

FÍSICA
Ingeniería Informática de Gestión.

Raúl Sánchez Fernández.

Departamento de Física
Universidad Carlos III de Madrid

Despacho 4.0C07.

e-mail: rsanchez@fis.uc3m.es

Índice General

1	INTRODUCCION AL CALCULO VECTORIAL	6
1.1	MAGNITUDES VECTORIALES Y ESCALARES. CAMPOS.	6
1.2	REPRESENTACIÓN DE VECTORES	8
1.2.1	PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR	10
1.3	SUMA DE VECTORES	11
1.4	PRODUCTO ESCALAR	12
1.5	PRODUCTO VECTORIAL	14
1.6	PRODUCTO MIXTO	16
1.7	DERIVADA DE UN VECTOR	18
1.8	INTEGRAL DE UN VECTOR	18
2	INTRODUCCION AL CALCULO DIFERENCIAL	19
2.1	DEFINICIÓN DE DERIVADA. SENTIDO FÍSICO	19
2.2	INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA DE LA DERIVADA	20
2.3	DERIVADAS MÁS COMUNES	22
3	INTRODUCCION AL CALCULO INTEGRAL	24
3.1	DEFINICIÓN DE INTEGRAL	24
3.2	PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES	25
3.3	INTEGRALES MÁS COMUNES	25
3.4	INTEGRALES DEFINIDAS. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA INTEGRAL . . .	26
3.5	PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS	29
4	LA LEY DE COULOMB	30
4.1	LA CARGA ELÉCTRICA.	30
4.2	LA LEY DE COULOMB.	32
4.3	EL CAMPO ELÉCTRICO	33
4.3.1	Líneas de fuerza	36

4.4	PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN	36
4.5	DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA: CONCEPTO DE DENSIDAD DE CARGA	38
4.6	CAMPOS CREADOS POR DISTRIBUCIONES DE CARGA	39
5	Teorema de Gauss	41
5.1	FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL	41
5.2	CÁLCULO DE FLUJOS EN SITUACIONES SENCILLAS.	44
5.2.1	Campo constante	44
5.2.2	Campo paralelo a \vec{dS} sobre toda la superficie	44
5.3	TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO	45
5.3.1	Ejemplo: simetría cilíndrica: Campo creado por un hilo cargado infinito con densidad de carga lineal uniforme λ	47
5.3.2	Ejemplo: simetría esférica: Campo creado por una esfera mazica cargada con densidad de carga de volumen ρ	47
6	EL POTENCIAL ELECTRICO	50
6.1	ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA	50
6.2	POTENCIAL ELÉCTRICO	52
6.3	POTENCIAL ELÉCTRICO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA	53
6.4	CÁLCULO DE POTENCIALES ELÉCTRICOS	54
6.4.1	Problemas con simetría cilíndrica o esférica	54
6.4.2	Problemas con simetría de traslación	55
7	ENERGÍA ELECTROSTÁTICA	58
7.1	CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA	58
7.1.1	Energía cinética	58
7.1.2	Concepto de trabajo	58
7.1.3	Fuerzas conservativas	61
7.1.4	Energía potencial	62
7.1.5	Conservación de la Energía	63
7.1.6	Principio de superposición para la energía potencial	64
7.2	ENERGÍA ELECTROSTÁTICA	65
7.2.1	Simil mecánico: almacenamiento de energía en un campo gravitatorio	65
7.2.2	Energía electrostática	66
7.2.3	Generalización a un sistema de cargas	69

8 MEDIOS CONDUCTORES	72
8.1 PROPIEDADES GENERALES	72
8.2 PROCESOS DE CARGA EN UN CONDUCTOR	75
8.3 Cavidades	77
8.4 BLINDAJE ELÉCTRICO	79
8.5 EFECTO PUNTA	81
8.6 CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR	81
8.7 ENERGÍA ALMACENADA EN UN CONDUCTOR	83
9 CONDENSADORES	84
9.1 EL CONDENSADOR PLANO-PARALELO	84
9.2 ASOCIACIONES DE CONDENSADORES	87
9.2.1 Asociación en paralelo	87
9.2.2 Asociación en serie	88
9.3 EL CONDENSADOR CILÍNDRICO	89
9.4 EL CONDENSADOR ESFÉRICO	90
10 DIELECTRICOS	93
10.1 EL DIPOLO ELÉCTRICO	93
10.2 MODELO MICROSCÓPICO SIMPLIFICADO	94
10.3 DIELECTRICOS Y CONDENSADORES	96
10.4 CAMPO DE RUPTURA	99
10.5 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	100
11 CORRIENTE ELECTRICA	103
11.1 INTENSIDAD DE CORRIENTE, I	103
11.1.1 Densidad de corriente, \vec{J}	104
11.2 LEY DE OHM	106
11.3 LEY DE JOULE: POTENCIA DISIPADA EN UNA RESISTENCIA	107
11.4 CIRCUITOS	108
11.4.1 Generadores	108
11.5 RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA.	111
11.5.1 Leyes de Kirchoff	112
12 EL CAMPO MAGNÉTICO	116
12.1 FUENTES DEL CAMPO MAGNÉTICO:	
CORRIENTES E IMANES.	116
12.2 EL VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA, \vec{B}	117

12.3 FUERZA DE LORENTZ	119
12.4 CAMPO CREADO POR UN HILO DE CORRIENTE	120
12.5 LEY DE AMPÈRE	123
12.6 FUERZA SOBRE UN HILO DE CORRIENTE	124
12.6.1 Campo magnético en el centro de una espira	125
12.7 IMANES	126
12.8 LEY DE FARADAY	128

Capítulo 1

INTRODUCCION AL CALCULO VECTORIAL

1.1 MAGNITUDES VECTORIALES Y ESCALARES. CAMPOS.



Figura 1.1: Ejemplo de campo vectorial: campo magnético creado por un imán.

Las magnitudes físicas que pueden expresarse (en las correspondientes unidades) mediante un número real se llaman **escalares**; aquellas que necesitan ser expresadas mediante un módulo (número real), dirección y sentido, se llaman **vectoriales**. Por ejemplo, la temperatura (T), la masa (m) o la energía (E) son magnitudes escalares; sin embargo, la velocidad (\vec{v}), la aceleración (\vec{a}) o la fuerza (\vec{F}) son magnitudes vectoriales.

Un **campo** es una función que determina en cada punto del espacio el valor de una magnitud física. Si dicha magnitud es escalar, el campo se dice **escalar**; si es vectorial, tendremos un **campo vectorial**. Existen dos conceptos estrechamente relacionados a cada uno de estos campos. A los campos escalares se les asocian **superficies equipotenciales** o de nivel.

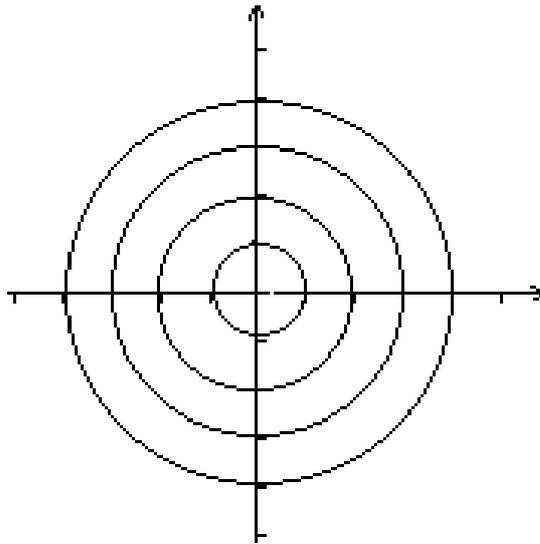


Figura 1.2: Superficies equipotenciales asociadas a un campo escalar.

- **Superficie de nivel o equipotencial**

Se llama superficie equipotencial al conjunto de todos los puntos en los que el campo escalar tiene el mismo valor. En dos dimensiones, serán curvas, y en tres dimensiones, superficies.

Ejemplo: *Sea la función escalar en dos dimensiones:*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (1.1)$$

Las superficies de nivel vienen definidas por el conjunto de puntos (x, y) que verifican:

$$x^2 + y^2 = C \quad (1.2)$$

para algun valor de $C > 0$. Fijarse que cada superficie de nivel corresponde a una circunferencia de radio \sqrt{C} , como se muestra en la figura.

- **Línea de campo o de fuerza**

En los campos vectoriales se utiliza lo que se llama **línea de campo o de fuerza**. Estas líneas tienen la siguiente propiedad: el vector asignado por el campo vectorial a cada punto es **tangente** a la línea de fuerza que pase por ese punto:

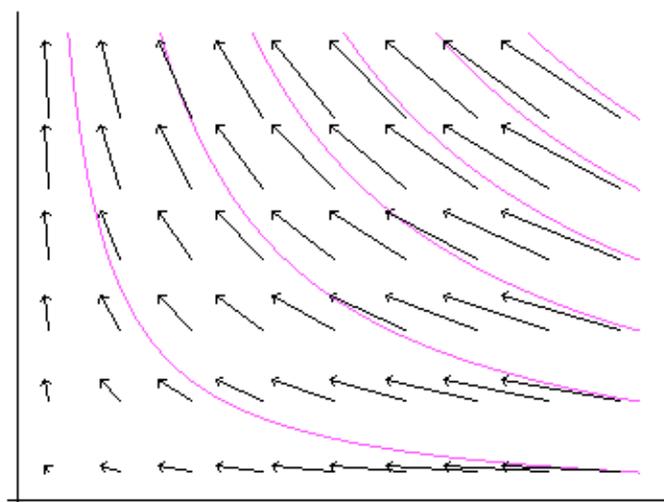


Figura 1.3: Líneas de campo asociadas a un campo vectorial.

1.2 REPRESENTACIÓN DE VECTORES

Para representar un vector, es necesario especificar su **módulo**, su **dirección** y su **sentido**. Por módulo se entiende la longitud del vector; por dirección, la recta sobre la que se apoya y por sentido, hacia donde apunta sobre dicha recta. Los vectores se refieren usualmente a un sistema de coordenadas en el espacio tridimensional. Dado un sistema de coordenadas cartesianas orientado a derechas (es decir, se verifica que el sentido de avance del sacacorchos al girar desde el eje X al eje Y es la dirección positiva del eje Z), tal como el de la figura 1, y fijada una unidad de medida, a cada eje se le puede asignar un **vector unitario** (es decir, de módulo unidad). Estos vectores, correspondientes a cada

eje de coordenadas se designan por:

$$\vec{i} \equiv (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad y \quad \vec{k} = (0, 0, 1). \quad (1.3)$$

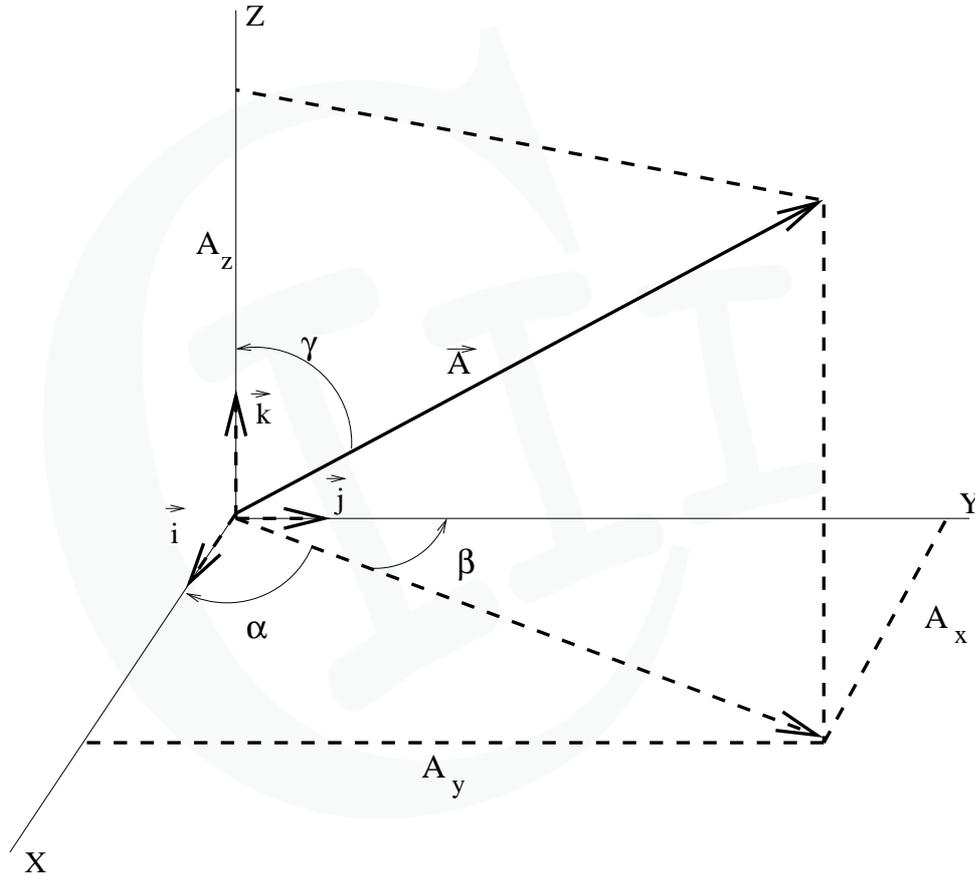


Figura 1.4: Componentes de un vector.

Un vector arbitrario, \vec{A} , vendrá caracterizado, en dicho sistema de coordenadas, por tres números (A_x, A_y, A_z) , correspondientes a las longitudes de las proyecciones de \vec{A} sobre cada uno de los vectores unitarios, de forma que podemos escribir:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (1.4)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 \vec{i} &= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (1, 0, 0) \\
 \vec{j} &= 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} = (0, 1, 0) \\
 \vec{A} &= 3\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} = (3, 1, 2)
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

• Módulo de un vector

El **módulo ó longitud** del vector puede obtenerse aplicando el Teorema de Pitágoras, de forma que:

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.6}$$

Ejemplo: En el caso del vector \vec{i} , $|\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$, como corresponde a un vector unitario.

• Cosenos directores

Se llaman **cosenos directores** del vector \vec{A} a los cosenos de los ángulos que forma con cada uno de los ejes coordenados:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|A|} \quad \cos\beta = \frac{A_y}{|A|} \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|A|} \tag{1.7}$$

Ejemplo: En el caso del vector unitario $\vec{i} = (1, 0, 0)$:

$$\cos\alpha = \frac{i_x}{|i|} = 1; \quad \cos\beta = \frac{i_y}{|i|} = 0; \quad \cos\gamma = \frac{i_z}{|i|} = 0 \tag{1.8}$$

como era de esperar, ya que \vec{i} forma un ángulo de 90 grados tanto con el eje y como con el eje z y es paralelo al eje x .

1.2.1 PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Sea λ un escalar y \vec{v} un vector expresado por sus componentes. Entonces:

$$\lambda\vec{v} = (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z) \tag{1.9}$$

donde $\lambda\vec{v}$ tiene la misma dirección que \vec{v} ; el mismo sentido si $\lambda > 0$ o sentido contrario si $\lambda < 0$; finalmente, el módulo se alarga si $|\lambda| > 1$ y se acorta si $|\lambda| < 1$

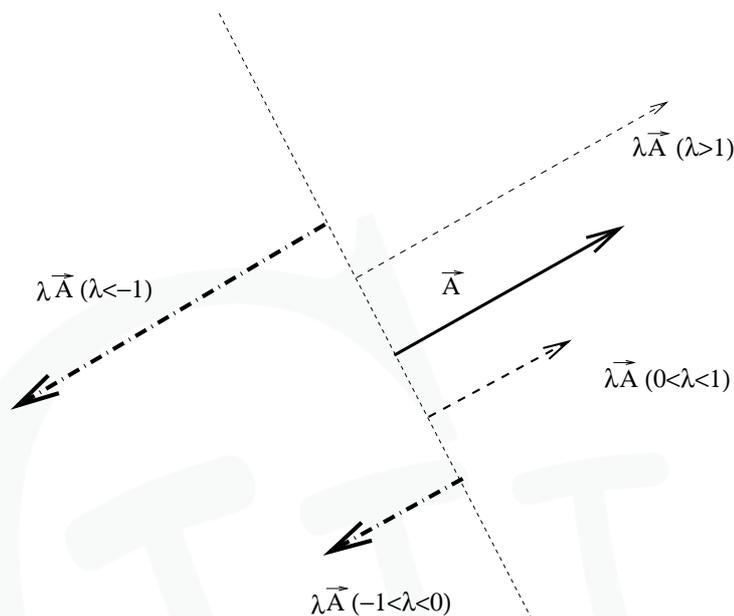


Figura 1.5: Producto de un vector por un escalar.

1.3 SUMA DE VECTORES

•Regla del paralelogramo

Los vectores pueden sumarse o restarse gráficamente usando la regla del paralelogramo, como se muestra en la figura 2.

•Suma por componentes

Si tenemos dos vectores \vec{A} y \vec{B} expresados en coordenadas:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \\ \vec{B} &= B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\end{aligned}\tag{1.10}$$

el vector suma será:

$$\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}\tag{1.11}$$

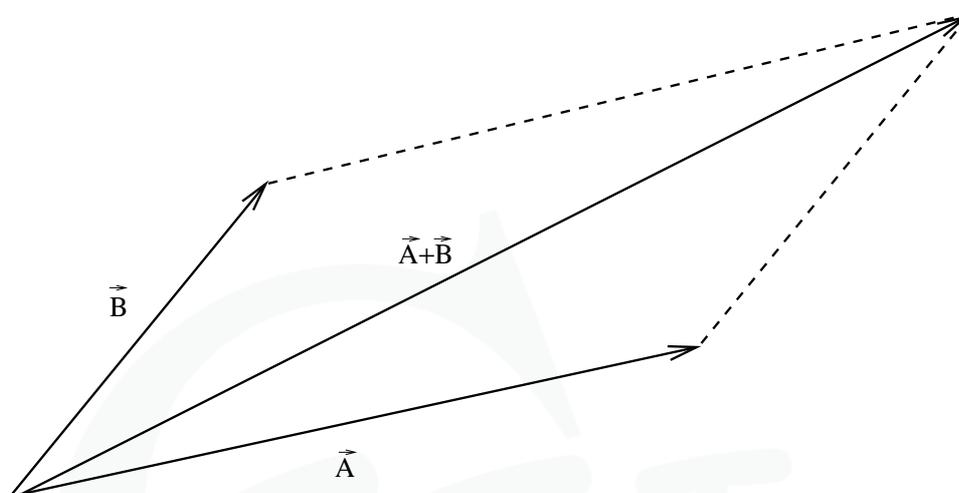


Figura 1.6: Regla del paralelogramo.

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{A} = (3, -5, 6)$ y $\vec{B} = (2, 3, -1)$, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (3, -5, 6) + (2, 3, -1) = (5, -2, 5) \\ \vec{A} - \vec{B} &= (3, -5, 6) - (2, 3, -1) = (1, -8, 7)\end{aligned}\tag{1.12}$$

1.4 PRODUCTO ESCALAR

Dados los vectores \vec{A} y \vec{B} , se define su producto escalar como el escalar que resulta de multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos \theta\tag{1.13}$$

•Propiedades

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ si $\vec{A} \perp \vec{B}$
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

- $(\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \lambda(\vec{A} \cdot \vec{B})$, λ escalar
- Ángulo entre dos vectores: $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$

• **Expresión en coordenadas:**

Puesto que los vectores \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} son unitarios y perpendiculares entre sí, es inmediato que:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Por lo tanto, si tenemos dos vectores:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \\ \vec{B} &= B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \end{aligned} \quad (1.15)$$

su producto escalar será:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + A_y B_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + A_z B_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.16)$$

Ejemplo:

Si $\vec{A} = (0, 2, 3)$ y $\vec{B} = (1, 0, 2)$, entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6 \quad (1.17)$$

• **Módulo de un vector:**

Es posible obtener el módulo de un vector calculando su producto escalar consigo mismo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.18)$$

• **Interpretación del producto escalar: proyección sobre una dirección**

Si escogemos el vector \vec{B} en la definición como uno de los vectores \vec{i} , \vec{j} ó \vec{k} , tendremos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = |\vec{A}| |\vec{i}| \cos \theta = A \cos \theta \quad (1.19)$$

donde θ es el ángulo que forma \vec{A} con el eje x . Por lo tanto, el producto escalar con \vec{i} nos da la **proyección** sobre el eje x del vector A . En general para hallar la proyección de un

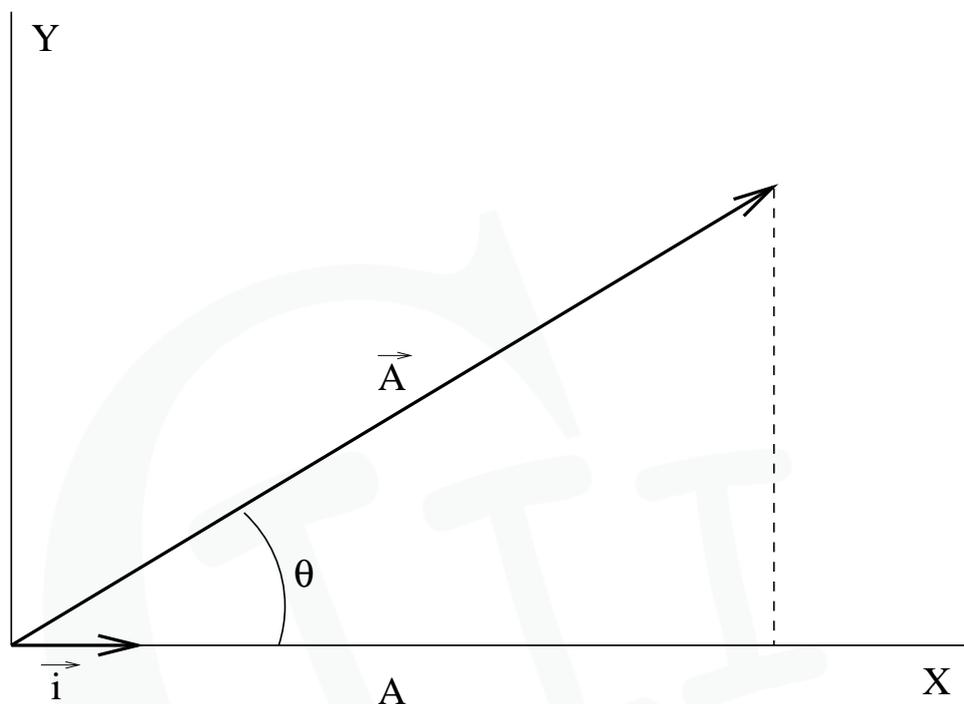


Figura 1.7: Proyección de un vector.

vector sobre una dirección dada, basta **multiplicarlo escalarmente por un unitario \vec{u} en dicha dirección.**

•**Interpretación del producto escalar: coordenadas en un sistema de ejes**

Si expresamos el producto anterior en coordenadas:

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot \vec{i} = A_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) = A_x \quad (1.20)$$

de forma que para hallar las coordenadas de un vector en un sistema de ejes arbitrario, basta con calcular el producto escalar de dicho vector **con cada uno de los vectores unitarios que definen el sistema de ejes.**

1.5 PRODUCTO VECTORIAL

Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , se define su producto vectorial, representado como $\vec{A} \times \vec{B}$, como el vector que tiene como módulo el producto de ambos módulos por el seno del ángulo que

forman, como dirección la de la normal al plano determinado por ambos vectores y como sentido el de avance del sacacorchos al girar desde \vec{A} a \vec{B} barriendo el ángulo formado por ambos.

• **Propiedades:**

- $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$
- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$
- $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ si $\vec{A} \parallel \vec{B}$

• **Expresión en coordenadas:**

Es fácil comprobar que:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad (1.21)$$

puesto que un vector siempre es paralelo a sí mismo, y que

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (1.22)$$

Expresando \vec{A} y \vec{B} en coordenadas respecto a \vec{i}, \vec{j} y \vec{k} , y teniendo en cuenta las relaciones anteriores, el producto vectorial se expresa:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (1.23)$$

que puede escribirse formalmente a través del siguiente determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.24)$$

• **Interpretación: superficie del paralelogramo**

Es fácil comprobar que el módulo del producto vectorial de dos vectores \vec{A} y \vec{B} es igual al área del paralelogramo determinado por los mismos, S . Es por ello que **cualquier superficie plana** puede representarse por un vector normal a la misma y con módulo igual al área de dicha superficie. El sentido de este vector superficie se asigna tras escoger

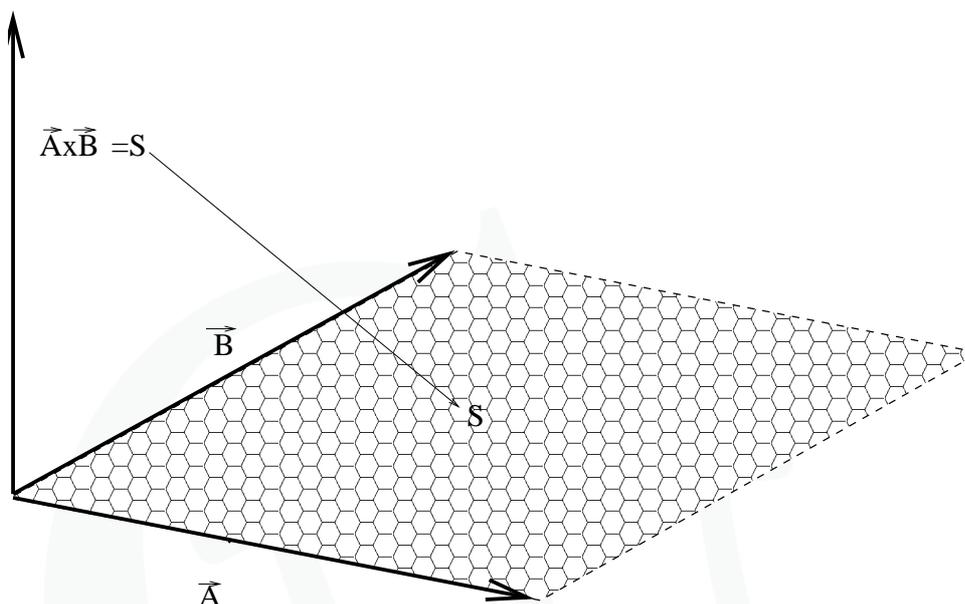


Figura 1.8: Producto vectorial de dos vectores.

un sentido de recorrido o de giro para el contorno que rodea a la superficie; precisamente el sentido del vector superficie es el de avance del sacacorchos al girar según el sentido asignado para recorrer el contorno.

Si la superficie no es plana, ya no tiene sentido la anterior definición, salvo localmente; es decir, en un punto cualquiera de una superficie no plana se puede considerar una superficie elemental y definir el vector elemento de superficie en dicho punto, \vec{ds} . Cuando la superficie es cerrada, el vector \vec{ds} apunta hacia afuera de la superficie.

1.6 PRODUCTO MIXTO

Dados tres vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} expresados en coordenadas, se define su **producto mixto** como:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.25)$$

Nótese que el producto mixto es nulo si los tres vectores son coplanarios.

•Interpretación: volumen

Es igual al volumen del paralelepípedo formado por \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

- **Doble Producto Vectorial**

Dados tres vectores \vec{v} , \vec{w} y \vec{u} expresados en coordenadas, se define su **doble producto vectorial** como:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (1.26)$$

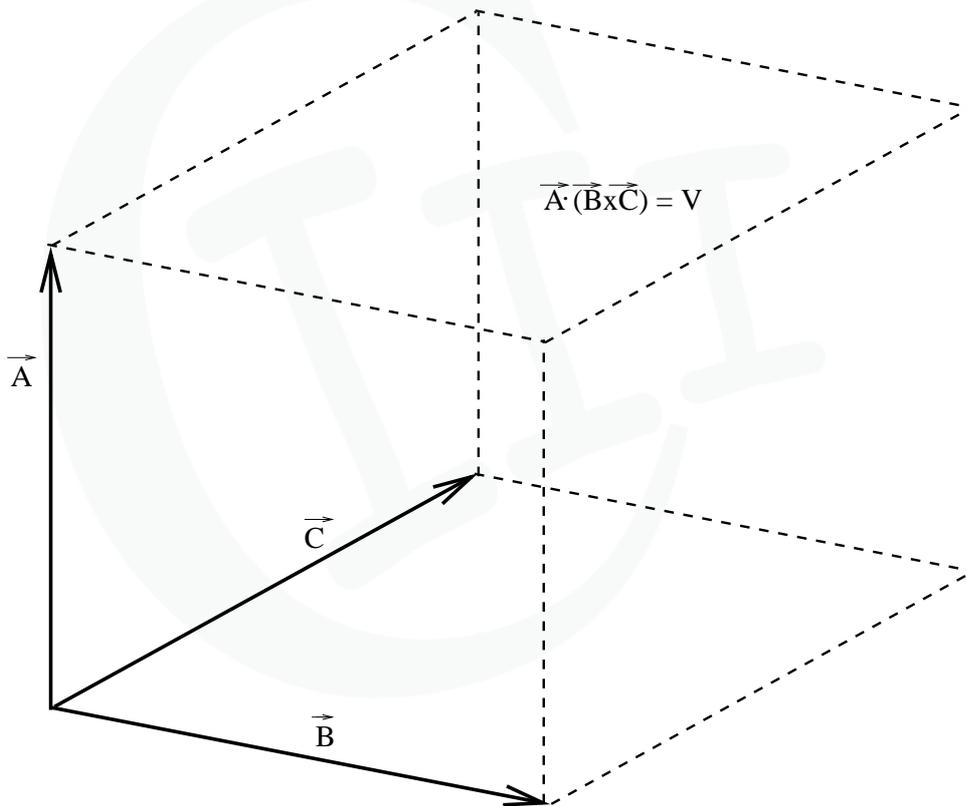


Figura 1.9: Producto mixto de tres vectores.

1.7 DERIVADA DE UN VECTOR

Dado un vector $\vec{v}(t)$ función de un parámetro t se define su derivada como:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.27)$$

•Propiedades

- $\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$
- $\frac{d}{dt} (\lambda(t)\vec{a}(t)) = \lambda(t)\frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \vec{a}(t)\frac{d\lambda(t)}{dt}$
- Expresión en coordenadas: $\frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}$
- Derivada del producto escalar: $\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$
- Derivada del producto vectorial: $\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$

1.8 INTEGRAL DE UN VECTOR

La integral de un vector \vec{v} es igual a un nuevo vector \vec{w} que tiene por componentes la integral de las componentes de \vec{v} :

$$\vec{w} = \int \vec{v}(t) dt \quad (1.28)$$

donde las componentes de \vec{w} son:

$$w_x = \int v_x(t) dt; \quad w_y = \int v_y(t) dt; \quad w_z = \int v_z(t) dt \quad (1.29)$$

•Propiedades

- $\int (\vec{v} \pm \vec{w}) dt = \int \vec{v} dt \pm \int \vec{w} dt$
- $\int \lambda \vec{v} dt = \lambda \int \vec{v} dt$, con λ constante

Capítulo 2

INTRODUCCION AL CALCULO DIFERENCIAL

2.1 DEFINICIÓN DE DERIVADA. SENTIDO FÍSICO

El cálculo diferencial se introduce en la Física por la necesidad de cuantificar el cambio de las cosas. La velocidad de un vehículo no permanece constante en el tiempo, ni su posición tampoco. La temperatura de un termómetro cambia. La presión en un neumático también. Además, no es solo importante el hecho del cambio en sí, sino también si este cambio es rápido o lento. Es decir, lo que nos importa cuantificar es el cambio en el tiempo de una determinada magnitud.

- **Ritmo de cambio promedio de una función**

Como primera aproximación a nuestro problema, podemos utilizar lo que se llama **ritmo de cambio promedio**. Supongamos que queremos cuantificar cuanto ha cambiado la temperatura de una habitación entre las 08:00 y las 20:00. Sabiendo que la temperatura a las 08:00 eran 15 grados, y 17 grados a las 20:00, definimos el cambio de temperatura promedio mediante:

$$R \equiv \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t = 20 : 00) - T(t = 08 : 00)}{20 : 00 - 08 : 00} = \frac{1}{6} \text{ grados/hora} \quad (2.1)$$

Sin embargo, es importante notar que esta definición sólo depende de los valores de la temperatura a las 08:00 y a las 20:00, no de la historia intermedia. Es decir, podría haberse roto el aire acondicionado durante parte del día, de modo que a las 14:00 la temperatura podría haber subido hasta 42 grados, o la temperatura podría haberse mantenido

constante entorno a 16 grados todo el día. Pero el ritmo promedio no nos da información sobre eso, ya que solo depende de los valores inicial y final!

• Concepto físico de derivada de una función

¿Como podemos conseguir mayor información sobre lo historia temporal del proceso de cambio? Pues tomando los intervalos de tiempo sobre los que calculamos el ritmo promedio mas pequeños. Así, si tomamos cuatro tiempos entre las 08:00 y las 20:00 en lugar de sólo el inicial y el final:

$$t_1 = 08 : 00, \quad t_2 = 12 : 00, \quad t_3 = 16 : 00 \quad \text{y} \quad t_4 = 20 : 00 \quad (2.2)$$

podremos calcular el ritmo de cambio promedio entre cada par de instantes consecutivos:

$$R_{i,i+1} \equiv \frac{\Delta T_{i,i+1}}{\Delta t_{i,i+1}} = \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{o} \quad 4 \quad (2.3)$$

De esta manera si algún $R_{i,i+1}$ es mucho mayor que los demas para algun i , sabremos que entre t_{i+1} y t_i la función ha cambiado mucho más deprisa. Tomando todavía subintervalos más pequeños (o lo que es lo mismo, más tiempos intermedios) iremos consiguiendo información cada vez más detallada sobre el cambio de la función.

La **derivada** de la función $T(t)$ se obtiene llevando este proceso de subdivisión hasta el límite. El intervalo de tiempo completo se divide en subintervalos de longitud dt . Y se define la derivada de la función T en el tiempo t mediante:

$$[T(t)]' \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{T(t + dt) - T(t)}{dt} \quad (2.4)$$

Por lo tanto, físicamente, la derivada de una función en un punto nos dice **el ritmo de cambio instantaneo de la función en dicho punto**. O lo que es lo mismo, el ritmo promedio de cambio entre el instante t y el instante $t + dt$, cuando dt se hace infinitamente pequeño.

2.2 INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA DE LA DERIVADA

Como hemos visto en la sección anterior, la derivada de una función $f(x)$ se define por:

$$[f(x)]' \equiv \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \quad (2.5)$$

Olvidando por un momento el límite que aparece en la ecuación anterior, y comparando con la figura siguiente, el cociente que aparece en la definición de derivada corresponde

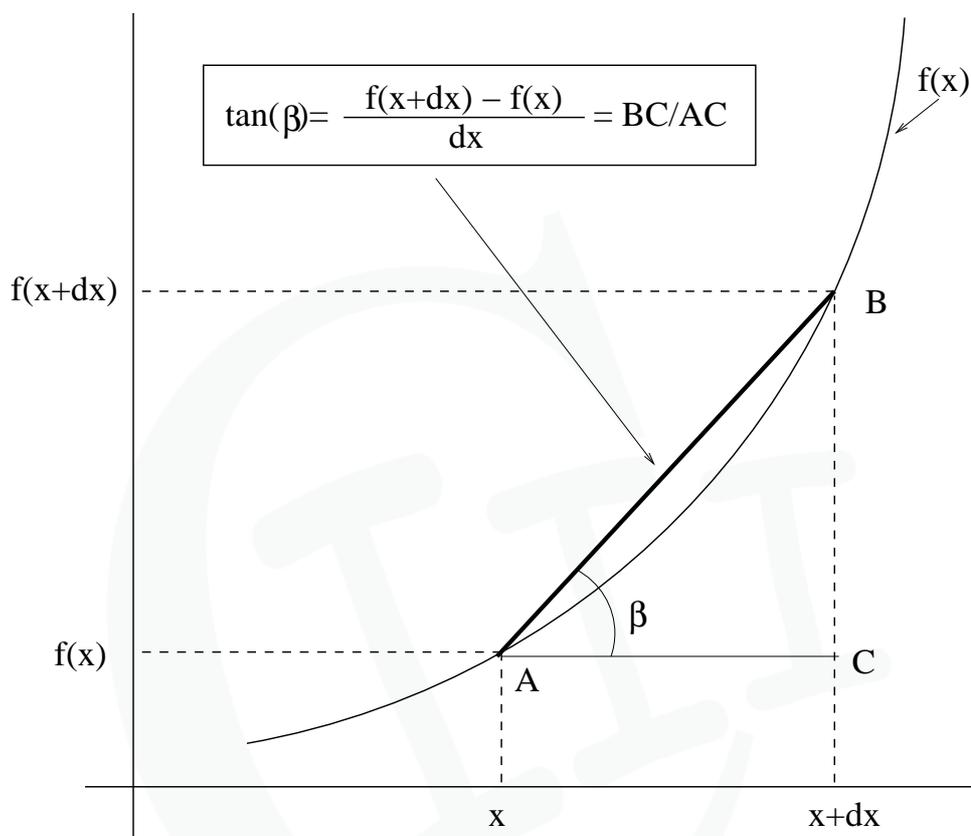


Figura 2.1: Concepto de derivada.

a la tangente del ángulo que forma con el eje X la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x + dx, f(x + dx))$.

Para ello basta recordar que la tangente del ángulo β perteneciente al triángulo rectángulo de vértices **ABC** se define como el cociente entre el cateto opuesto, **BC**, y el cateto contiguo, **AC**, al ángulo β .

Cuando dicho límite se toma, haciendo que $dx \rightarrow 0$, lo que hacemos es acercar el punto $(x + dx, f(x + dx))$ hacia $(x, f(x))$, de manera que la recta que los une tiene a la tangente a la curva en $(x, f(x))$ cuando ambos colapsan. Por eso, matemáticamente, se entiende la derivada en un punto como la tangente del ángulo que la **recta tangente a la curva en ese punto** forma con la horizontal.

2.3 DERIVADAS MÁS COMUNES

A continuación se da una lista de las derivadas más comunes (notar que c corresponde a una constante arbitraria y n a un número racional). Las cinco últimas fórmulas corresponden a reglas para derivar funciones compuestas: **suma o resta**, **producto o división** y la **regla de la cadena**.

$$\begin{aligned}
 (c)' &= 0 \\
 (x)' &= 1 \\
 (x^n)' &= nx^{n-1} \\
 (\ln(x))' &= \frac{1}{x} \\
 (e^x)' &= e^x \\
 (\operatorname{sen}(x))' &= \cos(x) \\
 (\operatorname{cos}(x))' &= -\operatorname{sen}(x) \\
 (\operatorname{tan}(x))' &= \frac{1}{\operatorname{cos}^2(x)} \\
 [f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x) \\
 [cf(x)]' &= cf'(x) \\
 [f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
 [f(g(x))]' &= g'(x)\frac{df}{dg}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

• **Ejemplo 1:** *Derívese la expresión:*

$$\begin{aligned}
 \left[\ln\left(\frac{1+x}{2-x^2}\right)\right]' &= \left(\frac{1+x}{2-x^2}\right)' \bigg/ \frac{1+x}{2-x^2} \quad (\text{R.cadena}) = \\
 &= \left(\frac{(2-x^2) - (-2x)(1+x)}{(2-x^2)^2}\right) \bigg/ \left(\frac{1+x}{2-x^2}\right) \quad (\text{R.cociente}) = \\
 &= \frac{(2+x^2+2x)}{(1+x)(2-x^2)}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

• **Ejemplo 2:** *Derivese la expresión:*

$$\begin{aligned} \left[\sin(\sqrt{2+x^2}) \right]' &= \left[\sqrt{2+x^2} \right]' \cos(\sqrt{2+x^2}) \quad (\text{R.cadena}) = \\ &= \frac{2x}{2(\sqrt{2+x^2})} \cos(\sqrt{2+x^2}) = \\ &= \frac{x}{(\sqrt{2+x^2})} \cos(\sqrt{2+x^2}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Capítulo 3

INTRODUCCION AL CALCULO INTEGRAL

3.1 DEFINICIÓN DE INTEGRAL

La integral de una función $f(x)$ se denota de la siguiente manera:

$$F(x) = \int^x f(s)ds \quad (3.1)$$

A la función $F(x)$ se le llama la **primitiva** de $f(x)$, y se define como aquella que verifica la propiedad siguiente:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad (3.2)$$

Por lo tanto, la integral es la inversa de la derivada, ya que si cojo una función arbitraria $f(x)$, la derivo y luego la integro vuelvo a obtener la misma función $f(x)$ (salvo una constante aditiva):

$$f(x) \xrightarrow{d/dx} f'(x) = \frac{df}{dx} \xrightarrow{\int^x dx} F(x) = \int^x f'(s)ds = f(x) + C \quad (3.3)$$

La constante C aparece debido a que la función primitiva F no es única. Si a cualquier función $F(x)$ que verifica que su derivada es igual a $f(x)$ le sumamos una constante, tendremos otra primitiva diferente, $G(x) = F(x) + C$ que también verifica que su derivada es $f(x)$.

3.2 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

La integral tiene muchas propiedades que se derivan estrictamente de su definición. Las más importantes son:

- **Aditividad:**

$$\int^x [f(x) + g(x)] dx = \int^x f(x) dx + \int^x g(x) dx \quad (3.4)$$

- **Multiplicación por un escalar:**

$$\int^x [\lambda f(x)] dx = \lambda \int^x f(x) dx \quad (3.5)$$

- **Ejercicio:** Demostrar ambas propiedades (ayuda: usar que las primitivas han de verificar la propiedad enunciada por la Ecuación 39).

3.3 INTEGRALES MÁS COMUNES

Mientras que derivar cualquier función es básicamente trivial, hallar la primitiva de una función dada no lo es. Sin embargo, usando el hecho de que la integral es la inversa de la derivada, es posible calcular muchas integrales. En la lista siguiente, se enumeran las integrales **inmediatas** más comunes:

$$\begin{aligned} \int^x c dx &= cx + C \\ \int^x x dx &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ \int^x x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \\ \int^x \frac{1}{x} dx &= \ln(x) + C \\ \int^x e^x dx &= e^x + C \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
\int^x \operatorname{sen}(x) dx &= -\operatorname{cos}(x) + C \\
\int^x \operatorname{cos}(x) dx &= \operatorname{sen}(x) + C \\
\int^x f'(x) [f(x)]^n dx &= \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \\
\int^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln [f(x)] + C \\
\int^x f'(x) e^{f(x)} dx &= e^{f(x)} + C \\
\int^x f'(x) \operatorname{sen}(f(x)) dx &= -\operatorname{cos}(f(x)) + C \\
\int^x f'(x) \operatorname{cos}(f(x)) dx &= \operatorname{sen}(f(x)) + C
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En cualquier caso, muchas integrales no son evidentes. Y es necesario recurrir a otros metodos para resolverlas. Por ejemplo, realizar cambios de variables.

• **Ejemplo 1:** *Calcúlese la integral:*

$$\int^x \frac{2x}{4-3x^2} dx = \frac{-1}{3} \int^x \frac{(-6x)}{4-3x^2} = -\frac{\ln(4-3x^2)}{3} + C \tag{3.8}$$

Notese que hemos multiplicado la integral por $-1/3$ a fin de tener la derivada del denominador en el numerador, y poder así aplicar la novena fórmula que aparece en la ecuación anterior.

3.4 INTEGRALES DEFINIDAS. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA INTEGRAL

Para interpretar físicamente lo que es una integral es necesario recuperar la Ec. 39, que afirma que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ si y solo si:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \tag{3.9}$$

Si desarrollamos ahora el lado de la derecha haciendo uso de la definicion de derivada dada en la Ecuación 34:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} \tag{3.10}$$

tenemos que, olvidando de nuevo el límite que aparece en la ecuación:

$$F(x + dx) - F(x) = f(x)dx \quad (3.11)$$

Si dx es pequeño, entonces $f(x)dx$ es aproximadamente el área que queda encerrada entre la función y el eje de las X, bajo el intervalo que va de x a $x + dx$.

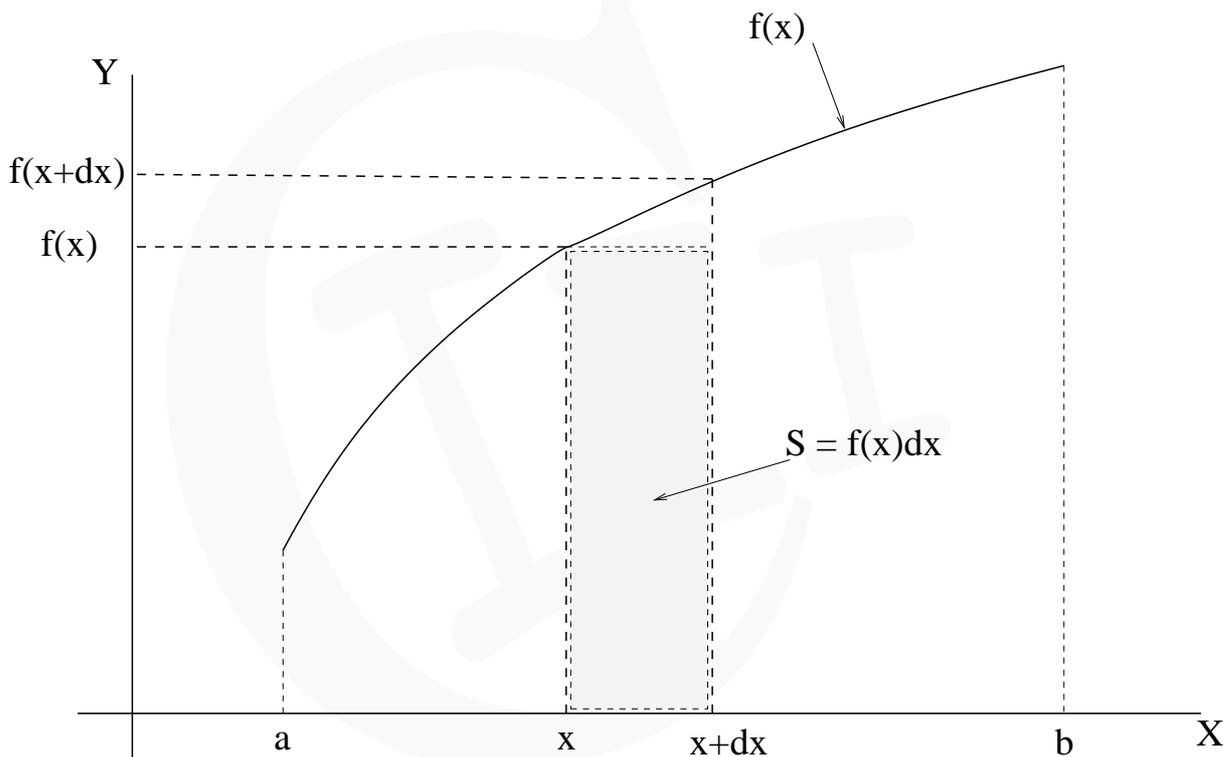


Figura 3.1: Concepto de integral.

Supongamos ahora que escogemos un punto inicial $x = a$ (ver figura). El área encerrada entre la curva y el eje X, sobre el intervalo que va de a a $a + dx$ vendrá dada por $F(a + dx) - F(a) = f(a)dx$. Igualmente, el área encerrada entre curva y eje X, bajo el intervalo que va desde $a + dx$ hasta $a + 2dx$ será $F(a + 2dx) - F(a + dx) = f(a + dx)dx$. Y sumando ambas, puedo decir que el área encerrada entre curva y eje X, bajo el intervalo que va desde a hasta $a + 2dx$ será:

$$\begin{aligned} f(a)dx + f(a + dx)dx &= [F(a + dx) - F(a)] + [F(a + 2dx) - F(a + dx)] = \\ &= F(a + 2dx) - F(a) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por lo tanto, el area encerrada entre curva y eje X sobre un intervalo cualesquiera $[a, b]$ no es más que la diferencia $F(b) - F(a)$, como puede demostrarse sin más que iterando la formula anterior para tantos dx consecutivos como haga falta para llegar hasta el punto b .

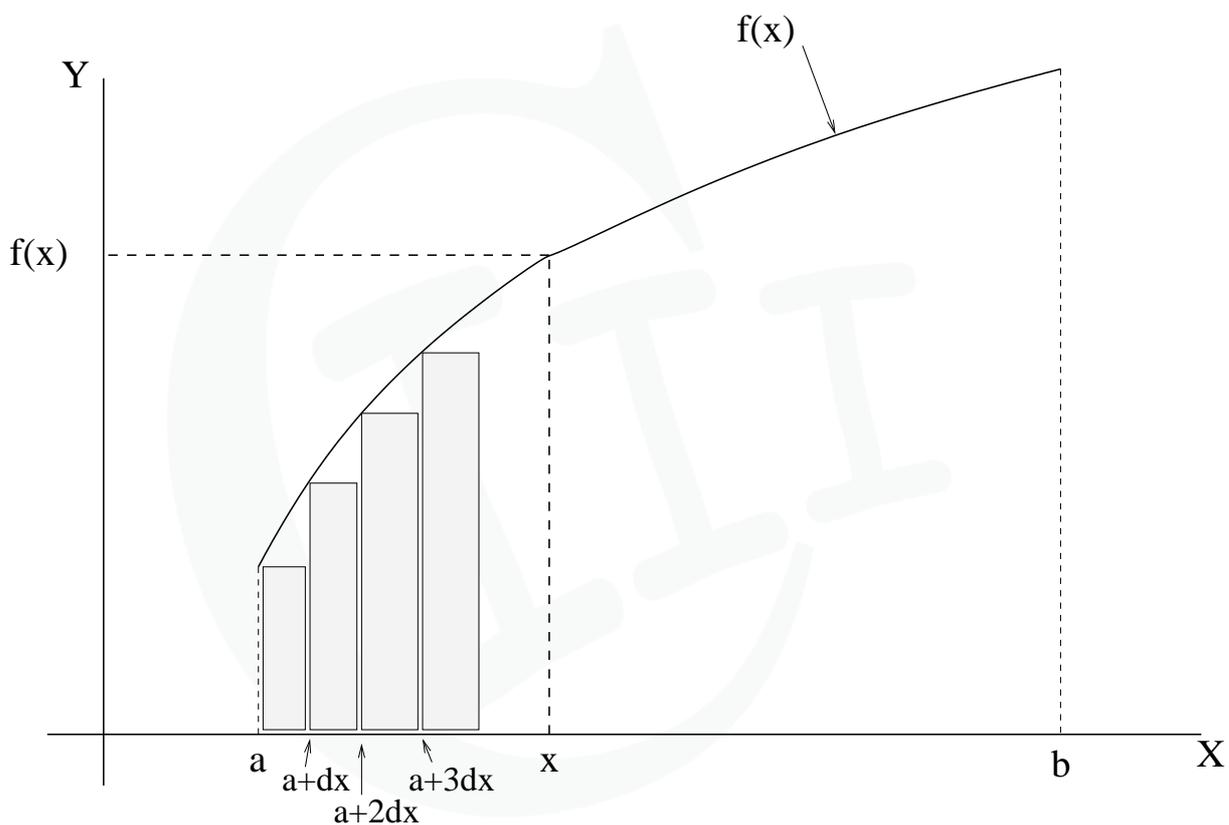


Figura 3.2: Concepto de integral definida.

A la diferencia $F(b) - F(a)$ se le llama **integral definida** de la función $f(x)$ entre los puntos a y b , y se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (3.13)$$

y como hemos dicho, representa el area encerrada entre la curva $f(x)$ y el eje X, bajo el intervalo que va de a hasta b .

3.5 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Las propiedades más importantes derivan de las ya vistas:

- **Aditividad:**

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (3.14)$$

- **Multiplicación por un escalar:**

$$\int_a^b [\lambda f(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad (3.15)$$

a las que hay que añadir que:

- **Suma sobre intervalos de integración:**

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (3.16)$$

la cual es evidente, ya que el área encerrada bajo el intervalo $[a, c]$ es necesariamente la suma de la encerrada bajo $[a, b]$ y la encerrada bajo $[b, c]$.

- **Inversión del intervalo de integración:**

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (3.17)$$

también evidente, ya que $F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$. Finalmente, es interesante darse cuenta de que la indeterminación que existía antes respecto a la constante C que podía añadirse a la primitiva de $f(x)$ ya no existe. Puesto que las integrales definidas se obtienen como la diferencia del valor de $F(x)$ en dos puntos, si le añadimos una constante a $F(x)$, ésta desaparece al hacer dicha diferencia.

Capítulo 4

LA LEY DE COULOMB

4.1 LA CARGA ELÉCTRICA.

La **carga eléctrica** es el concepto básico sobre el que se construye la electricidad y el magnetismo, del mismo modo que la **masa** era la cantidad básica sobre la que se construía la mecánica. Pero de la misma manera que la mecánica no nos decía que era la masa, sino sólo como se comportaba, el electromagnetismo nos dice como se comportan las cargas, y no lo que son.

Las primeras experiencias con cargas eléctricas estuvieron asociadas al frotamiento: así, si frotamos dos trozos de caucho con un trozo de piel, veremos que se repelen entre sí. Por otro lado, si frotamos dos varas de vidrio con un paño, veremos que también se repelen mutuamente. Sin embargo, la vara de vidrio frotada y la vara de caucho frotada se atraen entre sí. Benjamin Franklin supuso que una estaba cargada **negativamente** y la otra **positivamente**, y estableció que objetos cargados del mismo signo se repelían, y cargados de signos diferentes se atraían. Se equivocó sin embargo, ya que pensaba que sólo existían cargas negativas, y el que un cuerpo estuviera cargado positiva o negativamente se debía sólo al exceso o defecto de éstas. Hoy sabemos que existen cargas negativas (electrones, descubiertos experimentalmente por J.J. Thomson en 1896) y positivas (protones, descubiertos por E. Rutherford en 1922). Estas son, además, los elementos básicos del átomo: un núcleo central donde se acumulan los protones (junto con otras partículas neutras, los neutrones, que hacen de "pegamento" entre ellas y que fueron descubiertos por J. Chadwick en 1932), alrededor del cual orbitan los electrones, en igual número al de protones en el núcleo. ¿Qué sucedía con nuestras varas? Pues que al frotar la vara de caucho sobre la piel, la vara "robaba" electrones de la piel, adquiriendo una carga neta negativa (ya que hay más electrones que protones). En el caso de la vara de vidrio, la

seda se "llevaba" electrones del vidrio, con lo que la vara se queda con una carga positiva neta (hay más protones que electrones) ¹.

Los electrones son **unidades elementales** de carga, que ni se destruyen ni se dividen en otras menores. Por lo tanto, la carga total siempre se conserva (**Ley de conservación de la carga**). La carga de un electron es $q_e = -e = -1.6 \times 10^{-19} C$ y es la cantidad de carga más pequeña que puede encontrarse libre ². (Por lo tanto cualquier carga eléctrica existente ha de ser un múltiplo entero de e .) Además son fácilmente transferidos de un objeto a otro, o conducidos a través de un material (como un cable de cobre, por ejemplo). Según un material tenga tendencia a que se le quiten/añadan electrones o a conducirlos, se habla de materiales **aislantes** (como el vidrio o el caucho) o **conductores** (como el cobre y los metales).

MODELO DEL ATOMO DE HELIO

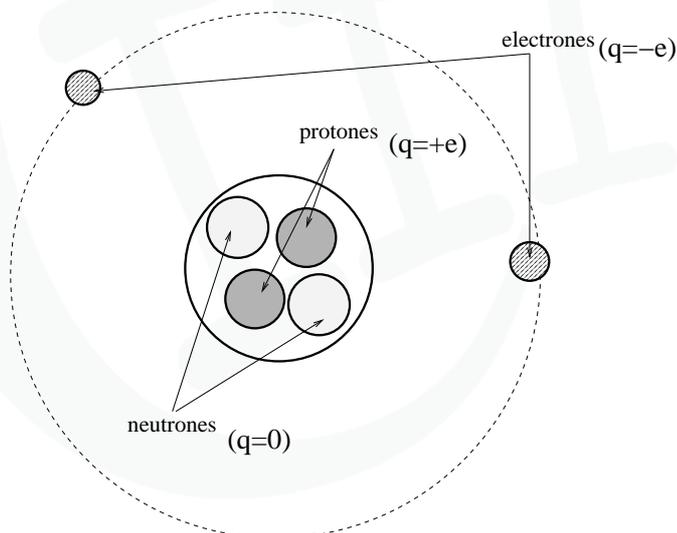


Figura 4.1: Modelo del átomo de Helio con dos protones y dos neutrones. Notar que no está a escala, ya que el radio de la órbita electrónica es mucho mayor que el tamaño del núcleo. Aproximadamente, la visión desde el núcleo hacia los electrones sería comparable a la de una hormiga¡desde el centro del campo de fútbol del estadio Santiago Bernabeu!

¹Leer el capítulo sobre carga en "The cartoon guide to Physics", de Larry Gonick, Ed. Harper-Centennial (New York, 1994), para una visión gráfica de todo esto.

²Los protones tienen la misma carga que los electrones, pero positiva, $q_p = e = 1.6 \times 10^{-19} C$; y aunque leáis que están compuestos de otras partículas más pequeñas con cargas más pequeñas que e , llamadas *quarks*, ¡es imposible encontrar estas partículas sueltas!

4.2 LA LEY DE COULOMB.

La ley de Coulomb establece la fuerza con la que se atraen/repelen dos cargas eléctricas. Fue medida por primera vez por Charles Coulomb a finales del s. XVIII, y puede escribirse, en forma vectorial como:

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (4.1)$$

siendo \vec{F}_{21} la fuerza que la carga q_1 hace sobre la carga q_2 .

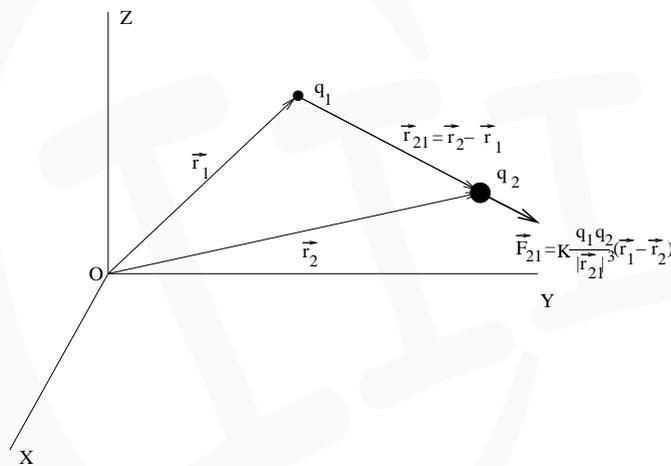


Figura 4.2: Fuerza de Coulomb.

De la Eq. 4.1 puede verse que el módulo de la fuerza decrece como el cuadrado de la distancia entre las dos cargas, $|\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. También el que la fuerza está dirigida según la recta que une a las dos cargas, y que su sentido depende del signo del producto $q_1 q_2$. Por lo tanto, las cargas se atraen si tienen distinto signo, y se repelen en caso contrario. El valor de la constante $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ en el sistema M.K.S.

Nótese también que la fuerza de Coulomb que la carga q_2 hace a su vez sobre q_1 es igual, aplicando la Ec. 4.1, a $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, ya que lo único que cambia es la dirección del vector que va desde la carga que hace la fuerza a la que la recibe, manteniéndose la distancia la misma. Se cumple por tanto, la tercera ley de Newton, la **ley de acción y reacción** en la interacción entre cargas.

Es importante, finalmente, darse cuenta de que la expresión de la fuerza de Coulomb

es muy similar a la de la fuerza gravitatoria que aparece entre dos masas, m_1 y m_2 :

$$\vec{F}_{21}^g = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (4.2)$$

Sin embargo, difieren en que **no hay masas negativas**, con lo que la gravitatoria es siempre atractiva. Además, las fuerzas eléctricas son mucho mayores, ya que $G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$.

• **Ejercicio:** Calcular la razón entre la fuerza de repulsión de dos electrones debido a la fuerza de Coulomb, y la atracción debida a la fuerza gravitatoria, teniendo en cuenta que la masa del electron $m_e = 9.1 \times 10^{-31} kg$.

• **Ejemplo:** Sea una carga $q_1 = 1C$ situada en el punto $\vec{r}_1 = (-1, 1, 3)$. ¿Cuál será la fuerza que ejercerá sobre otra carga $q_2 = -2C$ situada en $\vec{r}_2 = (2, -1, 0)$?

Necesitamos calcular el vector $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2, -1, 0) - (-1, 1, 3) = (3, -2, -3)$, que va de la carga q_1 a la q_2 . Ahora, el módulo de éste es $|\vec{r}_{21}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$, que será igual a la distancia entre las cargas. Por lo tanto, la fuerza que experimenta q_2 será:

$$\vec{F}_{21} = 9 \times 10^9 \times \frac{1C \cdot (-2C)}{(\sqrt{22})^3} (3, -2, -3)N \quad (4.3)$$

4.3 EL CAMPO ELÉCTRICO

Volviendo de nuevo al simil mecánico de la gravitación, es conocido por todos que la Tierra ejerce una fuerza sobre la Luna, aunque esté a muchos millones de kilometros de distancia. Del mismo modo, cualquier carga ejerce una fuerza sobre cualquier otra carga que este separada de la primera en el espacio. Pero, ¿cómo es esto posible, sin que ambas cargas estén en contacto? ¿Cómo se transmite la fuerza a través del espacio? ¿y cuánto tiempo tarda en llegar? Una primera manera de afrontar este problema es suponer que la Tierra llena el espacio con un campo gravitacional. Este campo (sea lo que sea) es lo que causa la fuerza sobre las masas que hay en el espacio. De manera similar, una carga llenaría el espacio de un **campo eléctrico** que dará lugar a una fuerza en el momento que otra carga esté presente.

Puesto que dicho campo es generado por la carga, no puede depender de si existe o no una segunda carga que reciba la fuerza. Por todo ello, el **campo eléctrico** creado

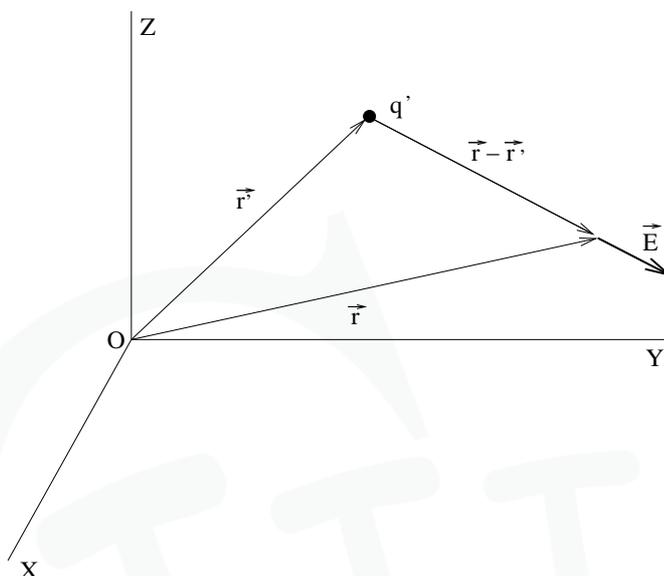


Figura 4.3: Campo eléctrico creado por la carga q' en el punto \vec{r} .

por una carga q' situada en el punto \vec{r}' sobre cualquier otro punto \vec{r} del espacio se define, matemáticamente, como el siguiente campo vectorial:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.4)$$

De esta forma, el campo es independiente de la existencia de una segunda carga q , estando totalmente determinado por la carga que lo crea, q' . La fuerza que la carga q experimenta en presencia del campo es ahora dada por $\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, cuando dicha carga está en el punto \vec{r} .

• **Ejemplo:** Sea una carga $q_1 = 1C$ situada en el punto $\vec{r}_1 = (-1, 1, 3)$. ¿Cuál será el campo eléctrico que dicha carga creará en el punto $\vec{r}_2 = (2, -1, 0)$? ¿Y la fuerza que ejercería sobre otra carga $q_2 = -2C$ que se sitúe en \vec{r}_2 ?

Necesitamos de nuevo calcular el vector $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2, -1, 0) - (-1, 1, 3) = (3, -2, -3)$, que va de la carga que crea el campo al punto donde lo queremos calcular. Ahora, el módulo de éste es $|\vec{r}_{21}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$, la distancia de la carga

q' al punto \vec{r} . Por lo tanto, el campo creado en \vec{r}_2 por q_1 es:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_2) = 9 \times 10^9 \times \frac{1C}{(\sqrt{22})^3} (3, -2, -3) N/C \quad (4.5)$$

Para hallar ahora la fuerza sobre q_2 , basta con hacer: $\vec{F}_{21} = q_2 \vec{E}_1(\vec{r}_2)$, que es el mismo resultado del ejemplo de la sección anterior.

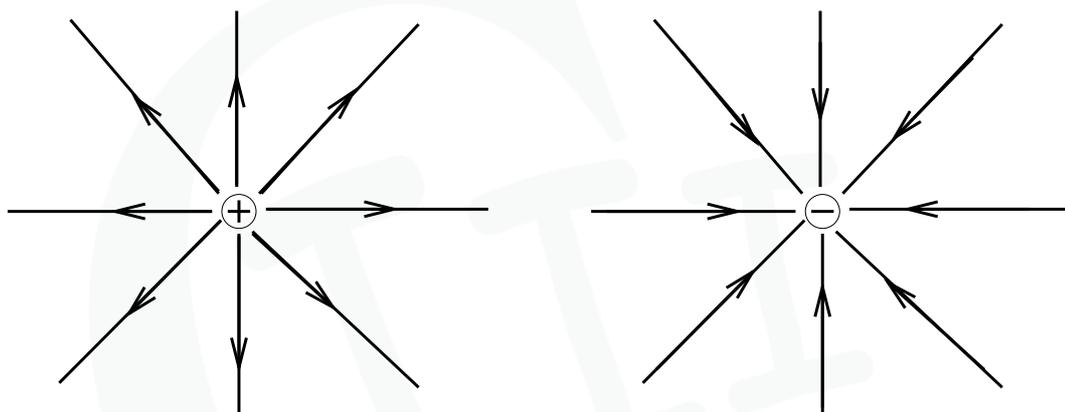


Figura 4.4: Representación por líneas de fuerza del campo eléctrico creado por una carga positiva (izquierda) y otra negativa (derecha).

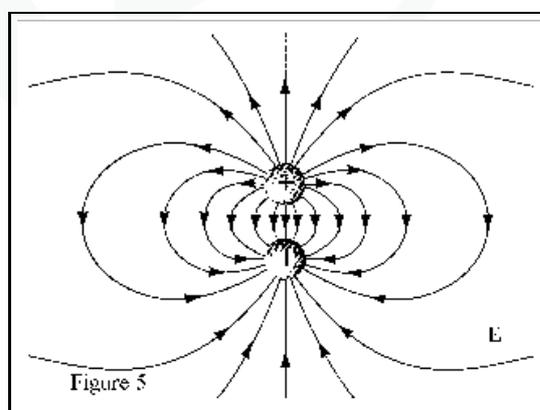


Figura 4.5: Representación por líneas de fuerza del campo eléctrico creado por un par de cargas, una negativa (inferior) y otra positiva (superior).

4.3.1 Líneas de fuerza

Los campos vectoriales son usualmente representados mediante el concepto de **línea de fuerza**. Puesto que la fuerza que experimenta una carga q en presencia de un campo eléctrico \vec{E} viene dada por $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, es evidente que el campo eléctrico en un punto coincide con la fuerza que experimentaría una carga unidad en dicho punto. Por lo tanto es posible "la estructura" del campo abandonando una carga unidad en su presencia y viendo que trayectoria seguiría dicha carga. Las trayectorias que seguiría dicha carga unidad cuando se la abandona en puntos diversos son lo que se llaman líneas del campo. Se caracterizan por que el vector campo eléctrico es siempre tangente a dichas líneas en cada punto, propiedad que se utiliza para calcularlas matemáticamente. Como ejemplo, en la Fig. 4.4 se representan las líneas de fuerza del campo eléctrico creado por una carga positiva o una negativa (imaginaros la trayectoria que seguiría un protón abandonado en dicho campo y ver como coincidiría con las líneas) y también para una configuración más complicada, la de un par carga positiva/negativa, también llamado **dipolo eléctrico** (ver Fig. 4.5).

4.4 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Puesto que la fuerza de Coulomb no es intrínsecamente diferente a cualquier otra fuerza que se haya visto anteriormente en Mecánica, también podemos usar el **principio de superposición** para calcular la fuerza que experimenta una carga en presencia de otras muchas: *La fuerza total ejercida sobre una carga eléctrica q por un conjunto de cargas, $\{q_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, será igual a la suma vectorial de cada una de las fuerzas ejercidas por cada carga q_i sobre la carga q :*

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N F_{iq}(\vec{r}) \quad (4.6)$$

donde la fuerza \vec{F}_{iq} que la carga q_i ejerce sobre la carga q ha de ser calculada usando la Eq. 4.1.

Puesto que, como hemos visto, el campo eléctrico puede entenderse como la fuerza de Coulomb que experimentaría la unidad de carga, dicho principio puede extenderse también a la determinación de campos eléctricos, sin mas que dividir la anterior igualdad por la carga que recibe la fuerza, q . De esta forma, dicho principio quedaría: *El campo eléctrico total creado en un punto por un conjunto de cargas $\{q_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, será igual*

a la suma vectorial del campo eléctrico creado por cada carga q_i en dicho punto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N E_i(\vec{r}) \quad (4.7)$$

donde el campo $\vec{E}_i(\vec{r})$ creado por la carga q_i en el punto \vec{r} ha de ser calculado usando la Eq. 4.4.

• **Ejemplo:** Sean cuatro cargas de $1C$ situadas en los vértices de un cuadrado de lado 2 , uno de cuyos vértices coincide con el origen. ¿Cuanto vale el campo eléctrico en el centro del cuadrado? ¿Y cual sería la fuerza que experimentaría una carga $q = -1C$ situado en dicho centro?

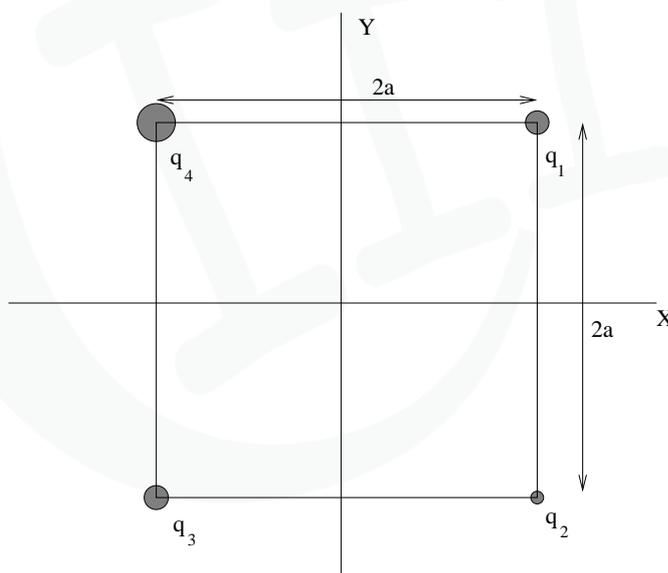


Figura 4.6: Esquema del ejemplo.

Para hacerlo, primero cogemos un sistema de ejes en el que los ejes X e Y coincidan con dos lados del cuadrado (ver Fig. 4.6). De esta forma, las posiciones de las cuatro cargas son: $\vec{r}_1 = (0, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, 2)$, $\vec{r}_3 = (2, 0)$, $\vec{r}_4 = (2, 2)$. El punto donde nos piden el campo es el centro del cuadrado, y por tanto: $\vec{r} = (1, 1)$. Necesitamos ahora el campo creado por cada carga en dicho centro, para lo cual tengo que calcular los vectores $\vec{r}_{ci} = \vec{r} - \vec{r}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. La solución es: $\vec{r}_{c1} = (1, 1)$, $\vec{r}_{c2} = (1, -1)$, $\vec{r}_{c3} = (-1, 1)$ y $\vec{r}_{c4} = (-1, -1)$. Es fácil ver que

el módulo de todos ellos es $\sqrt{2}$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = K \frac{1}{(\sqrt{2})^3} [(1, 1) + (1, -1) + (-1, 1) + (-1, -1)] = 0 \quad (4.8)$$

La fuerza sobre la carga $-1C$ en dicho punto será por tanto nula, puesto que el campo eléctrico creado por las cuatro cargas en el centro es cero. Fijaros que tal solución tiene sentido físico, ya que todas las cargas van a tirar con la misma fuerza de la carga negativa hacia ellas, con lo que se compensan las fuerzas dos a dos.

4.5 DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA: CONCEPTO DE DENSIDAD DE CARGA

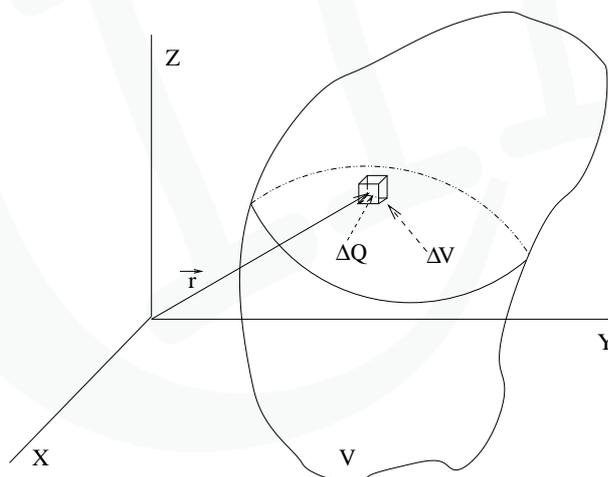


Figura 4.7: Esquema del proceso de definición de la densidad de carga en un volumen.

Existen muchos casos de interés práctico donde no conocemos la situación concreta de cada carga, sino que sabemos como están repartidas **en promedio** en una línea, una superficie o un volumen a través de una función **densidad de carga**. Dicha densidad se construye del siguiente modo: supongamos que tenemos un volumen muy grande en el que tenemos carga distribuida de manera arbitraria. Dividimos dicho volumen en pequeños elementos de volumen, ΔV , cada uno de los cuales está centrado en un punto del volumen, \vec{r} (ver Fig. 4.7). Si ΔQ es la cantidad de carga encerrada en cada ΔV , la densidad con

la que la carga esta repartida en dicho elemento de volumen será igual a $\Delta Q/\Delta V$. La **densidad de carga** se define entonces en cada punto del volumen, \vec{r} , haciendo que dichos volúmenes se hagan muy pequeños ³:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (4.9)$$

Puede hacerse lo mismo con una superficie o una línea. La superficie se dividiría en pequeños elementos de superficie, ΔS , y la densidad superficial de carga se definiría como:

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (4.10)$$

En la línea, tendremos pequeños elementos de longitud Δl , con lo que la densidad lineal de carga viene dada por:

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \quad (4.11)$$

4.6 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO PRODUCIDO POR DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUA

Para calcular el campo creado por una **distribución continua en volumen** aplicaremos el principio de superposición del siguiente modo. Cada uno de los diferenciales de volumen ΔV que componen el volumen estará situado en el punto \vec{r}' , y contendrá una cantidad de carga $\Delta Q = \rho(\vec{r}')\Delta V$. El campo que dicho diferencial de volumen creará en un punto \vec{r} se obtiene aplicando la Eq. 4.4:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.12)$$

El campo total será, aplicando el principio de superposición, la suma del campo creado por todos estos diferenciales. Pero en el límite en el que $\Delta V \rightarrow 0$, esto equivale a una integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_v dV \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4.13)$$

Análogamente pueden deducirse expresiones para **distribuciones de carga sobre una superficie**. En el primer caso, se divide la superficie en elementos de superficie

³Pero no tanto como para que no tengamos todavía muchas cargas individuales dentro de ΔV , ya que si tomamos elementos de volumen suficientemente pequeños, puede que no haya ninguna carga dentro!

ΔS , cada uno de los cuales estará situado en una posición \vec{r}' dentro de la superficie, conteniendo una carga $\Delta Q = \sigma \Delta S$. El campo que dicho elemento creará en el punto \vec{r} será:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\sigma(\vec{r}') \Delta S}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.14)$$

y aplicando de nuevo el principio de superposición, el campo total es la suma (integral) sobre todos los elementos de superficie:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_S dS \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') . \quad (4.15)$$

Finalmente, **para la distribución lineal**, dividimos la misma en pequeños elementos de longitud Δl , cada uno de los cuales estará situado en una posición \vec{r}' y que contendrán una carga $\Delta Q = \lambda \Delta l$. El campo que dicho elemento de longitud crea en el punto \vec{r} será:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\lambda(\vec{r}') \Delta l}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.16)$$

e integrando a todos los elementos de longitud que forman la distribución lineal tenemos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \int_l dl \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') . \quad (4.17)$$

Capítulo 5

TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

5.1 DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE ARBITRARIA.

El concepto de **flujo de un campo vectorial** aparece por primera vez en Física de Fluidos. Su uso en ese caso para cuantificar la cantidad de fluido que atraviesa una superficie arbitraria S en la unidad de tiempo, cuando dicho fluido se mueve siguiendo un campo de velocidades dado. Dichas superficies pueden ser abiertas o cerradas, según estén delimitadas por un contorno o no. Veamos entonces como es posible cuantificar dicho flujo de partículas.

Para ello, suponemos inicialmente un fluido que llena una región del espacio con un volumen cualquiera. Dicho volumen se divide en pequeños diferenciales, dV , suficientemente pequeños como para poder considerar que las partículas que contienen están distribuidas uniformemente en ellos, moviéndose todas ellas con igual velocidad. Es posible cuantificar cuantas de estas partículas hay en cada punto del espacio definiendo una función **densidad de partículas**, n . Se construye desplazando el diferencial de volumen por toda la región del espacio y contando cuantas partículas, dN , quedan dentro de él en función de su posición. Luego se define $n(x, y, z)$ de modo que se cumpla que $dN(x, y, z) = n(x, y, z)dV$. El fluido tiene también asociado un campo de velocidades, $\vec{v}(x, y, z)$, que dice cual es la velocidad a la que se mueve el elemento de volumen dV cuando se sitúa en el punto (x, y, z) . La trayectoria que dicho elemento seguiría si se dejara en un punto define las

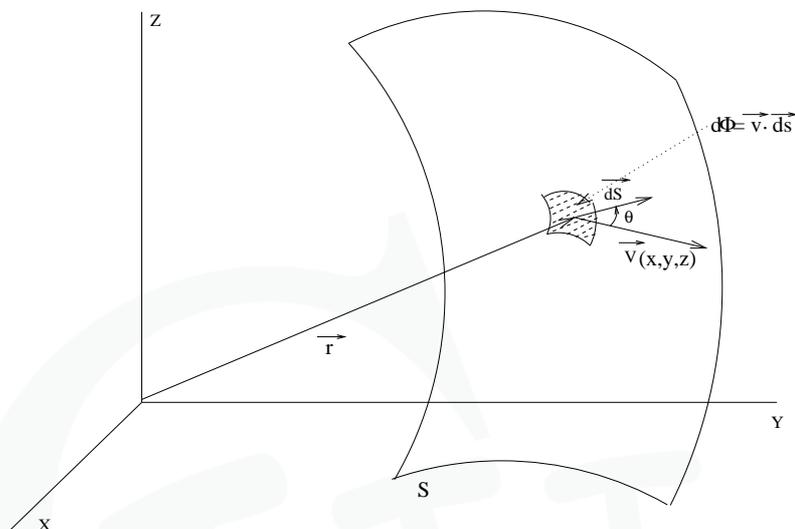


Figura 5.1: Flujo de un vector.

líneas de fuerza del campo \vec{v} ¹.

Supongamos que queremos ahora saber cuántas partículas atraviesan una superficie arbitraria S en la unidad de tiempo (ver Fig. 5.1). Para ello dividimos la superficie en pequeños elementos de superficie, dS , suficientemente pequeños como para que podamos considerarlos planos. Recordando que una superficie cualquiera puede siempre representarse por un vector², representaremos cada uno de estos elementos de superficie por un vector \vec{dS} . Si somos ahora capaces de calcular el número de partículas que atraviesa cualquiera de esos elementos de superficie en que hemos dividido S , sumando el número de partículas que atraviesa cada uno de ellos podemos calcular el flujo total de partículas a través de la superficie total S .

Para calcular el flujo de partículas a través del elemento de superficie dS situado en (x, y, z) fijémonos en la Fig. 5.2. El valor de la velocidad en el punto donde está situado el diferencial de superficie será $\vec{v}(x, y, z)$, y podremos suponerla constante sobre todo dS , puesto que es muy pequeño. Recordando ahora en que en un tiempo Δt , el espacio recorrido a velocidad constante V es igual a $V\Delta t$, tendremos que sólo aquellas partículas

¹Fijaros que esto es lo mismo que lo que decíamos para el campo eléctrico \vec{E} , cuando decíamos que es posible obtener sus líneas de fuerza sin más que abandonar un protón en su presencia y seguir su trayectoria!

²Dicho vector ha de ser perpendicular a ella y tener por módulo lo que valga la superficie, como vimos al hablar del producto vectorial de dos vectores en el tema 1.

del fluido que estén contenidas en el area rayada de la figura atravesarán dS . Como el volumen del trozo rallado será $V dS \cos\theta \Delta t^3$, el número de partículas contenidas en él será igual a $n V dS \cos\theta \Delta t = n \Delta t \vec{V} \cdot d\vec{S}$. Por lo tanto el flujo de partículas que es la cantidad de partículas que pasa por unidad de tiempo será: $d\Phi = n \vec{V} \cdot d\vec{S}$

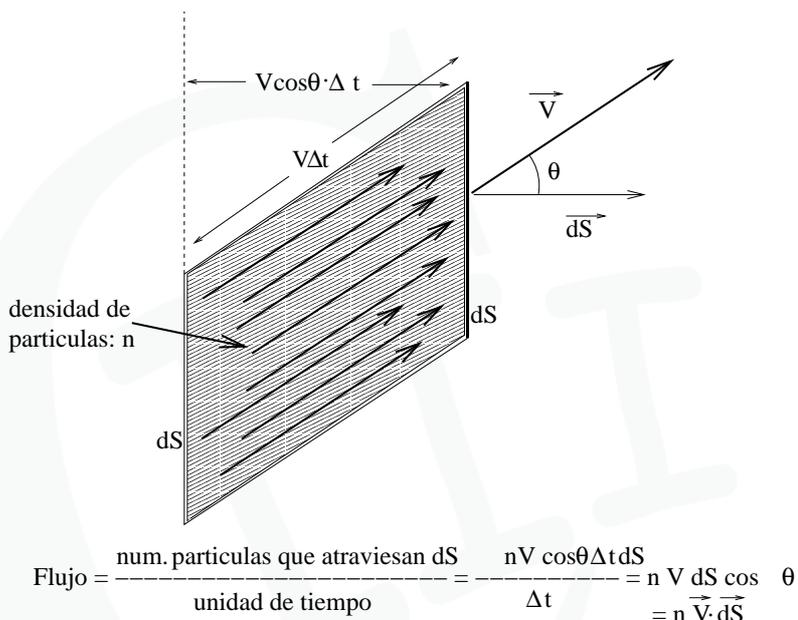


Figura 5.2: Flujo de un vector (detalle).

Para calcular ahora el flujo total de partículas a través de la superficie total basta sumar a todos los elementos de superficie en los que la dividimos. O lo que es lo mismo, integrar:

$$\Phi = \int_S n \vec{V} \cdot d\vec{S}. \quad (5.1)$$

En el caso del campo eléctrico \vec{E} (ó de cualquier otro campo vectorial arbitrario) se define, por analogía al caso del campo de velocidades del fluido, el flujo a través de una superficie arbitraria S como:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (5.2)$$

¿Qué significa físicamente? Recordemos que las líneas de campo eléctrico coincidían con las trayectorias descritas por un protón abandonado en presencia de dicho campo en algún

³Recordad que el área de un paralelogramo es siempre base por altura!

punto, del mismo modo que las líneas del campo de velocidades del fluido, \vec{v} , coinciden con las trayectorias de los diferenciales de volumen arrastrados por él. Por lo tanto el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie será grande si muchas de estas líneas la atraviesan y pequeño si lo hacen pocas. Se interpreta por tanto como una medida del número de líneas de campo que atraviesan una superficie dada.

5.2 CÁLCULO DE FLUJOS EN SITUACIONES SENCILLAS.

En muchos casos de interés práctico es posible que el campo vectorial cuyo flujo se calcule tenga alguna simetría que facilite enormemente el cálculo del flujo a través de aquellas superficies que reflejen esta simetría.

5.2.1 Campo constante

Por ejemplo, si tenemos un campo que es **constante** sobre toda la superficie ⁴, la expresión del flujo a través de cualquier superficie S se simplifica a⁵:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S} = E S \cos\theta \quad (5.3)$$

donde θ es el ángulo que forman \vec{E} y \vec{S} . Recordad que \vec{S} es el vector que representa a toda la superficie, y se obtiene como la **suma vectorial** de los $d\vec{S}$ que representan a los diferenciales de superficie que la conforman. Así, por ejemplo, si la superficie es plana, \vec{S} tiene por módulo el valor de la superficie y es perpendicular a ésta. Por el contrario, si la superficie fuera una esfera cerrada, tendríamos que $\vec{S} = 0$ (en la esfera, cada elemento de superficie cancela a su simétrico respecto al plano del ecuador). Por lo tanto, el flujo a través de ella sería también cero. Pero esto es solo reflejo del hecho de que, el flujo de un campo constante a través de una esfera es necesariamente nulo, ya que todo lo que entra, sale.

5.2.2 Campo paralelo a $d\vec{S}$ sobre toda la superficie

Otras veces es posible que, aunque el vector \vec{E} no sea constante, su dirección varíe sobre la superficie de tal manera que sea paralelo al vector $d\vec{S}$ en cada punto de la misma. De

⁴Recordad que constante implica que tanto el módulo, como su dirección y sentido han de ser constantes!

⁵La última igualdad de la siguiente ecuación sólo es cierta si $\vec{S} \neq 0$! Por ejemplo, no tendría sentido en el caso de que fuera una esfera, tal y como se explica en el texto.

este modo, el producto $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$. Si además el módulo del campo eléctrico es el mismo en todos los puntos de la superficie, el cálculo del flujo resulta muy sencillo.

Por ejemplo, en problemas con simetría esférica es común encontrarse con un campo \vec{E} dirigido en la dirección radial desde un cierto centro, O , y cuyo módulo dependa sólo de la distancia al punto O , r :

$$|\vec{E}(\vec{r})| = E(r). \quad (5.4)$$

Por lo tanto, si queremos calcular el flujo de dicho campo a través de una esfera de radio R centrada en el mismo centro, se cumple que \vec{E} es paralelo a $d\vec{S}$ en todos los puntos de la esfera (ver Fig. 5.3 (izquierda)). Por tanto, el flujo a través de la esfera vendrá entonces dado por:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS = E(R) \int_S dS = E(R) S = E(R) 4\pi R^2. \quad (5.5)$$

Otro caso similar al anterior y muy común en problemas con simetría cilíndrica, es el de un campo eléctrico dirigido según la dirección radial en coordenadas cilíndricas, y cuyo módulo dependa sólo de la distancia radial a dicho eje. En ese caso, el flujo de dicho campo a través de una superficie cilíndrica de radio R y altura h , y con eje dirigido según el eje z (ver Fig. 5.3 (derecha)) es realmente fácil de calcular:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lateral} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{bases} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{lateral} E dS = E(R) S = E(R) 2\pi R h. \quad (5.6)$$

donde el flujo a través de las bases es cero por ser $d\vec{S}$ y \vec{E} perpendiculares.

5.3 TEOREMA DE GAUSS PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

El **teorema de Gauss** nos dice que el flujo del campo eléctrico \vec{E} creado por una distribución de carga a través de una superficie cerrada arbitraria, S , es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie, Q_S :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (5.7)$$

donde $\epsilon_0 \equiv 1/4\pi K^6$.

El **teorema de Gauss** es una herramienta de gran utilidad para calcular campos eléctricos en casos en los que la distribución de carga que los crea tiene alguna simetría

⁶Recordad que $K = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$

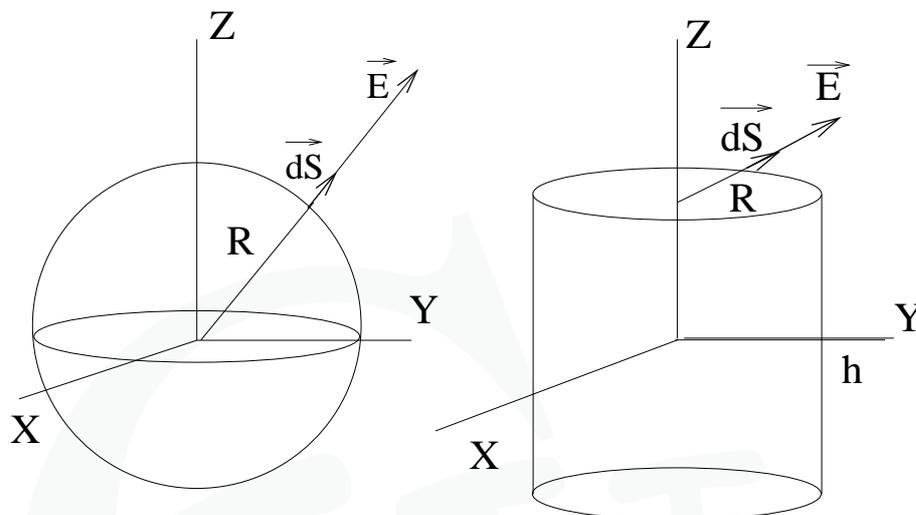


Figura 5.3: Ejemplos de campos eléctricos que verifican $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$: a través de una esfera (derecha) y de una superficie cilíndrica (izquierda).

sencilla, casi siempre cilíndrica o esférica. El concepto de **simetría** es uno de los más importantes en Física, y permitirá simplificar enormemente muchos problemas. Diremos que la distribución de carga tiene **simetría cilíndrica** si: 1) es invariante bajo **rotaciones alrededor de algún eje**, que se conoce como **eje de revolución** y 2) es invariante bajo **traslaciones a lo largo de dicho eje**. Por ejemplo, un hilo infinito y rectilíneo, cargado uniformemente, tiene simetría cilíndrica porque es invariante bajo rotaciones alrededor del eje que contiene al mismo hilo y bajo traslaciones a lo largo de dicho eje. De igual modo, si distribuimos carga uniformemente en un cilindro infinito, ésta es invariante bajo rotaciones alrededor del eje generatriz del cilindro y bajo traslaciones a lo largo del mismo eje.

Diremos que la distribución de carga tiene **simetría esférica** si es invariante bajo rotaciones alrededor de **cualquier eje** que atraviese un punto, conocido como **centro**. Por ejemplo, en el caso de una distribución de carga uniforme en una esfera maciza, la distribución es invariante bajo rotaciones alrededor de cualquier eje que pase por el centro de la esfera. Lo mismo puede decirse de una distribución de carga uniforme sobre una cascará esférica.

¿Cómo se utiliza ahora este teorema para calcular el campo creado por una distribución de carga dada con este tipo de simetrías? Pues la estrategia se basa en hacer uso de la siguiente propiedad: si la distribución tiene simetría esférica o cilíndrica, entonces el

módulo del campo eléctrico que crea solo puede depender de r :

$$|\vec{E}(\vec{r})| = E(r) \quad (5.8)$$

siendo r la distancia al centro en el caso esférico, y la distancia al eje en el cilíndrico. Veamos como utilizarla con dos ejemplos:

5.3.1 Ejemplo: simetría cilíndrica: Campo creado por un hilo cargado infinito con densidad de carga lineal uniforme λ

El problema tiene simetría cilíndrica, ya que cualquier rotación alrededor del eje que contiene al hilo deja el problema invariante. Ahora, es importante darse cuenta de que el campo creado por el hilo en cualquier punto del espacio, \vec{r} , está dirigido necesariamente en la dirección radial respecto al eje formado por el hilo. Para verlo, basta con pensar en que la componente del campo eléctrico no dirigida en la dirección radial, creada por cualquier elemento de longitud del hilo que esté por encima del plano que contiene al punto, será cancelado por el elemento simétrico respecto a dicho plano que esté por debajo de éste (ver Fig. 5.4). Por lo tanto, sólo nos resta calcular su módulo. Debido a la simetría cilíndrica de la distribución hacemos uso de que $|\vec{E}(\vec{r})| = E(r)$: es decir, el campo tendrá igual módulo en todos aquellos puntos que estén a la misma distancia del eje. Estos puntos forman una superficie cilíndrica de radio r , cuyo eje coincide con el hilo. El flujo a través de ella será entonces:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)2\pi r h \quad (5.9)$$

Y como la carga contenida en dicho cilindro será:

$$Q_S = \lambda h \quad (5.10)$$

Luego $E(r) = \lambda/(2\epsilon_0\pi r)$

5.3.2 Ejemplo: simetría esférica: Campo creado por una esfera cargada con densidad de carga de volumen ρ .

El problema tiene simetría esférica, ya que si rotamos la esfera alrededor de cualquier eje que pase por el centro de la misma, se mantiene invariante. Por lo tanto, para calcular el campo eléctrico que pase por un punto cualquiera cogemos una esfera que pase por dicho punto y que este centrada en el centro de la esfera cargada. El campo eléctrico va a tener dirección radial desde el centro de la esfera cargada. Esto puede verse por argumentos de

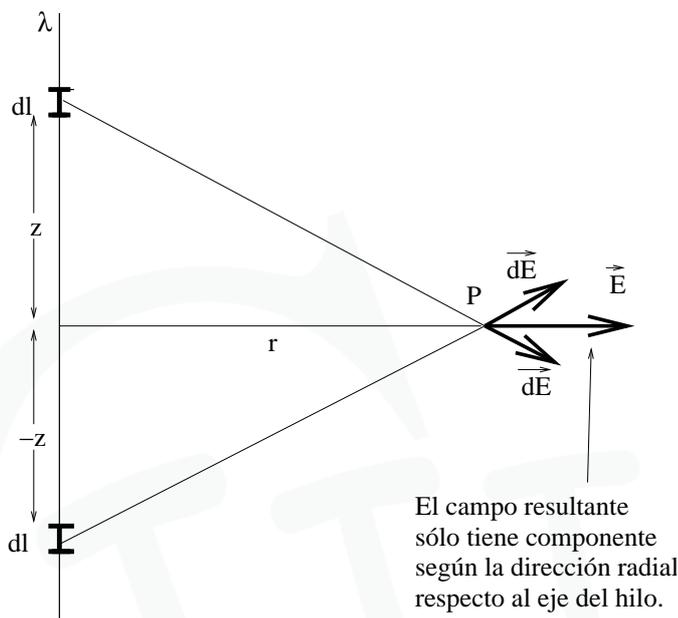


Figura 5.4: Cancelación de las componentes no-radiales del campo eléctrico creado por un hilo infinito

simetría parecidos a los del caso del hilo infinito. Nos resta por tanto calcular el módulo del campo en cada punto. Pero gracias a la simetría sabemos que de nuevo $|\vec{E}(\vec{r})| = E(r)$. Por lo tanto el campo vale lo mismo en aquellos puntos que esten a la misma distancia del centro, o lo que es lo mismo, sobre una esfera de radio r . El flujo del campo eléctrico a través de esta esfera de radio r será:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)4\pi r^2 \quad (5.11)$$

La carga contenida en la esfera será, sin embargo, diferente si $r > R$ o $r < R$. Si $r > R$, toda la carga de la esfera cargada está dentro de la segunda esfera:

$$Q_s = Q = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (5.12)$$

Si $r < R$, entonces tendremos que solo parte de la carga de la esfera cargada estará dentro de la segunda esfera. Podemos calcularla por una regla de tres, sabiendo que en una esfera de radio R hay una carga total Q , en una de radio r tendremos:

$$Q_s = Q \left(\frac{4\pi}{3} r^3 \right) / \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (5.13)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\rho = Q / (\frac{4\pi}{3}R^3)$.

Por tanto, al aplicar el teorema de Gauss igualando la Eq. 12 con la 13 ó la 14, tendremos dos valores diferentes para el módulo del campo, $E(r)$, según queramos calcularlo en un punto que esté dentro o fuera de la esfera cargada:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho \frac{4\pi}{3} R^3}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}, & r > R \\ \frac{\rho \frac{4\pi}{3} r^3}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, & r < R \end{cases} \quad (5.14)$$

Capítulo 6

EL POTENCIAL ELECTRICO

Al igual que en Mecánica se puede asociar a toda fuerza conservativa una energía potencial, se puede asociar a la interacción eléctrica descrita por la Fuerza de Coulomb una energía potencial eléctrica.

6.1 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

El campo de fuerzas asociado a la interacción de Coulomb entre cargas eléctricas, dado por

$$\vec{F}(\vec{r}) = K \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (6.1)$$

es un campo conservativo. Esto puede comprobarse utilizando el criterio del determinante mencionado en la Introducción a la Mecánica. Por lo tanto, es posible encontrar una función energía potencial, $U(\vec{r})$, que verifique que $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$. La forma de esta energía potencial eléctrica viene dada por:

$$U(\vec{r}) = K \frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.2)$$

como puede comprobarse sin más que aplicar el operador gradiente sobre la función anterior.

Esta función energía potencial eléctrica U verificará todos los resultados vistos en la introducción de la sección anterior. En particular, **el principio de conservación de la energía mecánica**, que se definirá ahora como:

$$E_{mec}(\vec{r}) = E_k(\vec{r}) + U(\vec{r}). \quad (6.3)$$

y el **principio de superposición de energías potenciales**, que establece que la energía potencial total en un punto del espacio, será igual a la suma de todas las energías potenciales individuales que existan en dicho punto.

•EJEMPLO: Consevación de la energía mecánica en el movimiento de una partícula cargada en presencia de otra.

Supongamos que tenemos una partícula de carga $q' = 2C$ fija en el origen. Si se abandona una carga $q = 10\mu C$ de masa $m = 1.6 \times 10^{-23} \text{kg}$ en el punto $A = (2, 3, 0)$, cual será su velocidad cuando su distancia al origen sea el doble de la inicial?

La distancia inicial de la carga q del origen será: $d_A = |(2, 3, 0)| = \sqrt{13}$. Luego queremos saber la velocidad cuando esté en un punto B que diste $d_B = 2\sqrt{13}$ del origen. Como la fuerza está dirigida según la recta que une ambas cargas, el punto B estará en la recta que pasa por A y por el origen. Puesto que ha de conservarse la energía mecánica de la carga, tiene que cumplirse que:

$$E_k^A + U(A) = E_k^B + U(B) \Rightarrow 0 + K \frac{qq'}{d_A} = \frac{mv_B^2}{2} + K \frac{qq'}{d_B} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{m}{2} \left(K \frac{qq'}{d_A} - K \frac{qq'}{d_B} \right)} \quad (6.4)$$

•EJEMPLO: Aplicación del principio de superposición de potenciales en el cálculo de la energía potencial de una carga en presencia de un conjunto de cargas fijas.

Supongamos que tenemos una carga $q_1 = 2C$ fija en el origen y una segunda carga $q_2 = -1C$ fija en el punto $P = (2, 1, -2)$. ¿Cuál será la energía potencial de una carga $q = 3\mu C$ situada en el punto $A = (3, 1, 0)$?

La energía potencial de la carga q será igual a la suma de la energía potencial que tendría si solo existiese la carga en el origen,

$$E_p^1(A) = K \frac{qq_1}{d_{OA}}, \quad (6.5)$$

y la energía potencial que tendría si solo existiese la carga en P :

$$E_p^2(A) = K \frac{qq_2}{d_{PA}}, \quad (6.6)$$

La distancia entre el punto A y el origen es:

$$d_{OA} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}, \quad (6.7)$$

mientras que la distancia entre el punto A y P es:

$$d_{PA} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-1)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{5}. \quad (6.8)$$

6.2 POTENCIAL ELÉCTRICO

Es importante recordar que, en el tema sobre el Campo Eléctrico, se hizo necesario la introducción del **campo eléctrico** para evitar problemas de tipo físico relativos a la propagación de las interacciones eléctricas. Del mismo modo que, asociada al concepto de fuerza aparece de manera natural el de energía potencial, vamos a introducir ahora el concepto de **potencial eléctrico** asociado al de campo eléctrico. Veremos que se usa del mismo modo que éste: si queremos saber la fuerza que una carga q experimenta en un punto, multiplicamos el campo eléctrico existente en dicha posición por la carga; análogamente, si queremos saber la energía potencial que tiene una carga por el hecho de estar en una determinada posición, multiplicaremos el potencial eléctrico por la carga.

Recordemos la forma matemática en que introdujimos el **campo eléctrico**. Para ello, lo definíamos la fuerza por unidad de carga creada por la carga q' en cada punto del espacio (y recordar que existía desde siempre, con indiferencia a la existencia de una segunda carga que recibiese la fuerza, lo que arreglaba los problemas de propagación de la interacción):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})/q = K \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (6.9)$$

Una vez conocido el campo creado por q' en cada punto, se calculaba la fuerza que aparecería sobre una carga q situada en un punto r usando que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (6.10)$$

Del mismo modo, el **potencial eléctrico**, V , creado por la carga q' en cada punto se define como la energía potencial eléctrica adquirida por unidad de carga:

$$V(\vec{r}) = U(\vec{r})/q = K \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.11)$$

De este modo, análogamente a lo que pasaba con el campo eléctrico, la energía potencial eléctrica que adquiere una carga q al situarse en un punto r será:

$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}). \quad (6.12)$$

6.3 POTENCIAL ELÉCTRICO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

De manera análoga a como calculábamos el campo creado por una distribución continua de carga, aplicando el principio de superposición, puede obtenerse el potencial eléctrico creado por una distribución continua de carga aplicando el principio de superposición de potenciales.

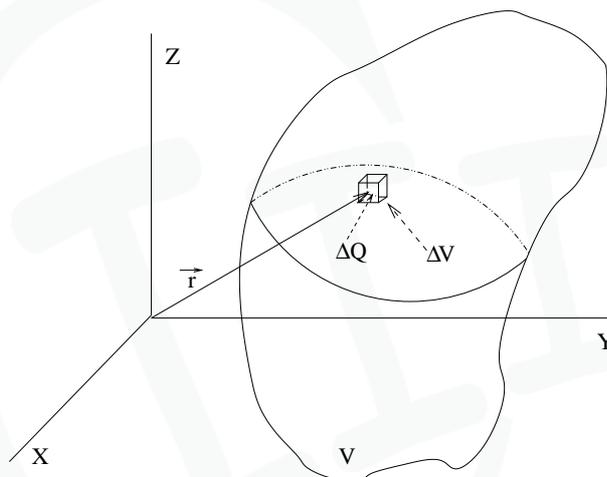


Figura 6.1: División de un volumen en diferenciales.

Si volvemos a suponer, como en el tema sobre el Campo Eléctrico, que la carga está repartida en un volumen V' de acuerdo a una densidad de volumen $\rho(\vec{r}')$ (ver Fig. 6.3). Dividiendo el volumen en pequeños diferenciales de volumen, $\Delta V'$, tan pequeños que podamos describir su posición mediante un vector \vec{r}' , la carga contenida en cada uno de esos diferenciales será $\Delta q' = \rho(\vec{r}')\Delta V'$. El potencial que este pequeño diferencial crea en el punto \vec{r} será, usando la Eq. 6.11:

$$\Delta V(\vec{r}) = K \frac{\rho(\vec{r}')\Delta V'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.13)$$

Por lo tanto, aplicando el principio de superposición de potenciales, el potencial total creado por el volumen V' en el punto \vec{r} será la suma (integral) de los potenciales creados por cada uno de los diferenciales $\Delta V'$ que conforman el volumen:

$$V(\vec{r}) = K \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (6.14)$$

En el caso de que la carga esté distribuída sobre una superficie, S' , sobre la que hay definida una distribución superficial de carga, $\sigma(\vec{r}')$, tendremos que:

$$V(\vec{r}) = K \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \quad (6.15)$$

Y si la carga está distribuída sobre una línea, C' , sobre la que hay definida una densidad lineal de carga, $\lambda(\vec{r}')$, calculamos el potencial usando:

$$V(\vec{r}) = K \int_{C'} \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr'. \quad (6.16)$$

Muchas veces es más fácil calcular el potencial eléctrico creado por la distribución que calcular directamente el campo eléctrico creado por ésta usando las expresiones derivadas en el tema sobre el Campo Eléctrico. Una vez calculado, puede obtenerse el campo sin más que calcular el gradiente de $V(\vec{r})$.

6.4 CÁLCULO DE POTENCIALES ELÉCTRICOS

Sin embargo, nosotros no utilizaremos las expresiones dadas por las Eqs. 6.14-6.16. La mayoría de las veces, los problemas tienen suficiente simetría como para obtener directamente el campo eléctrico usando el teorema de Gauss. Mostraremos, en esta sección, como puede calcularse el potencial en esos casos.

6.4.1 Problemas con simetría cilíndrica o esférica

Lo que simplifica el cálculo del potencial en estos casos es el que el campo va siempre dirigido en una dirección dada. Así, en el caso de simetría cilíndrica o esférica, el campo solo depende de la distancia al eje o centro de simetría, y va dirigido en la dirección **radial**. Entonces puede obtenerse el potencial calculando la integral:

$$V(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr \quad (6.17)$$

donde r_0 es el punto arbitrario donde queramos que el potencial sea cero.

La explicación del porqué de esta fórmula es que, en casos de simetría esférica o cilíndrica, el campo y el potencial eléctrico sólo pueden depender de r . En ese caso, puede verse que hacer actuar al operador gradiente sobre $V(r)$ es equivalente a calcular:

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \frac{dV(r)}{dr} \vec{u}_r \quad (6.18)$$

donde \vec{u}_r es el vector radial cilíndrico o esférico. Por lo tanto, se cumple que $E(r) = -dV/dr$, e invirtiendo la igualdad multiplicando ambos miembros por dr e integrando se obtiene la Eq. 6.17.

•EJEMPLO: Potencial eléctrico creado por un cilindro infinito de radio R , cargado homogéneamente con densidad de carga ρ .

Primero necesitamos calcular el campo en las dos regiones $r > R$ y $r < R$. Como vimos en el tema sobre el Campo Eléctrico, el problema tiene simetría cilíndrica y el campo dirección radial. Por lo tanto, cogiendo como gaussianas cilindros infinitos de radio r , y aplicando el teorema de Gauss, tenemos que para $r < R$:

$$E(r)2\pi r h = \rho\pi r^2 h/\epsilon_0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\vec{u}_r. \quad (6.19)$$

Para $r > R$, toda la carga del cilindro está contenida dentro de la gaussiana, así que:

$$E(r)2\pi r h = \rho\pi R^2 h/\epsilon_0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}\vec{u}_r. \quad (6.20)$$

Para calcular el potencial, y cogiendo $r_0 = 0$, tenemos que para $r < R$:

$$V(r) = -\int_0^r \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} \quad (6.21)$$

mientras que para $r > R$,

$$V(r) = -\int_0^R \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr - \int_R^r \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} dr = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} [\ln(r)]_R^r = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} + \ln(r/R) \right]. \quad (6.22)$$

Y fijarse como ambas expresiones dan el mismo valor de potencial si $r = R$ y que $V(0) = 0$, ya que escogimos $r_0 = 0$.

6.4.2 Problemas con simetría de traslación

En algunos problemas existe simetría de traslación respecto de dos de los ejes coordenados (por ejemplo, en el caso de un plano infinito). Supongamos que sean los ejes X e Y . El campo eléctrico y el potencial eléctrico sólo pueden entonces depender de la coordenada z . Esto implica que el campo eléctrico sólo tenga componente z , ya que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial V(z)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V(z)}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V(z)}{\partial z}\vec{k} = -\frac{\partial V(z)}{\partial z}\vec{k}. \quad (6.23)$$

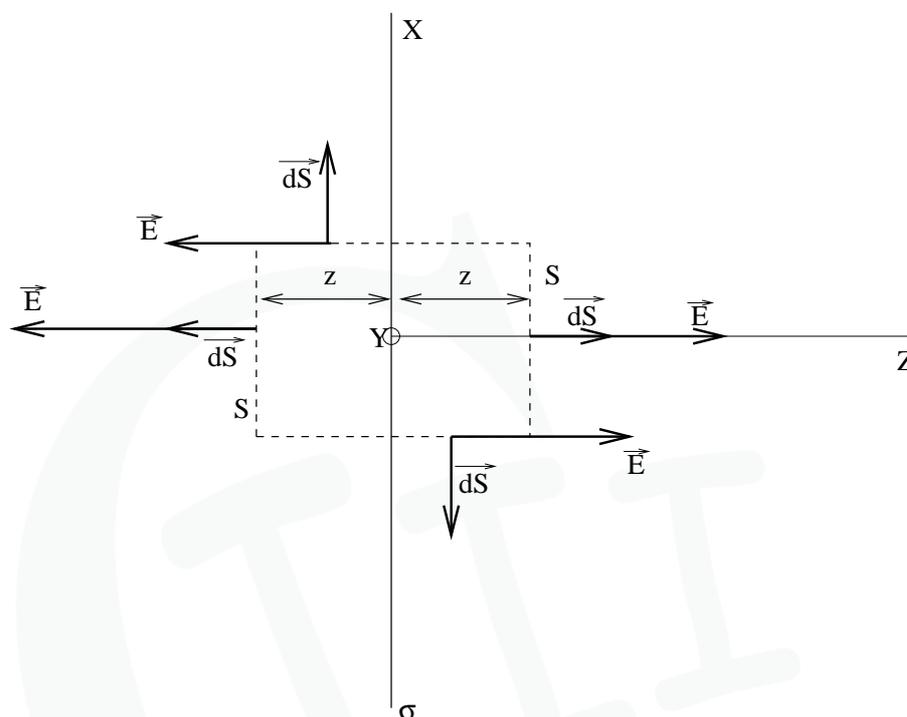


Figura 6.2: Problema del plano infinito cargado uniformemente.

Por lo tanto tenemos que $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\vec{k} = -dV(z)/dz\vec{k}$. Por lo tanto, igualando los módulos de ambos lados de la igualdad, multiplicando por dz e integrando tenemos que:

$$V(z) = - \int_{z_0}^z E_z(z) dz, \quad (6.24)$$

siendo $z = z_0$ el plano donde el potencial se anula.

•EJEMPLO: Potencial eléctrico creado por un plano infinito cargado homogéneamente con densidad superficial de carga σ .

Como ya se ha visto en clase, el campo creado por un campo infinito se puede calcular usando el teorema de Gauss. Para ello, tomamos coordenadas de manera que los ejes X e Y estén contenidos en el plano, y el eje Z nos de la distancia perpendicular a él. El campo creado por el plano será perpendicular al plano y dependerá solo de z , ya que tenemos simetría de traslación a lo largo de los ejes X e Y (ver teoría en esta misma

sección). Para calcular el campo escogemos como gaussiana un paralelepípedo, formado por dos caras rectangulares de área S , paralelas al plano y que distan de éste $\pm z$, y cerrado por cuatro caras rectangulares perpendiculares al plano (ver Fig. 6.4.2). Puesto que el campo es paralelo a las cuatro caras perpendiculares al plano, el flujo a través de ellas es cero. El flujo a través de las dos caras paralelas al plano será idéntico, ya que ambas están a la misma distancia del plano. Por lo tanto tenemos que, aplicando el teorema de Gauss, el módulo del campo vale:

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (6.25)$$

y va dirigido hacia fuera del plano. Es decir, en dirección $+\vec{k}$ para $z > 0$, y en dirección $-\vec{k}$, para $z < 0$.

Sin embargo para aplicar la Eq. 6.24, hemos de usar la componente z del campo, que se relaciona con el módulo como $E_z(z) = E(z) = \sigma/2\epsilon_0$ para $z > 0$:

$$V(z) = - \int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}, \quad (6.26)$$

y $E_z(z) = -E(z) = -\sigma/2\epsilon_0$, para $z < 0$:

$$V(z) = - \int_0^z \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) dz = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}, \quad (6.27)$$

Observese de nuevo que el potencial que se obtiene para $z = 0$ es el mismo para ambas expresiones, e igual a cero, ya que escogimos $z_0 = 0$.

Capítulo 7

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

7.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA

7.1.1 Energía cinética

Se define la **energía cinética** de un cuerpo de masa m que se mueva con velocidad \vec{v} como:

$$E_k \equiv \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{mv^2}{2} \quad (7.1)$$

Por tanto, la energía cinética es una función *positiva y creciente* del **módulo** de la velocidad. Puesto que las leyes de Newton nos aseguran que un cuerpo **únicamente** puede cambiar su vector velocidad bajo la acción de una fuerza, es necesaria la presencia de una fuerza para que la energía cinética cambie. Sin embargo, es importante notar que no toda fuerza provoca un cambio de energía cinética, ya que ésta es sólo función del módulo de la velocidad, no de su dirección. Por ejemplo, en el caso del movimiento circular, existe una fuerza que modifica la dirección del vector velocidad continuamente para que el cuerpo se mantenga sobre la trayectoria circular. El módulo de la velocidad permanece en cambio constante, con lo que la energía cinética es siempre la misma.

7.1.2 Concepto de trabajo

El significado físico de la magnitud llamada **trabajo realizado por una fuerza o campo de fuerzas** es igual el cambio en la energía cinética experimentado por una partícula que se mueve bajo la acción de dicha fuerza o campo de fuerzas. Por lo tanto, el trabajo realizado cuando una partícula se desplaza del punto A al punto B es igual, si es positivo, al aumento de la energía cinética de la partícula (por ejemplo, cuando se

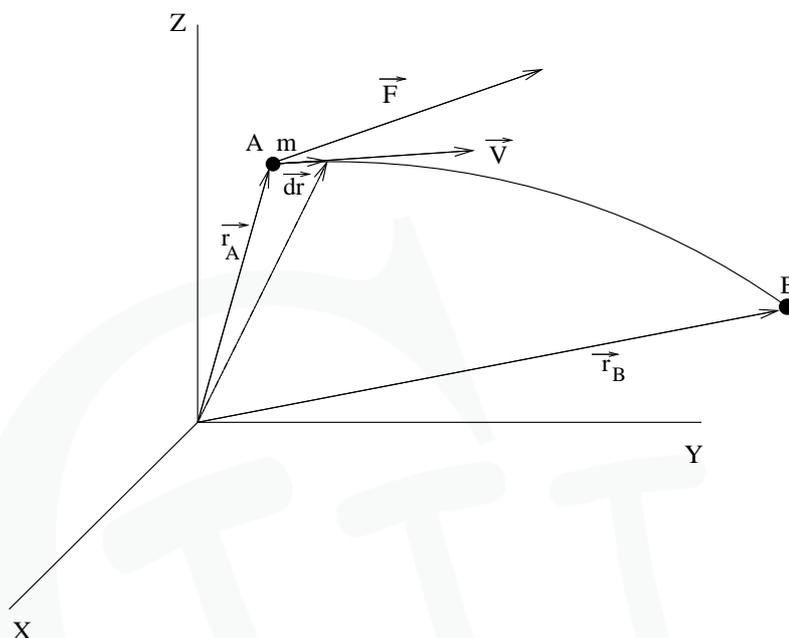


Figura 7.1: Definición de trabajo realizado por un campo de fuerzas.

deja caer una piedra en el campo gravitatorio terrestre), y si es negativo, es igual a la energía cinética que pierde la partícula, y que hace que esta disminuya su velocidad (por ejemplo, si la piedra se tira hacia arriba). Si el trabajo realizado es nulo, implica que no existe cambio alguno de energía cinética (como en el caso del movimiento circular antes mencionado).

El cálculo matemático de este trabajo es sin embargo algo más complicado. Se hace mediante la expresión (que usualmente se usa como definición formal del mismo):

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.2)$$

que nos da el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ cuando la masa m se desplaza desde el punto A al B (ver Fig. 14). ¿Y por qué la Eq. 7.2 equivale al cambio en la energía cinética del cuerpo al moverse entre los puntos A y B ,

$$\Delta E_k^{AB} = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2)? \quad (7.3)$$

Pues porque usando la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m d\vec{v}/dt$, podemos reescribir la

Eq. 7.2 como:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= m \int_A^B d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \int_A^B d\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}\right) = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2). \end{aligned} \quad (7.4)$$

●**EJEMPLO: Movimiento paralelo a la fuerza: Movimiento rectilíneo**

Supongamos una granada de 10kg que se deja caer verticalmente desde una altura de 30m bajo la acción de la gravedad. ¿Cuál es el trabajo que realiza la gravedad (o lo que es lo mismo, cuanta energía cinética gana la granada al caer en el campo gravitatorio) desde el punto en que se deja caer hasta que cae al suelo?

Puesto que la fuerza que actúa es el peso, $\vec{F} = -mg\vec{j}$, y la trayectoria que sigue la granada es paralela al eje de las Y, tenemos que $d\vec{r} = dy\vec{j}$. Por lo tanto, usando la Eq. 7.2:

$$W = \int_{y=30}^{y=0} (-mg\vec{j}) \cdot dy\vec{j} = -mg \int_{y=30}^{y=0} dy = -mg(0 - 30) = 3000J. \quad (7.5)$$

Si calculamos el incremento de energía cinética directamente, sabiendo que la velocidad inicial en $y = 30$ es nula, y que la velocidad final en $y = 0$ es $v^2(y = 0) = 2 \times g \times 30$ (usando la siguiente fórmula válida para un movimiento uniformemente acelerado $v^2 - v_0^2 = 2as$, con a es la aceleración, s el espacio recorrido, y v y v_0 la velocidad final e inicial, respectivamente), tenemos que:

$$\Delta E_k = \frac{30}{2} 2 * 10 * 30 - 0 = 3000J, \quad (7.6)$$

confirmándose de nuevo el significado físico del trabajo.

Es importante darse cuenta que si, en lugar de dejarla caer desde 30m de altura, la lanzamos hacia arriba con velocidad inicial $v = \sqrt{600}m/s$, la granada no se parará hasta alcanzar los 30m (es el problema inverso al anterior). En ese caso, el campo gravitatorio reduce la energía cinética de la partícula, ya que:

$$\Delta E_k = 0 - \frac{30}{2} 600 = -3000J, \quad (7.7)$$

que también se obtiene usando la definición del trabajo, sin más que darse cuenta que viene dado por la ecuación Eq. 7.5 con los límites de integración intercambiados (recordad que el signo de la integral cambia al intercambiar sus límites de integración).

•EJEMPLO: Movimiento perpendicular a la fuerza: Movimiento circular

Consideremos la Luna, rotando alrededor de la tierra a una distancia d_{TL} . ¿Cuál es el trabajo realizado por la atracción gravitatoria terrestre sobre la luna suponiendo la órbita de la primera alrededor de la segunda perfectamente circular?

Puesto que la fuerza que actúa es la gravedad:

$$\vec{F}_g = G \frac{M_T m_l}{d_{TL}^2} \vec{u}_r, \quad (7.8)$$

donde \vec{u}_r es el vector radial unitario en cada punto del espacio con dirección dada por la recta que une dicho punto al centro de la Tierra y sentido alejándose de éste. La trayectoria de la Luna es una circunferencia de radio d_{TL} centrada en el centro de la Tierra, y por lo tanto, $\vec{dr} \perp \vec{F}_g$ en todos los puntos de su trayectoria. Por lo tanto,

$$W = \oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0, \quad (7.9)$$

que coincide con el incremento de energía cinética de la Luna en su movimiento rotatorio alrededor de la Tierra, puesto que la velocidad de ésta se mantiene (muy aproximadamente) constante (¡si no, la luna llena no aparecería cada 28 días!).

7.1.3 Fuerzas conservativas

Existe una clase particular de campos de fuerzas, entre las que se engloban las fuerzas eléctricas, que se caracterizan porque el trabajo realizado sólo depende del punto inicial y final de la trayectoria por la que se desplace el cuerpo sobre el que se ejerce la misma. Es decir, la velocidad del cuerpo en el punto final es la misma, independientemente de la trayectoria que se haya seguido para llegar a él, siempre que se parta del mismo punto inicial y con la misma velocidad inicial. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo de fuerzas cuando una partícula describe una trayectoria cerrada (es decir, en la que el punto inicial y final coinciden) será cero, ya que entonces $E_k^A = E_k^B$ por ser $A = B$. A estas fuerzas o campos de fuerzas se les llama **conservativas**.

Es importante notar que no todas las fuerzas son conservativas. Por ejemplo, una rueda no llega con la misma velocidad a un punto que diste 15m del punto de lanzamiento si, por ejemplo, se hace que ruede hasta allí, o si se lanza por el aire siguiendo una trayectoria parabólica, aunque el módulo de la velocidad inicial sea la misma en ambos casos. El rozamiento entre la rueda y el suelo hace que la velocidad con que llega en el primer caso sea mucho menor. Ciertamente, las fuerzas de rozamiento son uno de los ejemplos más típicos de fuerzas no conservativas.

7.1.4 Energía potencial

¿Cómo se sabe si un campo de fuerzas, $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo o no? Asegurarse de que el trabajo al mover una masa entre dos puntos sólo depende de éstos, y no del camino que se sigue es irrealizable en la práctica, puesto que hay infinitas elecciones para los puntos inicial y final, y también para los caminos que los unen. Ha de recurrirse a las matemáticas. Éstas nos aseguran que:

A) $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si y solo si, existe un **campo escalar** $U(\vec{r})$, que se llamará **energía potencial** y que verifica que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) \equiv -\nabla U(\vec{r}) \quad (7.10)$$

Al operador ∇ se le llama **gradiente**, y es un operador que actúa sobre un campo escalar (en este caso, $U(\vec{r})$), para dar un campo vectorial (aquí, $\vec{F}(\vec{r})$).

¿Por qué el hecho de poder expresar $\vec{F}(\vec{r})$ como el gradiente de un campo escalar $U(\vec{r})$ garantiza que el campo de fuerzas es conservativo? Pues porque entonces:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = - \int_A^B dU = U(A) - U(B). \quad (7.11)$$

y por tanto, tenemos que el trabajo realizado sólo depende de los puntos inicial y final.

Es importante notar que a la función potencial $U(r)$ se le puede sumar una constante arbitraria, U_o , sin que cambie el campo de fuerzas $\vec{F}(r)$ que se obtiene al calcular el gradiente de U . ¿Por qué? Pues porque el gradiente es una derivada (bueno, tres!), y la derivada de una constante es siempre cero. Ese es el motivo por el que uno puede escoger el origen de potenciales (es decir, el punto donde cogemos $U = 0$) arbitrariamente. Basta con restar a la función $U(r)$ el valor de ésta en el punto, \vec{r}_0 donde queramos que el potencial valga cero. Es decir, hacer $U_o = -U(\vec{r}_0)$. (ver el ejemplo al final de esta sección para un ejemplo de esto.)

B) Existe un criterio matemático para determinar si un campo de fuerzas es conservativo o no, sin necesidad de encontrar una función energía potencial $U(\vec{r})$. Para ello, basta con formar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (7.12)$$

Si el vector resultante de resolver este determinante es nulo, el campo \vec{F} es conservativo. Si no, no lo es.

•**EJEMPLO:** ¿Es el campo $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 - y, 2z - x^3, 4/y^2 + x)$ conservativo?

Para ello, formamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 - y & 2z - x^3 & 4/y^2 + x \end{vmatrix} = (-8y^{-3} - 2)\vec{i} + (0 - 1)\vec{j} + (-3x^2 - (-1))\vec{k} \neq 0, \quad (7.13)$$

luego no es un campo conservativo.

7.1.5 Conservación de la Energía

En el caso de un campo de fuerzas conservativa, sabemos que existe una función escalar, la **energía potencial** U , que permite expresar el trabajo realizado por el campo de fuerzas al mover una partícula entre los puntos A y B como:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(A) - U(B). \quad (7.14)$$

Pero también sabemos que el trabajo realizado sobre una partícula que se mueve entre dos puntos es igual al cambio en la energía cinética sufrido por la partícula:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_k(B) - E_k(A). \quad (7.15)$$

Igualando ambas expresiones tenemos que:

$$E_k(B) - E_k(A) = U(A) - U(B) \quad (7.16)$$

y pasando a izquierda y derecha todo lo que depende del punto inicial A o del final B , se obtiene el **principio de conservación de la energía mecánica**:

$$E_k(A) + U(A) = E_k(B) + U(B) \quad (7.17)$$

A la suma de energía potencial y energía cinética en cada punto se le conoce como **energía mecánica**, y en un campo conservativo se cumple siempre que **la energía mecánica de una partícula es constante**.

•**EJEMPLO:** Caída libre en un campo gravitatorio

Volviendo al ejemplo anterior de la granada de 10kg que se deja caer verticalmente desde 30m bajo la acción de la gravedad, podemos calcular el trabajo realizado por la gravedad teniendo en cuenta que la energía potencial gravitatoria viene dada por $U = mgy$, ya que si hacemos su gradiente para obtener la fuerza gravitatoria tenemos que:

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) = (0, -mg, 0) = -mg\vec{j}. \quad (7.18)$$

Y fijarse que podemos escoger el origen $y = 0$ donde queramos, ya que el potencial da lugar a la misma fuerza si se le suma una constante. Luego si quisieramos que el potencial fuera cero en $y = 3$, basta con restarle a la función anterior el valor de U en $y = 3$, y usar como nuevo potencial: $U' = U - m * g * 3$. Si se calcula el \vec{F} producido por U' , veremos que es el mismo de antes.

Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo gravitatorio será igual al valor de la energía potencial en $y = 30$ m menos el valor en $y = 0$ m:

$$W = mgy_A - mgy_B = 30 * 10 * 30 - 30 * 10 * 0 = 3000J \quad (7.19)$$

que coincide con los valores obtenidos anteriormente.

La aplicación más útil del principio de conservación de la energía es, por ejemplo, el cálculo de la velocidad con la que llega la granada al suelo, ya que:

$$E_k(A) + U(A) = E_k(B) + U(B) \Rightarrow 0 + mgy_A = \frac{mv_B^2}{2} + 0 \Rightarrow v_B = \sqrt{2 * g * y_A} = \sqrt{600}, \quad (7.20)$$

que coincide con el valor obtenido anteriormente usando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado que sigue la granada en su caída.

7.1.6 Principio de superposición para la energía potencial

De todos es sabido que, si existen simultáneamente varios campos de fuerzas, $\vec{F}_i(\vec{r})$ con $i = 1, \dots, N$, la fuerza total que recibe una partícula situada en el punto \vec{r} es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas existentes en dicho punto:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i(\vec{r}) \quad (7.21)$$

Ahora bien. Si dichas fuerzas son conservativas, existirán N funciones energía potencial, $U_i(\vec{r})$, con $i = 1, \dots, N$, que verificarán que cada fuerza se escriba como gradiente de ellas: $\vec{F}_i(\vec{r}) = -\nabla U_i(\vec{r})$.

Por lo tanto, se cumplirá que la fuerza total que recibe la partícula en el punto \vec{r} verifica que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N F_i(\vec{r}) = - \sum_{i=1}^N \nabla U_i(\vec{r}) = -\nabla \left[\sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}) \right] = -\nabla U(\vec{r}). \quad (7.22)$$

Por tanto, se puede hablar de que la energía potencial también verifica el principio de superposición, de manera que la energía potencial total en un punto (de la que se calcula la fuerza total haciendo el gradiente) es igual a la suma de las distintas energías potenciales individuales que estén definidas en dicho punto, independientemente del tipo de fuerza al que estén asociadas (por ejemplo, ya sea la gravedad o una fuerza eléctrica).

7.2 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

7.2.1 Simil mecánico: almacenamiento de energía en un campo gravitatorio

Consideremos por un momento el siguiente símil mecánico. Supongamos que queremos subir una enorme piedra, inicialmente en reposo, por una pendiente, hasta un llano situado en lo más alto de la misma (ver Fig. 7.2.1). Para hacerlo, tenemos que aplicar una fuerza externa, \vec{F} , que venza la oposición de la fuerza de la gravedad y del rozamiento. Fijaros que la energía potencial de la piedra ha aumentado en el proceso:

$$\Delta U = mg(h_B - h_A) > 0. \quad (7.23)$$

y que dicha energía ha sido suministrada por la fuerza externa.

Sin embargo, esta energía "almacenada" en la piedra en forma de energía potencial, puede "recuperarse" fácilmente (por recuperarse, entendemos convertirse a otro tipo de energía, como pueda ser energía cinética). Si ahora, con un breve empujón, ponemos la piedra en el comienzo de la pendiente, ésta caerá hacia abajo, y volverá a la altura h_A , donde tendrá una velocidad:

$$v_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)} > 0, \quad (7.24)$$

como se obtiene trivialmente de aplicar el teorema de la conservación de la energía mecánica. Fijaros que la energía potencial de la piedra ha disminuido en el proceso:

$$\Delta U = mg(h_A - h_B) < 0, \quad (7.25)$$

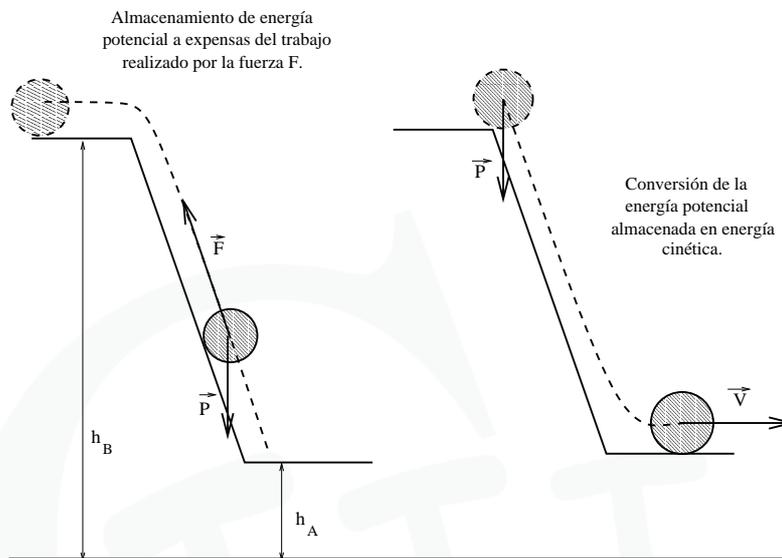


Figura 7.2: Movimiento en el campo gravitatorio.

habiéndose convertido ΔU en energía cinética, sin que haya sido necesaria para ello la contribución de fuerza externa alguna.

Lo anterior no es sino un ejemplo de una situación común a cualquier campo conservativo: es necesaria la participación de una fuerza externa para mover una partícula, inicialmente en reposo, hacia posiciones con **mayor energía potencial**. Sin embargo, las partículas se mueven **espontáneamente hacia lugares de menor energía potencial**, a menos que exista una fuerza que las retenga. En el ejemplo anterior, la fuerza normal del suelo es la que sostiene a la piedra en las posiciones A ó B , a pesar de que existan posiciones con menor potencial gravitatorio (todas las $h < h_A$, como se puede ver en la Fig. 7.2.1).

7.2.2 Energía electrostática

La fuerza de Coulomb es también una fuerza conservativa. Por lo tanto, también es posible almacenar energía proveniente de una fuerza externa en forma de energía potencial eléctrica, forzando a las cargas a permanecer en posiciones que no correspondan a mínimos de la energía potencial. Por ejemplo, consideremos el campo eléctrico creado por una carga

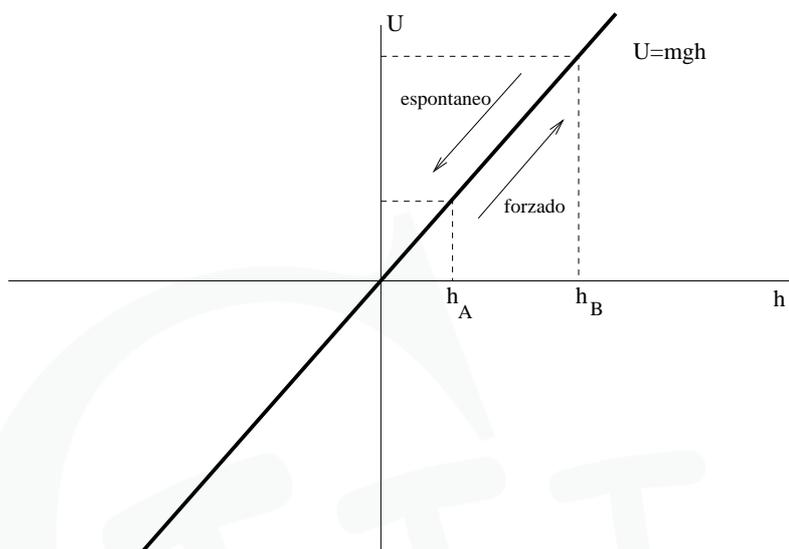


Figura 7.3: Potencial gravitatorio.

q_1 , situada en el punto \vec{r}_1 . A este campo se le asocia un potencial eléctrico dado por:

$$V_1(\vec{r}) = K \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (7.26)$$

Si colocamos ahora una carga q_2 en un punto arbitrario, \vec{r}_2 , ésta adquiere una energía potencial eléctrica dada por:

$$U_2(\vec{r}_2) = q_2 V_1(\vec{r}_2) = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (7.27)$$

Si ambas cargas tienen el mismo signo, entonces $q_1 q_2 > 0$ y por tanto la energía potencial eléctrica de q_2 será positiva y tanto mayor cuanto más juntas estén ambas cargas, tendiendo a cero cuando la separación tiende a infinito; si tienen diferente signo, y por tanto, $q_1 q_2 < 0$, será negativa y tanto mayor cuanto más separadas estén las cargas, tendiendo otra vez a cero cuando la separación tienda a infinito (ver Fig. 7.2.2 y compararla con Fig. 7.2.1). Esto implicaría que, abandonada q_2 a su suerte, ésta se movería **espontáneamente** alejándose de q_1 en el primer caso y acercándose hacia q_1 en el segundo, a menos que exista una fuerza externa que la mantenga en \vec{r}_2 (es importante notar que este comportamiento es precisamente lo esperable, puesto que sabemos que cargas de igual signo se repelen, y de diferente signo se atraen). Y por lo tanto, la cantidad de

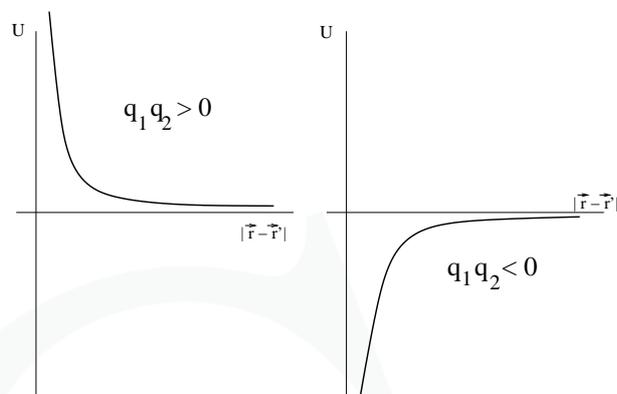


Figura 7.4: Energía potencial eléctrica adquirida por la carga q_2 debido al campo creado por la carga q_1 en función de la distancia entre ambas.

energía contenida en forma de energía potencial en la carga q_2 será mayor cuanto más cerca de q_1 retengamos a q_2 en el primer caso, y cuanto más lejos de q_1 en el segundo. Podremos "recuperar" esta energía sin más que hacer desaparecer las fuerzas que retienen a q_2 en su posición, como en el caso de la piedra visto anteriormente.

La cantidad de energía almacenada en las cargas en forma de energía potencial es lo que se denomina **energía electrostática** del sistema de cargas $\{q_1, q_2\}$. Para calcularla, en el caso de dos cargas de igual signo, basta mirar cuanto aumenta la energía potencial de las cargas cuando se traen, **una por una**, desde infinito (donde vale cero):

$$W_{\text{electrostatica}}^{\{q_1, q_2\}} = 0 + q_2 V_1(\vec{r}_2) = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (7.28)$$

La contribución asociada a la primera carga es cero puesto que, antes de traerla, no existe ningún campo eléctrico. Por lo tanto, la carga q_1 no gana ninguna energía potencial al desplazarse de un punto a otro. Sin embargo, una vez traída la primera carga hasta \vec{r}_1 , aparece una función potencial, $V_1(\vec{r})$, debida a ella. Por lo tanto, la segunda carga sí ve como cambia su energía potencial al desplazarla desde el infinito (donde es 0) hasta su posición final \vec{r}_2 , y es por tanto necesaria la acción de una fuerza que venza la repulsión entre ambas cargas.

La expresión dada por la Eq. 7.28 tiene una interpretación distinta cuando q_1 y q_2 tienen signos opuestos. La diferencia es que ahora, q_2 es atraída por q_1 , con lo que q_2 se mueve espontáneamente desde el infinito hacia q_1 , y por tanto, su **energía potencial disminuye**. Ciertamente, mirando la Fig. 7.2.2, resulta evidente que el máximo de energía potencial para cargas de diferente signo se obtiene para una distancia entre cargas

igual a infinito. Por lo tanto, no sólomente no se almacena energía potencial al traer q_2 desde infinito, sino que se pierde. La Eq. 7.28 da precisamente la disminución de energía potencial de la carga por pasar de infinito a la posición final \vec{r}_2 . Es por eso, que el signo de la energía electrostática es negativo en este caso.

7.2.3 Generalización a un sistema de cargas

Si intentamos ahora traer una carga q_3 al punto \vec{r}_3 desde el infinito, la energía potencial que adquirirá será igual, aplicando el principio de superposición de potenciales, a:

$$U_3(\vec{r}_3) = q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3), \quad (7.29)$$

donde $V_2(\vec{r})$ es el potencial asociado al campo eléctrico creado por la segunda carga:

$$V_2(\vec{r}) = K \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}. \quad (7.30)$$

Por lo tanto, el sistema de cargas $\{q_1, q_2, q_3\}$ almacena una cantidad de energía electrostática igual a la suma de las energías potenciales "almacenadas" en cada carga:

$$\begin{aligned} W_{electrostatica}^{\{q_1, q_2, q_3\}} &= 0 + q_2 V_1(\vec{r}_2) + q_3 (V_1(\vec{r}_3) + V_2(\vec{r}_3)) = \\ &= K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + K \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + K \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Es importante darse cuenta que es posible que algunos de estos sumandos sea positivo y otros negativos, dependiendo del signo relativo de las cargas.

Es fácil ver que la Eq. 7.31 puede reescribirse como:

$$W_{electrostatica}^{\{q_1, q_2, q_3\}} = \frac{1}{2} q_1 V(\vec{r}_1) + \frac{1}{2} q_2 V(\vec{r}_2) + \frac{1}{2} q_3 V(\vec{r}_3), \quad (7.32)$$

definiendo el potencial eléctrico total, $V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) + V_3(\vec{r})$, siendo V_3 el potencial creado por la carga q_3 (para asegurarse de la validez de la Eq. 7.32, substituyan en ella las definiciones de los potenciales V_1 y V_2 y V_3 y compárese con la Eq. 7.31).

Se puede entender fácilmente la expresión anterior al caso de un sistema con N cargas, $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$:

$$W_{electrostatica}^{\{q_1, q_2, \dots, q_N\}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i), \quad (7.33)$$

donde $V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r})$.

• **EJEMPLO:** Calcular la energía electrostática almacenada en la configuración de cargas de la Fig. 7.2.3

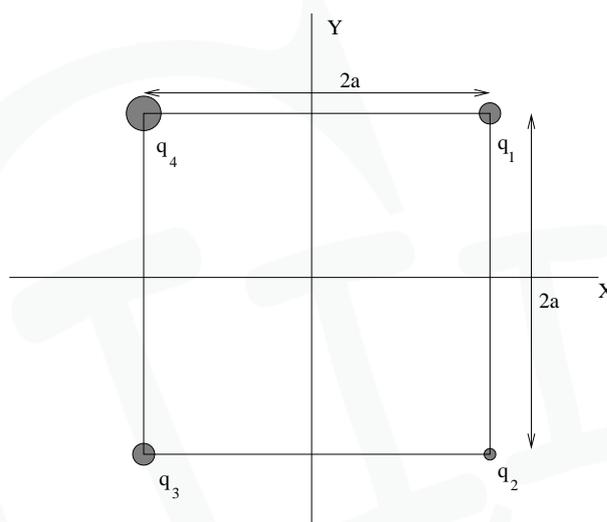


Figura 7.5: Sistema de cargas distribuidas en un cuadrado de lado $2a$.

Supongamos que la primera carga que traemos de infinito es q_1 . Puesto que no existe ningún campo eléctrico previo, la carga no experimenta cambio alguno en su energía potencial, y por tanto, no contribuye a la energía electrostática del sistema. Sin embargo, una vez q_1 está en el vértice superior derecho, crea un campo eléctrico y un potencial eléctrico asociado, $V_1(\vec{r})$, en **todos los puntos del espacio**. Por lo tanto, si ahora queremos traer q_2 hasta el vértice inferior derecho, su energía potencial pasará de cero a:

$$U_{q_2} = q_2 V_1(\vec{r}_2) = q_2 K \frac{q_1}{2a} \quad (7.34)$$

Una vez q_2 está situada en el vértice inferior derecho, creará a su vez un campo y un potencial asociado, $V_2(\vec{r})$. Por lo tanto, al traer q_3 hasta el vértice inferior izquierdo, su energía potencial pasará de cero a un valor dado por:

$$U_{q_3} = q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3) = q_3 K \left[\frac{q_1}{2\sqrt{2}a} + \frac{q_2}{2a} \right] \quad (7.35)$$

A su vez, q_3 creará su propio campo y potencial, $V_3(\vec{r})$. Finalmente, al traer q_4 al vértice superior izquierdo, su energía potencial pasará de cero a:

$$U_{q_4} = q_4 V_1(\vec{r}_4) + q_4 V_2(\vec{r}_4) + q_4 V_3(\vec{r}_4) = q_4 K \left[\frac{q_1}{2a} + \frac{q_2}{2\sqrt{2}a} + \frac{q_3}{2a} \right] \quad (7.36)$$

La energía electrostática total almacenada en el sistema de cargas $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ vendrá por tanto dada por:

$$W_{\text{electrostatica}}^{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}} = 0 + U_{q_2} + U_{q_3} + U_{q_4} = \frac{K}{2a} \left[\frac{q_4 q_2}{\sqrt{2}} + q_4 q_1 + q_4 q_3 + \frac{q_3 q_1}{\sqrt{2}} + q_3 q_2 + q_2 q_1 \right] \quad (7.37)$$

Nótese que alguno de los términos en el corchete serán negativos, si algunas de las cargas son positivas y otras negativas.

Es posible automatizar notablemente el cálculo de ésta energía si, en lugar de traer cada carga una a una desde infinito, usamos la Eq. 7.33:

$$\begin{aligned} W_{\text{electrostatica}}^{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}} &= \frac{1}{2} (q_1 V(\vec{r}_1) + q_2 V(\vec{r}_2) + q_3 V(\vec{r}_3) + q_4 V(\vec{r}_4)) = \\ &= \frac{q_1}{2} \left[K \frac{q_2}{2a} + K \frac{q_3}{2\sqrt{2}a} + K \frac{q_4}{2a} \right] + \frac{q_2}{2} \left[K \frac{q_1}{2a} + K \frac{q_3}{2a} + K \frac{q_4}{2\sqrt{2}a} \right] \\ &+ \frac{q_3}{2} \left[K \frac{q_1}{2\sqrt{2}a} + K \frac{q_2}{2a} + K \frac{q_4}{2a} \right] + \frac{q_4}{2} \left[K \frac{q_1}{2a} + K \frac{q_2}{2\sqrt{2}a} + K \frac{q_3}{2a} \right] = \\ &= \frac{K}{2a} \left[\frac{q_4 q_2}{\sqrt{2}} + q_4 q_1 + q_4 q_3 + \frac{q_3 q_1}{\sqrt{2}} + q_3 q_2 + q_2 q_1 \right], \end{aligned} \quad (7.38)$$

que nos da el mismo valor que anteriormente.

Capítulo 8

MEDIOS CONDUCTORES

8.1 PROPIEDADES GENERALES

La definición más general y menos comprometida de lo que constituye un medio **conductor** es la de un medio en el que existen **cargas eléctricas (quasi)-libres**, susceptibles de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. El ejemplo más común es el de los **metales**. Una imagen de estos sólidos, quizá un tanto simple, pero suficiente para nuestros propósitos, es la constituida por una red tridimensional de iones pesados positivos, que se mantienen fijos en sus posiciones. Entre ellos se mueven "quasi-libremente", y sin poder escapar del material conductor, los llamados **electrones de conducción**, tantos como sean necesarios para que la carga total del conductor sea cero.

Si el medio conductor se expone ahora a un campo eléctrico externo, veríamos que los iones mantendrían fijas sus posiciones, mientras que los electrones de conducción se desplazarían dentro del conductor, empujados por la fuerza eléctrica asociada al campo externo, hasta que se alcance un nuevo estado de equilibrio. La existencia de dicho equilibrio requiere que, de algún modo, el campo eléctrico en el interior del conductor desaparezca (si no, continuaría existiendo una fuerza eléctrica sobre los electrones, que seguirían su movimiento indefinidamente). Para contrarrestar el campo externo, los electrones se redistribuyen, dando lugar a una densidad de carga, $\rho(\vec{r}) \neq 0$, capaz de producir un campo que, al sumarse al exterior, lo anule en todas posiciones interiores del conductor. Y fijaros que esto se realiza sin que aparezca carga de la nada en el conductor. Si éste era inicialmente neutro, la densidad de carga que ha aparecido tiene que cumplir necesariamente que:

$$Q = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = 0! \quad (8.1)$$

Por tanto, como primera conclusión de esta disquisición, puede extraerse el que:

1. El campo eléctrico siempre es cero en el interior de un conductor en equilibrio.

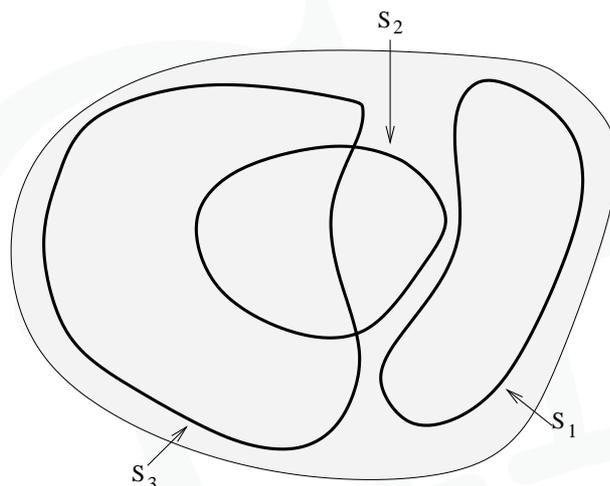


Figura 8.1: Distintas superficies cerradas en el conductor donde no puede haber carga neta.

Pero podemos decir más cosas sobre el comportamiento de un conductor usando el teorema de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \quad (8.2)$$

o, en palabras, que el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie. Sin embargo, puesto que el campo eléctrico es cero dentro de un conductor en equilibrio, el flujo a través de **cualquier** superficie cerrada contenida en el conductor ha de ser cero. E igualmente ha de ser cero la carga contenida en **cualquier** superficie contenida en el conductor (por ejemplo, las superficies S_1 , S_2 y S_3 de la Fig. 8.1). Por lo tanto, la densidad de carga eléctrica sólo puede ser distinta de cero sobre la superficie exterior de un conductor en equilibrio. Matemáticamente esto quiere decir que en el conductor en equilibrio no puede definirse una densidad volumétrica de carga, $\rho(\vec{r}) \neq 0$, sino **solamente** una densidad superficial de carga $\sigma(\vec{r}) \neq 0$.

Por lo tanto, podemos afirmar que:

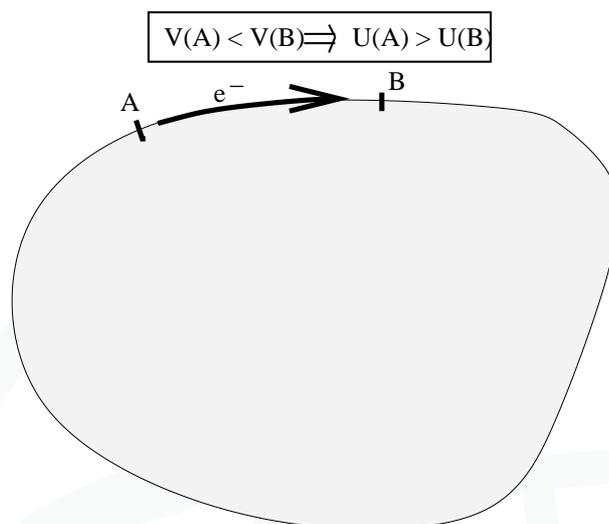


Figura 8.2: La superficie de un conductor en equilibrio ha de ser equipotencial, o los electrones se desplazarían hacia el punto con menor potencial.

2. La redistribución de carga que tiene que ocurrir en el conductor para garantizar que el campo eléctrico se anule en su interior ha de tener lugar únicamente sobre la superficie exterior del mismo.

Por argumentos similares a los anteriores puede afirmarse también que la superficie de un conductor en equilibrio ha de ser equipotencial. Ya que imaginemos que no lo fuera. En la tema anterior vimos que las cargas se desplazan **espontáneamente** hacia aquellos puntos donde su energía potencial se hace menor. Por lo tanto, si hay dos puntos de la superficie del conductor, A y B (ver Fig. 8.1), con $V(B) > V(A)$, los electrones se desplazarían desde el punto A hacia el B (recordad que la energía potencial de los electrones sería $U(\vec{r}) = -eV(\vec{r})$, con lo que ¡ $U(A) > U(B)$!), y el conductor no estaría en equilibrio. Por tanto,

3. El valor del potencial eléctrico ha de ser constante sobre la superficie de un conductor en equilibrio

Y por un argumento absolutamente análogo, no puede existir un campo eléctrico tangente a la superficie externa del conductor si éste está en equilibrio. Ya que si lo hubiese (ver Fig. 8.1) aparecería una fuerza paralela a la superficie sobre los electrones

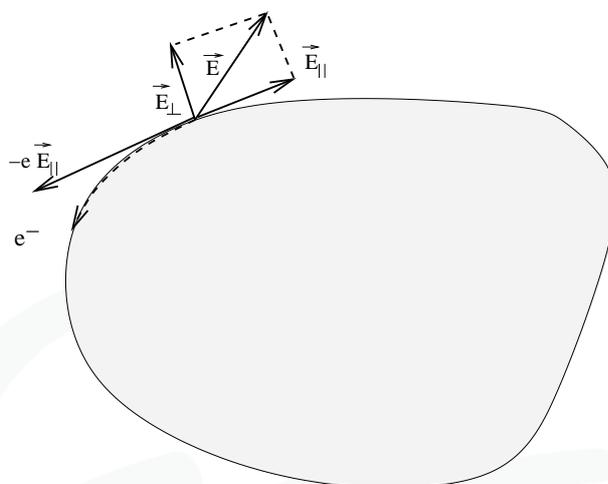


Figura 8.3: El campo eléctrico sólo puede ser normal a la superficie exterior de un conductor en equilibrio o los electrones se desplazarían sobre la superficie.

que los desplazaría, y el conductor no podría estar en equilibrio. Por lo tanto,

4. El campo eléctrico sólo puede estar dirigido perpendicularmente a la superficie de un conductor en equilibrio.

8.2 PROCESOS DE CARGA EN UN CONDUCTOR

Los conductores, como casi toda la materia que nos rodea, son eléctricamente neutros en condiciones normales. Es decir, tienen igual número de cargas positivas que negativas, con lo que su carga total es $Q = 0$. Y esta situación se mantiene incluso en presencia de un campo eléctrico externo, cuando hemos visto que la carga del conductor ha de redistribuirse para dar lugar a una densidad de carga $\rho(\vec{r}) \neq 0$ que anule el campo eléctrico en su interior.

Sin embargo, es posible cargar un conductor de manera que su carga total $Q \neq 0$. Una de las maneras más comunes de hacerlo es por **inducción**. Para ello, tomamos dos conductores aislados y neutros, y les aproximamos un cuerpo cargado negativamente (ver Fig. 8.2). La carga en los conductores se redistribuirá para garantizar que en su interior el campo eléctrico se anule, con lo que se obtiene una distribución de carga semejante a

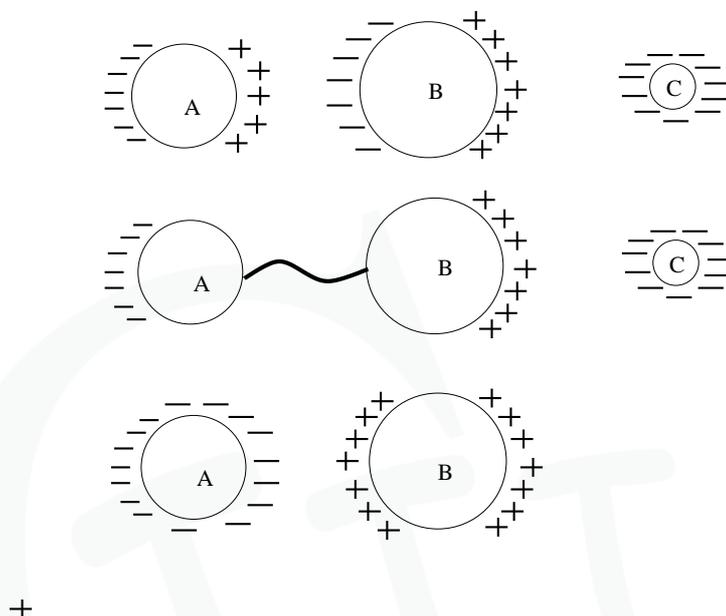


Figura 8.4: Carga de dos conductores neutros por inducción, mediado por otro conductor cargado.

la que se ve en la figura. Si ahora unimos ambos conductores por un cable, se produce un flujo de cargas entre los dos conductores para que sus superficies se pongan al mismo valor del potencial eléctrico, creándose una nueva distribución de carga, que se muestra también en la figura. Si cortamos ahora el cable, cada conductor, inicialmente neutro, quedará cargado con cargas iguales pero de signo opuesto, de tal modo que la carga total del sistema de dos conductores A y B , que era nula inicialmente, se conserve. Es decir, $Q_A = -Q_B$.

Claro que uno podría preguntarse como consigue el primer conductor cargado para realizar este proceso. Eso no representa realmente un problema, puesto que el papel de este conductor puede llevarlo a cabo un campo eléctrico constante en la dirección que se muestra en la Fig. 8.2. También es posible cargar un conductor por **frotamiento**, que es la manera en la que se descubrió por primera vez el concepto de carga, y que existían dos tipos de ellas (ver discusión sobre esto en la sección sobre la carga eléctrica, en el tema sobre el Campo Eléctrico).

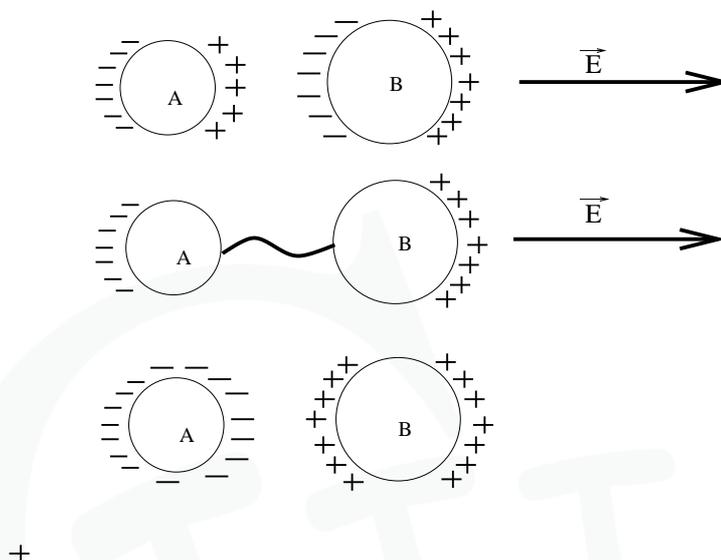


Figura 8.5: Carga de dos conductores neutros por inducción, mediado por un campo eléctrico constante.

8.3 Cavidades

Una de las aplicaciones más interesantes de un conductor es el **apantallamiento** de una zona del espacio respecto a posibles campos eléctricos externos. Para entender como funciona, consideremos un conductor en cuyo interior se ha practicado una cavidad (ver Fig. 8.3). Sabemos que si existe un campo externo, se producirá un reordenamiento de carga sobre la superficie del conductor que hace que el campo eléctrico neto sea nulo en su interior. ¿Pero que sucede en la cavidad? ¿Es el campo eléctrico también cero allí? ¿Y se redistribuirá la carga también sobre la superficie interna del conductor, o únicamente sobre la externa?. Para contestar estas preguntas, vamos a aplicar el teorema de Gauss usando la superficie S_1 de la figura. Es claro que no puede haber carga encerrada por S_1 . Ciertamente. Si:

$$0 = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{S_1}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{S_1} = 0 \quad (8.3)$$

Por lo tanto, de existir alguna carga distribuida sobre la superficie interna del conductor, $\sigma_{int}(\vec{r})$, ésta ha de cumplir que la carga total distribuida sobre la superficie interna del conductor sea cero:

$$\oint_{S_{int}} \sigma_{int}(\vec{r}) dS' = 0 \quad (8.4)$$

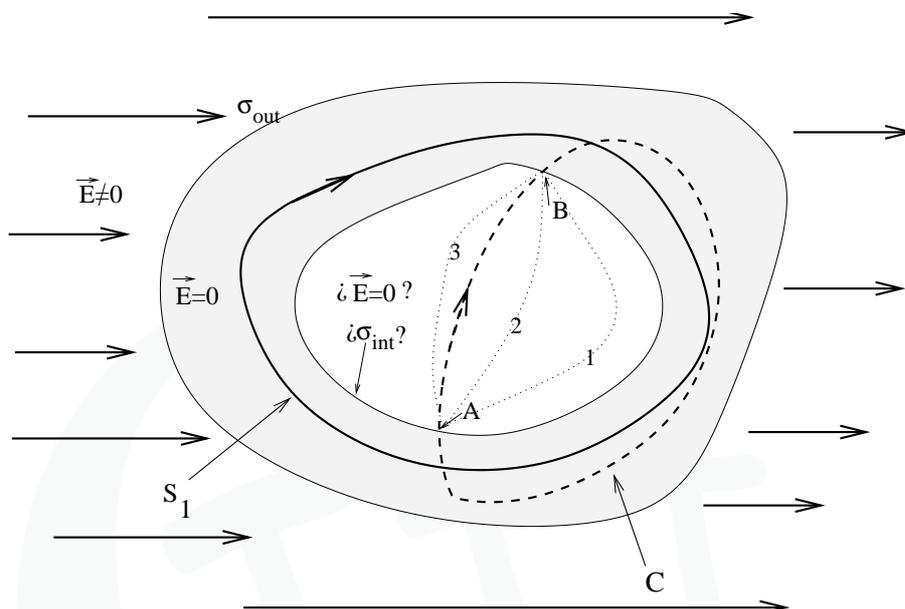


Figura 8.6: Cavidad en un conductor.

Ahora bien, sabemos que el la fuerza de Coulomb es una fuerza conservativa. Por lo tanto, ha de cumplirse que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0, \quad (8.5)$$

puesto que campo y fuerza son proporcionales, para cualquier circuito cerrado Γ . En particular, para el circuito C de la Fig.6. Como el campo en el interior del conductor es cero, esto implica que:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (8.6)$$

sea cual sea el camino que usemos para ir de A a B (en la Fig. 8.3 se muestran varias alternativas, numeradas 1, 2 y 3, además de la dada por el camino cerrado C). Y esto sólo es posible si $\vec{E} = 0$ dentro de la cavidad. Por tanto,

6. Un conductor actua como una pantalla perfecta frente a campos eléctricos externos, ya que el campo eléctrico será también nulo en cualquier cavidad practicada en su interior.

8.4 BLINDAJE ELÉCTRICO

De la misma manera que puede utilizarse un conductor para cubrir una región en la que no queramos que se noten los efectos de un campo exterior, podemos utilizar un conductor para que no **salgan** de una determinada región del espacio los campos creados por cargas en su interior. Esta propiedad, inversa al apantallamiento visto en la sección anterior, se llama **blindaje eléctrico**.

Supongamos que tenemos, como en el caso anterior, un conductor con una cavidad en su interior. Y dentro de dicha cavidad, colocamos una carga Q (ver Fig.7). Dicha carga creará un campo en el interior de la cavidad. Ahora bien, el campo en el interior del conductor ha de ser cero. Eso implica que, aplicando el teorema de Gauss a la superficie S_1 , es necesario que aparezca una densidad de carga en la **superficie interna** del conductor que verifique:

$$\oint_{S_{int}} \sigma_{int}(\vec{r})dS = -Q \quad (8.7)$$

ya que la carga total encerrada por S_1 ha de ser nula. Fijaros que esto no contradice lo dicho en la sección anterior, ya que antes **¡no había carga alguna en la cavidad!**. La aparición de la densidad de carga en la cara interior del conductor no puede, sin embargo, violar la conservación de la carga eléctrica. La carga total en el conductor, Q_{cond} , ha de ser siempre la misma. Esto significa que será necesario que se aparezca otra densidad de carga superficial en la cara exterior, σ_{out} , de modo que la carga total en el conductor se conserve:

$$\oint_{S_{int}} \sigma_{int}(\vec{r})dS + \oint_{S_{out}} \sigma_{out}(\vec{r})dS = Q_{cond} \Rightarrow \oint_{S_{out}} \sigma_{out}(\vec{r})dS = Q_{cond} + Q. \quad (8.8)$$

El campo en el exterior del conductor será entonces diferente de cero (ver lado izquierdo de la Fig. 8.4), puesto que si cogemos una superficie S_2 como la de la figura, la carga total encerrada dentro será $Q_{cond} + Q \neq 0$. Sería sin embargo posible hacer que dicho campo exterior fuera cero si, de algún modo, consiguiéramos que esta carga total se anule. Es decir, si:

$$Q_{cond} = -Q. \quad (8.9)$$

Esto puede conseguirse si conectamos la cara externa del conductor a un punto exterior de potencial constante mediante un cable. A esto se le llama **conectar el conductor a tierra**. La idea se basa en el hecho de que la superficie de un conductor ha de ser equipotencial. Si unimos dos conductores con un cable, se establecerá un trasiego de carga entre ambos, hasta que el potencial se iguale. En ese momento, deja de haber

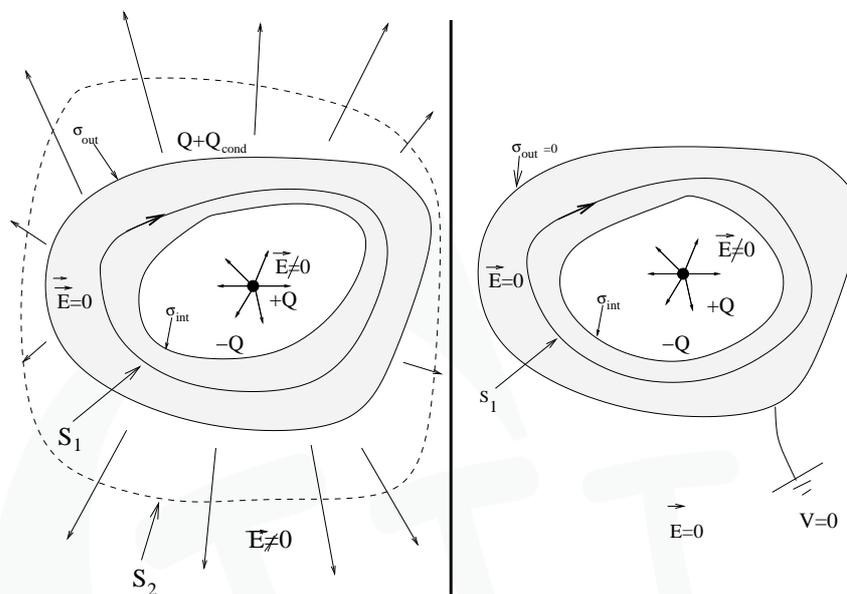


Figura 8.7: Blindaje eléctrico.

campo eléctrico entre ellos (recordar que el campo es el gradiente del potencial, ¡luego es cero si éste último es constante!), ya que si lo hubiera, los electrones de ambos seguirían sintiendo una fuerza, que haría que el trasiego de carga continuase. El valor final del potencial en los conductores depende, como veremos, de la cantidad de carga que haya en cada uno y de las características geométricas de éstos. En el caso de la Tierra, ésta es tan grande que se supone que no cambia apreciablemente su potencial por tomar/ceder unos pocos electrones, suficientes por otro lado para que el potencial de la cara externa del conductor se iguale al de la Tierra, y por tanto, para que desaparezca todo campo externo (ver lado derecho de la Fig. 8.4).

Por lo tanto, tenemos que:

7. Un conductor proporciona un blindaje perfecto respecto a cualquier campo eléctrico producido en una cavidad interior siempre que conectemos la superficie externa del mismo a tierra.

8.5 EFECTO PUNTA

Hemos dicho ya que, en un conductor, toda la carga se concentra en la superficie, que esta es equipotencial, y que el campo eléctrico sólo puede ser perpendicular a la superficie del mismo. Demostraremos ahora que el módulo de dicho campo es **máximo en las puntas del conductor**. Para ello, consideramos el siguiente ejemplo. Sean dos esferas de radios R_1 y R_2 , con $R_1 \gg R_2$ (ver Fig. 8). Si cada esfera contiene una carga Q_1 y Q_2 respectivamente, sus potenciales vienen dados por (como se comprueba fácilmente usando el teorema de Gauss para cuerpos con simetría esférica):

$$V_1 = K \frac{Q_1}{R_1} \quad \text{y} \quad V_2 = K \frac{Q_2}{R_2}. \quad (8.10)$$

Al ponerlas en contacto, habrá un trasiego de carga hasta que sus potenciales se igualen. Las cargas finales en cada esfera tendrán que cumplir:

$$\frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} \quad (8.11)$$

y por conservación de carga, $Q = Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$. Por lo tanto,

$$Q'_1 = \frac{QR_1}{R_2 + R_1} \quad \text{y} \quad Q'_2 = \frac{QR_2}{R_2 + R_1} \quad (8.12)$$

La densidad de carga en cada esfera será entonces igual a:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1(R_2 + R_1)} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2(R_2 + R_1)} \quad (8.13)$$

de donde vemos que, puesto que $R_2 \ll R_1$, esto implica que $\sigma_2 \gg \sigma_1$. Por lo tanto la carga se concentra esencialmente en las puntas, donde el campo eléctrico es mucho más intenso.

8.6 CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR

Se define la **capacidad** de un conductor como el cociente entre la cantidad de carga que puede contener cuando su superficie está a un determinado potencial eléctrico y el valor de dicho potencial (¡suponiendo siempre que el origen de potenciales está en el infinito!).

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (8.14)$$

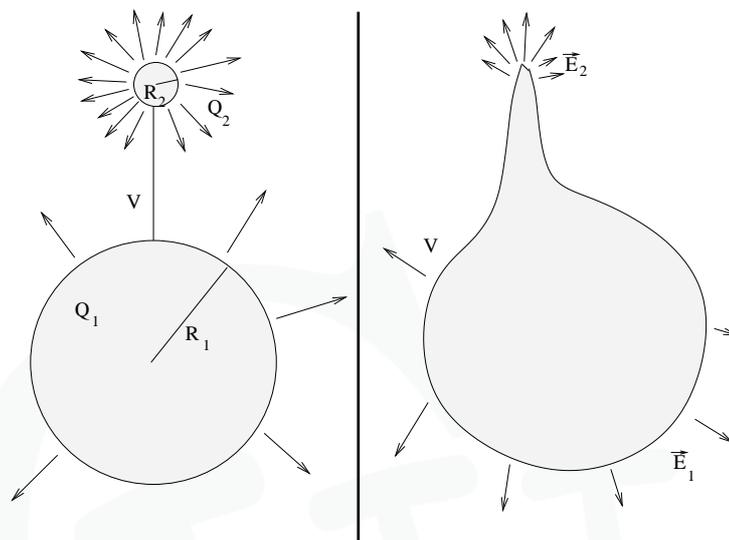


Figura 8.8: Efecto punta.

Es importante recordar siempre que la capacidad solamente depende de factores geométricos del conductor.

•Ejemplo: capacidad de un conductor esférico de radio R

Supongamos un conductor esférico de radio R que contiene una carga Q . El potencial en su superficie se puede calcular teniendo en cuenta que **toda** la carga ha de estar concentrada en la superficie, de forma que tenemos una densidad superficial de carga dada por $\sigma = Q/4\pi R$. Aplicando Gauss, es fácil ver que el campo en el interior del conductor es nulo (como debe ser), y que fuera viene dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r \quad (8.15)$$

El potencial se obtiene fácilmente sobre la superficie, sin más que integrar (ver notas del tema sobre el Potencial Eléctrico):

$$V(R) = - \int_{\infty}^R E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (8.16)$$

Por lo tanto, la capacidad del conductor esférico será:

$$C = \frac{Q}{V(R)} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (8.17)$$

que, como decíamos, solo depende de la forma del conductor.

8.7 ENERGÍA ALMACENADA EN UN CONDUCTOR

Recordando que vimos como un sistema de cargas $\{q_1, \dots, q_N\}$, en presencia de un campo escalar potencial eléctrico $V(\vec{r})$, almacena una energía electrostática dada por (ver notas sobre Potencial Eléctrico):

$$W_{\{q_1, \dots, q_N\}}^{electrostatica} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i), \quad (8.18)$$

siendo \vec{r}_i la posición de la carga q_i , es fácil ver que, en el caso del conductor donde todas las cargas están a un potencial idéntico igual al de la superficie externa del conductor, la energía electrostática almacenada en éste es igual a:

$$W_{conductor}^{electrostatica} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} V \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}. \quad (8.19)$$

donde se ha usado la definición de capacidad de un conductor, $C \equiv Q/V$.

Capítulo 9

CONDENSADORES

9.1 DEFINICIÓN DE CONDENSADOR. CONDENSADOR PLANO-PARALELO

Se define un **condensador** como un sistema formado por dos conductores que se conectan entre sí por medio de alguna trayectoria conductora, de modo que el proceso de carga de cada uno es una **transferencia de carga de uno a otro**. Es decir, si llamamos 1 al primero y 2 al segundo, se cumple siempre que $Q_1 = -Q_2$.

Uno de los ejemplos más típicos es el del **condensador plano-paralelo**, que se muestra en la Fig. 9.1. En dicha figura, se establece una diferencia de potencial $\Delta V = V_0$ entre dos placas paralelas de material conductor y de sección S , separadas una distancia d , que hace que ambas placas se cargen con cargas iguales y de sentido contrario, $\pm Q$. Es fácil comprobar que Q es proporcional a la diferencia de potencial ΔV que se establece entre las placas. Se define, por tanto, la **capacidad de un condensador**, como el cociente:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \quad (9.1)$$

Es importante darse cuenta que, aunque tengan el mismo nombre, esta definición difiere de la de capacidad de un conductor (ver tema sobre Conductores), puesto que en ese caso la carga neta almacenada es no nula, estando **toda** ella a un mismo valor del potencial eléctrico. En este caso, la carga total en el condensador es nula, ya que hay $+Q$ en una placa y $-Q$ en la otra, y V_0 no es un potencial, sino la diferencia entre los valores del potencial eléctrico en cada placa, $\Delta V = V_+ - V_- = V_0$. El hecho de usar el mismo nombre se debe a que tanto conductores como condensadores son sistemas de almacenamiento de carga (y por tanto, de energía electrostática).

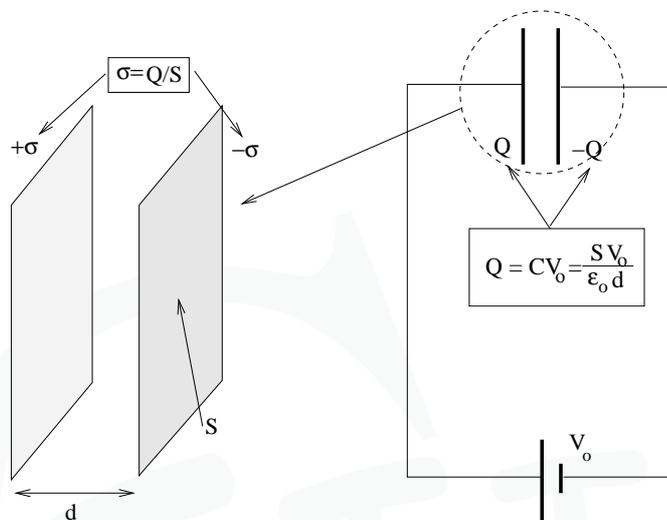


Figura 9.1: Condensador plano-paralelo.

Es posible estimar analíticamente el valor de la capacidad de un condensador plano-paralelo si consideramos el límite en el que las placas sean infinitas, lo cual es una buena aproximación si $d \ll \sqrt{S}$. En ese caso, el campo eléctrico creado por el condensador es igual al creado por dos planos paralelos e infinitos, separados una distancia d y cargados con densidades $\pm\sigma$, y que hemos resuelto previamente (ver tema sobre el Teorema de Gauss). Se obtuvo entonces que el campo era no nulo **únicamente** entre las dos placas, era **perpendicular** a las mismas, y estaba dirigido de la placa positiva a la negativa. Además, su módulo era constante y valía (ver Fig 9.1):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (9.2)$$

Haciendo uso de lo aprendido anteriormente (ver tema sobre Potencial Eléctrico; en particular, el ejemplo sobre el cálculo de potenciales en problemas con simetrías de traslación), es posible calcular el potencial eléctrico asociado a este campo en todos los puntos del espacio. Si elegimos como cero de potenciales el lugar donde está situada la

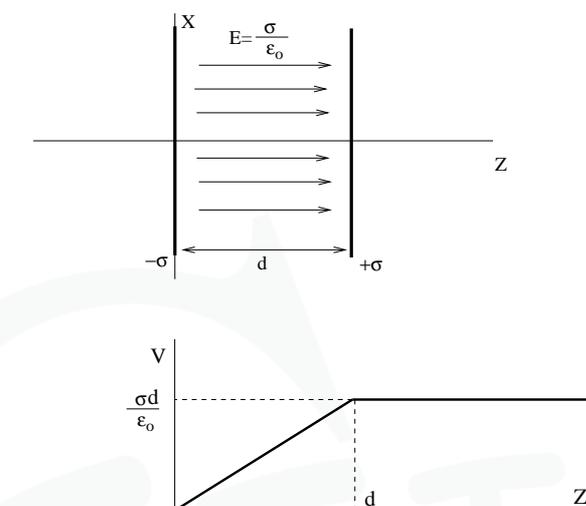


Figura 9.2: Campo y potencial eléctrico en un condensador plano-paralelo infinito.

placa negativa :

$$V(z) = - \int_0^z \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) dz = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{\sigma z}{\epsilon_0} & 0 < z < d \\ \frac{\sigma d}{\epsilon_0} & z > d \end{cases} \quad (9.3)$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial entre las placas es igual a:

$$\Delta V = V_+ - V_- = V(d) - V(0) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{S\epsilon_0}, \quad (9.4)$$

con lo que la carga almacenada Q es proporcional a la diferencia de potencial ΔV , como se mencionó anteriormente. Sustituyendo ahora en la fórmula de la capacidad, obtenemos que:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (9.5)$$

Por lo tanto, si establecemos una diferencia de potencial V_o (por ejemplo con una pila) entre las dos placas, éstas se cargarán con una carga dada por:

$$Q = CV_o = \frac{\epsilon_0 S}{d} V_o. \quad (9.6)$$

Podemos, también, estimar la energía electrostática almacenada en el condensador:

$$W_{\text{condensador}}^{\text{electrostatica}} = \frac{1}{2} [(+Q)V_+ + (-Q)V_-] = \frac{1}{2} QV_o = \frac{1}{2} CV_o^2, \quad (9.7)$$

donde se ha usado que la energía almacenada en un conductor es igual a $QV/2$, como se vio en la última sección del Tema sobre Conductores.

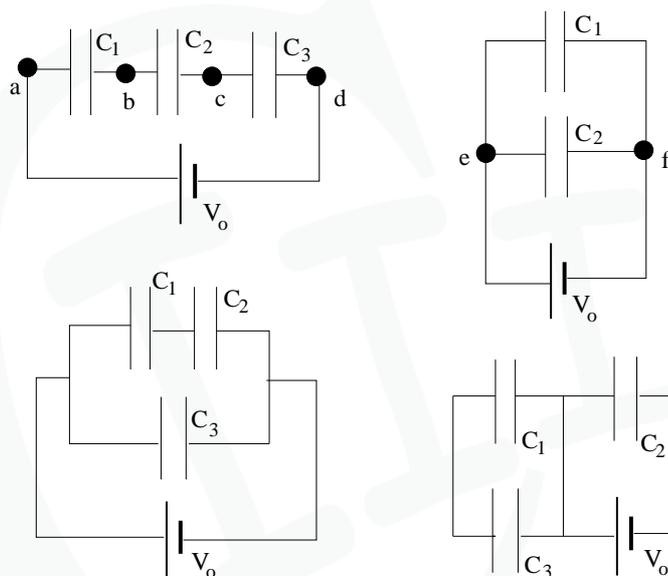


Figura 9.3: Asociaciones de condensadores plano-paralelos.

9.2 ASOCIACIONES DE CONDENSADORES

Es posible asociar condensadores en **serie** y en **paralelo** (ver Fig. 9.1).

9.2.1 Asociación en paralelo

Dos condensadores están asociados en paralelo si **existe la misma diferencia de potencial** entre sus extremos. Por ejemplo, los dos condensadores del esquema superior derecho de la Fig. 3 están en paralelo, ya que en los extremos de ambos cae una diferencia de potencial V_o . Gráficamente, se distinguen las asociaciones en paralelo porque los dos condensadores tienen dos puntos en común, los puntos e y f de la figura.

Puesto que la carga en cada condensador vendrá dada por:

$$Q_1 = C_1 V_0 \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V_0, \quad (9.8)$$

esto implica que ambos condensadores almacenan la misma carga, $Q = Q_1 + Q_2$, que un condensador con capacidad equivalente:

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_0} = C_1 + C_2 \quad (9.9)$$

igual a la suma de las capacidades de cada condensador.

9.2.2 Asociación en serie

Dos condensadores están asociados en serie si **la diferencia de potencial entre la placa izquierda del primer condensador y la placa de la derecha del segundo condensador es igual a la suma de la diferencia de potencial entre las placas del primero y la diferencia de potencial entre las placas del segundo**. Gráficamente, se distinguen las asociaciones en serie por que los condensadores solo comparten un punto en común. Por ejemplo, en el esquema superior izquierdo de la Fig. 9.1, el primer condensador solo comparte el punto b con el segundo, y éste comparte sólo el punto c con el tercero.

En dicho ejemplo, tendremos que la carga en cada condensador vendrá dada por:

$$Q_1 = C_1 V_1 \quad , \quad Q_2 = C_2 V_2 \quad \text{y} \quad Q_3 = C_3 V_3, \quad (9.10)$$

siendo V_i la diferencia de potencial entre las placas del condensador i ($i = 1, 2, 3$), y verificándose que $V_0 = V_1 + V_2 + V_3$. Sin embargo, es necesario que $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, ya que si no se conservaría la carga en cada nodo (por ejemplo, mirando al punto b de la Fig. 3, es necesario que las cargas en la placa derecha del primer condensador y en la izquierda del segundo sean iguales y de signo contrario, ya que sino, ¡habría aparecido carga de la nada en dicho punto!). Por lo tanto, sustituyendo V_i por su equivalente en términos de carga y capacidad de cada condensador, tenemos que:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = Q \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right]. \quad (9.11)$$

Por lo tanto, los tres condensadores podrían ser sustituidos por un condensador equivalente con capacidad:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (9.12)$$

Sin embargo, muchas veces no es fácil saber como están asociados los condensadores. Es necesario practicar. Por ejemplo, ¿sabrías explicar porqué, en el esquema inferior izquierdo de la Fig. 9.1, los condensadores C_1 y C_2 están conectados en serie entre sí, y en paralelo con el tercero, C_3 ? ¿Y como están conectados los tres condensadores del esquema inferior derecho de la misma figura?

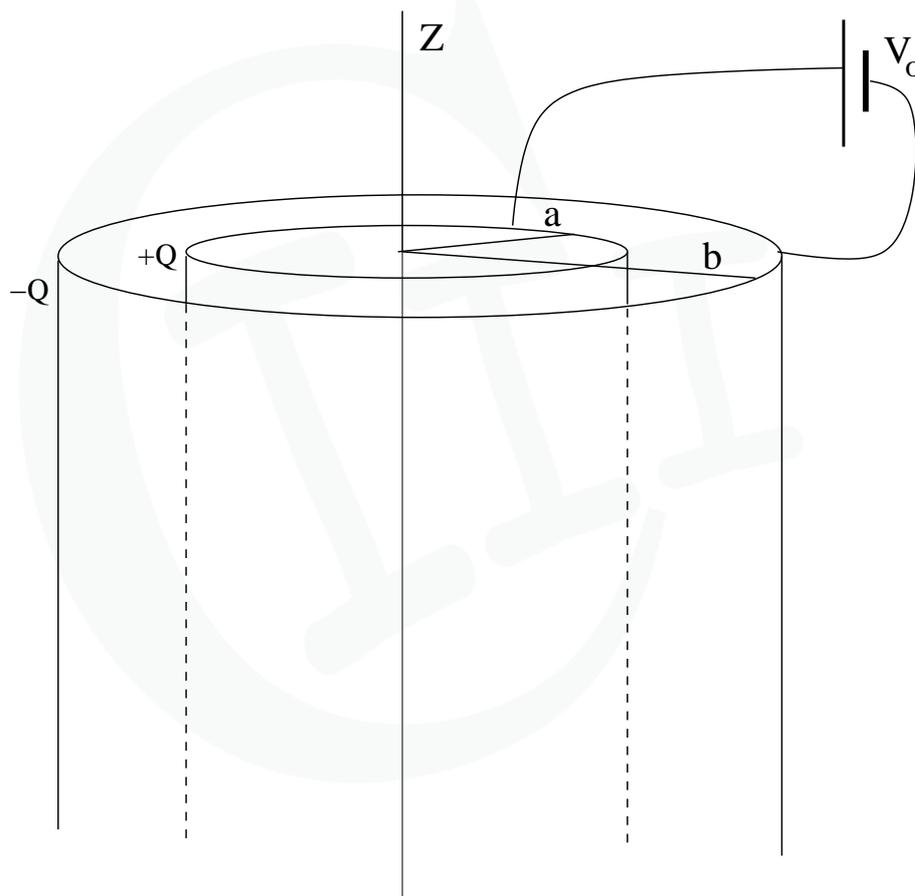


Figura 9.4: Condensador cilíndrico.

9.3 EL CONDENSADOR CILÍNDRICO

Un condensador cilíndrico está formado por dos hojas cilíndricas conductoras coaxiales (nótese que la primera hoja podría ser un conductor macizo, ya que toda la carga se con-

centraría en la superficie externa del mismo). Por ejemplo, en la Fig. 9.2.2 se muestra un condensador cilíndrico formado por dos hojas infinitas de radios a y b , cargadas respectivamente con cargas $\pm Q$ (esta es una buena aproximación para un condensador cilíndrico real, siempre que la longitud del cilindro sea mucho mayor que su radio). Para calcular su capacidad, basta recordar que la carga que almacena cualquiera de las dos hojas (la otra almacenará lo mismo, pero con signo contrario) puede escribirse en función de una densidad de carga σ definida por:

$$Q = \sigma 2\pi a L, \quad (9.13)$$

donde L es la longitud (infinita) del cilindro. Para calcular la diferencia de potencial entre las hojas hemos de utilizar el teorema de Gauss, que nos dice que el campo eléctrico creado por el sistema es igual a:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{a\sigma}{r\epsilon_0} \vec{u}_r, & a < r < b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (9.14)$$

Por lo tanto, calculando la diferencia de potencial entre las dos hojas teniendo en cuenta que estamos en un problema con simetría cilíndrica (usando para ello las expresiones introducidas en el tema sobre el Potencial Eléctrico):

$$\begin{aligned} \Delta V = V_+ - V_- &= V(a) - V(b) = - \int_{r_0}^a E(r) dr + \int_{r_0}^b E(r) dr = - \int_b^a \frac{a\sigma}{r\epsilon_0} = \\ &= \frac{a\sigma}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \end{aligned} \quad (9.15)$$

Por lo tanto, su capacidad por unidad de longitud (ya que es infinito, ¡sino saldría una capacidad infinita!) es igual a:

$$C/L = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}. \quad (9.16)$$

9.4 EL CONDENSADOR ESFÉRICO

Un condensador esférico está formado por dos esferas (la interior puede ser hueca o no, por la misma razón que en el caso cilíndrico) conductoras concéntricas, de radios a y b

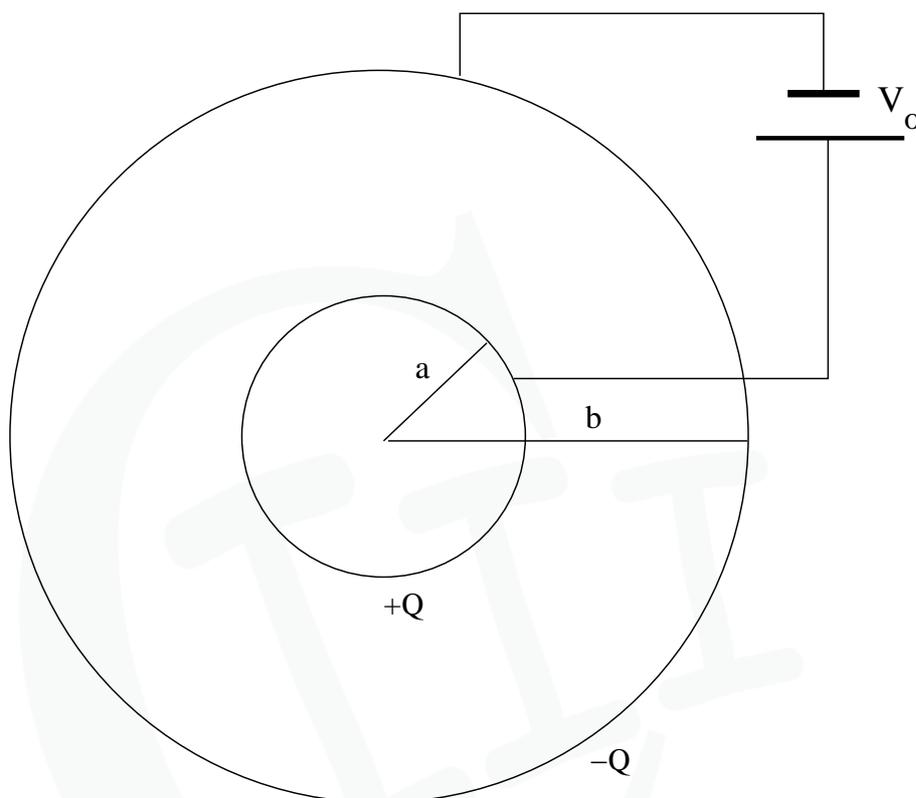


Figura 9.5: Condensador esférico.

(ver Fig. 9.3). Podemos calcular su capacidad de nuevo, tras obtener el campo creado por las esferas en cada punto del espacio (usando el Teorema de Gauss) cuando la interior tenga una carga $+Q$ y la exterior $-Q$:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r, & a < r < b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (9.17)$$

Por lo tanto, calculando la diferencia de potencial entre las esferas teniendo en cuenta que estamos en un problema con simetría esférica (usando para ello las expresiones

introducidas en el tema sobre el Potencial Eléctrico):

$$\begin{aligned}\Delta V = V_+ - V_- &= V(a) - V(b) = - \int_{r_o}^a E(r) dr + \int_{r_o}^b E(r) dr = \\ &= - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)\end{aligned}\tag{9.18}$$

Por lo tanto, su capacidad es igual a:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a}.\tag{9.19}$$

Capítulo 10

DIELÉCTRICOS

En un material dieléctrico no existen cargas libres, puesto que los electrones están fuertemente ligados a las moléculas. Esto contrasta enormemente con lo que vimos que sucedía en un medio conductor. Y es por esto que los dieléctricos son malos conductores de la corriente eléctrica. Veremos, sin embargo, que son útiles para muchas otras cosas. Por ejemplo, pueden utilizarse para aumentar la capacidad de un condensador.

10.1 EL DIPOLO ELÉCTRICO

Para entender como se comporta un dieléctrico es necesario introducir antes el concepto de **dipolo eléctrico**. Por dipolo eléctrico se entiende un sistema con dos cargas de igual magnitud, q , pero signos opuestos, que están separadas una distancia d (ver Fig. 10.1). El hecho de que $d > 0$ implica que los campos creados por ambas cargas no se cancelen mutuamente y, por tanto, que el sistema de lugar a un campo eléctrico diferente de cero. Las líneas de dicho campo pueden imaginarse fácilmente, sin más que seguir la trayectoria que describiría una carga positiva abandonada en su presencia (ver Fig. 10.1).

La magnitud del campo creado por el dipolo, será mayor cuanto más separadas estén las cargas, ya que entonces los efectos de cancelación serán más débiles. También cuánto más grandes sean las cargas que lo forman. Para cuantificar esto, se asocia al dipolo una magnitud **vectorial** nueva, llamada **momento dipolar**:

$$\vec{P} = qd \frac{\vec{r}_+ - \vec{r}_-}{|\vec{r}_+ - \vec{r}_-|}. \quad (10.1)$$

donde \vec{r}_\pm son las posiciones de ambas cargas (ver Fig 1). Nótese que el módulo de \vec{P} es precisamente el producto de d por q , luego, teniendo presente lo mencionado antes, el módulo campo eléctrico creado por el dipolo crecerá con $|P|$.

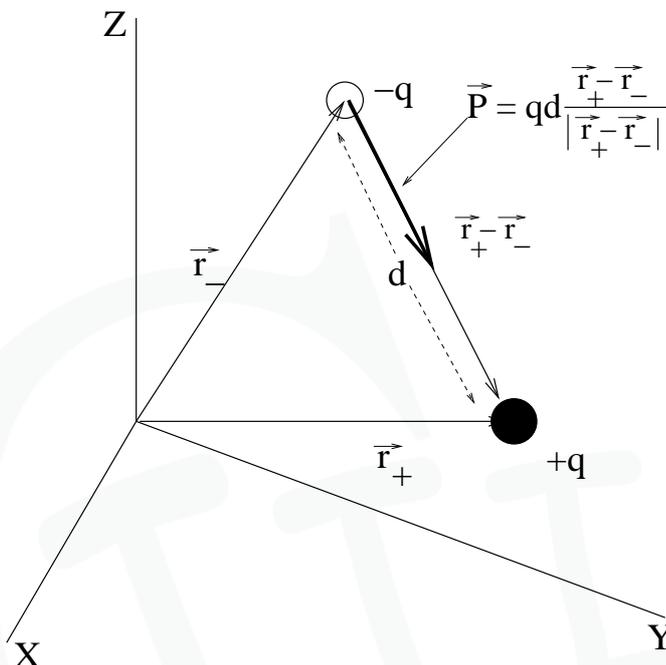


Figura 10.1: Dipolo eléctrico.

Si tenemos un conjunto con más de dos cargas que sea **globalmente neutro** (es decir, con igual número de cargas negativas que positivas), podemos dividir dicho conjunto en dipolos (ver Fig. 10.1 para un ejemplo de como se hace esta división), y calcular su **momento dipolar total** como la suma de los momentos dipolares de cada dipolo. El campo eléctrico creado por el conjunto crecerá también con el momento dipolar total del conjunto. En particular, será cero dicho momento dipolar total también lo es.

10.2 MODEL MICROSCÓPICO SIMPLIFICADO DE UN DIELECTRICO

Consideremos el siguiente modelo extremadamente simplificado de un material dieléctrico: supongámoslo formado por moléculas neutras, constituidas por igual número de protones y electrones, a los que consideraremos puntuales. Reagrupando las cargas en dipolos (es decir, en pares $(-q) - (+q)$, como se muestra en la x Fig. 10.1), podemos calcular el momento dipolar total de la molécula, siguiendo lo explicado en la sección anterior. Si es cero, diremos que la molécula es **apolar** (parte de arriba de la Fig. 10.1), mientras que si es diferente de cero, la molécula será **polar** (parte de abajo de la Fig. 10.1). En

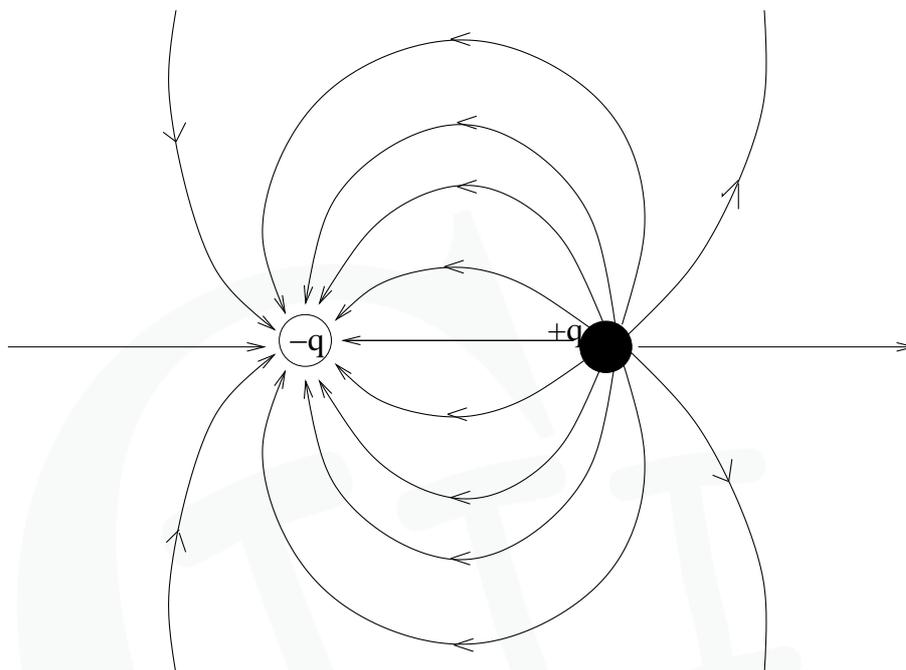


Figura 10.2: Campo creado por un dipolo eléctrico.

el caso de dieléctricos formados por moléculas apolares, el campo eléctrico creado por **cada molécula es nulo**, y por tanto, el sólido no crea campo alguno. En el segundo, el campo creado por **cada molécula es no nulo**, pero puesto que en el sólido hay muchas moléculas, orientadas en todas las direcciones posibles, el campo total resultante de la suma de los creados por cada dipolo es cero (ver Fig. 10.2).

En presencia de un campo eléctrico externo, las moléculas del dieléctrico apolar, se **polarizan**, y las del dieléctrico polar se alinean en la dirección del campo externo (ver Fig. 10.2). Por polarizarse, se entiende que las cargas que forman la molécula se separan según su signo, debido al sentido opuesto de la fuerza que experimentan el núcleo positivo y los electrones negativos. En cualquier caso, y puesto que los momentos dipolares de las moléculas apuntan ahora en la misma dirección que el campo externo, su suma ya no da cero. Dan lugar a un campo eléctrico dipolar no nulo, de sentido opuesto al externo en el interior del material, que al sumarse con éste **reduce** el valor del campo eléctrico total en el interior del material (ver Fig. 10.2).

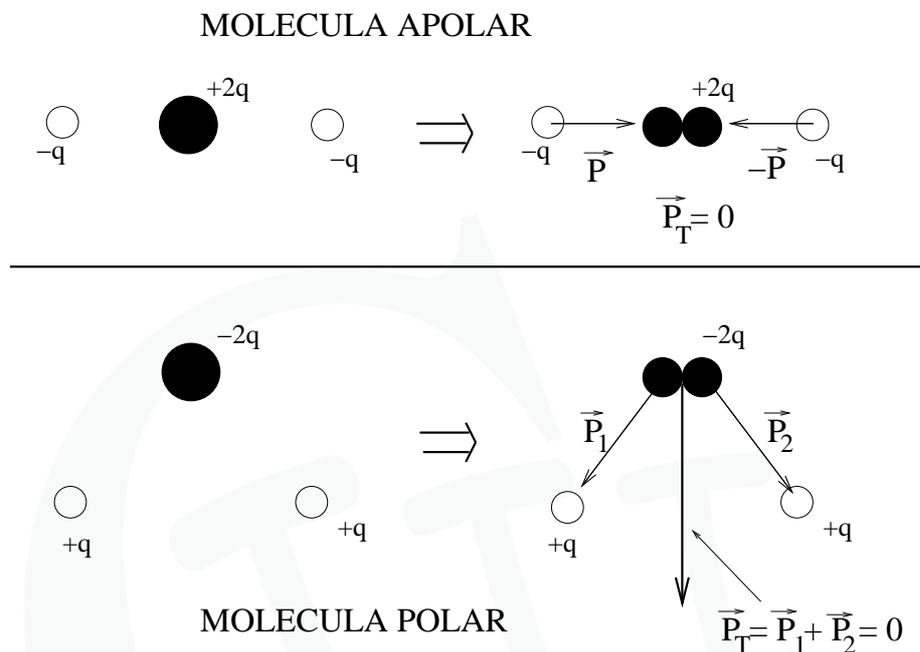


Figura 10.3: Momento dipolar total de una molécula apolar (arriba) y polar (abajo).

10.3 DIELECTRICOS Y CONDENSADORES

Como conclusión de las dos secciones anteriores resulta que, en presencia de un campo eléctrico externo, las moléculas que forman un dieléctrico se polarizan, reduciendo el campo eléctrico total en su interior. Esto tiene una aplicación inmediata. Para entenderla, supongamos ahora el siguiente experimento: cogemos un condensador plano paralelo de capacidad C_0 , y lo conectamos a una pila que establece una diferencia de potencial entre las placas V_0 . El condensador se cargará con una carga Q_0 , dada por:

$$Q_0 = C_0 V_0. \quad (10.2)$$

Supongamos que ahora **desconectamos la pila**, dejando el condensador cargado, y que introducimos entonces una lámina de material dieléctrico en su interior. Si medimos ahora con un voltímetro la diferencia de potencial entre las placas, V_1 , veremos que ha disminuido. Es decir, $V_1 < V_0$. Pero la carga dentro del condensador sigue siendo Q_0 . Esto quiere decir que la capacidad del condensador, dada por:

$$C_1 = \frac{Q_0}{V_1} > C_0, \quad (10.3)$$

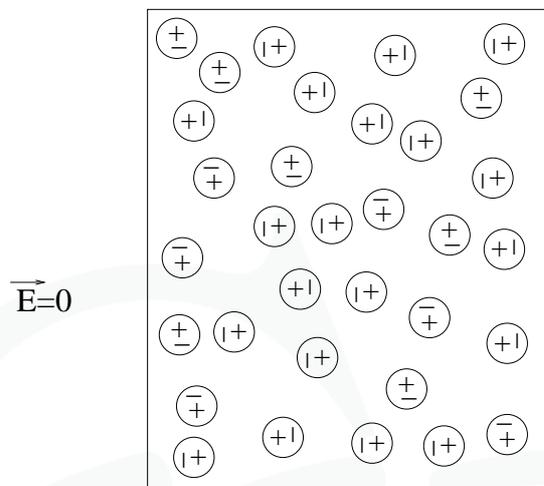


Figura 10.4: Modelo microscópico de un dieléctrico polar. Si el dieléctrico fuera polar, los (+) y los (-) en cada molécula estarían en el mismo sitio, y el momento dipolar sería nulo. En ambos casos, el campo eléctrico producido por el material es nulo.

ha aumentado al introducir el dieléctrico. Podemos escribir (sólo si el material dieléctrico es lineal, homogéneo e isótropo) que:

$$C_1 = \epsilon_r C_0, \quad \epsilon_r \geq 1, \quad (10.4)$$

donde a la constante ϵ_r se le denomina **permeabilidad eléctrica relativa**, y es una característica del material.

La misma constante relaciona también el potencial entre los extremos del condensador antes y después de meter el dieléctrico, puesto que:

$$V_1 = \frac{Q_0}{C_1} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q_0}{C_0} = \frac{V_0}{\epsilon_r} < V_0, \quad (10.5)$$

que confirma que la diferencia de potencial disminuye al meter el dieléctrico. Esto es debido a que, en ausencia de una fuente externa de potencial que lo mantenga, el condensador necesita un potencial menor para almacenar la carga Q_0 , puesto que ha aumentado su capacidad (Nótese que si hubiéramos mantenido la pila conectada, el potencial no bajaría, pero a cambio, la carga almacenada en el condensador aumentaría).

Puesto que la diferencia de potencial entre las placas ha disminuido, también lo hace el campo eléctrico entre las placas, ya que comparando las ecuaciones (2) y (4) del tema

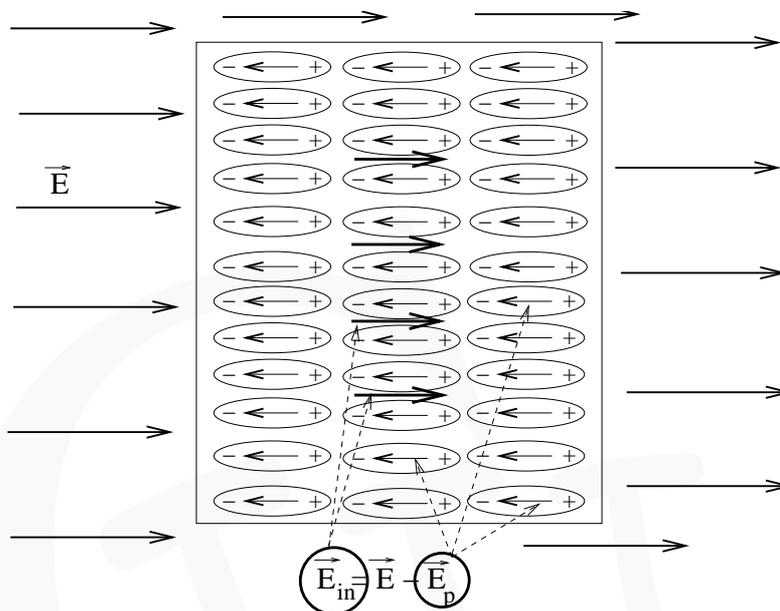


Figura 10.5: Dieléctrico en presencia de un campo eléctrico externo.

sobre condensadores, vemos que dicho campo es igual a $\vec{E} = V/d$. Por lo tanto,

$$E_1 = \frac{V_1}{d} = \frac{V_0}{\epsilon_r d} < E_0, \quad (10.6)$$

lo cual se entiende por el modelo microscópico simplificado explicado en la sección anterior.

●**EJEMPLO:** Sea un condensador de $C_0 = 10\mu F$, que se llena con un dieléctrico con $\epsilon_r = 4$. Después, se conecta a una batería de 20V. ¿Cuál será la carga del condensador?

$$C = \epsilon_r C_0 = 40\mu F; \quad Q = CV = 40\mu F \cdot 20V = 0.8mC. \quad (10.7)$$

●**EJEMPLO:** El mismo condensador se conecta a la batería primero y una vez cargado, se desconecta. Luego, se mete el dieléctrico con $\epsilon_r = 4$. ¿Cuál será la carga del condensador?

$$Q_0 = C_0 V_0 = 10\mu F \cdot 20V = 0.2mC; \quad (10.8)$$

y puesto que la carga no puede cambiar, tendremos que:

$$Q = Q_0. \quad (10.9)$$

¿Y la diferencia de potencial entre las placas?

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\epsilon_r C_0} = 5V. \quad (10.10)$$

10.4 CAMPO DE RUPTURA

Como hemos dicho ya, las moléculas de un dieléctrico se polarizan en presencia de un campo eléctrico. Es decir, se produce una separación de la carga hasta que la fuerza atractiva que mantiene la molécula cohesionada compensa la fuerza separadora debida al campo eléctrico externo (este símil mecánico de la "fuerza atractiva" no es cierto estrictamente, pero da una buena idea intuitiva de lo que suceder). Sin embargo, dicha fuerza atractiva tiene un máximo, lo que implica que, por encima de un valor del campo externo llamado **campo de ruptura**, la cohesión interna de la molécula desaparece, y el dieléctrico se destruye. Este es el fenómeno por el cual se producen rayos en nuestra atmósfera durante las tormentas eléctricas: el campo eléctrico supera el valor del campo de ruptura del aire, y se produce una descarga eléctrica o rayo.

●**EJEMPLO:** Calcular el voltaje máximo que soporta el sistema de la figura, si el potencial de ruptura de los condensadores es de 400V.

Calculando cual es la carga máxima que soporta cada condensador tenemos que, en el caso del condensador 1:

$$V_{max}^{AB} = 400V \Rightarrow q_{1,max} = C V_{max}^{AB} = 0.4\mu C. \quad (10.11)$$

En el equivalente a los dos condensadores en paralelo, la carga máxima, $Q_2 + Q_3$ viene dada por:

$$V_{max}^{BC} = 400V \Rightarrow q_{1,max} = C_{23} V_{max}^{AB} = (C_2 + C_3) V_{max}^{AB} = 0.8\mu C. \quad (10.12)$$

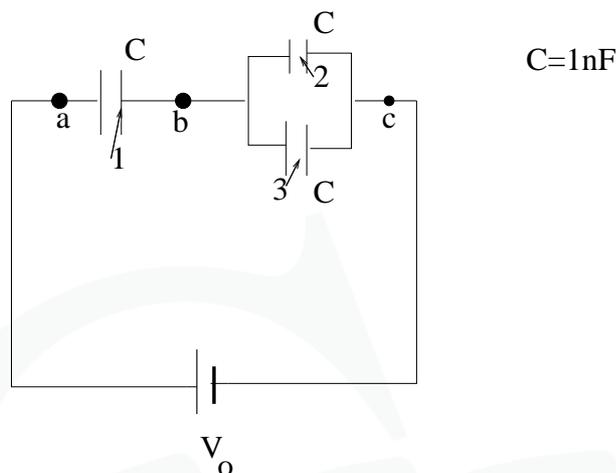


Figura 10.6: Esquema del ejemplo de campo de ruptura.

Puesto que el condensador 1 está en serie con el equivalente 2 + 3, ambos **tienen** necesariamente que contener la misma carga. Por lo tanto, la carga máxima en el sistema es la menor de las dos anteriores, $q_{max} = q_{1,max} = 0.4\mu C$. Y por lo tanto, suponiendo que esta es la carga almacenada, tendremos que la diferencia máxima de potencial V_0 a la que se puede someter al sistema será:

$$V_0 = V_{AB} + V_{BC} = \frac{q_{max}}{C_1} + \frac{q_{max}}{C_2 + C_3} = 400V + 200V = 600V. \quad (10.13)$$

10.5 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONDENSADOR+DIELÉCTRICO

Nos limitaremos a dar dos ejemplos que ilustran uno de los muchos métodos de solución posibles en el caso de que el dieléctrico no rellene **completamente** el espacio existente entre las placas del condensador. EL método se basa en sustituir el sistema condensador+dieléctrico por una asociación de condensadores equivalente, y resolver utilizando la teoría de condensadores estándar, vista en el Tema 7.

●**EJEMPLO:** Calcular la cantidad de energía almacenada en los dos sistemas de la Fig. 10.5, suponiendo que los parámetros de la misma tienen valores dados por $V = 100V$, $a = 0.1m$, $b = 0.2m$, $d = 0.01m$ y $\epsilon_r = 5$.

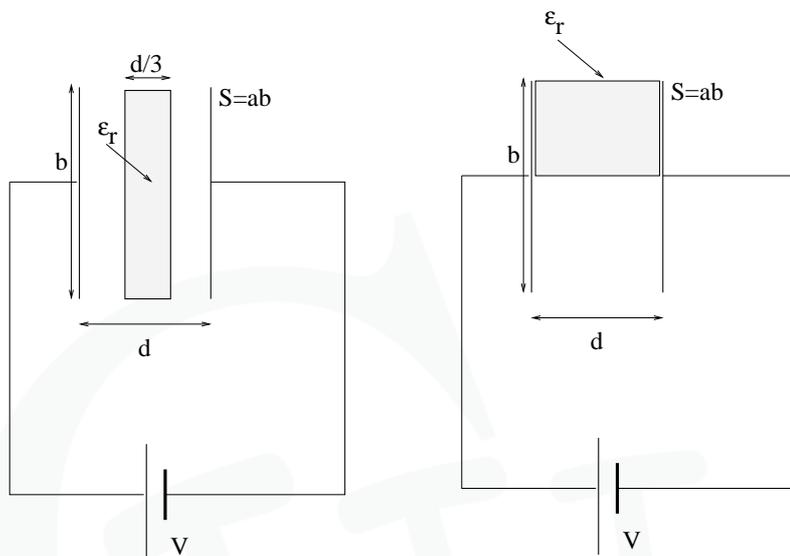


Figura 10.7: Esquemas del ejemplo de resolución de problemas condensador+dieléctrico.

- **Sistema de la izquierda:**

*Basta con considerar el sistema equivalente mostrado en la parte de la izquierda de la Fig. 10.5. Una vez hecho, la capacidad equivalente es el equivalente a tres condensadores unidos **en serie**, con capacidades individuales dadas por:*

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\epsilon_0 ab}{d/3} \\
 C_2 &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{d/3} \\
 C_3 &= \frac{\epsilon_0 ab}{d/3}
 \end{aligned}
 \tag{10.14}$$

donde se ha usado que la capacidad de un condensador plano-paralelo es $C = \epsilon_0 S/d$ (con S el área de la placa y d la distancia entre las mismas), así como las nuevas dimensiones de los condensadores de la asociación. Por lo tanto,

$$C_{eq}^{-1} = \frac{d}{3\epsilon_0 ab} + \frac{d}{15\epsilon_0 ab} + \frac{d}{3\epsilon_0 ab} = \frac{11d}{15\epsilon_0 ab} \Rightarrow C_{eq} = \frac{15}{11} \left(\frac{\epsilon_0 a b}{d} \right).
 \tag{10.15}$$

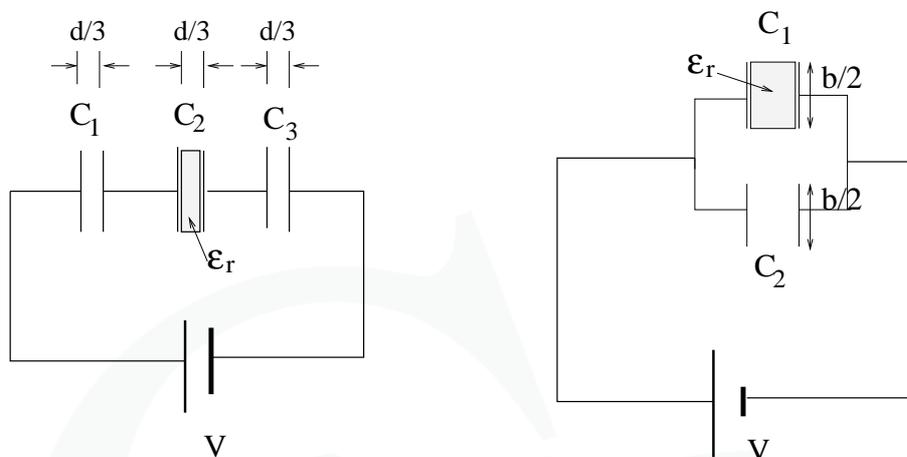


Figura 10.8: Asociaciones equivalentes al problema del ejemplo.

Por tanto, la energía total almacenada sería:

$$W^{elect} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{15}{22} \left(\frac{\epsilon_0 a b}{d} \right) V^2. \quad (10.16)$$

- **Sistema de la derecha:**

Basta con considerar el sistema equivalente mostrado en la parte de la derecha de la Fig. 10.5. Una vez hecho, la capacidad equivalente es el equivalente a dos condensadores unidos **en paralelo**, con capacidades individuales dadas por:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{2d} \quad (10.17)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 ab}{2d}$$

donde se ha vuelto a usar que la capacidad de un condensador plano-paralelo es $C = \epsilon_0 S/d$, teniendo en cuenta las nuevas dimensiones de los condensadores que forman la asociación. Por lo tanto,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r ab}{2d} + \frac{\epsilon_0 ab}{2d} \Rightarrow C_{eq} = (1 + \epsilon_r) \frac{\epsilon_0 ab}{2d}. \quad (10.18)$$

Por tanto, la energía total almacenada sería:

$$W^{elect} = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 = \frac{1 + \epsilon_r}{4} \left(\frac{\epsilon_0 ab}{d} \right) V^2. \quad (10.19)$$

Capítulo 11

CORRIENTE ELECTRICA

Se entiende por **corriente eléctrica** un **flujo ordenado de carga**. Puesto que solamente en medios conductores hay cargas (*quasi*)-libres que puedan moverse ordenadamente, es en éstos en los que se establecen corrientes eléctricas (en contraste con lo que vimos que sucedía en medios dieléctricos, en los que no existen cargas libres). Un ejemplo, ya mencionado en temas anteriores, de establecimiento de corriente eléctrica es el trasiego de carga que se establece al unir dos esferas conductoras hasta los potenciales eléctricos de ambas se equilibren.

11.1 INTENSIDAD DE CORRIENTE, I .

Si suponemos que existe una corriente eléctrica en un medio conductor, se define la intensidad de corriente I que atraviesa una superficie arbitraria S que interseccione con el conductor, como la cantidad de carga que pasa a través de dicha superficie en la unidad de tiempo. Es decir, si en un intervalo de tiempo Δt , una cantidad de carga ΔQ atraviesa S , entonces la intensidad de corriente es igual a :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad (11.1)$$

que se mide, en unidades del sistema MKS, en **amperios**. Fijaros que, con esta definición, la intensidad de corriente sería positiva o negativa según el signo de las cargas que pasen. Sin embargo, por convenio, se toma siempre que $I > 0$. Por tanto, el sentido de la corriente será igual al del sentido real de circulación de cargas si éstas son positivas. Si no, el movimiento de las cargas será contrario al de la corriente.

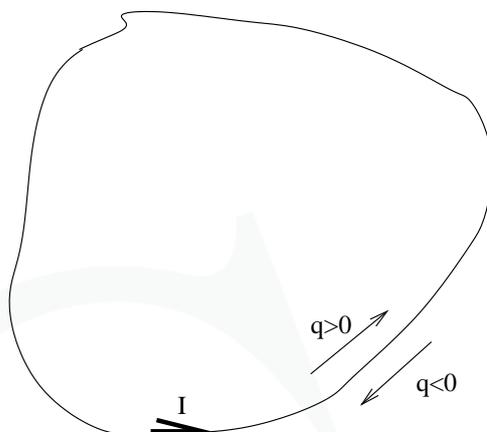


Figura 11.1: Puesto que se asume siempre que $I > 0$, el sentido de la corriente sólo coincide con el del movimiento de las cargas, si éstas son positivas.

11.1.1 Densidad de corriente, \vec{J} .

La intensidad de corriente I es especialmente útil cuando estamos tratando con conductores rectilíneos, en los que su sección es mucho menor que su longitud (como un cable, por ejemplo). En ese caso, es una buena aproximación el suponer que la carga está repartida uniformemente sobre la sección del cable y que se mueve según la dirección del mismo. Por lo tanto, basta con especificar la cantidad de carga que atraviesa la sección en la unidad de tiempo (lo cual da la intensidad de corriente I definida en el apartado anterior) para tener perfectamente caracterizado el movimiento de las cargas.

Sin embargo, muchas veces la corriente no se establece a lo largo de un cable, sino dentro de un volumen. En ese caso, la carga puede fluir en direcciones y velocidades diferentes según el lugar del volumen en el que se mire. En ese caso, no basta con dar el valor de la intensidad de corriente I , sino que hay que caracterizar la dirección y sentido del flujo de carga eléctrica en cada punto del volumen. Para ello, es necesario introducir una nueva cantidad, la densidad de corriente \vec{J} , que nos da información **local** (es decir, en cada punto) sobre la cantidad de carga que pasa en la unidad de tiempo, así como de la dirección en la que lo hace.

Para definir el vector \vec{J} , miremos la Fig. 1. Consideremos un elemento diferencial de superficie dS perteneciente a la superficie S anterior. La carga que atravesará este diferencial de superficie en una cantidad de tiempo dt será igual a toda la carga contenida en el diferencial de volumen dV que se muestra en la parte de la derecha de la Fig. 2. Si suponemos que la densidad de partículas en este volumen viene dada por $n(\vec{r})$, que se

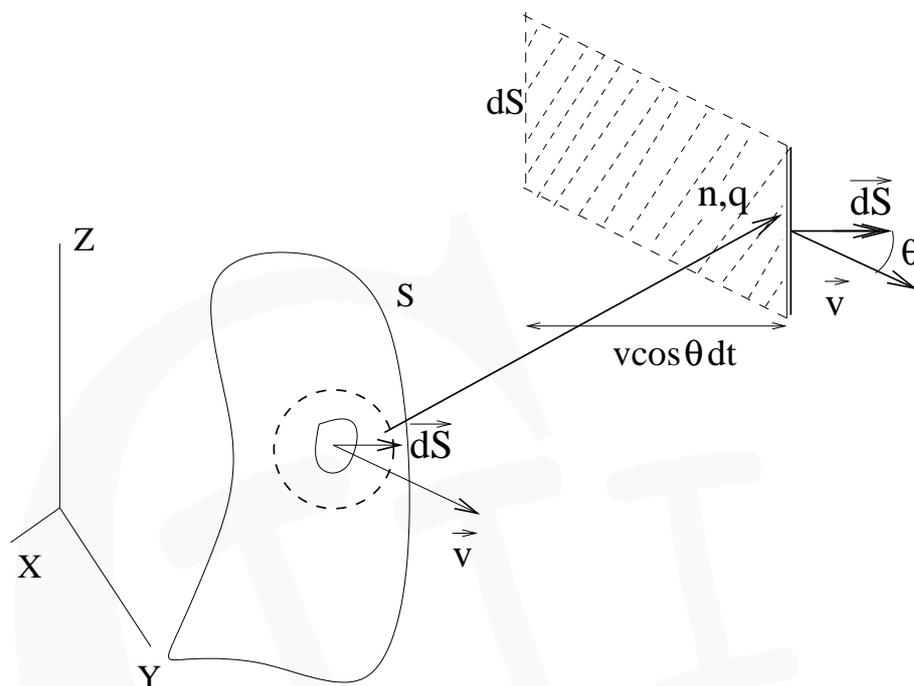


Figura 11.2: Definición vector densidad de corriente \vec{J} .

mueven con velocidad $\vec{v}(r)$, y que cada partícula individual tiene una carga q , tendremos que la cantidad total de carga contenida en dV es igual a

$$dQ = nq \cdot dV = nq \cdot v \cos\theta \cdot dS \cdot dt = nq(\vec{v} \cdot \vec{dS}) \cdot dt \quad (11.2)$$

Por tanto, usando la definición dada por la Eq. 11.1, tenemos que la intensidad de carga que atraviesa el diferencial dS es igual a:

$$dI = \frac{dQ}{dt} = nq(\vec{v} \cdot \vec{dS}). \quad (11.3)$$

Se define el vector **densidad de corriente** como:

$$\vec{J} = nq\vec{v}, \quad (11.4)$$

con lo que podemos reescribir la Eq. 11.3:

$$dI = \vec{J} \cdot \vec{dS}. \quad (11.5)$$

Finalmente, la corriente total a través de la superficie S no es más que la integral de la ecuación anterior a toda la superficie:

$$I = \int \int_S dI = \int \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (11.6)$$

Nótese por tanto que, contenidas en \vec{J} , hay escondida información no sólo sobre la cantidad de carga que atraviesa dS en la unidad de tiempo, sino también de la dirección en que lo hace.

11.2 LEY DE OHM

Si suponemos un alambre conductor entre cuyos extremos se establece una diferencia de potencial ΔV , se encuentra experimentalmente que la intensidad de corriente que aparece es proporcional a dicha diferencia de potencial. La ley de Ohm es la formulación matemática de este hecho:

$$\Delta V = R I, \quad (11.7)$$

donde R se define como la **resistencia** del conductor, y se mide en **ohmios** ($1\Omega = 1$ Voltio/1 Amperio.).

Normalmente, un conductor rectilíneo de resistencia R se representa gráficamente como:

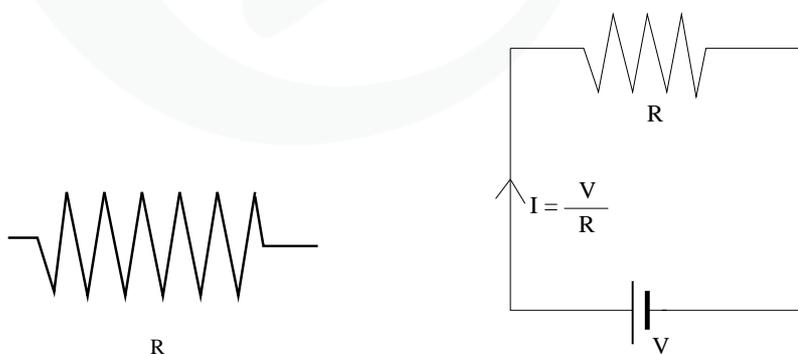


Figura 11.3: Representación gráfica de una resistencia y de la ley de Ohm.

con lo que la ley de Ohm, gráficamente, nos dice que si cerramos sus extremos con un generador (ver sección siguiente para algunos comentarios sobre lo que es un generador)

que proporcione una diferencia de potencial V , circulará una corriente igual a $I = V/R$, como se ve en la parte derecha de la figura.

En general, R depende de la forma y geometría del conductor, del tipo de material y de su temperatura. Por ejemplo, en el caso de un alambre conductor, se tiene que:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (11.8)$$

donde l es la longitud del cable, S su sección, y a ρ se le llama **resistividad del material**, y se mide en **ohmios-metro**. Microscópicamente, el valor de ρ está relacionado con la resistencia que ofrece el material a que una corriente eléctrica transite en su interior a causa de los choques que las cargas libres experimentan contra los átomos que conforman el sólido. La eficiencia y frecuencia de estos choques depende de la estructura íntima del material, así como de la temperatura de éste.

Finalmente, y aunque no lo usaremos mucho, esta ley puede reescribirse en términos del vector densidad de corriente, \vec{J} , y del vector campo eléctrico, \vec{E} (que juegan papeles análogos a I y ΔV cuando la corriente fluye en un volumen, en lugar de a lo largo de un cable) como:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (11.9)$$

donde $\sigma \equiv 1/\rho$ se llama **conductividad del material**.

11.3 LEY DE JOULE: POTENCIA DISIPADA EN UNA RESISTENCIA

Si consideramos el cable de la figura, cuando una cantidad de carga ΔQ pasa de la posición A a la B , su energía potencial eléctrica disminuye en:

$$\Delta U = U_B - U_A = \Delta Q(V_B - V_A) = -\Delta Q(V_A - V_B) \quad (11.10)$$

Recordando ahora que los electrones **sólo** se mueven de puntos con **menor potencial** eléctrico a puntos con un potencial eléctrico **mayor**, tenemos que $V_A > V_B$, con lo que $\Delta U < 0$. Se define la **potencia** como el cambio de energía sufrido en la unidad de tiempo. Por lo tanto, la potencia perdida por los electrones que se mueven de A a B es igual a:

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} \Delta V = -I V. \quad (11.11)$$

Esta potencia es negativa, y por tanto, perdida por los electrones. El proceso de pérdida está asociado a la energía y momento perdidos por los electrones al chocar con

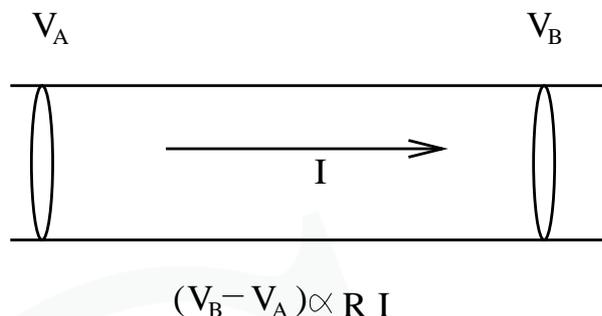


Figura 11.4: Esquema para entender la derivación de la ley de Joule.

los átomos que forman el material, los cuales aumentan su energía y temperatura. Por lo tanto, este proceso se percibe en el material como un incremento de temperatura. La potencia ganada en forma de calor por el conductor será igual a la perdida por los electrones, pero cambiada de signo: $P' = I V$. Utilizando la ley de Ohm, podemos también reescribirla como:

$$P' = I V = R I^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (11.12)$$

A esta ecuación se le conoce como **Ley de Joule**.

11.4 CIRCUITOS

Los **circuitos** más simples son asociaciones de elementos susceptibles de conducir, almacenar o forzar la circulación de carga eléctricas. A los primeros se les llama **resistencias**, puesto que son conductores cuya capacidad de conducir está cuantificada por su resistencia. Los segundos, son los **condensadores** y los terceros, las **pilas** o **generadores**¹. En estas notas, consideraremos solo asociaciones de resistencias y generadores.

11.4.1 Generadores

Para mantener una corriente estacionaria en un conductor rectilíneo necesitamos una fuente que mantenga una diferencia de potencial entre sus extremos y que suministre, de manera continua, la energía que pierden las cargas libres en sus choques con los átomos de la red conductora (si no, se pararían y no existiría una corriente estacionaria). Esto

¹Las clases de elementos que pueden formar parte de un circuito no se agotan ni mucho menos con estos tres tipos.

se consigue mediante un **generador** o una **pila**, que convierten respectivamente energía mecánica o química en energía eléctrica.

En un circuito, un generador se representa como se muestra en la Fig.5, donde r

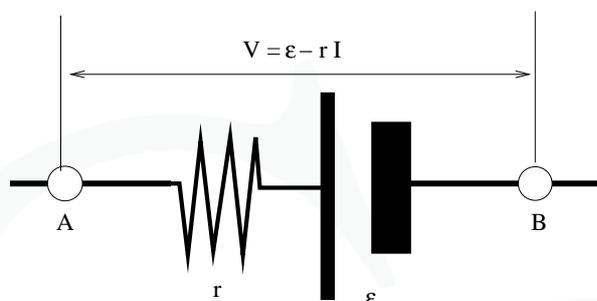


Figura 11.5: Representación gráfica de un generador.

representa la resistencia interna del generador. Por tanto, la diferencia de potencial que proporcionara entre sus extremos (representados por A y B) será igual a:

$$\Delta V = \epsilon - rI \quad (11.13)$$

donde ϵ es la diferencia de potencial entre sus extremos en **circuito abierto** (es decir, cuando no hay corriente alguna fluyendo en el circuito), e I es la intensidad que recorre el circuito. Muchas veces, la resistencia interna es tan pequeña que se toma $\Delta V \simeq \epsilon$.

Asociaciones de resistencias

Se distinguen dos tipos fundamentales de asociaciones de resistencias: en **serie** (ver parte superior Figura 6) y en **paralelo** (ver parte inferior Figura 6). Se reconoce que dos resistencias están asociadas en serie si, al conectar los extremos de la asociación a un generador, la intensidad de corriente que atraviesa cada una de las resistencias es igual a la intensidad total que recorre el circuito, de modo que $I = I_1 = I_2$, y la diferencia de voltaje verifica $V = V_1 + V_2$. En cambio, si hacemos lo mismo con dos resistencias conectadas en paralelo, la intensidad que recorre el circuito se *reparte* entre las dos, de modo que se verifica que: $I = I_1 + I_2$, mientras que las diferencias de potenciales verifican que $V = V_1 = V_2$.

Es posible sustituir dos resistencias asociadas en serie por una **resistencia equivalente**, entre cuyos extremos caiga la misma diferencia de potencial que entre los extremos

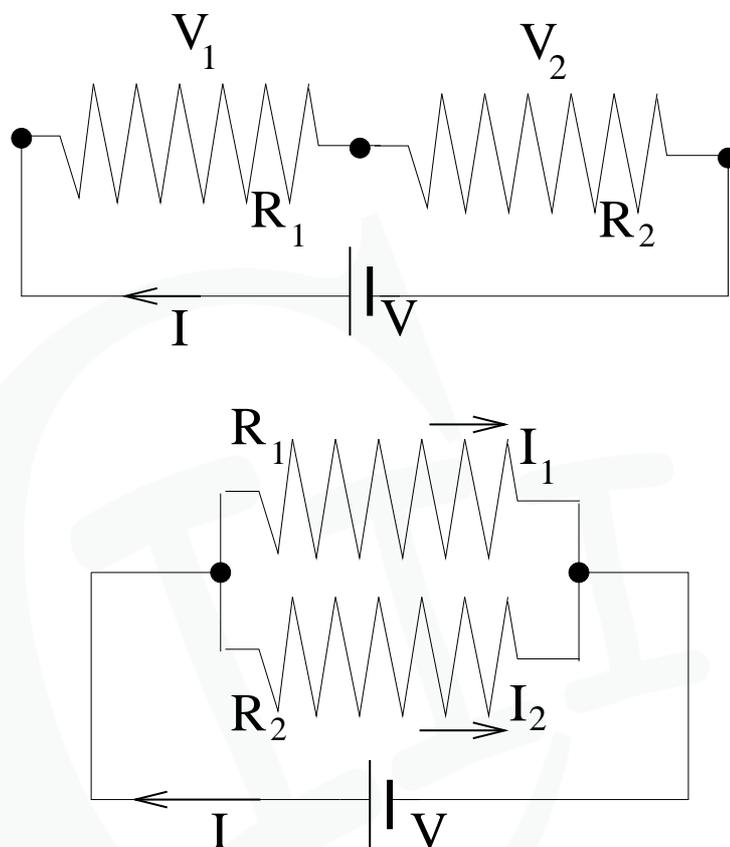


Figura 11.6: Asociaciones de resistencias.

de la asociación al ser atravesada por la misma corriente que atraviesa la asociación. Para ello, basta recordar que, en una asociación en serie se cumple que:

$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I, \quad (11.14)$$

luego la resistencia equivalente sería igual a la suma de las resistencias que forman la asociación:

$$R_{eq}^{ser} = R_1 + R_2, \quad (11.15)$$

que se generaliza trivialmente para el caso de N resistencias asociadas en serie:

$$R_{eq}^{ser} = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (11.16)$$

En el caso de tener dos resistencias asociadas en paralelo, se cumplía que:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (11.17)$$

luego, puesto que la resistencia equivalente ha de verificar $V = R_{eq}I$, para los mismos valores de V e I , tenemos que :

$$\frac{1}{R_{eq}^{par}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (11.18)$$

que se generaliza también trivialmente al caso de muchas resistencias:

$$\frac{1}{R_{eq}^{par}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}. \quad (11.19)$$

• **NOTA:** Como ayuda para distinguir, gráficamente, entre resistencias asociadas en serie o paralelo basta tener en cuenta la siguiente regla: si dos resistencias comparten solamente un extremo, están asociadas en serie (parte superior de la Figura 6), mientras que si están unidas por ambos extremos, están asociadas en paralelo (parte inferior de la Figura 6).

11.5 RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA.

La resolución de un circuito implica determinar cuál es la corriente que atraviesa cada uno de los componentes del circuito, y cuál es la caída de potencial entre sus extremos. La manera de resolver circuitos no es única. A veces, es útil sustituir las resistencias que forman el circuito por una única resistencia equivalente, usando las reglas de identificación de asociaciones de resistencias vistas en la sección anterior.

• **EJEMPLO:** Resolución de un circuito sencillo, con un solo generador (ver Figura 7).

DATOS: $R_1 = R_3 = 10\Omega$, $R_2 = R_4 = 15\Omega$; $V = 100V$.

Las resistencias R_1 y R_2 están en paralelo, con lo que pueden sustituirse por una equivalente, con resistencia igual a $R' = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 6\Omega$. Ésta, está a su vez en

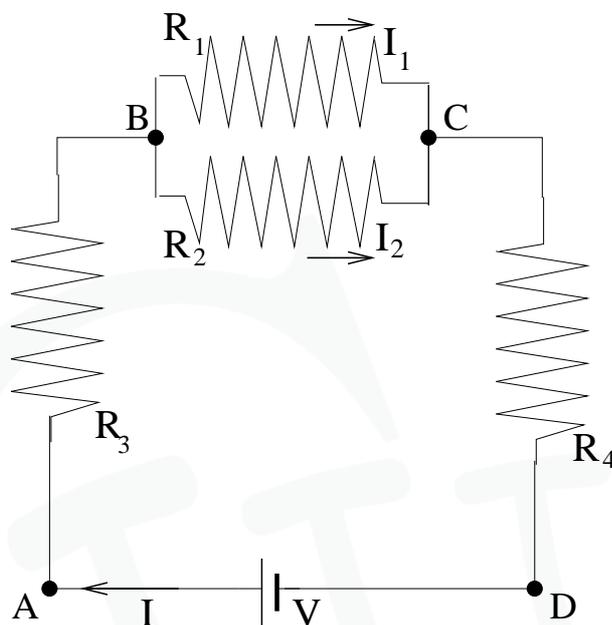


Figura 11.7: Diagrama del ejemplo de resolución de circuito con una sola pila.

serie con R_3 y R_4 , con lo que pueden sustituirse por otra $R = R_3 + R_4 + R' = 31\Omega$. Por lo tanto, la corriente total que fluye en el circuito es:

$$I = V/R = 100/31 \simeq 3.226A. \quad (11.20)$$

Ahora, podemos calcular las diferencias de potencial entre las resistencias R_3 , R' y R_4 , (es decir, V_{AB} , V_{BC} y V_{CD}) usando que:

$$V_{AB} = R_3 \cdot I \simeq 32.26V, \quad V_{BC} = R' \cdot I \simeq 19.35V, \quad V_{CD} = R_4 \cdot I \simeq 48.39V. \quad (11.21)$$

Finalmente, las intensidades que recorren R_1 y R_2 se sacan una vez conocida V_{BC} , puesto que $I_1 = V_{BC}/R_1 \simeq 1.935A$ y $I_2 = V_{BC}/R_2 \simeq 1.29A$.

11.5.1 Leyes de Kirchoff

Sin embargo, muchas veces tenemos más de una única pila en el circuito, y no es posible resolver el problema como vimos en el ejemplo anterior. Existe, sin embargo, métodos más general para resolver circuitos, basados en las llamadas **leyes de Kirchoff**. Estas leyes se enuncian sobre dos elementos diferentes de un circuito, los **nudos** y las **mallas**.

Por nudo se entiende cualquier punto del circuito que une a dos o más componentes del mismo (ver Fig. 8).

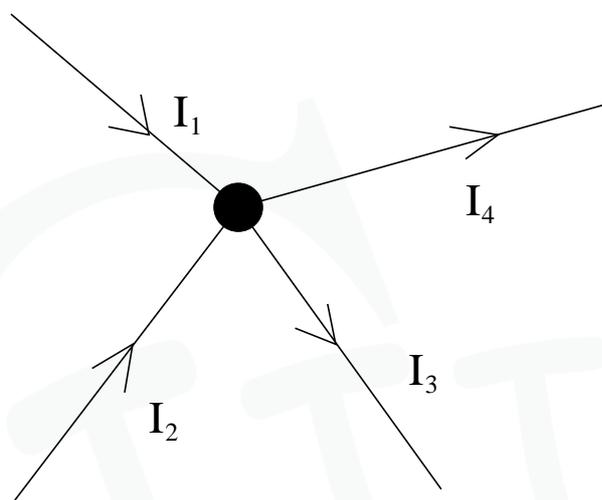


Figura 11.8: Nudo en un circuito

En **todo nudo** ha de cumplirse la **primera ley de Kirchoff**: La suma de corrientes que entran ha de ser igual a la suma de las corrientes que salen del nudo. Es decir, en la Fig. 8, ha de cumplirse que:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4. \quad (11.22)$$

Es importante darse cuenta de que la primera ley de Kirchoff es una consecuencia directa de la conservación de la carga eléctrica.

Por **mall**a se entiende cualquier trayecto cerrado que se puede recorrer en el sistema de circuitos. La **segunda ley de Kirchoff** nos dice que, **en cualquier malla, la caída de potencial a lo largo de toda la malla es igual a la proporcionada por los generadores que en ella se encuentren.**

¿Cómo se usan? Veámoslo con un ejemplo que ilustra la resolución de circuitos por lo que se llama **método mixto de nudos-mallas.**

• **Ejemplo:** Resolver el circuito de la Fig. 9 por el método de nudos-mallas.

Datos: $\epsilon_1 = 10V$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 5V$; $R_1 = R_3 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$.

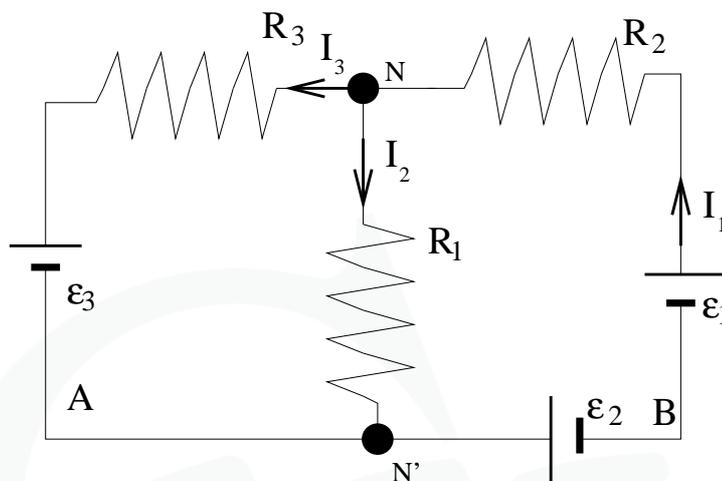


Figura 11.9: Circuito que ejemplifica el uso de las leyes de Kirchoff para la resolución de circuitos por nudos.

Distinguiamos primero dos nudos en el circuito, que denotamos por N y N' , así como dos mallas, que llamamos A (la malla izquierda) y B (la derecha). Ahora asignamos una corriente a cada rama del circuito. Para ello, llamamos I_1 a la corriente que sale del primer generador (ϵ_1) y ésta, al llegar al nudo N , se bifurcará en dos, I_2 e I_3 , que se reúnen de nuevo en el nudo N' .

Aplicando la primera ley de Kirchoff a cualquiera de los dos nudos tenemos que:

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad (11.23)$$

con lo que necesitamos dos ecuaciones más (ya que tenemos tres incógnitas, que son cada una de las corrientes) que se consiguen aplicando la segunda ley de Kirchoff a la malla derecha (B):

$$I_1 R_2 + I_2 R_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (11.24)$$

y en la malla izquierda (A):

$$I_3 R_3 - I_2 R_1 = -\epsilon_3. \quad (11.25)$$

Es importante notar que el signo del potencial de cada generador depende de la orientación de su lado positivo con respecto a la corriente. Así, si la corriente sale del positivo y llega al negativo (como en el caso de ϵ_1) se toma positivo, pero en caso contrario (casos de ϵ_2 y ϵ_3) se toman negativos.

Resolviendo ahora el sistema de ecuaciones anterior, obtenemos que, de la primera:

$$I_2 = I_1 - I_3, \quad (11.26)$$

que sustituyendo en las otras dos tenemos para la malla derecha (B):

$$I_1(R_2 + R_1) - I_3R_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (11.27)$$

y en la malla izquierda (A):

$$-I_1R_1 + I_3(R_3 + R_1) = -\epsilon_3, \quad (11.28)$$

nos reduce el sistema a dos ecuaciones. Para resolverlas reagrupamos ambas ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -R_1 I_1 + (R_1 + R_3)I_3 &= -\epsilon_3 \\ (R_1 + R_2) I_1 - R_1 I_3 &= \epsilon_1 - \epsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

Despejando I_1 e I_2 tenemos que:

$$I_1 = \frac{\epsilon_3 R_1 - (R_1 + R_2)(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{R_1^2 - (R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}, \quad (11.30)$$

y :

$$I_3 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)R_1 + \epsilon_3(R_1 + R_2)}{R_1^2 - (R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}, \quad (11.31)$$

y finalmente,

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{R_2(\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3)}{R_1^2 - (R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}. \quad (11.32)$$

Finalmente, los voltajes entre los extremos de las resistencias vendrán dados por $V_i = R_i I_i$, donde i puede ser 1, 2 ó 3.

Capítulo 12

EL CAMPO MAGNÉTICO

12.1 FUENTES DEL CAMPO MAGNÉTICO: CORRIENTES E IMANES.

Experimentalmente se observa que si acercamos dos hilos conductores por los que circula una corriente, aparece una fuerza entre ambos. Ésta es una interacción **nueva** y diferente de la electrostática, que se denomina **fuerza magnética**. Si recordamos que por corriente eléctrica se entiende un conjunto de cargas en movimiento ordenado, no es difícil intuir que esta interacción va a estar relacionada con la existencia de cargas eléctricas en **movimiento**.

Sin embargo, las fuerzas magnéticas no se experimentaron por primera vez al acercar dos hilos conductores, sino al acercar trozos de metal (normalmente hierro) que se denominaban **imanes**, y que se conocían ya en la Antigüedad (por ejemplo, los griegos, hacia el s.V a.C. ya hablan de ellos). Sus dos extremos, que se llamaron **polo norte** y **polo sur**¹, tenían curiosas propiedades: si los extremos norte (o sur) de dos imanes se acercaban, estos se repelían; pero si se acercaban el extremo norte de uno y el extremo sur del otro, se atraían. Además, si un imán se partía por la mitad, los dos nuevos extremos resultantes de la división adquirían las propiedades de nuevos polos. Por último, si se acercaba el imán a un conjunto de virutas metálicas, éstas se ordenaban formando figuras muy curiosas, como las de la Figura 1. Sin embargo, inicialmente no se pensó que las fuerzas asociadas a los imanes estuvieran relacionadas con el mismo tipo de interacción observada en los hilos conductores. Pero pronto se comprobó que si se abandonaban las

¹La razón para estos nombres fue que, dejando totalmente libres los imanes, éstos tendían a orientarse con su polo norte apuntando al polo norte geométrico de la Tierra. Esto se entiende ya que la Tierra se comporta como un gran imán, ¡con su polo sur estando situado cerca del polo norte geométrico!

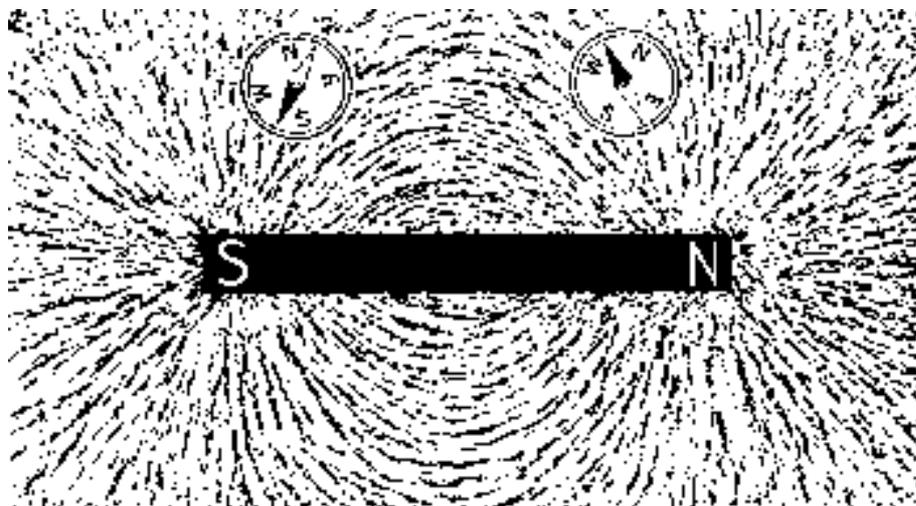


Figura 12.1: Orientación de virutas metálicas por un imán.

virutas metálicas en presencia de una corriente eléctrica con determinada forma, éstas se orientaban de manera similar al caso del imán. Más adelante entenderemos porqué.

En conclusión, se denominan **fuentes del campo magnético** a todo aquello que es capaz de provocar una interacción magnética. A saber: **corrientes eléctricas, imanes** y sorprendentemente, aunque no lo veremos nosotros, **¡campos eléctricos que varíen en el tiempo!**

12.2 EL VECTOR INDUCCIÓN MAGNÉTICA, \vec{B}

La interacción magnética se describe, matemáticamente, de manera totalmente análoga a como se hacía la eléctrica. ¿La diferencia? Que al representar una interacción entre cargas en movimiento, es necesario incluir en su formulación las velocidades de éstas. Esto complica un poco las cosas.

Recordemos un momento como se introdujo el campo eléctrico ²: decíamos que una

²Recordad que, históricamente, no se hizo de este modo. Se midió primero como era la fuerza que se experimentaba entre las dos cargas, la **Fuerza de Coulomb**, y se definió el campo eléctrico después, como la fuerza por unidad de carga, para resolver varios problemas de interpretación física (ver notas sobre el Campo Eléctrico). Igualmente, en el caso del magnetismo, se midió primero la fuerza entre cargas en movimiento experimentalmente, y de ahí, se definió el concepto de campo magnético.

carga eléctrica Q , situada en \vec{r}' , crea un campo eléctrico en cada punto \vec{r} dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{Q}{d^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (12.1)$$

siendo d la distancia entre la carga y el punto \vec{r} , y \vec{u}_r el vector unitario en la dirección que va de la carga hasta \vec{r} . La constante K se podía reescribir en términos de la permeabilidad eléctrica ϵ_0 . Ahora, si una segunda carga, q , era abandonada en \vec{r} , experimentaría una fuerza eléctrica dada por:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}(\vec{r}). \quad (12.2)$$

De manera análoga, diremos que una carga Q , situada en \vec{r}' y que **se mueva con velocidad** \vec{v}_Q , crea un campo magnético en el punto \vec{r} dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = K' \frac{Q}{d^2} (\vec{v}_Q \times \vec{u}_r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{v}_Q \times (\vec{r} - \vec{r}')), \quad (12.3)$$

donde de nuevo d es la distancia de la carga al punto \vec{r} , y \vec{u}_r es el unitario que va de la carga al punto. El campo magnético se mide, en el sistema M.K.S., en **Teslas (T)**. La constante K' que aparece en su definición, se reescribe en términos de lo que se llama la **permeabilidad magnética del vacío**, y que vale $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{C}$. Y como primera observación importante, fijaros que el campo magnético creado por una carga en un punto **no va en la dirección de la recta que une la carga con el punto**, a diferencia de lo que pasa con el campo eléctrico. Luego ahondaremos más en este punto.

En cuanto a la fuerza que experimentaría una segunda carga q , situada en \vec{r} y que **se mueva con velocidad** \vec{v}_q , ésta se calcula de una manera parecida al caso del campo eléctrico:

$$\vec{F}_m = q\vec{v}_q \times \vec{B}(\vec{r}), \quad (12.4)$$

donde ahora no sólo hay que multiplicar por el valor de q , sino también por su velocidad, \vec{v}_q , ya que como dijimos antes, ésta es una fuerza entre cargas en movimiento. Además, el producto es **vectorial**.

Examinemos brevemente el significado de estas nuevas fórmulas. Miremos, para ello, la Fig.2(izqda.). En ella se muestra el campo magnético creado por una carga Q que se mueve con velocidad \vec{v}_Q . Debido a las propiedades del producto vectorial, el campo magnético creado es **perpendicular tanto a \vec{r} como a \vec{v}_Q** ! Ahora, recordando que en un hilo conductor no tenemos una, sino muchas cargas moviéndose con velocidades paralelas, el campo magnético creado por el hilo será igual a la suma vectorial de los creados por cada carga (recordad el principio de superposición) y, por lo tanto, será también perpendicular al hilo (ver Fig.2(dcha.)).

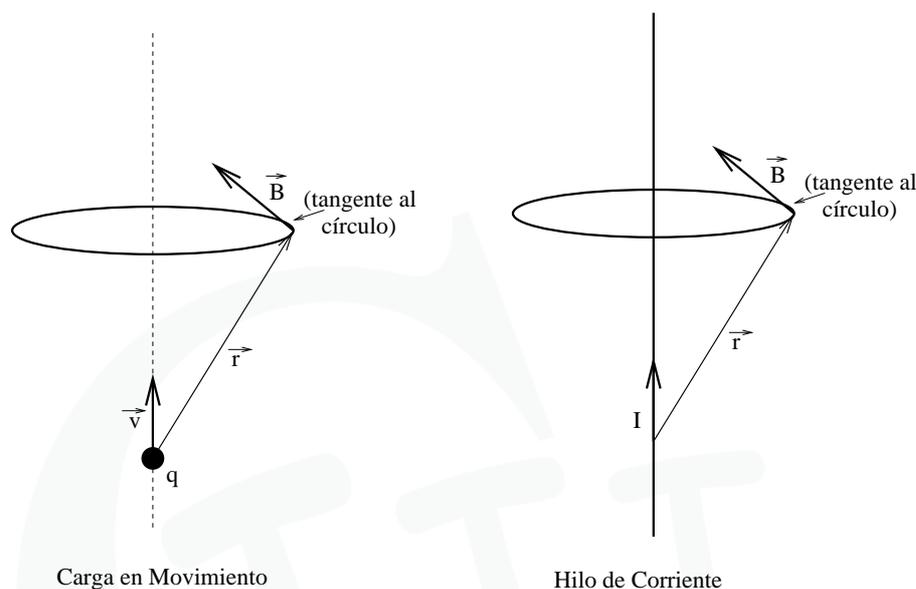


Figura 12.2: Campo magnético creado por una carga en movimiento (izquierda) y un hilo conductor (derecha).

12.3 FUERZA DE LORENTZ

Miremos ahora la expresión de la fuerza magnética, \vec{F}_m , también llamada **fuerza de Lorentz**. Lo más importante es darse cuenta de las implicaciones que tiene el hecho de que aparezca un producto vectorial en la Ecuación 4. La primera es que **la fuerza es nula si $\vec{v}_q \parallel \vec{B}$** . Es decir, si la partícula se está moviendo paralelamente al campo magnético (ver Fig.3(izqda.)), es como si no existiese campo alguno. Así, por ejemplo, una carga que se mueva paralelamente al hilo de la Fig 2(dcha.), ni se enteraría de que el hilo existe.

Si la partícula estuviera moviéndose perpendicularmente al campo \vec{B} (ver Fig.3(centro)), entonces sentiría una fuerza perpendicular a su dirección de movimiento (dada por \vec{v}), con módulo igual a $|F_m| = qv|B|$. Fijaros que, en el caso de que $|B|$ sea constante, estoy implicaría que la partícula describiría un círculo, cuyo radio se obtiene igualando la fuerza centrípeta a ésta:

$$qv|B| = mv^2/R \Rightarrow R = \frac{mv}{q|B|}. \quad (12.5)$$

El tiempo que tarda en dar una vuelta completa será: $T = 2\pi R/v = 2\pi m/q|B|$, y por tanto la frecuencia de giro $\omega = 2\pi/T = q|B|/m$.

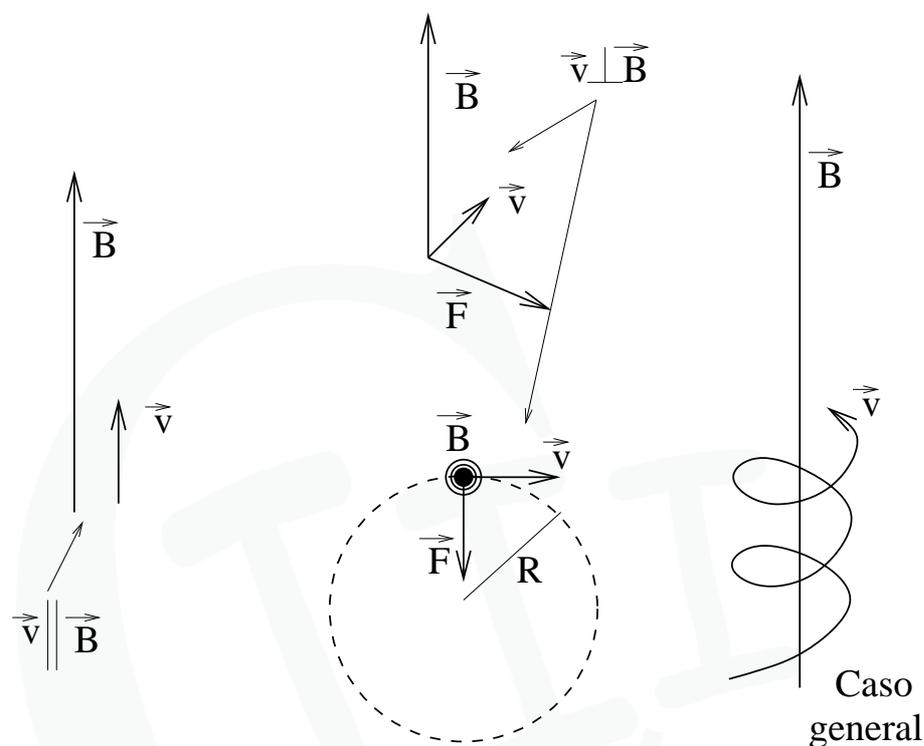


Figura 12.3: Movimiento de una carga en un campo magnético.

Si el vector velocidad forma un ángulo diferente de 90° con el campo magnético, entonces podemos dividirlo en dos componentes, una paralela y la otra perpendicular al campo \vec{B} . La componente paralela no sufre cambio alguna. La perpendicular, rota alrededor del campo, tal y como hemos visto antes. Por lo tanto, la composición de ambos movimientos, nos da una hélice a lo largo del campo \vec{B} (ver Fig.3(dcha.)).

12.4 CAMPO CREADO POR UN HILO DE CORRIENTE

Supongamos que tenemos un hilo por el que circula una corriente I . Veamos primero como se relaciona I con la velocidad de las cargas en el hilo. La corriente I nos dice que, en un intervalo de tiempo dt , la cantidad de carga que atraviesa la sección del hilo es:

$$dQ = I dt. \quad (12.6)$$

Pero si las cargas se mueven con velocidad v a lo largo del hilo, en un tiempo δt , las únicas cargas que pueden atravesar una sección dada serán las que disten como mucho de ella una distancia $v \cdot dt$; si están más lejos, no llegarán hasta la sección elegida en ese tiempo (ver Fig.4(izqda.)). Por lo tanto, si n es la densidad de partículas en volumen del hilo, tendremos que:

$$dQ = n q S v dt, \quad (12.7)$$

con q la carga de cada una de ellas y S la superficie de la sección del hilo. Por lo tanto, igualando ambas, tenemos que la velocidad de las cargas en el hilo se relaciona con la intensidad de corriente que lo recorre mediante:

$$v = I/nqS. \quad (12.8)$$

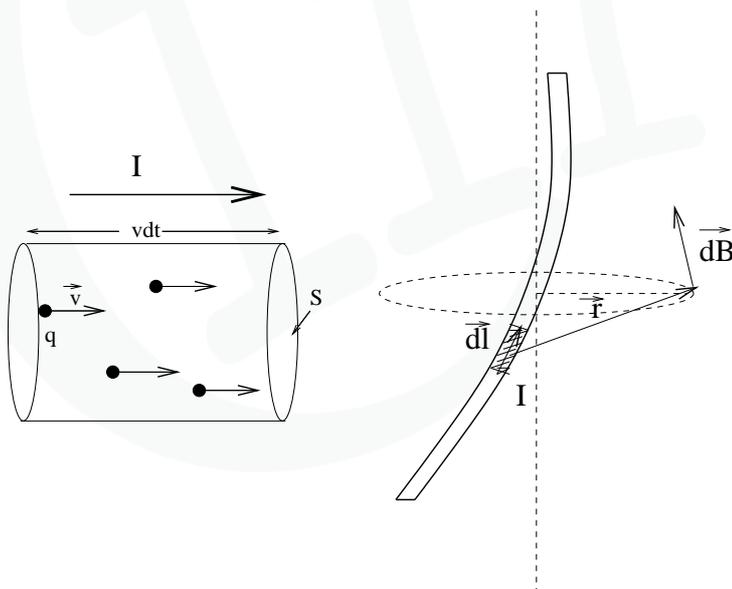


Figura 12.4: Campo creado por un hilo rectilíneo. Ley de Biot-Savart.

Ahora calcularemos el campo creado por un pequeño trozo de hilo de longitud dl . La cantidad de carga contenida en él será igual a $dQ = qnSdl$, y la velocidad a la que se mueven será, como vimos antes, $v = I/nqS$, luego tenemos que se cumple:

$$vdQ = I dl \Rightarrow \vec{v}dQ = I \vec{dl}, \quad (12.9)$$

donde el vector \vec{dl} tiene la dirección tangente al hilo.

Por lo tanto, el campo magnético creado por ese pequeño trozo de hilo podemos calcularlo suponiendo que el trozo contiene una cantidad de carga dQ que se mueve a velocidad v ; usando entonces la expresión anterior, que relaciona $\vec{v}dQ$ con $I\vec{dl}$, y metiéndolo en la expresión para el campo creado por una carga puntual se llega:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 dQ}{4\pi r^2} \vec{v} \times \vec{u}_r = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}, \quad (12.10)$$

donde \vec{r} es el vector que va del diferencial al punto donde se crea el campo (equivale a suponer que el \vec{dl} está situado en $\vec{r}' = 0$). Si suponemos ahora que el diferencial de hilo está situado en \vec{r}' , tendremos que sustituir en la expresión anterior $r \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|$, y escribir el vector unitario como $\vec{u}_r = (\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (12.11)$$

expresión conocida como la **Ley de Biot-Savart**.

Ahora, el campo creado por todo el hilo se obtiene integrando:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (12.12)$$

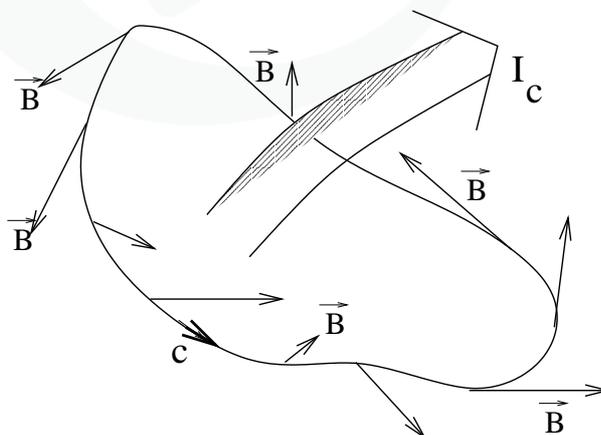


Figura 12.5: Ley de Ampère.

12.5 LEY DE AMPÈRE

Sin embargo, calcularse los campos creados por distribuciones de corriente es muy complicado, ya que las integrales son muy difíciles de hacer. Existe, sin embargo, una manera más sencilla de calcular estos campos, parecida al teorema de Gauss para el campo eléctrico. Se le conoce como ley de Ampère, y afirma que la integral:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C \quad (12.13)$$

donde C representa a **cualquier circuito cerrado**, y I_C es la corriente que lo atraviesa (ver Fig. 5).

¿Cuándo es útil? Pues, al igual que en el caso del Teorema de Gauss, cuando la simetría y dirección del campo magnético sea grande, de manera que podamos elegir un circuito C , llamado *amperiana* para la que la evaluación de la integral anterior sea trivial. Veamos como se usa, en un ejemplo.

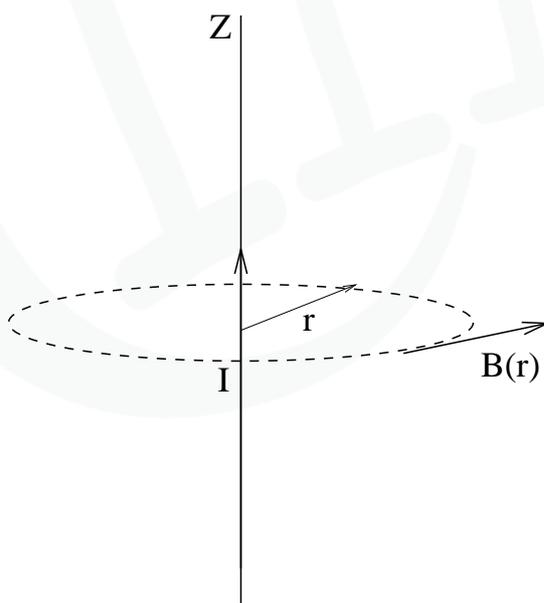


Figura 12.6: Ley de Ampère: aplicación a un hilo rectilíneo.

• **Ejemplo: campo creado por un hilo rectilíneo (ver Fig. 6):**

Cogiendo el eje Z a lo largo del hilo, vemos que el problema tiene simetría cilíndrica. Luego el campo \vec{B} solo puede depender de r . Además, su dirección es tangente a círculos

centrados en el hilo (recordar la discusión del final de la Sección 3, y en la Figura 2). Por lo tanto, cogemos un circuito que sea un círculo de radio r , centrada en el hilo. Entonces, puesto que \vec{B} es tangente al círculo, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$; pero además, B es constante sobre el círculo. Por lo tanto,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B dl = 2\pi r B(r). \quad (12.14)$$

Ahora, el segundo miembro es trivial, puesto que la corriente que atraviesa el círculo es toda la que va por el hilo: I . Luego, el teorema de Ampère nos dice:

$$\mu_0 I = 2\pi r B(r) \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (12.15)$$

12.6 FUERZA SOBRE UN HILO DE CORRIENTE

En la sección anterior hemos visto como calcular el campo creado por un hilo de corriente, llegando a la expresión de Biot-Savart. Sin embargo, dijimos al principio del tema que las cargas en movimiento no sólo crean un campo magnético, sino que también reciben una fuerza cuando se desplazan en un campo magnético ya existente. Puesto que un hilo por el que fluye una corriente no es más que un conjunto de cargas en movimiento, es de esperar que también él experimente una fuerza cuando lo coloquemos en un campo externo.

¿Cómo se calcula? Pues haciendo algo parecido a lo que hicimos al calcular el campo que creaba. Dividimos el hilo en diferenciales de longitud $d\vec{l}$, cada uno de los cuales contiene una cantidad de carga dQ que se mueve con velocidad \vec{v} , cumpliéndose que $dQ\vec{v} = I d\vec{l}$, como vimos en la sección anterior. La Fuerza de Lorentz sobre una carga viene dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (12.16)$$

Por lo tanto, por comparación, la fuerza sobre el diferencial de longitud $d\vec{l}$ será:

$$d\vec{F} = dQ\vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (12.17)$$

Nótese que, al igual que en el caso de la partícula, la fuerza es perpendicular tanto a la dirección de movimiento de las cargas (dada por $d\vec{l}$) como a la del campo magnético.

Finalmente, podemos obtener la fuerza sobre todo el hilo, integrando a todo el hilo:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (12.18)$$

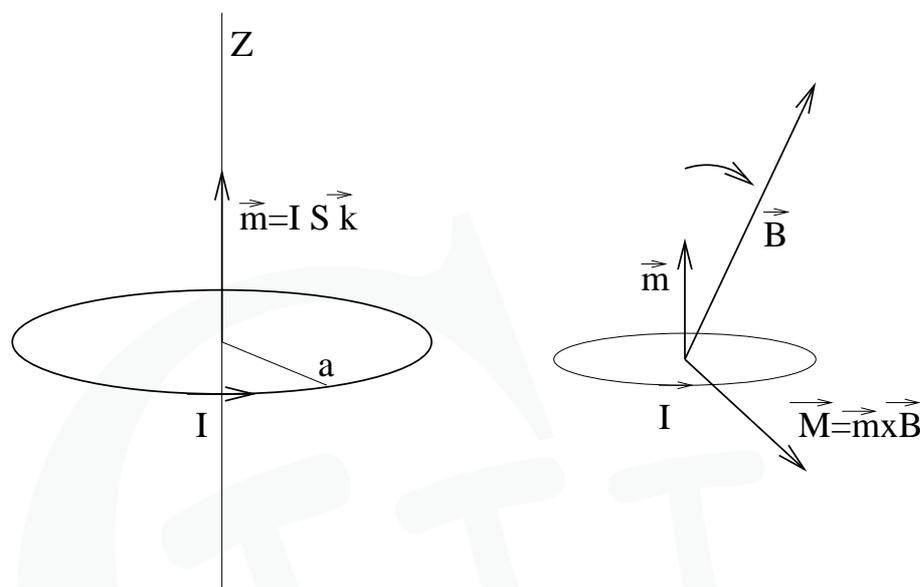


Figura 12.7: Campo magnético de una espira circular: momento magnético.

12.6.1 Campo magnético en el centro de una espira

Se llama espira a un pequeño circuito cerrado y plano, que está recorrido por una intensidad de corriente I (ver Fig.7(izqda)). El campo magnético en su centro puede calcularse fácilmente (usando la ley de Biot-Savart), obteniéndose que: 1) está dirigido perpendicularmente al plano que contiene a la espira y 2) tiene por módulo:

$$\vec{B}_{\text{centro}} = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{k}, \quad (12.19)$$

suponiendo el eje Z coincidente con la perpendicular al plano que contiene a la espira.

Es común definir el **momento magnético de una espira** como un vector que tiene por dirección la perpendicular a la espira, y por módulo el producto del área de la espira, $S = \pi a^2$, por la intensidad que la recorre I :

$$\vec{m} = IS \vec{k}, \quad (12.20)$$

por lo que el campo en su centro puede reescribirse como:

$$\vec{B}_{\text{centro}} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi a^3}, \quad (12.21)$$

que nos dice que, a mayor momento magnético, mayor campo crea la espira.

El momento magnético es importante por otra razón. Si nuestra espira se pone en presencia de un campo magnético externo, \vec{B} , aparece un momento de fuerzas dado por:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad (12.22)$$

que tiende a hacer que **el vector \vec{m} se alinee paralelamente al campo magnético externo \vec{B}** (ver Fig.7(dcha)).

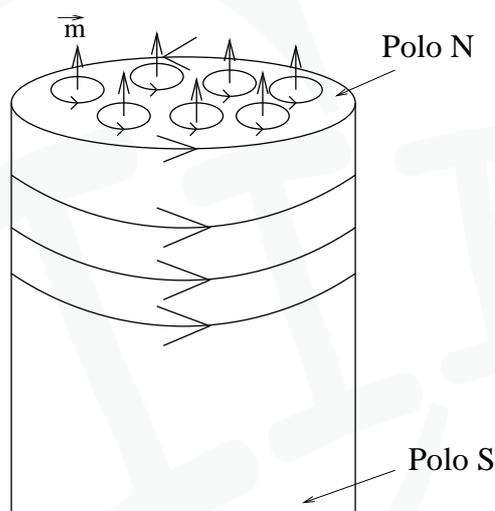


Figura 12.8: Modelo de Ampère para un imán.

12.7 IMANES

Para entender porque un imán puede comportarse de manera semejante a una corriente, y dar lugar a un campo, utilizaremos el **modelo de Ampère**. Este consiste en pensar que los electrones que giran alrededor de los núcleos atómicos del material son pequeñas corrientes. En muchos materiales, el movimiento electrónico puede asimilarse con pequeñas **espiras de corriente** (ver Fig.8), a las que podemos asignar un vector momento magnético, \vec{m} , y por tanto, un campo magnético proporcional a éste similar al visto en el caso de la espira circular en la sección anterior. En su estado demagnetizado, los átomos del material se encuentran con sus vectores \vec{m} orientados al azar, lo que hace que la suma vectorial de los campos magnéticos creados por cada uno de ellos se anule. Sin

embargo, si acercamos el material a un campo externo, todos los momentos magnéticos tenderán a alinearse paralelamente al campo externo, como vimos en la sección anterior. A este proceso se le llama **imantar** el material. En general, una vez que se retira el campo externo, los momentos se desordenan y desaparece el campo creado por el material (a estos materiales se les llama materiales paramagnéticos). Sin embargo, existen algunos (como el hierro), para los que el campo magnético no desaparece incluso una vez retirado el campo externo que lo imanó. Estos materiales (llamados ferromagnéticos) son los que dan lugar a lo que se conoce como un imán permanente.

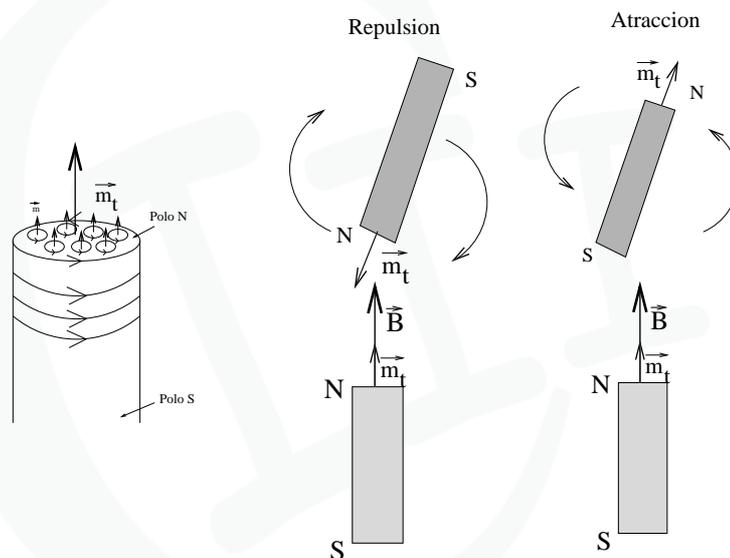


Figura 12.9: Atracción y repulsión de los polos de un imán.

La similitud con una corriente eléctrica puede verse en la Figura 8. Las corrientes internas 'se cancelan', quedando únicamente una corriente 'imaginaria' sobre la superficie externa del imán. Por lo tanto, un imán cilíndrico crea un campo magnético similar a un arrollamiento cilíndrico de corriente o **solenoides**.

Es también fácil entender porqué los polos de igual signo de dos imanes se atraen, y los polos de diferente signo se repelen. Para ello, basta darse cuenta que a cada imán se le puede asignar un momento magnético total igual a la suma de los de cada átomo que lo forman (ver Fig. 9). El campo cerca del polo norte se muestra en la figura, y es paralelo al momento magnético del imán. Si ahora acercamos un segundo imán por su polo norte, éste tratará de darse la vuelta para alinearse con el campo creado por el primer imán, siendo, por tanto, repelido. Si lo acercamos por su polo sur, será en cambio atraído.

12.8 LEY DE FARADAY

Por último, vamos a tratar brevemente lo que se conoce como **Ley de Faraday**, que nos dice que un campo magnético **cuya magnitud varíe con el tiempo** es capaz de **inducir una corriente eléctrica**. Este descubrimiento fue la base del desarrollo industrial de la electricidad en el s. XIX, ya que se podía transformar energía mecánica en energía eléctrica. Para entenderlo, basta ver la Fig. 10: al acercar o alejar el imán a las espiras, el galvanómetro detecta una corriente eléctrica en un sentido o en el contrario.

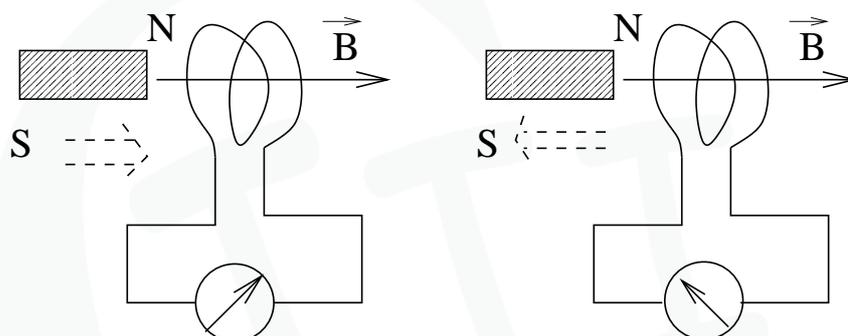


Figura 12.10: Ley de Faraday.

Esta corriente se produce debido a que el flujo del campo magnético a través de las espiras **cambia con el tiempo**: como la magnitud del campo magnético decrece con la distancia, a medida que el imán se acerca, el campo magnético que siente la espira es mayor, y el flujo dado por:

$$\Phi = \int \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (12.23)$$

es mayor. La corriente que aparece en la espira puede medirse, y se ve que es proporcional al cambio en el flujo, siguiendo la fórmula:

$$I = \frac{1}{R} \left(-\frac{d\Phi}{dt} \right), \quad (12.24)$$

donde R es la resistencia de la espira. Por tanto, el paréntesis de la derecha tiene dimensiones de diferencia de potencial, y por eso se le llama **f.e.m. inducida**. Cuando el imán se aleja, el campo visto por la espira es cada vez menor, y por lo tanto, el flujo disminuye con el tiempo. La derivada del flujo cambia de signo, y la corriente fluye en sentido contrario.

Por lo tanto, la **Ley De Faraday** afirma que siempre que haya un cambio con el tiempo en el flujo magnético que atraviese un circuito, se induce en él una fuerza electromotriz dada por:

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (12.25)$$

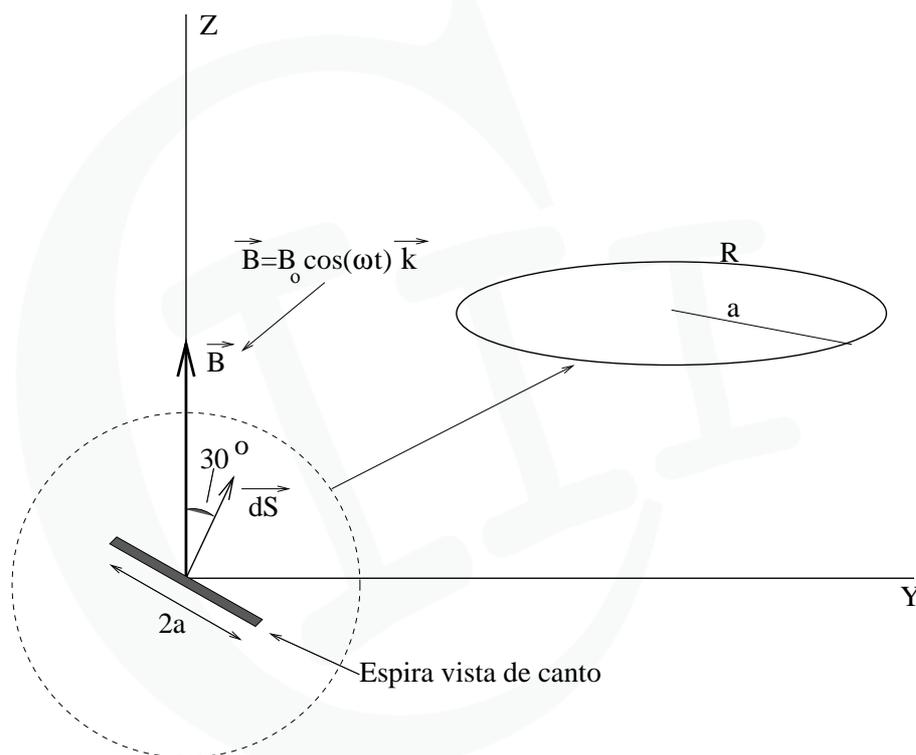


Figura 12.11: Ley de Faraday: aplicación a un espira circular en un campo cosenoidal.

• **Ejemplo:** f.e.m. inducida en una espira circular de radio a y resistencia R , por un campo magnético vertical cuyo modulo oscila cosenoidalmente en el tiempo con frecuencia ω y amplitud B_0 , y cuya dirección forma un ángulo de 30° con la perpendicular a la espira (ver Fig. 11):

Fijaros que el campo magnético puede escribirse como:

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{k}, \quad (12.26)$$

escogiendo el eje Z coincidente con la dirección del campo.

Ahora, el vector $d\vec{S}$ es un vector que forma un ángulo de 30° con \vec{B} . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint B dS \cos 30 = \iint B_0 \cos(\omega t) \cos 30 dS \\ &= B_0 \cos(\omega t) \cos 30 \iint S = B_0 \cos(\omega t) \cos 30 (\pi a^2).\end{aligned}\tag{12.27}$$

Por lo tanto, la f.e.m. inducida es:

$$\epsilon_{ind}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = B_0 \cos 30 (\pi a^2) \omega \sin(\omega t).\tag{12.28}$$

Si la espira tuviese una resistencia R , la corriente que aparecería estaría dada por la ley de Ohm:

$$I(t) = \frac{\epsilon_{ind}(t)}{R} = \frac{B_0 \cos 30 (\pi a^2)}{R} \sin(\omega t)\tag{12.29}$$