9120	15,3039	5.437,71	1.932,100
1.410	4,0943	16,7637	5.773,03	1.988,100
1.425	4,2485	18,0497	6.054,11	2.030,625
9.460	24,6432	89,5695	33.585,84	12.812,850

Así pues:

$$\bar{V} = \frac{9.460}{7} = 1.351,43$$

$$\bar{x} = \frac{24,6432}{7} = 3,5205$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^7 V_i x_i - 7 \bar{V} \bar{x}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7(\bar{x})^2} = \frac{33.585,84 - 7 \times 1.351,43 \times 3,5205}{89,5695 - 7 \times 3,5205^2} = 100,24$$

$$a = \bar{V} - b\bar{x} = 1.351,43 - 100,24 \times 3,5205 = 998,54$$

La ecuación estimada es, en consecuencia:

$$V_i = 998,54 + 100,24 \ln L_i + \xi_i$$

Por otra parte:

$$\sigma^2(x_i) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{7} 89,5695 - (3,5205)^2 = 0,40172$$

$$\sigma^2(V_i) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 V_i^2 - (\bar{V})^2 = \frac{1}{7} 12.812,850 - (1.351,43)^2 = 4,044,1$$

y, por consiguiente, el coeficiente de determinación valdrá:

$$r = \frac{b^2 \sigma^2(x_i)}{\sigma^2(V_i)} = \frac{100,24^2 \times 0,40172}{4,044,1} = 0,9981$$

La varianza explicada representa un 99,81 por 100 del total.

En cuanto a la elasticidad, se tiene:

$$I_L = \frac{dV_i}{dL_i} \cdot \frac{L_i}{V_i}$$

donde

$$\frac{dV_i}{dL_i} = 100,24 \times \frac{1}{L_i} = \frac{100,24}{50} = 2,0048$$

$$V_i = 998,54 + 100,24 \ln 50 = 1.390,68 \text{ u.f.}$$

Por consiguiente:

$$I_L = 2,0048 \cdot \frac{50}{1.390,68} = 0,072$$

En ese punto de la curva de demanda, un aumento del 1 por 100 en el gasto en publicidad da lugar a un aumento del 0,072 por 100 en el volumen de ventas.

14.2. LA VENTA PERSONAL

Problema

8

Retribución de la fuerza de ventas

Las ventas medias mensuales de un vendedor de la empresa Unedleo son de 300.000 u.m. A los vendedores les paga un sueldo fijo de 100.000 u.m. mensuales y una comisión del 10 por 100 del importe en el que sus ventas excedan el promedio. Además, paga 15.000 u.m. por cada nuevo cliente que un vendedor consigue. ¿Qué sueldo percibirá un vendedor que ha vendido por 200.000 u.m. a antiguos clientes y 250.000 a tres clientes nuevos?

RESOLUCIÓN

Sueldo fijo	100.000 u.m.
Comisión 10 por 100 s/(450.000 - 300.000)	15.000 u.m.
Prima por captación de clientes 3×15.000	45.000 u.m.
Total	160.000 u.m.

Problema
9

Retribución de la fuerza de ventas

Para el próximo período, la empresa Virgunedsa ha fijado a uno de sus vendedores un objetivo de ventas de 3.000 unidades, en tanto que la previsión de este vendedor es de 3.200. Se desea determinar el porcentaje de prima que percibirá este vendedor, bajo el sistema *OPR*¹, para cada uno de los siguientes niveles de ventas efectivas:

2.500, 2.700, 3.000, 3.200, 3.400

RESOLUCIÓN

Denominando:

O = Objetivo fijado por la empresa.

P = Previsión del vendedor.

R = Venta efectiva.

bajo el sistema *OPR* el porcentaje de prima (*OPR*) depende de la previsión y la realización del vendedor del siguiente modo:

$$\begin{aligned} OPR &= 120P/O && \text{cuando } P = R \\ OPR &= 60(P + R)/O && \text{cuando } P < R \\ OPR &= 60(3R - P)/O && \text{cuando } P > R \end{aligned}$$

Así pues, en este caso se tendría (*O* = 3.000, *P* = 3.200) (tabla 14.12):

¹ Gonik, J.: «Las primas a los vendedores en función de sus previsiones de ventas», *Harvard-Deusto Business Review*, primer trimestre 1980, págs. 71-80.

TABLA 14.12

Ventas efectivas (R)	Relación entre $P \times R$	Porcentaje de prima
2.500	$P > R$	$60(3 \times 2.500 - 3.200)/3.000 = 86\%$
2.700	$P > R$	$60(3 \times 2.700 - 3.200)/3.000 = 98\%$
3.000	$P > R$	$60(3 \times 3.000 - 3.200)/3.000 = 116\%$
3.200	$P = R$	$120(3.200/3.000) = 128\%$
3.400	$P < R$	$60(3.200 + 3.400)/3.000 = 132\%$

Problema
10
Retribución de la fuerza de ventas

Determinar el porcentaje de prima del vendedor del ejercicio anterior, para los mismos niveles de ventas efectivos, pero con cada uno de los siguientes niveles de previsiones:

2.500, 2.700, 3.000, 3.200, 3.400, 3.600

RESOLUCIÓN

Aplicando las expresiones reseñadas anteriormente se ha elaborado la tabla 14.13.

Obviamente, para cada nivel de previsiones realizadas por el vendedor, la prima es tanto mayor cuanto mayor sea su nivel efectivo de ventas. Pero, además, para cada nivel de ventas efectivas la prima es tanto mayor cuanto más

TABLA 14.13

Previsiones	Ventas efectivas				
	2.500	2.700	3.000	3.200	3.400
2.500	100	104	110	114	118
2.700	96	108	114	118	122
3.000	90	102	120	124	128
3.200	86	98	116	128	132
3.400	82	94	112	124	136
3.600	78	90	108	120	132

acertado haya sido en su previsión. Así, el sistema *OPR* incentiva las ventas y la certeza en las previsiones, estimulando al vendedor para obtener la información precisa para la previsión empresarial de las ventas y la planificación de la empresa.

Problema
11

Retribución de la fuerza de ventas

¿Qué porcentaje de prima *OPR* corresponde a un vendedor cuando coinciden su objetivo, sus previsiones y sus ventas efectivas?

RESOLUCIÓN

Cuando $P = R$:

$$OPR = 120P/O$$

Cuando, además, $O = P$:

$$OPR = 120$$

Problema
12

Retribución de la fuerza de ventas

Un vendedor tiene un objetivo de 500 unidades, su previsión de ventas era 450 y ha vendido 425. ¿Cuál es su prima bajo el sistema *OPR*?

RESOLUCIÓN

En este caso:

$$P > R$$

Por tanto:

$$OPR = \frac{60(3R - P)}{O} = \frac{60(3 \cdot 425 - 450)}{500} = 99 \text{ por } 100$$

Problema
13

Determinación del tamaño de la fuerza de ventas.
Distribución de volúmenes de ventas

La empresa Tauruned tiene segmentado su mercado en cuatro zonas, A, B, C y D, cuyas ventas anuales esperadas son 300.000, 200.000, 300.000 y 100.000 u.f.,

respectivamente. Dadas las extensiones de las distintas zonas, sus características geográficas y las estructuras de sus comunicaciones, la experiencia ha demostrado que los volúmenes anuales de ventas, por cada vendedor, difieren entre sí en los cuatro territorios, siendo iguales a 30.000, 40.000, 10.000 y 20.000 u.f. Determinar el tamaño de la fuerza de ventas que es necesario y su distribución por zonas.

RESOLUCIÓN

Si las ventas anuales en la zona A son 300.000 u.f. y se necesita un vendedor por cada 30.000 u.f. de venta anual, en total se precisarán diez vendedores ($N_A = 10$ vendedores). De forma equivalente, en cuanto a las otras tres zonas:

$$N_B = \frac{200.000}{40.000} = 5 \text{ vendedores}$$

$$N_C = \frac{300.000}{10.000} = 30 \text{ vendedores}$$

$$N_D = \frac{100.000}{20.000} = 5 \text{ vendedores}$$

El tamaño de la fuerza de ventas será:

$$N = 10 + 5 + 30 + 5 = 50 \text{ vendedores}$$

Problema
14

**Determinación del tamaño de la fuerza de ventas.
Distribución del número de clientes**

La empresa Geminuned tiene tres tipos de clientes, I, II y III, cada uno de los cuales requiere diez, doce y quince visitas al año, respectivamente, y existen 100 clientes del tipo I, 200 del tipo II y 40 del tipo III. El número de visitas que puede efectuar un vendedor al año es de 200 para los clientes de la clase I, 48 para los de la clase II y 60 para los de la clase III. Se desea conocer el número de vendedores que necesita esta empresa y su distribución por tipos de clientes.

RESOLUCIÓN

Si existen 100 clientes del tipo I, cada uno de los cuales requiere diez visitas al año, en total, anualmente, se habrán de efectuar 1.000 visitas a clientes de este tipo. Si un vendedor asignado a este tipo de clientes sólo puede efectuarles 200 visitas al año, se necesitarán:

$$N_I = \frac{1.000}{200} = 5 \text{ vendedores}$$

para atender a clientes de este tipo. De forma semejante, en cuanto a los tipos II y III, se obtiene:

$$N_{II} = \frac{12 \times 200}{48} = 50 \text{ vendedores}$$

$$N_{III} = \frac{15 \times 40}{60} = 10 \text{ vendedores}$$

El número de vendedores necesario será:

$$N = 5 + 50 + 10 = 65 \text{ vendedores}$$

**Problema
15**

Determinación del tamaño de la fuerza de ventas.
Distribución del tiempo de atención a clientes

La empresa Cancunred, S. A., tiene cuatro territorios de venta (A, B, C y D) y dos tipos de clientes (I y II). Los principales datos característicos se recogen en las tablas 14.14 y 14.15.

TABLA 14.14

	Tipo de cliente	
	I	II
Tiempo promedio de discusión en cada visita (minutos)	90	120
Tiempo promedio de espera en cada visita (minutos)	30	15
Número promedio de visitas anuales por cada cliente	24	12
Número de clientes en el territorio A	50	10
Número de clientes en el territorio B	50	20
Número de clientes en el territorio C	100	100
Número de clientes en el territorio D	10	50

TABLA 14.15

Territorio	Tiempo promedio de viaje en cada visita
A	60 minutos
B	90 minutos
C	60 minutos
D	45 minutos

Se desea determinar el número de vendedores que requiere esta empresa y su distribución por territorios y tipos de clientes.

RESOLUCIÓN

Si D_i es el tiempo promedio de discusión con un cliente del tipo i ($i = I, II$), E_i el tiempo medio de espera al mismo y T_j el tiempo promedio de viaje en el territorio j ($j = A, B, C, D$), el tiempo total promedio requerido para una visita a un cliente de ese tipo en ese territorio será:

$$D_i + E_i + T_j$$

Si, por otra parte, C_{ij} es el número de clientes del tipo i existentes en el territorio j y I_i es el número de visitas anuales que, por término medio, requiere un cliente de este tipo, el número medio de visitas a dicho tipo de clientes en ese territorio será:

$$C_{ij}I_i$$

con lo que el tiempo anual que, por término medio, se ha de dedicar a todos los clientes del tipo i , en dicho territorio, valdrá:

$$C_{ij}I_i(D_i + E_i + T_j)$$

De este modo se han realizado los cálculos de la tabla 14.16. Totalizando horizontalmente, se obtienen los tiempos anuales totales requeridos por territorios. Similarmente, totalizando por columnas se obtienen los tiempos totales requeridos por tipos de clientes. Si un vendedor trabaja ocho horas al día y 220 días al año, el tiempo que trabaja cada año es, en minutos:

$$8 \times 220 \times 60 = 105.600$$

TABLA 14.16

Tiempos requeridos por territorios	Tiempos requeridos por tipos de clientes		Totales	Número de vendedores del territorio
	Tipo I	Tipo II		
Territorio A	$50 \times 24(90 + 30 + 60) = 216.000$	$10 \times 12(120 + 15 + 60) = 23.400$	239.400	2
Territorio B	$50 \times 24(90 + 30 + 90) = 252.000$	$20 \times 12(120 + 15 + 90) = 54.000$	306.000	3
Territorio C	$100 \times 24(90 + 30 + 60) = 432.000$	$100 \times 12(120 + 15 + 60) = 234.000$	666.000	6
Territorio D	$10 \times 24(90 + 30 + 45) = 39.600$	$50 \times 12(120 + 15 + 45) = 108.000$	147.600	2
Totales	939.600	419.400	Gran total 1.359.000	Tamaño de la fuerza de ventas = 13
Número de vendedores del tipo de cliente	9	4		

Dividiendo entre esta cifra los tiempos totales requeridos anualmente, por cada territorio y por cada tipo de cliente, se obtienen los números de vendedores que necesitan. El tamaño de la fuerza de ventas se puede obtener totalizando esas necesidades o bien por cociente entre el tiempo total necesario (1.357.800 minutos) y la mencionada cifra de tiempo de trabajo por vendedor (105.600):

$$\frac{1.357.800}{105.600} \approx 13$$

**Problema
16**

Determinación del tamaño de la fuerza de ventas.
Modelos marginalistas

La empresa Ariuned se dedica a la fabricación de cierto componente industrial cuya demanda anual responde a una función de la forma

$$q = \frac{Na}{N + \left(\frac{1}{r} - 1\right)} \quad (N = \text{Número de vendedores})$$

siendo sus ventas potenciales anuales de 100.000 u.f. con un coeficiente de penetración del primer vendedor de 0,01. Cada componente se vende a 10.000 u.m., con un coste variable (excluido el coste del personal de ventas) de 2.000 u.m. Siendo el coste anual, por cada vendedor, de 1.000.000 de u.m., se desea determinar el tamaño de la fuerza de ventas de esta empresa, que maximiza su beneficio anual.

RESOLUCIÓN

Las ventas potenciales son a , pues

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \frac{\left(\frac{1}{t} - 1\right)}{N}} = a$$

El coeficiente de penetración del primer vendedor es t , pues, para $N = 1$:

$$q(1) = at$$

y

$$t = \frac{q(1)}{a} = \frac{\text{Ventas con un vendedor}}{\text{Ventas del mercado potencial}}$$

La función es, por consiguiente:

$$q = \frac{N \times 100.000}{N + \left(\frac{1}{0,01} - 1\right)} = \frac{N \times 100.000}{N + 99}$$

El valor óptimo de N será el que haga máximo el beneficio, medido por la función

$$\begin{aligned} B &= (10.000 - 2.000)q - C_F - 1.000.000N = \\ &= 8.000 \frac{100.000N}{N + 99} - C_F - 1.000.000N = \\ &= 800.000.000 \frac{99}{N + 99} - C_F - 1.000.000N \end{aligned}$$

donde C_f son los costes fijos. Derivando respecto a N e igualando a cero la expresión resultante, se obtiene:

$$800.000.000 \frac{99}{(N + 99)^2} - 1.000.000 = 0$$

Es decir:

$$(N + 99)^2 = 79.200 \rightarrow N + 99 = \begin{cases} 281 \rightarrow N = 182 \\ -281 \rightarrow N = -380 \end{cases}$$

El único resultado con sentido económico es $N = 182$. Para este resultado, la segunda derivada vale:

$$800.000.000 \times 99(-2) \frac{1}{(N + 99)^3} < 0$$

Por consiguiente, se trata de un máximo. (La otra solución es el mínimo de la función.) El número óptimo de vendedores es, por tanto, 182.

**Problema
17**

Determinación del tamaño y de la asignación de la fuerza de ventas. Modelos marginalistas

La empresa Pluned, que se dedica a la fabricación y venta de tubos de plomo para el mercado industrial, tiene fragmentado su mercado en dos segmentos de clientes, el primero de los cuales tiene la siguiente función de demanda anual:

$$q_1 = 20.000(1 - e^{-0,015N_1})$$

siendo la que sigue la correspondiente al segundo:

$$q_2 = 30.000(1 - e^{-0,03N_2})$$

donde q_1 y q_2 son los respectivos niveles de demanda anual de los segmentos y N_1 y N_2 los números de vendedores asignados a los mismos por la empresa. El precio de venta unitario es de 300 u.m. y el coste variable por unidad (salvo los costes de vendedores) es de 200 u.m. Si los costes fijos son 2.000.000

de u.m. al año y el coste anual por cada vendedor es de 2.000 u.m. en el primer segmento y de 3.000 en el segundo, se desea determinar el número de vendedores que debe asignar la empresa a cada segmento para maximizar su beneficio anual, y el valor de este último.

RESOLUCIÓN

El beneficio de la empresa será:

$$\begin{aligned} B &= 300(q_1 + q_2) - 200(q_1 + q_2) - 2.000.000 - 2.000N_1 - 3.000N_2 = \\ &= 100(q_1 + q_2) - 2.000.000 - 2.000N_1 - 3.000N_2 = \\ &= 100[20.000(1 - e^{-0,015N_1}) + 30.000(1 - e^{-0,03N_2})] - 2.000.000 - 2.000N_1 - \\ &- 3.000N_2 = 2.000.000(1 - e^{-0,015N_1}) + 3.000.000(1 - e^{-0,03N_2}) - \\ &- 2.000.000 - 2.000N_1 - 3.000N_2 \end{aligned}$$

Derivando respecto a N_1 y a N_2 e igualando a cero las expresiones resultantes, se obtienen las condiciones necesarias de máximo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial N_1} &= 2.000.000 \times 0,015e^{-0,015N_1} - 2.000 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial N_2} &= 3.000.000 \times 0,03e^{-0,03N_2} - 3.000 = 0 \end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$\begin{aligned} e^{-0,015N_1} &= 0,06\bar{6} \rightarrow -0,015N_1 = \ln 0,06\bar{6} \rightarrow N_1 = 181 \text{ vendedores} \\ e^{-0,03N_2} &= 0,03\bar{3} \rightarrow -0,03N_2 = \ln 0,03\bar{3} \rightarrow N_2 = 113 \text{ vendedores} \end{aligned}$$

El máximo beneficio² que así se obtiene es

$$\begin{aligned} B &= 2.000.000(1 - e^{-0,015 \times 181}) + 3.000.000(1 - e^{-0,03 \times 113}) - \\ &- 2.000.000 - 2.000 \times 181 - 3.000 \times 113 = 2.065.464,06 \text{ u.m} \end{aligned}$$

² La condición suficiente de máximo se cumple, pues:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial N_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial N_2^2} < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 B}{\partial N_1^2} & \frac{\partial^2 B}{\partial N_1 \partial N_2} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial N_2 \partial N_1} & \frac{\partial^2 B}{\partial N_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

Pruebas objetivas de autoevaluación

En este apartado se recogen ocho pruebas objetivas de autoevaluación. Las cuatro primeras permiten contrastar los conocimientos adquiridos en las dos primeras partes del libro. Las cuatro últimas se refieren a las dos últimas partes.

Cada prueba consta de veinte preguntas «tipo test», cada una de las cuales tiene cuatro alternativas de resolución, de las cuales sólo es correcta una de ellas. Se debe marcar en «ninguna de las otras» cuando se considera que ninguna de las otras tres respuestas es correcta. Se marca en «varias de las otras» cuando se estima que hay más de una respuesta correcta.

En ocasiones se obliga a marcar lo mismo que en la pregunta anterior con objeto de duplicar la ponderación de esta última.

Tras cada prueba, se incluye la relación de respuestas correctas junto con una referencia al lugar del libro donde se encuentra el problema al que se refiere cada pregunta.

Para autoevaluarse, sume 0,5 puntos por cada pregunta bien respondida y reste 0,15 puntos por cada pregunta que responda mal. No sume ni reste nada en las preguntas que no conteste. El nivel de aprobado requiere conseguir cinco puntos.

1. PRUEBAS DE LAS DOS PRIMERAS PARTES

1.1. Primera prueba

I. ENUNCIADOS

1. ¿Cuál es la entropía asociada al lanzamiento de una moneda perfecta?

- ☐ Más de dos bits.
- ☐ Un nit.
- ☐ $-\log_2(2)$
- ☐ Un bit.

2. Los proyectos de inversión *A* y *B* tienen el mismo riesgo, requieren unos desembolsos iniciales de 2.000 y 1.000 u.m., respectivamente, y generan ilimitadamente unos flujos de caja anuales constantes iguales a 1.000 u.m. la inversión *A* y 500 u.m. la inversión *B*. ¿Qué inversión es preferible según el VAN antes de resolver la discrepancia?

- ☐ La *A*.
- ☐ La *B*.
- ☐ Depende del tipo de descuento que se aplique.
- ☐ Son indiferentes entre sí.

3. Al resolver la discrepancia de la pregunta anterior, ¿qué inversión es preferible según el VAN?

- ☐ La *A*.
- ☐ La *B*.

- ☐ Depende del tipo de descuento que se aplique.
- ☐ Son indiferentes entre sí.

4. El beneficio económico de una empresa ha sido 2.000.000 de u.m. con unos costes fijos no financieros de 400.000 u.m. ¿Cuánto habría aumentado su beneficio económico si sus ventas hubieran aumentado un 200 por 100?

- ☐ Un 40 por 100.
- ☐ Un 240 por 100.
- ☐ Un 140 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

5. En el programa lineal:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar: } Z &= 15x + 12y \\ 4x + 8y &\geq 44 \\ 5x + 4y &\geq 40 \\ 14x + 3y &\geq 42 \\ x, y &\geq 0\end{aligned}$$

- ☐ Existe más de una solución correcta.
- ☐ La solución es $x = 2,04$, $y = 4,48$.
- ☐ La solución es $x = 6$, $y = 2,5$.
- ☐ La solución es $x = 11$, $y = 0$.

6. La financiación de una empresa se basa en un crédito a diez años que obtuvo hace dos años con un tipo de interés anual del 10 por 100. Actualmente, un crédito semejante a diez años costaría un interés del 12 por 100, siendo del 8 por 100 si fuera a ocho años. Esta empresa podría realizar una ampliación de capital emitiendo acciones, y esta fuente de financiación tendría un coste anual del 20 por 100. ¿Cuál es el coste del capital de esta empresa?

- ☐ 10 por 100.
- ☐ 12 por 100.
- ☐ 8 por 100.
- ☐ 20 por 100.

7. Un proveedor permite aplazar el pago 60 días y ofrece un descuento del 20 por 100 por el pago al contado. El impuesto sobre el beneficio es el 33 por 100. ¿Cuál es el coste anual neto de impuestos de este crédito comercial?

- ☐ 153,2453 por 100.
- ☐ 188,5847 por 100.

- ☐ 137,0788 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

8. En un grafo PERT, la flecha de una actividad parte de un nudo que tiene una oscilación de 3, y tiene su destino en un nudo que tiene una oscilación de 2. El tiempo *last* del nudo de destino es 44, el tiempo *early* del de origen es 20 y la actividad dura 10. ¿Cuánto vale su holgura independiente?

- ☐ 9.
- ☐ 12.
- ☐ 11.
- ☐ Ninguna de las otras.

9. En la siguiente matriz, *P* es el perdedor y *G* es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

Estrategias de *P*

	X	Y	Z
A	-100	50	20
B	100	-50	20
C	20	-20	-10

Estrategias de *G*

- ☐ Ninguno.
- ☐ Uno.
- ☐ Dos.
- ☐ Ninguna de las otras.

10. El total de costes fijos (financieros y no financieros) de una empresa representa el 25 por 100 de su beneficio neto. ¿Cuánto vale su apalancamiento total?

- ☐ 4.
- ☐ 1,6667.
- ☐ 1,25.
- ☐ Ninguna de las otras.

11. Si se compra un terreno y se descubre agua subterránea, se ganan 50.000 u.m., pero, si no se descubre agua, se pierden 20.000 u.m. La probabilidad de que no haya agua es del 60 por 100. ¿Cuál es el límite máximo que se puede pagar por cualquier información relativa a la existencia de agua?

- ☐ 32.000 u.m.
- ☐ 38.000 u.m.
- ☐ 50.000 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

12. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

13. Del balance y cuenta de resultados de una empresa se desprende que de su financiación total, integrada por 100 millones de u.m., el 60 por 100 está formada por financiación propia, compuesta por 60.000 acciones, y el 40 por 100 por capitales ajenos, a los que paga un interés del 14 por 100. Este año sus activos han generado un beneficio de 25 millones de u.m., y el impuesto sobre la renta de las sociedades tiene un tipo del 35 por 100. Se desea determinar la rentabilidad financiera de esta empresa después de impuestos.

- ☐ 32,34 por 100.
- ☐ 21,02 por 100.
- ☐ 11,32 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

14. Una inversión requiere un desembolso inicial de 3.000 u.m. y dura dos años, en el primero de los cuales genera un flujo de caja de 2.000 u.m., siendo de 4.500 el generado en el segundo. Se desea saber su VAN, para una inflación anual del 6 por 100 y una rentabilidad anual requerida del 8 por 100.

- ☐ 2.180,66 u.m.
- ☐ 2.217 u.m.
- ☐ 1.867,35 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

15. ¿Cuánto vale la tasa de rentabilidad interna real de la inversión de la pregunta anterior?

- ☐ 60,26 por 100.
- ☐ 106,19 por 100.

- ☐ 69,88 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

16. Una empresa, cuyo período medio de maduración económico es de 103 días, paga al contado todos sus gastos salvo las materias primas, de las que adquiere y consume 20.000.000 de u.m. al año. Se desea conocer su período medio de maduración financiero, sabiendo que mantiene una deuda media con sus proveedores de 4.000.000 de u.m.

- ☐ 30 días.
- ☐ 73 días.
- ☐ 133 días.
- ☐ Ninguna de las otras.

17. A una empresa cuyo coste del capital es el 12 por 100, se le presentan dos alternativas de inversión mutuamente excluyentes, X e Y. A la alternativa X se le asigna una prima de riesgo del 3 por 100 sobre la rentabilidad del activo libre de riesgo que se estima en un 4 por 100, en tanto que la prima de riesgo que se asigna a la inversión Y es el 5 por 100. La rentabilidad esperada de la inversión Y es el 15 por 100. ¿Cuál es la rentabilidad requerida de la inversión X?

- ☐ 7 por 100.
- ☐ 13 por 100.
- ☐ 12 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

18. Una inversión que requiere un desembolso inicial de 3.000 u.m. tiene una duración ilimitada. Se espera que el flujo de caja del próximo año valga 800 u.m. y que luego crezca a una tasa anual constante del 7 por 100. La tasa de inflación anual es el 10 por 100. ¿Cuánto vale su rentabilidad real anual?

- ☐ 21,52 por 100.
- ☐ 36,36 por 100.
- ☐ 45 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

19. La rentabilidad trimestral de una inversión es el 0,1 por 100. ¿Cuánto vale su rentabilidad anual?

- ☐ 4,06 por 100.
- ☐ 1,2 por 100.

- ☐ 52,35 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input type="checkbox"/>	1	18
2	<input type="checkbox"/>	4	59
3	<input type="checkbox"/>	4	63
4	<input type="checkbox"/>	5	8
5	<input type="checkbox"/>	2	12
6	<input type="checkbox"/>	6	24
7	<input type="checkbox"/>	6	14
8	<input type="checkbox"/>	2	32
9	<input type="checkbox"/>	1	11
10	<input type="checkbox"/>	5	16
11	<input type="checkbox"/>	2	8
12	<input type="checkbox"/>	—	—
13	<input type="checkbox"/>	3	12
14	<input type="checkbox"/>	4	28
15	<input type="checkbox"/>	4	28
16	<input type="checkbox"/>	3	23
17	<input type="checkbox"/>	4	70
18	<input type="checkbox"/>	4	54
19	<input type="checkbox"/>	4	43
20	<input type="checkbox"/>	—	—

1.2. Segunda prueba

I. ENUNCIADOS

1. Del antepenúltimo nudo de un grafo PERT parten dos actividades. El tiempo *last* del último nudo vale 53 y sobre la flecha que va directamente de uno

de esos nudos al otro figura una duración de 3. El tiempo *last* del penúltimo nudo ha de valer:

- ☐ 50.
- ☐ 50 o menos de 50.
- ☐ 50 o más de 50.
- ☐ Faltan datos.

2. Un banco ha concedido a un cliente un préstamo de 2.000.000 de u.m. por el que, al final de cada uno de los doce trimestres de su duración, le cobrará un interés del 3 por 100. El último trimestre el cliente deberá devolver el principal del préstamo y los intereses del último trimestre. ¿Cuánto vale la rentabilidad anual de la inversión del banco?

- ☐ 12 por 100.
- ☐ 12,55 por 100.
- ☐ 13,01 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

3. El producto de una empresa tiene unos costes fijos anuales de 1.000.000 de u.m. y un coste variable unitario de 100 u.m. Si el precio unitario de venta es de 90 u.m., su punto muerto:

- ☐ Vale -100.000.
- ☐ No existe.
- ☐ Vale 0.
- ☐ Es inalcanzable.

4. Una empresa tiene un coeficiente de apalancamiento financiero de 2 y el 50 por 100 de sus activos se financian con deudas. Si su rentabilidad económica aumenta un 12 por 100, su rentabilidad financiera aumentará un:

- ☐ 6 por 100.
- ☐ 24 por 100.
- ☐ 12 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

5. Un proveedor permite aplazar el pago medio año y ofrece un descuento del 20 por 100 por el pago al contado. El impuesto sobre el beneficio es el 33 por 100. ¿Cuál es el coste anual neto de impuestos de este crédito comercial?

- ☐ 37,69 por 100.
- ☐ 70,14 por 100.

- ☐ 36,31 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

6. Antes de tener en cuenta el impuesto sobre el beneficio (cuyo tipo de gravamen es el 33 por 100) ni la tasa de inflación (que es el 4 por 100), el coste de un empréstito es el 24 por 100. ¿Cuál es el coste después de tener en cuenta ambas cuestiones?

- ☐ 11,6154 por 100.
- ☐ 12,8846 por 100.
- ☐ 12,25 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

7. Se sabe que los tiempos optimista, más probable y pesimista de una actividad valen 17, 19 y 27 días, respectivamente. ¿Cuánto vale su tiempo PERT?

- ☐ 2,7778.
- ☐ 19.
- ☐ 1,6667.
- ☐ Ninguna de las otras.

8. En el programa lineal:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar: } Z &= 15x + 15y \\ 20x + 32y &\leq 25 \\ x + y &= 1 \\ x, y &\geq 0\end{aligned}$$

- ☐ Existe más de una solución correcta.
- ☐ La solución es $x = 0,5833$, $y = 0,4167$
- ☐ La solución es $x = 0,75$, $y = 0,25$.
- ☐ Ninguna de las otras.

9. Sabemos que los dividendos de una acción crecen un 10 por 100 cada año, y que su cotización actual es de 3.500 u.m. ¿Cuál será su cotización dentro de un año si se mantiene su rentabilidad requerida?

- ☐ 3.850.
- ☐ 3.500.
- ☐ 3.150.
- ☐ Ninguna de las otras.

10. Se sabe que los tiempos optimista, más probable y pesimista de una actividad valen 17, 19 y 27 días, respectivamente. ¿Cuánto vale la desviación típica de su duración?

- ☐ 2,7778.
- ☐ 20.
- ☐ 1,6667.
- ☐ Ninguna de las otras.

11. ¿Cuánto vale la cuota mensual constante que amortiza un préstamo de 2.850 u.m. en cuatro años, siendo la TAE aplicable el 20 por 100?

- ☐ 84,27285 u.m.
- ☐ 47,5 u.m.
- ☐ 59,375 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

12. Las inversiones A y B tienen unas rentabilidades esperadas respectivas del 15 por 100 y del 18 por 100. Sus primas de riesgo son del 4 por 100 y del 8 por 100, respectivamente. El coste de la financiación de la empresa es el 10 por 100, y la rentabilidad del activo libre de riesgo es el 6 por 100. ¿Qué inversión es efectuable?

- ☐ Ninguna.
- ☐ Las dos.
- ☐ La A.
- ☐ La B.

13. Para financiar 100 millones de adquisición de materias primas, podemos optar entre un crédito comercial a dos años que ofrece el proveedor, con un descuento por pago al contado del 20 por 100, o un crédito bancario a dos años con un tipo de interés del 10 por 100 anual. El banco cobra una comisión inicial de 500.000 u.m. y exige que la devolución del principal se realice junto con los intereses del segundo año. ¿Qué fuente de financiación es preferible?

Son indiferentes entre sí.

- ☐ Depende del tipo de descuento que se aplique.
- ☐ El crédito comercial.
- ☐ El crédito bancario.

14. Si la rentabilidad bursátil por dividendos de una empresa es el 25 por 100, ha obtenido un beneficio de 900.000 u.m. y aplica un coeficiente de reparto del 10 por 100, ¿cuánto vale su capitalización bursátil?

- ☐ 360.000 u.m.
- ☐ 2.250.000 u.m.
- ☐ 22.500 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

15. ¿Cuál es la entropía asociada al lanzamiento de una moneda perfecta, si la información se mide en nits?

- ☐ 1 nit.
- ☐ 0,9 nits.
- ☐ 0,6931 nits.
- ☐ Ninguna de las otras.

16. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

17. Una inversión genera ad infinitum un flujo de caja anual constante de 100 u.m. y su rentabilidad requerida es el 10 por 100 anual. ¿Qué VAN mínimo ha de exigírsele para que sea congruente con la exigencia de que su plazo de recuperación simple no sobrepase los 5 años?

- ☐ 600 u.m.
- ☐ 450 u.m.
- ☐ 1.000 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

18. En la siguiente matriz, P es el perdedor y G es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

		Estrategias de P		
		X	Y	Z
Estrategias de G	A	0	150	120
	B	200	50	80
	C	120	80	90

- ☐ Ninguno.
- ☐ Uno.
- ☐ Dos.
- ☐ Ninguna de las otras.

19. La empresa Madura, S. A., compró y consumió el pasado año, para la fabricación de su producto, 20.000 u.m. de materias primas y, por término medio, mantuvo un nivel de existencias de las mismas en almacén de 2.000 u.m. ¿Cuánto vale su período medio de almacenamiento?

- ☐ 36,5 días.
- ☐ 18,25 días.
- ☐ 10 días.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input checked="" type="checkbox"/>	2	30
2	<input type="checkbox"/>	4	44
3	<input checked="" type="checkbox"/>	5	2
4	<input checked="" type="checkbox"/>	5	17
5	<input checked="" type="checkbox"/>	6	15
6	<input type="checkbox"/>	6	10
7	<input checked="" type="checkbox"/>	2	33
8	<input type="checkbox"/>	2	13
9	<input type="checkbox"/>	6	19
10	<input type="checkbox"/>	2	33-34
11	<input type="checkbox"/>	6	5
12	<input checked="" type="checkbox"/>	4	71
13	<input checked="" type="checkbox"/>	6	16
14	<input checked="" type="checkbox"/>	3	15
15	<input checked="" type="checkbox"/>	1	22
16	<input type="checkbox"/>	—	—

17	<input type="checkbox"/>	4	72
18	<input type="checkbox"/>	1	12
19	<input type="checkbox"/>	3	20
20	<input type="checkbox"/>	—	—

1.3. Tercera prueba

I. ENUNCIADOS

1. En relación al beneficio económico de una empresa, los costes financieros representan el 20 por 100. ¿Cuánto vale su apalancamiento financiero?
☐ Hacen falta más datos.
☐ 1,25.
☐ 1,20.
☐ 1,80.
2. El coeficiente de endeudamiento de una empresa es el 50 por 100 y el coste de sus deudas es el 15 por 100. ¿Para qué nivel de rentabilidad económica sería nula su rentabilidad financiera?
☐ 7,5 por 100.
☐ 5 por 100.
☐ 2,5.
☐ Ninguna de las otras.
3. Si se compra un terreno y se descubre oro, se ganan 180.000 u.m., pero, si no se descubre oro, se pierden 120.000 u.m. La probabilidad de que no haya oro es del 60 por 100. ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?
☐ 0 u.m.
☐ 60.000 u.m.
☐ 72.000 u.m.
☐ Ninguna de las otras.
4. El pasado año una empresa tuvo un ratio de endeudamiento total del 0,5 por 1, una rentabilidad financiera del 20 por 100 y obtuvo un margen neto sobre ventas del 15 por 100. ¿Cuál fue la rotación de su activo?
☐ 0,0045 veces.
☐ 0,8889 veces.
☐ 2,6667 veces.
☐ Ninguna de las otras.

5. Un proyecto está formado por tres actividades: la actividad A, que dura 8 días; la B, que dura 15 días, y la C, que dura 4 días. La única restricción de precedencia es que las actividades A y B preceden a la C. En el PERT correspondiente:

- ☐ El tiempo *early* del nudo número 3 vale 8 días.
- ☐ La flecha de la actividad B parte del nudo 1 y finaliza en el 3.
- ☐ No hay ninguna actividad ficticia.
- ☐ Ninguna de las otras.

6. Una empresa tiene un período medio de maduración económico de 7 días y paga a sus proveedores en un plazo de 4 días. Diariamente consume 1.000 u.f. de materias primas, que tienen un precio unitario de 125 u.m. Se desea conocer el importe del fondo de maniobra que necesita esta empresa para pago de primeras materias.

- ☐ 875.000 u.m.
- ☐ 375.000 u.m.
- ☐ 500.000 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

7. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

8. Una vez determinado el camino crítico de un proyecto, resulta estar formado por 100 actividades, de las cuales:

- 20 actividades tienen una duración optimista de 4 días, un tiempo más probable de 6 días y un tiempo pesimista de 7 días.
- 80 actividades tienen una duración optimista de 15 días, un tiempo más probable de 18 días y un tiempo pesimista de 20 días.

Suponiendo que es aplicable el Teorema Central del Límite, la probabilidad de terminar el proyecto en menos de 1.550 días es igual a la probabilidad de que la variable normal con esperanza matemática igual a 0 y desviación típica igual a 1 sea

- ☐ Mayor que -0,86.
- ☐ Menor que 1,23.

- ☐ Mayor que -1,23.
- ☐ Varias de las otras.

9. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

10. En principio pensábamos que una moneda era perfecta, pero recibimos un mensaje que dice que existe una probabilidad del 25 por 100 de que salga cara. Si la información se mide en nits, ¿cuál es la información de canal de ese mensaje?

- ☐ 0,13 nits.
- ☐ 0,18 nits.
- ☐ 0,051 nits.
- ☐ Ninguna de las otras.

11. La holgura total de la actividad que va del nudo i al j vale 20. La oscilación del nudo i vale 15 y la del nudo j vale 10. ¿Cuánto vale la holgura independiente de la actividad?

- ☐ 45.
- ☐ 25.
- ☐ -5.
- ☐ Ninguna de las otras.

12. En el programa lineal:

$$\text{Maximizar: } Z = 40x + 25y$$

$$70x + 70y \leq 650$$

$$50x + 75y \leq 300$$

$$70x + 35y \leq 280$$

$$x, y \geq 0$$

- ☐ Existe más de una solución correcta.
- ☐ La solución es $x = 3$, $y = 2$.
- ☐ No existe solución.
- ☐ Ninguna de las otras.

13. Las duraciones de las inversiones mutuamente excluyentes *A* y *B* son ilimitadas. La primera tiene un desembolso inicial de 500 u.m. y un flujo de caja anual constante de 250 u.m. La inversión *B* requiere un desembolso inicial de 1.000 u.m. y genera un flujo de caja anual constante de 600 u.m. ¿Qué inversión es preferible según el VAN?

- ☐ Depende de si el problema se plantea antes o después de la resolución de la discrepancia.
- ☐ Depende del tipo de descuento que se aplique.
- ☐ *A*.
- ☐ *B*.

14. Se están analizando dos inversiones mutuamente excluyentes, *A* y *B*, cuyas características más relevantes son las siguientes:

- Inversión *A*: la rentabilidad que cabe esperar de la misma es del 7 por 100 anual. Por ser una inversión muy segura se le aplica una prima por riesgo del 2 por 100.
- Inversión *B*: su realización conlleva un cierto nivel de riesgo, por lo que se le aplica una prima del 4 por 100. Su rentabilidad esperada es del 9 por 100.

El coste de la financiación de esta empresa es del 6 por 100 y la rentabilidad del activo libre de riesgo es del 3 por 100. Se desea saber qué inversión es preferible.

- ☐ La *A*.
- ☐ La *B*.
- ☐ No es realizable ninguna.
- ☐ Ninguna de las otras.

15. Las ventas del producto de una empresa superan en un 20 por 100 a su punto muerto. ¿Cuánto vale su apalancamiento operativo?

- ☐ 6.
- ☐ 1,25.
- ☐ 1,2.
- ☐ Ninguna de las otras.

16. En un grafo PERT sólo existen tres actividades reales y una ficticia. La actividad *A* parte del nudo 1 y termina en el 2. La actividad *B* parte del nudo 1 y termina en el 3. La actividad *C* parte del nudo 2 y termina en el 4. La actividad ficticia parte del nudo 3 y termina en el 4. ¿Es correcto?

- ☐ Siempre.
- ☐ Nunca.
- ☐ En un caso particular.
- ☐ Ninguna de las otras.

17. ¿Cuál es la cuota mensual constante que amortiza un préstamo de 25 millones de u.m. en 6 años con un tipo de interés del 10 por 100 anual?

- ☐ 478.348,71.
- ☐ 457.728,05.
- ☐ 381.944,44.
- ☐ Ninguna de las otras.

18. Una empresa muy rentable utiliza tres fuentes de financiación: créditos, por un importe de 40 u.m. con un coste anual del 12 por 100; un empréstito de obligaciones por un importe de 50 u.m. y con un coste anual del 13 por 100; y capital propio, por un importe de 110 u.m. con un coste anual del 14 por 100. En los mencionados costes no se han tenido en cuenta la inflación, que es el 5 por 100 anual, ni el impuesto sobre la renta de las sociedades, que tiene un tipo de gravamen del 35 por 100. ¿Cuál es el coste medio ponderado real después de tener en cuenta ambas cuestiones?

- ☐ Ninguna de las otras.
- ☐ 3,502 por 100.
- ☐ 6,819 por 100.
- ☐ 6,069 por 100.

19. Se desea determinar el VAN de una inversión cuyo desembolso inicial es de 2.000 u.m., siendo su duración de 20 años. Tal inversión generaría el próximo año un flujo de caja de 1.000 u.m. y los flujos de caja posteriores crecerían a una tasa anual del 5 por 100. La rentabilidad requerida de esta inversión es el 12 por 100 anual.

- ☐ 16.344,25.
- ☐ 12.285,71.
- ☐ 8.356,30.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. Un importe de 30 millones de u.m. se financia con un préstamo de cuotas mensuales constantes que tiene un tipo de interés anual del 12 por 100. ¿Qué parte de la cuota del primer mes corresponderá a pago de intereses?

- ☐ 284.663,79.
- ☐ 300.000.
- ☐ 360.000.
- ☐ Ninguna de las otras.

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input type="checkbox"/>	5	12
2	<input type="checkbox"/>	5	23
3	<input type="checkbox"/>	2	7
4	<input type="checkbox"/>	3	32
5	<input type="checkbox"/>	2	28
6	<input type="checkbox"/>	3	28
7	<input type="checkbox"/>	—	—
8	<input type="checkbox"/>	2	36
9	<input type="checkbox"/>	—	—
10	<input type="checkbox"/>	1	23
11	<input type="checkbox"/>	2	31
12	<input type="checkbox"/>	2	14
13	<input type="checkbox"/>	4	57
14	<input type="checkbox"/>	4	69
15	<input type="checkbox"/>	5	10
16	<input type="checkbox"/>	2	29
17	<input type="checkbox"/>	6	6
18	<input type="checkbox"/>	6	22
19	<input type="checkbox"/>	4	53
20	<input type="checkbox"/>	6	7

1.4. Cuarta prueba

I. ENUNCIADOS

1. Una inversión requiere un desembolso inicial de 625 u.m. y genera los siguientes flujos de caja: 300 u.m. al cabo de un mes, 200 u.m. al cabo de un semestre y 500 u.m. al cabo de dos años. Si la rentabilidad anual requerida es el 12 por 100, ¿cuánto vale su VAN?

- ☐ 300,5.
- ☐ 188,23.
- ☐ 457,63.
- ☐ Ninguna de las otras.

2. El apalancamiento operativo de una empresa vale 1,5, su activo vale 50 millones de u.m. y tiene unos costes fijos no financieros de 25 millones. ¿En qué porcentaje aumentará su rentabilidad económica si sus ventas aumentan un 12 por 100?

- ☐ 18 por 100.
- ☐ 8 por 100.
- ☐ 24 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

3. El beneficio económico de una empresa es el cuádruple de sus costes fijos no financieros. Si sus ventas aumentan un 15 por 100, ¿en qué porcentaje variará su beneficio económico?:

- ☐ 60 por 100.
- ☐ 18,75 por 100.
- ☐ 21 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

4. Las ventas del producto de una empresa duplican su punto muerto, y su beneficio neto triplica sus costes financieros. ¿Cuánto vale su apalancamiento total?

- ☐ 6.
- ☐ 1,56.
- ☐ 2,67.
- ☐ Ninguna de las otras.

5. ¿Cuánto ha valido la rentabilidad financiera de una empresa que ha obtenido un margen neto sobre ventas del 25 por 100, cuyo activo ha rotado dos veces y que financia el 60 por 100 de ese activo con deudas?

- ☐ 30 por 100.
- ☐ 83,33 por 100.
- ☐ 125 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

6. En el programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 120x + 75y \\ & 210x + 210y \leq 1.950 \\ & 150x + 225y \leq 900 \\ & 105x + 210y \leq 840 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

- ☐ Existe más de una solución correcta.
 - ☐ La solución es $x = 3$, $y = 2$.
 - ☐ No existe solución.
 - ☐ Ninguna de las otras.
7. Si el beneficio neto de una empresa es igual al doble de sus costes financieros, ¿en qué porcentaje se modificará su beneficio neto si su beneficio económico aumenta un 15 por 100?
- ☐ 30 por 100.
 - ☐ 22,5 por 100.
 - ☐ 18 por 100.
 - ☐ Ninguna de las otras.
8. El punto muerto de una empresa es el 20 por 100 de sus ventas. ¿Cuánto vale su apalancamiento operativo?
- ☐ 0,8.
 - ☐ 1,2.
 - ☐ 1,25.
 - ☐ Ninguna de las otras.
9. ¿Qué tipo de interés ha de aplicar un banco, en los préstamos que concede, si desea obtener un tipo de rentabilidad neto de inflación del 12 por 100 anual acumulativo y la tasa media de crecimiento de los precios es del 9 por 100, también anual y acumulativa?
- ☐ 22,08 por 100.
 - ☐ 5,69 por 100.
 - ☐ 21 por 100.
 - ☐ Ninguna de las otras.
10. ¿Cómo se explica que con unas ventas de 50 millones de u.m. y un beneficio operativo de 45 millones, la rentabilidad económica de una empresa haya sido sólo el 2 por 100?
- ☐ Por la baja rentabilidad de las ventas.
 - ☐ Por la baja rotación del capital.
 - ☐ Por la escasez de activos.
 - ☐ Ninguna de las otras.

11. Las duraciones de las inversiones mutuamente excluyentes A y B son ilimitadas. La primera tiene un desembolso inicial de 2.000 u.m. y un flujo de caja anual constante de 1.200 u.m. La inversión B requiere un desembolso inicial de 1.000 u.m. y genera un flujo de caja anual constante de 500 u.m. ¿Qué inversión es preferible según el VAN?

- ☐ Depende de si el problema se plantea antes o después de la resolución de la discrepancia.
- ☐ Depende del tipo de descuento que se aplique.
- ☐ A.
- ☐ B.

12. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

13. Un préstamo de 10.000 u.m. a cinco años tiene una TAE del 9 por 100 y se amortiza con cuotas trimestrales constantes. De la cuota del primer trimestre, ¿qué parte corresponde a devolución de principal?

- ☐ 500.
- ☐ 642,73.
- ☐ 417,73.
- ☐ 404,33.

14. El coste del capital-acciones de una empresa es el 10 por 100, retiene el 40 por 100 de sus beneficios y no tiene endeudamiento. ¿Cuál es el coste de su autofinanciación?

- ☐ El 10 por 100.
- ☐ El 4 por 100.
- ☐ El 2,5 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

15. Si la tasa de inflación es el 10 por 100 anual, la rentabilidad anual real de una inversión es el 12 por 100. ¿Cuál será su rentabilidad real para una tasa de inflación del 20 por 100?

- ☐ El 2 por 100.
- ☐ El 1,66 por 100.
- ☐ El 2,67 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

16. Si la rentabilidad económica de una empresa es el 40 por 100 y su capital total ha rotado dos veces, ¿cuánto vale la rentabilidad de sus ventas?

- ☐ El 50 por 100.
- ☐ El 80 por 100.
- ☐ El 20 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

17. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

18. El beneficio neto de una empresa es el 80 por 100 de su beneficio operativo. ¿Cuánto vale su apalancamiento financiero?

- ☐ 1,25.
- ☐ 0,8.
- ☐ 1,6.
- ☐ Ninguna de las otras.

19. El coeficiente de endeudamiento de una empresa vale 2 y el coste anual de sus deudas es el 14 por 100. ¿Para qué nivel de rentabilidad económica pasaría a ser negativa la rentabilidad financiera de esta empresa?

- ☐ 7 por 100.
- ☐ 28 por 100.
- ☐ 9,33 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. Los costes fijos anuales de una empresa valen 200.000 u.m. El coste variable unitario de su producto es igual al precio en el que lo vende e igual a 200 u.m. Su punto muerto:

- ☐ No existe.
- ☐ Vale 1.000.
- ☐ Es inalcanzable.
- ☐ Ninguna de las otras.

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input type="checkbox"/>	4	45
2	<input type="checkbox"/>	5	18
3	<input type="checkbox"/>	5	9
4	<input type="checkbox"/>	5	15
5	<input type="checkbox"/>	3	33
6	<input type="checkbox"/>	2	15
7	<input type="checkbox"/>	5	14
8	<input type="checkbox"/>	5	11
9	<input type="checkbox"/>	4	12
10	<input type="checkbox"/>	3	16
11	<input type="checkbox"/>	4	58
12	<input type="checkbox"/>	—	—
13	<input type="checkbox"/>	6	8
14	<input type="checkbox"/>	6	20
15	<input type="checkbox"/>	4	30
16	<input type="checkbox"/>	3	17
17	<input type="checkbox"/>	—	—
18	<input type="checkbox"/>	5	13
19	<input type="checkbox"/>	5	24
20	<input type="checkbox"/>	5	3

2. PRUEBAS DE LAS DOS ÚLTIMAS PARTES

2.1. Primera prueba

I. ENUNCIADOS

1. Una empresa necesita adquirir unos componentes que puede comprar en el exterior por 5.000 u.m. cada unidad, o fabricarlos ella con un coste variable de 2.500 u.m. y un coste fijo anual de 200.000 u.m. Se desea saber cuántos componentes debe necesitar al año como mínimo para que sea preferible fabricarlos.

- ☐ 40 u.f.
- ☐ 80 u.f.
- ☐ 20 u.f.
- ☐ Ninguna de las otras.

2. Una empresa tenía previsto para el pasado año obtener un margen unitario de 250 u.m. vendiendo su producto a un precio unitario de 1.000 u.m. En realidad, ha vendido 7.000.000 de unidades físicas con un coste variable unitario de 600 u.m. ¿Cuánto ha valido su desviación en costes?

- ☐ 1.050.000.000 de u.m.
- ☐ Hacen falta más datos.
- ☐ 1.750.000.000 de u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

3. La función de demanda del producto de una empresa tiene la siguiente expresión:

$$q = 100 - 2p + 10 \ln A + 8 \ln F$$

Si el presupuesto total de promoción y venta personal es de 400 u.m., ¿cuánto deberá gastarse en promoción si desea maximizar las ventas?

- ☐ Existe más de una solución correcta.
- ☐ 222,22 u.m.
- ☐ 177,78 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

4. Hasta llegar al consumidor, cierto producto sigue un canal formado por cinco intermediarios, cada uno de los cuales lo vende a un precio resultante de aplicar un 12 por 100 de margen sobre el precio en que lo vende. ¿Qué precio deberá fijar el fabricante al primer intermediario para que el precio pagado por el consumidor sea de 200 u.m.?

- ☐ 113,49 u.m.
- ☐ 152 u.m.
- ☐ 105,55 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

5. Al aumentar el precio de un producto de 50 a 60 u.m., sus ventas mensuales se han reducido de 500 a 400 u.f., sin que exista otra razón que pueda explicar esa disminución. ¿Cuánto vale la elasticidad de la demanda respecto al precio en ese intervalo?

- ☐ 0,6053.
- ☐ 1,2222.
- ☐ 0,5789.
- ☐ Ninguna de las otras.

6. Para estudiar la eficacia de la publicidad en vallas se han tomado tres ciudades similares, realizándose una campaña fuerte en la primera, una intermedia en la segunda y ninguna en la tercera. Transcurrido un tiempo, se midieron las ventas en ocho semanas y se calcularon las ventas medias semanales, que resultaron ser 230 en la primera ciudad, 170 en la segunda y 80 en la tercera. Se desea conocer la dispersión factorial.

- ☐ 21.058,33.
- ☐ 91.200,00.
- ☐ 705.600,00.
- ☐ Ninguna de las otras.

7. La demanda anual de cierto producto responde a una función de la forma:

$$q = \frac{Na}{N + (1/t) - 1} \quad (N = \text{Número de vendedores})$$

siendo sus ventas potenciales anuales de 100.000 u.f. con un coeficiente de penetración del primer vendedor de 0,01. Cada u.f. se vende a 10.000 u.m., con un coste variable (excluido el coste del personal de ventas) de 2.000 u.m. Siendo el coste anual, por cada vendedor, de 1.000.000 de u.m., se desea determinar el tamaño de la fuerza de ventas de esta empresa, que maximiza su beneficio anual.

- ☐ 182 vendedores.
- ☐ Hacen falta más datos.
- ☐ 100 vendedores
- ☐ 199 vendedores.

8. En una empresa, según los índices de Laspeyres, su producción ha aumentado un 15 por 100 y ha utilizado un 10 por 100 menos de factores. ¿En qué porcentaje se ha modificado su productividad global?

- ☐ 25,22 por 100.
- ☐ 27,78 por 100.
- ☐ 50 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

9. El coste variable unitario de producción y distribución de un producto es de 10 u.m. y la ecuación de su demanda es

$$q = 25.000p^{-2}A^{1/3}F^{1/6}$$

Si el objetivo es maximizar el beneficio:

- ☐ El precio (p) óptimo es 30 u.m.
- ☐ El nivel óptimo de promoción (A) es 34.448,81.
- ☐ El nivel óptimo de la fuerza de ventas (F) es 24.224,40.
- ☐ Ninguna de las otras.

10. La distribución por clases sociales de las 1.000 personas encuestadas y de las 100 que resultaron consumidoras del producto en cuestión es la siguiente:

Clase social	Muestra	Consumidores
A	3.500	200
M	3.500	300
B	3.000	500

¿Cuánto vale el coeficiente de discriminación del método de la χ^2 , S , en la mejor segmentación posible?

- ☐ 190,47.
- ☐ 300,71.
- ☐ 17,58.
- ☐ Ninguna de las otras.

11. Cierta producto tiene un coste variable unitario de 15 u.m. y su demanda tiene la siguiente ecuación:

$$q = 175.000 - 300p$$

Se desea determinar el precio que maximiza el beneficio anual.

- ☐ 367,53 u.m.
- ☐ 253,24 u.m.
- ☐ 299,16 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

12. Las ventas mensuales de una empresa siguen una distribución de probabilidad normal con una media igual a 1.000 u.f. y una desviación típica igual a 60 u.f. ¿Qué stock de seguridad ha de mantener esta empresa para que la probabilidad de que se produzca una ruptura de stocks no supere el 10 por 100? (Información adicional: Siendo ξ la variable $N(0, 1)$: $P(0 < \xi < 1,29) = 0,4$.)

- ☐ 77,4.
- ☐ 1.077,4.
- ☐ 1.137,4.
- ☐ Ninguna de las otras.

13. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐



14. El coste variable unitario de producción y distribución de un producto es de 1.000 u.m. y la ecuación de su demanda es

$$q = 1.000p^{-1,25}A^{0,25}F^{0,15}$$

Si el objetivo es maximizar el beneficio:

- ☐ El precio (p) óptimo es 5.000 u.m.
 - ☐ El nivel óptimo de promoción (A) es 144,15 u.m.
 - ☐ El nivel óptimo de la fuerza de ventas (F) es 103,87.
 - ☐ Varias de las otras.
15. En el nivel de demanda que maximiza el beneficio, las elasticidades de la demanda a corto plazo del producto de una empresa son las siguientes:
- Respecto a la fuerza de ventas, 0,25.
 - Respecto a la promoción, 0,75.
 - Respecto al precio, 2.

En el óptimo, ¿qué proporción debe representar el presupuesto de fuerza de ventas respecto al ingreso o volumen de ventas?

- ☐ Ninguna de las otras.
 - ☐ 33,33 por 100.
 - ☐ 9,09 por 100.
 - ☐ 12,5 por 100.
16. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior:



17. El beneficio bruto estándar previsto para un producto era de 1.250 millones de u.m. con un margen de beneficio bruto unitario de 250 u.m. En reali-

dad se han vendido 7.000.000 de u.f. ¿Cuánto ha valido la desviación en cantidades, en millones de u.m.?

- ☐ 142.86.
- ☐ 500.
- ☐ 8.500.
- ☐ Ninguna de las otras.

18. La demanda anual de una empresa responde a la expresión:

$$q = \frac{N + 100.00}{N + 99} \quad (N = \text{Número de vendedores})$$

¿Cuál es el coeficiente de penetración del primer vendedor en tanto por uno?

- ☐ 0,01.
- ☐ 0,1.
- ☐ 0,0033.
- ☐ Ninguna de las otras.

19. Para la fabricación y venta de su producto, una empresa soporta unos costes fijos de 600.000 u.m. cada año y un coste variable unitario de 30 u.m. Trabajando a ritmo normal tiene capacidad para producir y vender 30.000 u.f. anuales. ¿Cuál es el precio mínimo de este producto?

- ☐ 50.
- ☐ 30.
- ☐ 40.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. La empresa fabricante distribuye su producto en dos mercados, A y B. La elasticidad de la demanda respecto al precio vale 2 en el mercado A y 1,5 en el mercado B. El objetivo de la empresa es maximizar su beneficio. Si el precio óptimo en el mercado B es 30, ¿cuál es el precio óptimo en el mercado A?

- ☐ 20.
- ☐ 40.
- ☐ 22,5.
- ☐ Ninguna de las otras.

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input checked="" type="checkbox"/>	7	2
2	<input checked="" type="checkbox"/>	11	26
3	<input checked="" type="checkbox"/>	11	2-3
4	<input checked="" type="checkbox"/>	13	29
5	<input checked="" type="checkbox"/>	13	9
6	<input checked="" type="checkbox"/>	12	14
7	<input checked="" type="checkbox"/>	14	16
8	<input checked="" type="checkbox"/>	7	11
9	<input checked="" type="checkbox"/>	11	11
10	<input checked="" type="checkbox"/>	12	8
11	<input checked="" type="checkbox"/>	13	11
12	<input checked="" type="checkbox"/>	9	5
13	<input checked="" type="checkbox"/>	—	—
14	<input checked="" type="checkbox"/>	11	8
15	<input checked="" type="checkbox"/>	11	6
16	<input checked="" type="checkbox"/>	—	—
17	<input checked="" type="checkbox"/>	11	27
18	<input checked="" type="checkbox"/>	14	16
19	<input checked="" type="checkbox"/>	13	13
20	<input checked="" type="checkbox"/>	13	26

2.2. Segunda prueba

I. ENUNCIADOS

1. El valor sustancial de una empresa que va a durar 15 años vale 100 u.m. y se espera que genere anualmente un beneficio líquido de 50 u.m. Si el tipo de rentabilidad normal es el 12 por 100 y el tipo de descuento es el 15 por 100, ¿cuál es el valor global de esta empresa por el método anglosajón revisado?

- ☒ 322,2.
- ☒ 230,58.
- ☒ 670.
- ☒ Ninguna de las otras.

2. En una empresa utilizan los factores de producción *A*, *B* y *C* para elaborar los productos *X*, *Y* y *Z*. En la siguiente tabla se recogen, en unidades físicas y en unidades monetarias, las cantidades elaboradas de los tres productos y las empleadas de los tres factores en dos años consecutivos.

	Año 0		Año 1	
	u.f.	u.m.	u.f.	u.m.
Factor A	100	1.000	150	1.800
Factor B	110	2.200	120	2.880
Factor C	200	6.000	190	6.840
Producto X	200	8.000	210	10.920
Producto Y	250	7.500	240	8.640
Producto Z	400	16.000	500	26.000

¿Cuál ha sido la tasa de productividad global?

- ☐ 8,31 por 100.
- ☐ 1,083 por 100.
- ☐ -7,67 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

3. La diferencia entre el precio de adquirir un componente fuera y su coste variable unitario si se fabrica dentro es el 0,25 por 100 del coste fijo anual total que requiere fabricarlo dentro. ¿Para qué volumen de componentes anuales es indiferente fabricarlos o comprarlos?

- ☐ 4.
- ☐ 400.
- ☐ 2.500.
- ☐ Ninguna de las otras.

4. Se ha adquirido un bien de equipo por 225.000 u.m. Sólo se le puede vender en 25.000 u.m. cualquiera que sea el momento en el que se retire. El coste medio anual de mantenimiento (CMAM) depende de su duración en años según la siguiente tabla:

Duración (años)	1	2	3	4	5
CMAM (u.m.)	2.500	2.500	2.550	2.700	2.085

Se aplica el método de amortización lineal y la inferioridad de servicio se ajusta a la siguiente expresión:

$$IS_t = 20.000 + 5.000t$$

donde t es el número de años que dura el bien de equipo. ¿Cuál es su duración óptima según el método *MAPI*?

- ☐ 1 año.
 - ☐ 3 años.
 - ☐ 5 años.
 - ☐ Ninguna de las otras.
5. Si la remuneración de la hora de trabajo es 1.000 u.m. y con el destajo se percibirían 6.000 u.m. por tarea realizada, ¿para qué tiempo de ejecución de la tarea es máxima la prima por cada tarea realizada en el sistema Rowan?
- ☐ 6 horas.
 - ☐ 10 minutos.
 - ☐ 3 horas.
 - ☐ Ninguna de las otras.
6. ¿Cuál es la renta anual equivalente a un bien de equipo que requiere un desembolso inicial de 2.000 u.m. y que genera los siguientes flujos de caja: 350 el primer año, 650 el segundo y 600 el tercero. Tipo de descuento: 10 por 100.
- ☐ 304,50.
 - ☐ 303,10.
 - ☐ 123,11.
 - ☐ Ninguna de las otras.
7. Una empresa acaba de construir un complejo valorado en 100.000 u.m. Al final de los cuatro años de su duración se venderá el complejo en un valor residual estimado de 20.000 u.m. Se desea saber el tanto que hay que aplicar para amortizarlo en el método del tanto fijo sobre una base amortizable decreciente.
- ☐ 0,33126.
 - ☐ 0,20.
 - ☐ 0,10.
 - ☐ Ninguna de las otras.
8. Una empresa dispone de los soportes S1, S2 y S3 para dirigirse a una población objetivo de 200.000 personas. Las audiencias brutas de tales soportes son de 40.000, 60.000 y 80.000 personas, respectivamente. Existen 10.000 personas expuestas al S1 y al S2, 20.000 al S2 y al S3, y 16.000 expuestas al S1 y al S3. El número de personas expuestas a los tres soportes es de 2.000. Se desea conocer la penetración neta de los tres soportes.
- ☐ 0,68.
 - ☐ 0,67.
 - ☐ 0,66.
 - ☐ Ninguna de las otras.

9. Un vendedor tiene un objetivo de 500 unidades, su previsión de ventas era 450 y ha vendido 425. ¿Cuál es su prima bajo el sistema OPR?

- ☐ 99 por 100.
- ☐ 108 por 100.
- ☐ 105 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

10. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

11. Una población se ha dividido en dos categorías dicotómicas, A y B. Se ha tomado una muestra de 15.000 personas, de las que 2.500 resultaron pertenecer a la categoría A. El número de personas que resultan ser consumidoras del producto en cuestión es de 750, de las que 650 pertenecen a la categoría B. ¿Cuánto vale el coeficiente S, correspondiente al método de la χ^2 ?

- ☐ 25.
- ☐ 625.
- ☐ 6.
- ☐ Ninguna de las otras.

12. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

13. Si la tasa de productividad global de una empresa ha sido el 30 por 100 y su índice de evolución de los factores empleados de Laspeyres ha valido 95 por 100, su índice de evolución de la producción de Laspeyres ha sido:

- ☐ 21,53 por 100.
- ☐ 120 por 100.
- ☐ 123,5 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

14. El objetivo de una empresa es maximizar su beneficio, y, en el óptimo, la elasticidad de la demanda a corto plazo de su producto respecto a su fuerza de ventas vale 2, el nivel de la variable promocional vale 100 y el de la variable fuerza de ventas vale 200. ¿Cuánto vale en el óptimo la elasticidad de la demanda respecto a la promoción?

- ☐ 1.
- ☐ 4.
- ☐ 0,6667.
- ☐ Ninguna de las otras.

15. Una empresa distribuye su producto con dos marcas que dirige a dos segmentos distintos y que distribuye por canales diferentes. La demanda anual del primer segmento y marca responde, a corto plazo, a la expresión:

$$q_1 = 10(p_1)^{-1,1}(A_1)^{0,25}(F_1)^{0,62}$$

La ecuación de la demanda a corto plazo del segundo segmento y marca es:

$$q_2 = 50(p_2)^{-1,2}(A_2)^{0,4}(F_2)^{0,31}$$

Si el objetivo es maximizar el beneficio de la empresa, el valor óptimo de A_1 es:

- ☐ 250.
- ☐ 620.
- ☐ 485,94.
- ☐ Ninguna de las otras.

16. Las ventas globales de un producto en todo el sector ha sido de 35 millones de u.f. Se preveía un margen de beneficio unitario estándar de 250 u.m., una cuota de ventas estándar de un 12,5 por 100 y un beneficio bruto estándar de 1.250 millones de u.m. ¿Cuál ha sido su desviación en el tamaño del mercado, en millones de u.m.?

- ☐ -156,25.
- ☐ 65,25.
- ☐ -312,5.
- ☐ Ninguna de las otras.

17. Para realizar una experimentación comercial se midieron las ventas en tres mercados, A, B y C, durante doce semanas. Al elevar al cuadrado esos 36 da-

tos y sumar los resultados, se obtuvo 981.300. La venta media fue de 200,8333 u.f en el A, 160,8333 en el B y 124,1667 en el C. ¿Cuánto vale la dispersión factorial?

- ☐ 4.875.
- ☐ 35.289.
- ☐ 40.164.
- ☐ Ninguna de las otras.

18. Hasta llegar al consumidor, cierto producto sigue un canal formado por cinco intermediarios, cada uno de los cuales lo vende aplicando un margen de beneficio del 12 por 100 de su precio de venta. Si el fabricante desea que el precio final de venta al consumidor sea de 100 u.m., ¿qué precio deberá aplicarle en su venta al primer intermediario?

- ☐ 56,74.
- ☐ 52,77.
- ☐ 189,49.
- ☐ Ninguna de las otras.

19. En una campaña publicitaria pueden utilizarse tres soportes: A, B y C. Las penetraciones de cada uno de ellos son las siguientes, en tanto por uno: 0,6 el A, 0,2 el B y 0,5 el C. Las penetraciones conjuntas son: 0,1 el A y el B; 0,2 el A y el C; 0,1 el B y el C, y 0,025 el A, el B y el C. ¿Cuánto vale la penetración neta de los tres soportes en tanto por uno?

- ☐ 0,875.
- ☐ 0,950.
- ☐ 0,925.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input checked="" type="checkbox"/>	6	29
2	<input checked="" type="checkbox"/>	7	9
3	<input checked="" type="checkbox"/>	7	3
4	<input checked="" type="checkbox"/>	7	21
5	<input checked="" type="checkbox"/>	10	9
6	<input checked="" type="checkbox"/>	7	17
7	<input checked="" type="checkbox"/>	7	23
8	<input checked="" type="checkbox"/>	14	2
9	<input checked="" type="checkbox"/>	14	12
10	<input checked="" type="checkbox"/>	—	—
11	<input checked="" type="checkbox"/>	12	9
12	<input checked="" type="checkbox"/>	—	—
13	<input checked="" type="checkbox"/>	7	12
14	<input checked="" type="checkbox"/>	11	7
15	<input checked="" type="checkbox"/>	11	19
16	<input checked="" type="checkbox"/>	11	28
17	<input checked="" type="checkbox"/>	12	13
18	<input checked="" type="checkbox"/>	13	29
19	<input checked="" type="checkbox"/>	14	4
20	<input checked="" type="checkbox"/>	—	—

2.3. Tercera prueba

I. ENUNCIADOS

1. La distribución por clases sociales de las 15.000 personas encuestadas y de las 750 que resultaron consumidoras del producto en cuestión es la siguiente:

Clase social	Muestra	Consumidores
A	2.500	100
M	8.500	590
B	4.000	60

¿Cuánto vale el coeficiente de discriminación del método de la χ^2 , S , en la mejor segmentación posible?

- ☒ 147,83.
☒ 133,64.
☐ 6.
☐ Ninguna de las otras.

2. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
☐
☐
☐

3. Una persona tarda 10 horas en realizar una tarea cuyo tiempo previsto es de 12 horas. El salario del tiempo de trabajo efectivo es de 1.000 u.m. por hora. ¿Qué remuneración percibe esta persona por tarea realizada según el destajo?

- ☐ 2.000 u.m.
☐ 2.500 u.m.
☐ 3.375 u.m.
☐ Ninguna de las otras.

4. La función de demanda de un producto cuyo coste variable unitario de producción y de distribución vale 1.000 u.m. tiene la siguiente expresión:

$$q(p, A, F) = 1.000p^{-1,25}A^{0,25}F^{0,15}$$

¿Cuánto vale la elasticidad de la demanda respecto al precio?

- ☐ 6.
☐ 1,25.
☐ 0,8333.
☐ Ninguna de las otras.

5. Una empresa distribuye su producto con dos marcas que dirige a dos segmentos distintos y que distribuye por canales diferentes. La demanda anual del primer segmento y marca responde, a corto plazo, a la expresión

$$q_1 = 10(p_1)^{-1,1}(A_1)^{0,25}(F_1)^{0,62}$$

La ecuación de la demanda a corto plazo del segundo segmento y marca es:

$$q_2 = 50(p_2)^{-1,2}(A_2)^{0,4}(F_2)^{0,31}$$

El coste variable unitario de producción y distribución es idéntico para ambas marcas e igual a 30. ¿Cuál es el precio óptimo de la primera marca si el objetivo es maximizar el beneficio de la empresa?

- ☐ 330.
- ☐ 1.100
- ☐ 7.096,77.
- ☐ Ninguna de las otras.

6. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

7. El desembolso inicial de un bien de equipo es de 50 u.m. y genera tres flujos de caja anuales: 35 el primer año, 50 el segundo y 6 el tercero. Si el tipo de descuento adecuado a este análisis es el 10 por 100, ¿cuánto vale la renta anual equivalente a este bien?

- ☐ 30,61.
- ☐ 24,62.
- ☐ 12,31.
- ☐ Ninguna de las otras.

8. Las ventas mensuales de una empresa siguen una distribución normal con esperanza matemática igual a 1.000 u.f. y una desviación típica igual a 60. ¿Qué *stock* de seguridad ha de mantener esta empresa para que la probabilidad de que se produzca una ruptura de *stocks* no supere el 10 por 100? (Nota: Siendo ξ la variable $N(0, 1)$: $P(0 < \xi < 1,29) = 0,4$.)

- ☐ 77,4.
- ☐ Ninguna de las otras.
- ☐ 1,8.
- ☐ 38,7.

9. La función de demanda de un producto cuyo coste variable unitario de producción y de distribución vale 1.000 u.m. tiene la siguiente expresión:

$$q(p, A, F) = 1.000p^{-1,2}A^{0,25}F^{0,15}$$

¿Cuánto vale el precio que maximiza el beneficio?

- ☐ 1.200.
- ☐ Ninguna de las otras.
- ☐ 5.000.
- ☐ 6.000.

10. En el nivel de demanda que maximiza el beneficio, las elasticidades de la demanda a corto plazo del producto de una empresa son las siguientes:

- Respecto a la fuerza de ventas, 0,25.
- Respecto a la promoción, 0,75.
- Respecto al precio, 2.

En el óptimo, ¿qué proporción debe representar el presupuesto conjunto de promoción y fuerza de ventas, respecto al ingreso o volumen de ventas?

- ☐ 9,09 por 100.
- ☐ 50 por 100.
- ☐ 33,33 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

11. Un bien de equipo tiene un valor inicial de 10.000 u.m. y un valor residual de 2.000. Si se le amortizara por el método de los números dígitos crecientes, la cuota del segundo año sería 1.600 u.m. ¿Cuál será la cuota del segundo año si se aplica el método del tanto fijo sobre una base decreciente?

- ☐ 1.632,44.
- ☐ 1.593,12.
- ☐ 2.215,26.
- ☐ Ninguna de las otras.

12. Una empresa dispone de los soportes S1, S2 y S3 para dirigirse a una población objetivo de 1.000.000 de personas. Los costes por inserción son 160.000, 190.000 y 200.000 u.m., respectivamente. Las audiencias brutas de tales soportes son de 400.000, 500.000 y 600.000 personas, también respectivamente. Existen 100.000 personas expuestas al S1 y al S2, 200.000 al S2 y al S3, y 350.000 expuestas al S1 y al S3. El número de personas expuestas a los tres soportes es de 75.000. Se desea el ratio de coste unitario del plan consistente en realizar una sola inserción en cada uno de los tres soportes.

- ☐ 4,04.
- ☐ 0,25.
- ☐ 0,5946.
- ☐ Ninguna de las otras.

13. Un vendedor tiene un objetivo de ventas de 3.000 unidades y su previsión es 3.200. ¿Cuánto vale su porcentaje de prima para unas ventas de 2.700 en el sistema OPR?

- ☐ 132 por 100.
- ☐ 140 por 100.
- ☐ 98 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

14. Una empresa tiene un coste fijo anual de 300.000 u.m. y un coste variable unitario de 15 u.m. A ritmo normal produce 30.000 u.f. anuales. ¿Cuál es su precio mínimo?

- ☐ 25 u.m.
- ☐ 15 u.m.
- ☐ 57,25 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

15. Según los consumidores consultados, la marca de refrescos A tiene 3 puntos en burbujas y 8 en dulzor, en tanto que la posición ideal es 5 en burbujas y 6 en dulzor. ¿Cuál es la distancia de la marca A a la posición ideal?

- ☐ 1,41.
- ☐ 4.
- ☐ 2.
- ☐ Ninguna de las otras.

16. Una empresa tenía previsto para el pasado año obtener un margen unitario de 250 u.m. vendiendo su producto a un precio unitario de 1.000 u.m. En realidad ha vendido 7.000.000 de unidades físicas con un coste variable unitario de 600 u.m. ¿Cuánto ha valido su desviación en costes?

- ☐ 1.050.000.000 de u.m.
- ☐ Hacen falta más datos.
- ☐ 1.750.000.000 de u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

17. La función de demanda del producto de una empresa tiene la siguiente expresión:

$$q = 100 - 2p + 10 \ln A + 8 \ln F$$

Si el presupuesto total de promoción y venta personal es de 400 u.m., ¿cuánto deberá gastarse en promoción si desea maximizar las ventas?

- ☐ Existe más de una solución correcta.
- ☐ 222,22 u.m.
- ☐ 177,78 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

18. Se ha encuestado a 10.000 personas, de las que 1.000 resultaron ser consumidoras del producto. Su distribución según su estado civil es la siguiente:

Estado civil	S	C	D	V
Muestra	4.000	5.000	500	500
Consumidores	425	500	60	15

Según el análisis de la varianza, la mejor agrupación es aquella en la que una de las dos categorías es:

- ☐ S + C.
- ☐ V.
- ☐ D.
- ☐ Ninguna de las otras.

19. Para fijar el precio a un bolígrafo se ha pedido a 500 personas que señalen en una lista el precio máximo (PM) para el cual y por encima del cual no comprarían el bolígrafo y aquel tan bajo (PB) que les resultaría indicativo de baja calidad y dejarían de adquirirlo a ese precio o a cualquier otro inferior. Los resultados tabulados son los siguientes:

PM	25	30	35	40	45
Número de personas	50	100	150	150	50
PB	20	25	30	35	40
Número de personas	50	200	170	65	15

¿Cuál es el precio para el que el producto es aceptado por mayor número de consumidores?

- ☐ 35.
- ☐ 40.

- ☐ 45.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. El valor medio de la variable y es 12 y el de la variable x es 10. La recta de regresión lineal de y sobre x corta el eje de ordenadas a una altura igual a 3. ¿Cuánto vale el otro parámetro de regresión?

- ☐ 0,9.
- ☐ 0,6667.
- ☐ 0.5833.
- ☐ Ninguna de las otras.

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input type="checkbox"/>	12	7
2	<input type="checkbox"/>	—	—
3	<input type="checkbox"/>	10	2
4	<input type="checkbox"/>	11	10
5	<input type="checkbox"/>	11	19
6	<input type="checkbox"/>	—	—
7	<input type="checkbox"/>	7	18
8	<input type="checkbox"/>	9	5
9	<input type="checkbox"/>	11	8
10	<input type="checkbox"/>	11	6
11	<input type="checkbox"/>	7	24
12	<input type="checkbox"/>	14	3
13	<input type="checkbox"/>	14	9
14	<input type="checkbox"/>	13	15
15	<input type="checkbox"/>	13	2
16	<input type="checkbox"/>	11	26
17	<input type="checkbox"/>	11	2
18	<input type="checkbox"/>	12	11
19	<input type="checkbox"/>	13	23
20	<input type="checkbox"/>	11	32

2.4. Cuarta prueba

I. ENUNCIADOS

1. ¿Qué porcentaje de prima OPR corresponde a un vendedor cuando coinciden su objetivo, sus previsiones y sus ventas efectivas?

- ☐ 60.
- ☐ 120.
- ☐ 180.
- ☐ Ninguna de las otras.

2. Hasta llegar al consumidor, cierto producto sigue un canal formado por cinco intermediarios, cada uno de los cuales lo vende a un precio resultante de aplicar un 12 por 100 de margen sobre el precio en que lo vende. ¿Qué precio deberá fijar el fabricante al primer intermediario para que el precio pagado por el consumidor sea de 200 u.m.?

- ☐ 113,49 u.m.
- ☐ 152 u.m.
- ☐ 105,55 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

3. Una empresa tiene un coste fijo anual de 500.000 u.m. y un coste variable unitario de 20 u.m. A ritmo normal produce 20.000 u.f. anuales. ¿Cuál es su precio mínimo?

- ☐ 45 u.m.
- ☐ 15 u.m.
- ☐ Hacen falta más datos.
- ☐ Ninguna de las otras.

4. Según los consumidores consultados, la marca de refrescos A tiene 3 puntos en burbujas y 8 en dulzor, en tanto que la posición ideal es 5 en burbujas y 6 en dulzor. ¿Cuál es la distancia de la marca A a la posición ideal?

- ☐ 1,41.
- ☐ 4.
- ☐ 2.
- ☐ Ninguna de las otras.

5. En una empresa, la productividad global ha subido un 20 por 100 y, según el índice de Laspeyres, su producción se ha reducido un 20 por 100. ¿En qué porcentaje se ha modificado la cantidad de factores que ha utilizado, según ese índice?

- ☐ -100.
- ☐ -40 por 100.

- ☐ -50 por 100.
- ☐ -33,33 por 100.

6. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

7. La distribución por edades de las 10.000 personas encuestadas y de las 1.000 que resultaron consumidoras del producto en cuestión es la siguiente:

Clase social	Muestra	Consumidores
J	3.000	250
A	5.000	600
N	2.000	150

¿Cuánto vale el coeficiente de discriminación del método de la χ^2 , S , en la mejor segmentación posible?

- ☐ 15,62.
- ☐ 40.
- ☐ 51,90.
- ☐ Ninguna de las otras.

8. La matriz de transición, que se supone estacionaria, de cierto mercado en el que compiten tres marcas de un producto que se adquiere semanalmente es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

¿Hacia qué cuota tiende la marca 1 a largo plazo?

- ☐ 0,4333.
- ☐ 0,2666.
- ☐ 0,3.
- ☐ Ninguna de las otras.

9. Marque (o no marque, si allí no lo hizo) lo mismo que en la pregunta anterior.

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

10. Las ventas mensuales de una empresa siguen una distribución de probabilidad normal con una media igual a 1.000 u.f. y una desviación típica igual a 60 u.f. ¿Qué stock de seguridad ha de mantener esta empresa para que la probabilidad de que se produzca una ruptura de stocks no supere el 10 por 100? (Información adicional: Siendo ξ la variable $N(0, 1)$: $P(0 < \xi < 1,29) = 0,4$.)

- ☐ 177,4.
- ☐ 1.077,4.
- ☐ 1.137,4.
- ☐ Ninguna de las otras.

11. El coste variable unitario de producción y distribución de un producto es de 1.000 u.m., y la ecuación de su demanda es

$$q = 1.000p^{-1,25}A^{0,25}F^{0,15}$$

Si el objetivo es maximizar el beneficio:

- ☐ El precio (p) óptimo es 7.000 u.m.
- ☐ El nivel óptimo de promoción (A) es 144,15 u.m.
- ☐ El nivel óptimo de la fuerza de ventas (F) es 103,87.
- ☐ Varias de las otras.

12. El coste total anual de la fabricación de un producto es de 500 millones de u.m. y se fabrican 100.000 u.f. al año. ¿Cuánto vale su precio mínimo?

- ☐ 200.
- ☐ 5.000.
- ☐ Faltan datos.
- ☐ Ninguna de las otras.

13. Si a una persona que tarda 5 horas en realizar la tarea se le pagase con el sistema Rowan, el incentivo horario valdría 6.250 u.m. y conseguiría la máxi-

ma prima realizando la tarea en 4 horas. ¿Cuánto cobra por tarea realizada si trabaja bajo el sistema de destajo?

- ☐ 80.000.
- ☐ 20.000.
- ☐ 5.000.
- ☐ Ninguna de las otras.

14. En la siguiente tabla se recogen los valores de retiro (V_t) y el valor de los flujos restantes (VAR_t) de un equipo en los cuatro años de su duración técnica. ¿Cuál es su duración óptima si el tipo de descuento es el 10 por 100?

Años (t)	V_t	VAR_t
1	150	205,035
2	95	135,535
3	60	59,090
4	0	0

- ☐ Un año.
- ☐ Dos años.
- ☐ Tres años.
- ☐ Cuatro años.

15. Una empresa tiene un coste variable unitario de 300 u.m. y un coste fijo anual de 1.200.000 u.m. Su volumen anual de ventas, a ritmo de trabajo normal, es de 20.000 u.f. ¿Qué porcentaje mínimo de margen bruto unitario, sobre precio de venta, ha de establecer para que se cubran sus costes fijos?

- ☐ 14 por 100.
- ☐ 20 por 100.
- ☐ 25 por 100.
- ☐ Ninguna de las otras.

16. La distribución por clases sociales de las 10.000 personas encuestadas y de las 1.000 que resultaron consumidoras del producto en cuestión es la siguiente:

Clase social	Muestra	Consumidores
A	2.500	250
M	4.000	600
B	3.500	150

¿Cuánto vale el coeficiente de discriminación del análisis de la varianza, D_{1-2} , en la mejor segmentación posible?

- ☐ 16,67.
- ☐ 0.
- ☐ 17,58.
- ☐ Ninguna de las otras.

17. Una empresa que tiene un presupuesto mercadotécnico de 20 u.m. vende su producto en dos mercados, A y B. Las relaciones existentes entre las cantidades demandadas (q) y los presupuestos mercadotécnicos de los dos territorios (E) son:

$$q_A = 50 + 10E_A - 0,25(E_A)^2$$

$$q_B = 60 + 9E_B - 0,2(E_B)^2$$

¿Cuál es el presupuesto óptimo del territorio B?

- ☐ 22,5 u.m.
- ☐ 10 u.m.
- ☐ 6 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

18. Una empresa tenía previsto vender el pasado año 5.000.000 de u.f. de su producto, suponiendo que las ventas totales de la industria fueran 40.000.000 de u.f. En ese caso habría obtenido un beneficio bruto de 10.000.000.000 de u.m. En realidad, las ventas totales de toda la industria han sido de 35.000.000 de u.f. ¿Cuánto vale la desviación en el tamaño del mercado?

- ☐ -156.250.000.
- ☐ -175.050.000.
- ☐ -136.450.000.
- ☐ Ninguna de las otras.

19. Una empresa se dedica a comprar en el extranjero, por un precio unitario de 812.500 u.m., un producto que vende en España. Cada año compra y vende 400 u.f. del producto. El coste de gestión de cada pedido es de 781.250 u.m. y el cos-

te de tener una unidad de producto almacenada durante un año es de 168.750 u.m., excluyendo los costes financieros. El coste de oportunidad del capital es el 10 por 100. ¿Cuántos pedidos debe realizar al año? Tómese el año comercial.

- ☐ 50.
- ☐ 25.
- ☐ 7,2.
- ☐ Ninguna de las otras.

20. Una persona tarda 3 horas en realizar una tarea cuyo tiempo previsto es de 4 horas. El salario del tiempo de trabajo efectivo es de 2.500 u.m. por hora. ¿Qué remuneración percibe esta persona por tarea realizada según el sistema Rowan?

- ☐ 10.000 u.m.
- ☐ 6.500 u.m.
- ☐ 9.375 u.m.
- ☐ Ninguna de las otras.

II. RESPUESTAS CORRECTAS

Pregunta	Respuesta correcta	Capítulo	Número de problema
1	<input type="radio"/>	14	11
2	<input type="radio"/>	13	29
3	<input type="radio"/>	13	16
4	<input type="radio"/>	13	2
5	<input type="radio"/>	7	13
6	<input type="radio"/>	—	—
7	<input type="radio"/>	12	8
8	<input type="radio"/>	11	39
9	<input type="radio"/>	—	—
10	<input type="radio"/>	9	5
11	<input type="radio"/>	11	9
12	<input type="radio"/>	13	17
13	<input type="radio"/>	10	10
14	<input type="radio"/>	7	20
15	<input type="radio"/>	13	20
16	<input type="radio"/>	12	11
17	<input type="radio"/>	11	15
18	<input type="radio"/>	11	29
19	<input type="radio"/>	9	4
20	<input type="radio"/>	10	8



Apéndice de tablas estadísticas

Percentiles de la distribución $\chi^2/g.l.$

g.l.	0.05	0.1	0.5	1.0	2.5	5.0	10	20	30	40	50	60
1	0.0 ³ 39	0.0 ⁵ 157	0.0 ⁶ 39	0.0 ³ 16	0.0 ³ 98	0.0 ³ 39	0.016	0.064	0.148	0.275	0.455	0.708
2	0.001	0.001	0.005	0.010	0.025	0.052	0.106	0.223	0.356	0.511	0.693	0.916
3	0.005	0.008	0.024	0.038	0.072	0.117	0.195	0.335	0.475	0.623	0.789	0.982
4	0.016	0.023	0.052	0.074	0.121	0.178	0.266	0.412	0.549	0.688	0.839	1.011
5	0.032	0.042	0.082	0.111	0.166	0.229	0.322	0.469	0.600	0.731	0.870	1.03
6	0.050	0.064	0.113	0.145	0.206	0.272	0.367	0.512	0.638	0.762	0.891	1.04
7	0.069	0.085	0.141	0.177	0.241	0.310	0.405	0.546	0.667	0.785	0.907	1.04
8	0.089	0.107	0.168	0.206	0.272	0.342	0.436	0.574	0.691	0.803	0.918	1.04
9	0.108	0.128	0.193	0.232	0.300	0.369	0.463	0.598	0.710	0.817	0.927	1.05
10	0.126	0.148	0.216	0.256	0.325	0.394	0.487	0.618	0.727	0.830	0.934	1.05
11	0.144	0.167	0.237	0.278	0.347	0.416	0.507	0.635	0.741	0.840	0.940	1.05
12	0.161	0.184	0.256	0.298	0.367	0.436	0.525	0.651	0.753	0.848	0.945	1.05
13	0.177	0.201	0.274	0.316	0.385	0.453	0.542	0.664	0.764	0.856	0.949	1.05
14	0.193	0.217	0.291	0.333	0.402	0.469	0.556	0.676	0.773	0.863	0.953	1.05
15	0.207	0.232	0.307	0.349	0.418	0.484	0.570	0.687	0.781	0.869	0.956	1.05
16	0.221	0.246	0.321	0.363	0.432	0.498	0.582	0.697	0.789	0.874	0.959	1.05
17	0.234	0.260	0.335	0.377	0.445	0.510	0.593	0.706	0.796	0.879	0.961	1.05
18	0.247	0.272	0.348	0.390	0.457	0.522	0.604	0.714	0.802	0.883	0.963	1.05
19	0.258	0.285	0.360	0.402	0.469	0.532	0.613	0.722	0.808	0.887	0.965	1.05
20	0.270	0.296	0.372	0.413	0.480	0.543	0.622	0.729	0.813	0.890	0.967	1.05
22	0.291	0.317	0.393	0.434	0.499	0.561	0.638	0.742	0.823	0.897	0.970	1.05
24	0.310	0.337	0.412	0.452	0.517	0.577	0.652	0.753	0.831	0.902	0.972	1.05
26	0.328	0.355	0.429	0.469	0.532	0.592	0.665	0.762	0.838	0.907	0.974	1.05
28	0.345	0.371	0.445	0.484	0.547	0.605	0.676	0.771	0.845	0.911	0.976	1.04
30	0.360	0.386	0.460	0.498	0.560	0.616	0.687	0.779	0.850	0.915	0.978	1.04
35	0.394	0.420	0.491	0.529	0.588	0.642	0.708	0.795	0.862	0.922	0.981	1.04
40	0.423	0.448	0.518	0.554	0.611	0.663	0.726	0.809	0.872	0.928	0.983	1.04
45	0.448	0.472	0.540	0.576	0.630	0.680	0.741	0.820	0.880	0.933	0.985	1.04
50	0.469	0.494	0.560	0.594	0.647	0.695	0.754	0.829	0.886	0.937	0.987	1.04
55	0.488	0.512	0.577	0.610	0.662	0.708	0.765	0.837	0.892	0.941	0.988	1.04
60	0.506	0.529	0.592	0.625	0.675	0.720	0.774	0.844	0.897	0.944	0.989	1.04
70	0.535	0.558	0.618	0.649	0.697	0.739	0.790	0.856	0.905	0.949	0.990	1.03
80	0.560	0.582	0.640	0.669	0.714	0.755	0.803	0.865	0.911	0.952	0.992	1.03
90	0.581	0.602	0.658	0.686	0.729	0.768	0.814	0.873	0.917	0.955	0.993	1.03
100	0.599	0.619	0.673	0.701	0.742	0.779	0.824	0.879	0.921	0.958	0.993	1.03
120	0.629	0.648	0.699	0.724	0.763	0.798	0.839	0.890	0.929	0.962	0.994	1.03
140	0.653	0.671	0.719	0.743	0.780	0.812	0.850	0.898	0.934	0.965	0.995	1.03
160	0.673	0.690	0.736	0.758	0.793	0.824	0.860	0.905	0.939	0.968	0.996	1.02
180	0.689	0.706	0.749	0.771	0.804	0.833	0.868	0.910	0.942	0.970	0.996	1.02
200	0.703	0.719	0.761	0.782	0.814	0.841	0.874	0.915	0.945	0.972	0.997	1.02
250	0.732	0.746	0.785	0.804	0.832	0.858	0.887	0.924	0.951	0.975	0.997	1.02
300	0.753	0.767	0.802	0.820	0.846	0.870	0.897	0.931	0.956	0.977	0.998	1.02
350	0.770	0.783	0.816	0.833	0.857	0.879	0.904	0.936	0.959	0.979	0.998	1.02
400	0.784	0.796	0.827	0.843	0.866	0.887	0.911	0.940	0.962	0.981	0.998	1.02
450	0.795	0.807	0.837	0.852	0.874	0.893	0.916	0.944	0.964	0.982	0.999	1.02
500	0.805	0.816	0.845	0.859	0.880	0.898	0.920	0.946	0.966	0.983	0.999	1.01
750	0.839	0.848	0.872	0.884	0.901	0.917	0.934	0.956	0.972	0.986	0.999	1.01
1.000	0.859	0.868	0.889	0.899	0.914	0.928	0.943	0.962	0.976	0.988	0.999	1.01
5.000	0.936	0.939	0.949	0.954	0.961	0.967	0.974	0.983	0.989	0.995	1.00	1.00
∞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

0.0³16 debe leerse como 0.00016, etc.

Distribución F, nivel de significación del 1 por 100

Grados de libertad para el numerador

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4.052	5.000	5.403	5.625	5.764	5.859	5.928	5.982	6.023	6.056	6.106	6.157	6.209	6.235	6.261	6.287	6.313	6.339	6.366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Grados de libertad para el denominador

Distribución F, nivel de significación del 1 por 100

Grados de libertad para el numerador

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
Grados de libertad para el denominador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.04	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.68
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z

$$P(0 \leq \xi \leq z)$$

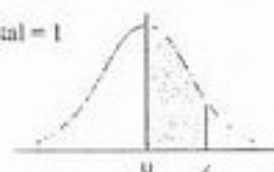
Ejemplos

$$P(0 \leq \xi \leq 1,23) = 0,3907$$

$$P(\xi \geq 1,23) = 0,5 - 0,3907$$

$$P(-1,23 \leq \xi \leq 1,23) = 2 \times 0,3907$$

Area total = 1



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Este manual constituye un curso práctico, claro y riguroso de introducción a la administración y dirección de empresas. La Economía de la Empresa es una disciplina esencialmente operativa que no puede limitarse a contenidos abstractos. Tanto su docencia como su estudio requieren planteamientos prácticos y resolución de casos concretos que complementen la exposición conceptual. Este libro contiene más de 370 problemas resueltos con los que se contribuye a la satisfacción de esa necesidad de acercamiento a la praxis. Los conceptos se plantean y resuelven en el mismo problema en el que surgen y, a continuación, se incluye otro ejercicio semejante, sin explicaciones, para que el lector pueda comprobar, resolviéndolo por sí mismo, su nivel de comprensión. Por su carácter práctico y aplicado, el manual se adapta a la metodología docente de la educación a distancia, pudiéndose utilizar sin ser necesario acudir a otras fuentes.

Está escrito especialmente para los estudiantes de Introducción a la Economía de la Empresa del primer ciclo de la licenciatura de Administración y Dirección de Empresas o de Ciencias Empresariales. También es de gran utilidad para cualquier profesional interesado en el complejo mundo de la dirección de empresas.

Eduardo Pérez Gorostegui, catedrático de Organización de Empresas de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, es profesor de la asignatura de Introducción a la Economía de la Empresa. Es, además, doctor en Derecho, miembro del ROAC y autor de multitud de artículos especializados y libros sobre temas empresariales.

Eduardo Pérez Gorostegui

Prácticas de administración de empresas

ISBN 84-368-1239-5



658
PER
pra