

Equilibrio hidrostático

- Obvio: atmósfera no escapa al vacío ni cae sobre interior estelar
- No aceleraciones de gran escala comparables a gravedad superficial
- Cualquier pérdida (“ganancia”) de masa no dinámicamente significativa

⇒ La atmósfera estelar se encuentra en equilibrio hidrostático: La diferencia de presión neta en el elemento de gas balancea su peso

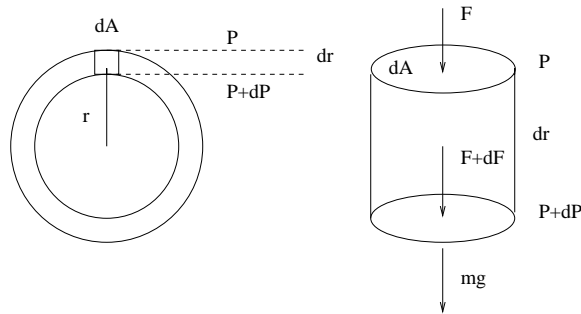


Figura 1: Presión neta sobre el elemento de volumen es la diferencia entre la presión hacia arriba y la que se ejerce hacia abajo. En equilibrio las fuerzas de presión neta contrarrestan la gravedad

- La fuerza de gravedad sobre el elemento de volumen:

$$dF = \rho dA dx g$$

– Por unidad de área:

$$dP = g \rho dx$$

– (la presión aumenta hacia dentro como x , de ahí que no pongamos el signo menos)

$$\frac{dP}{dx} = g\rho \quad (1)$$

- La profundidad óptica en dx

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho dx$$

$$\frac{dP}{d\tau_\nu} = \frac{g}{\kappa_\nu} \quad (2)$$

- (2) da la distribución de P (total) en función de τ .
- Presiones significativas pueden ser:
 - Gas
 - Electrones
 - Radiación
 - Turbulencia
 - Magnética

Equilibrio hidrostático: Presión del gas

- La presión gaseosa es:

$$P_g V = n_{moles} \mathcal{R} T \quad (3)$$

- $\mathcal{R} = k N_A = k / m_H$; $N_g = n_{moles} N_A / V$; $\mu = \overline{m} / m_H$
- $k = \text{cte. Boltzmann}$
- $N_A = \text{número de Avogadro}$
- $m_H = \text{unidad de masa atómica}$
- $N_g = \text{densidad de partículas (cm}^{-3}\text{)}$
- $\mu = \text{peso molecular medio de todas las partículas libres (incluye electrones)}$

$$P_g = N_g k t = \frac{\rho k T}{\mu m_H} = \frac{\rho \mathcal{R} T}{\mu} \quad (4)$$

- Sustituyendo ρ en (1)

$$\frac{dP_g}{dx} = \frac{g\mu}{\mathcal{R}T} P_g \quad (5)$$

- $H_P = \mathcal{R}T / \mu g$ (*escala de altura de presiones*)

$$P_g(x) = P_g(0) e^{(x-x_0)/H_P} = P_g(0) e^{\Delta x / H_P} \quad (6)$$

Significado:

$$P_g(x) = P_g(0)e^{\Delta x/H_P} \quad ; \quad H_P = \mathcal{R}T/\mu g$$

– Esfera isoterma ($T = cte.$): H_P es la altura para un cambio e de la presión.

– Atmósfera de densidad $\rho_0 = cte.$, que corresponda a la densidad en la base de la atmósfera ($P_g(0)$): H_P da la altura de la capa donde se pone toda la masa.

H_P es un buen indicador de la extensión radial de la atmósfera. Proporciona un criterio para la aplicabilidad de la geometría plano-paralela:

$$\frac{H_P}{R_*} = \frac{\mathcal{R}T}{\mu g R_*} = \frac{\mathcal{R}T R_*}{\mu G M_*} = 4,4 \times 10^{-8} \frac{T_e(R_*/R_\odot)}{\mu(M_*/M_\odot)} \ll 1 \quad (7)$$

• *SOL*: $\mu = 1$, $T_e \sim 5800K$, $R_\odot = 7 \times 10^5 km$ ($\log g = 4,44$) $\rightarrow H_P \approx 150 km$

• *Enana blanca*: $\mu = 0,5(H^+, n_e)$, $T = 15000 K$, $\log g = 8$
 $\rightarrow H_P \approx 0,25 km$

Integración de P_g

$$\frac{dP}{d\tau_\nu} = \frac{g}{\kappa_\nu} \quad (8)$$

- 1. Aproximación: Tomamos valores medios de κ_ν y τ_ν :

$$P_g - P_{g_0} = \int_{\bar{\tau}_0}^{\bar{\tau}} \frac{g}{\bar{\kappa}} d\bar{\tau} \quad (P_{g_0} = P_g(\bar{\tau}_0)) \quad (9)$$

Para evaluar la integral hay que conocer la presión: en general, por iteración

Suponiendo una dependencia de $\bar{\kappa}$ con la profundidad o la presión: integración analítica

– Hipótesis plausible: $\bar{\kappa} = \text{cte.} \leftrightarrow$ n. partículas por gramo de material es cte.

– para un χ concreta (incluye ionización). !!Excitación!!

$$P_g - P_{g_0} = \frac{g}{\bar{\kappa}} (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) \quad (10)$$

– Con $\tau_0 = 0$; $P_{g_0} = 0$

$$P_g = \frac{g}{\bar{\kappa}} \bar{\tau} \quad (11)$$

– Conociendo $T(\tau)$ para una T_e se puede suponer una $\bar{\kappa} \rightarrow P_g \rightarrow$ con este valor se incrementa $\Delta\tau$ en (10) y se halla un nuevo $\bar{\kappa} \rightarrow$ en (11) se obtiene $P_g \rightarrow$ se reitera hasta converger

- 2. aproximación: $\bar{\kappa} = \kappa_0 P_g^n$

$$P_g^n dP_g = \frac{g}{\kappa_0} d\bar{\tau} \quad (12)$$

$$\frac{1}{n+1} P_g^{n+1} = \frac{g}{\kappa_0} \bar{\tau} \quad ; \quad (P_{g0} = 0) \quad (13)$$

– Si H^- es responsable de la absorción en el continuo, $n = 1$ es buena aproximación:

$$P_g^2 = \frac{2g}{\kappa_0} \bar{\tau} \quad (14)$$

Si $\bar{\kappa} \propto P_g \rightarrow P_g$ incrementa con $g^{1/2}$ y no proporcionalmente a g como se podría esperar de la ecuación de eq. hidrostático.

Presión electrónica

Estratificación de T y P :

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e'^4 (\bar{\tau} + q(\bar{\tau}))$$

$$P_g - P_{g0} = \int_{\bar{\tau}_0}^{\bar{\tau}} \frac{g}{\bar{\kappa}} d\bar{\tau}$$

• En general:

$$P_g = NkT \quad ; \quad P_g = \sum_i P_i = \sum_i N_i kT \quad (15)$$

– $N = \sum_i N_i$ = densidad de partículas

– Para los electrones:

$$P_e = n_e kT \quad (16)$$

$$n_e = N^+ + 2N^{2+} + 3N^{3+} + \dots \quad (17)$$

■ Caso sencillo: atmósfera de hidrógeno:

$$N = N(H) + n_e + N(H^+) = N(H) + 2n_e = N(H) + 2N(H^+) \quad (18)$$

$$N = N(H) + 2n(H^+) = P_g/kT \quad (19)$$

– Saha:

$$\frac{N(H^+)}{N(H)}n_e = f(T) \rightarrow \frac{N(H^+)^2}{N(H)} = f(T) \quad (20)$$

– (17) y (20) son dos ecuaciones con dos incógnitas, $n_e = N(H^+)$ y $N(H)$, que se resuelven para valores dados de T y P_g

Ejemplos:

1. SOL (suponiendo H puro), $n_e = N(H^+)$. Aplicando Saha:

$$\frac{n_e^2}{N(H)} = 4,23 \times 10^9 cm^{-3}$$

– Para $P_g = 10^5$ dinas/cm² a $\tau = 2/3 \rightarrow N \sim N(H) = 1,2 \times 10^{17} cm^{-3}$ (H en el Sol esencialmente neutro y con la ley de los gases perfectos) $\rightarrow n_e = 2,25 \times 10^{13} cm^{-3} \rightarrow P_e = 19$ dinas/cm² y:

$$\frac{n_e}{N(H)} = \frac{P_e}{P_g} = 0,0002$$

2. Supongamos un metal M de abundancia 5×10^{-5} , $\chi_i = 6 \text{ eV}$
- La densidad de e será: $n_e = N(H^+) + N(M^+)$
 - Saha para M (si $u(M^+) = u(M^0)$, $T_e = 6000 \text{ K}$, $P_e \sim 19 \text{ dinas/cm}^2$:

$$\log \frac{N(M^+)}{N(M^0)} \approx 2,95$$

- Es decir, M se encuentra ionizado en atmósfera solar:

$$N(M)/N(H) \sim N(M^+)/N(H^0)$$

- De arriba: $N(H^0) = 1,2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$:

$$n_e = N(H^+) + 5 \times 10^{-5} N(H^0) = N(H^+) + 6 \times 10^{12}$$

- En Saha para H :

$$\frac{n_e N(H^+)}{N(H^0)} = N(H^+) \frac{N(H^+) + 6 \times 10^{12}}{1,2 \times 10^{17}} = 4,23 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$$

- Resolviendo:

$$N(H^+) = 2,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3} \rightarrow n_e = 2,6 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

- Lo que representa un incremento de $\sim 30\%$ en P_e , pero insuficiente para cambiar significativamente el grado de ionización de M .

- Si todo el hidrógeno está ionizado: $P_g = 2P_e$
- Atmósfera de He completamente ionizado:

$$\frac{P_e}{P_g} = \frac{2N(He^{2+})}{3N(He^{2+})} = 2/3$$

- Para una mezcla de elementos: Saha + abundancias

Presión de radiación

$$P_\nu = \int_{\Omega} \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega \quad (21)$$

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I_\nu \cos^2 \theta d\Omega \quad (22)$$

$$P_\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu \quad (23)$$

- En la aproximación de Eddington: $K_\nu = \frac{1}{3} J_\nu$

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} J_\nu \quad (24)$$

- Para una atmósfera gris (integrando en frecuencias)

$$P_r = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty J_\nu d\nu = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty S_\nu d\nu = \frac{4\pi}{3c} \frac{\sigma}{\pi} T^4 = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \quad (25)$$

P_r despreciable para estrellas tipo solar, pero importante en estrellas de los primeros tipos (dependencia T^4).

En estrellas calientes:

$$\frac{dP_g}{dx} = g\rho(x) - \frac{dP_r}{dx} = g_{eff}(x)\rho(x) \quad (26)$$

$$g_{eff} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \kappa_\nu F_\nu d\nu \quad (27)$$

– ya que $F_\nu = \frac{dK_\nu}{d\tau}$

- La atmósfera deja de ser estática \rightarrow se expande debido a vientos originados por la radiación



Figura 2: η Carinae: Caso extremo de pérdida de masa en una estrella posiblemente debido a la presión de radiación: eyección de varias masas solares, afectando su evolución posterior

Ejercicios

1. Suponer una estrella con una atmósfera plano-paralela gris en donde la aproximación de Eddington es válida:

$$T^4 = \frac{3}{4}T_e^4\left(\tau + \frac{2}{3}\right)$$

Hallar la fracción de la intensidad emitida en la dirección $\theta = 0$ que se origina a distintas profundidades ópticas, suponiendo que la estrella radia como un cuerpo negro.

- En general, la intensidad de radiación que emite la estrella es:

$$I_\nu(\theta) = \int_0^\infty S_\nu e^{-\tau_\nu \sec \theta} \sec \theta d\tau_\nu$$

- En nuestro caso ($\theta = 0$; $\sec \theta = 1$)

$$I(\theta = 0) = \int_0^\infty B e^{-\tau} d\tau = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^\infty T^4 e^{-\tau} d\tau = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \int_0^\infty \left(\tau + \frac{2}{3}\right) e^{-\tau} d\tau$$

$$I = \frac{5\sigma}{4\pi} T_e^4$$

– es la intensidad que sale para todas las profundidades ópticas

- La que sale a partir de una profundidad τ :

$$I(\tau) = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \int_0^\tau \left(\tau + \frac{2}{3}\right) e^{-\tau} d\tau = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \left[\frac{5}{3} - \left(\tau + \frac{5}{3}\right) e^{-\tau}\right]$$

$$\frac{I(\tau)}{I} = 1 - (0,6\tau + 1)e^{-\tau}$$

τ	0.0	0.2	0.4	0.6	1	10	∞
$\frac{I(\tau)}{I}$	0.0	0.08	0.17	0.25	0.41	~ 1	1

2. La opacidad, temperatura efectiva y gravedad de una atmósfera gris de hidrógeno puro son $\kappa = 0,4 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, 10^4 K y $g = 2GM_\odot/R_\odot^2$. Usar la aproximación de Eddington para determinar T y ρ a las profundidades ópticas $\tau = 0, 1/2, 2/3, 1$ y 2 .

Nota: $\rho = 0$ y $P = 0$ para $\tau = 0$

Datos: $k = 1,38 \times 10^{-16} \text{ erg grado}^{-1}$; $m_h = 1,66 \times 10^{-24} \text{ g}$; $g_\odot = 2,74 \times 10^4 \text{ cm s}^{-2}$

– Aproximación de Eddington:

$$T^4 = \frac{1}{2}T_e^4\left(1 + \frac{3}{2}\tau\right)$$

– Equilibrio:

$$dP = \frac{g}{\kappa} d\tau \quad ; \quad P(i+1) - P(i) = \frac{g}{\kappa} (\tau(i+1) - \tau(i))$$

– Densidad:

$$\rho(i) = \frac{P(i)\mu m_H}{kT(i)}$$

- $\tau = 0$

$$T^4 = \frac{1}{2}T_e^4 \rightarrow T = 8409 K$$

$$P(0) = 0 \quad ; \quad \rho(0) = 0$$

- $\tau = 1/2$

$$T^4 = \frac{1}{2}T_e^4(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{2}) \rightarrow T = 9671 K$$

$$P(1/2) = P(0) + \frac{g}{\kappa_0}(1/2 - 0) = 2,5g_\odot$$

$$\rho(1/2) = \frac{P(1/2)\mu m_H}{kT(1/2)} = 8,52 \times 10^8$$

- $\tau = 2/3$

$$T^4 = T_e^4 \rightarrow T = 10000 K$$

$$P(2/3) = P(1/2) + \frac{g}{\kappa}(2/3 - 1/2) = 3,33g_\odot$$

$$\rho(2/3) = \frac{P(2/3)\mu m_H}{kT(2/3)} = 1,1 \times 10^{-7}$$

- $\tau = 1 \dots$

3. Suponer una estrella de $T_e = 4500K$, $\log g = 4,0$ y una composición química atmosférica de 85 % de H y 15 % de He . Construir un modelo de atmósfera gris suponiendo que la relación entre la presión gaseosa y la media de Rosseland es:

$\log P_g$	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
$\log \bar{\kappa}$	-1.7	-1.3	-0.97	-0.60	-0.30	1.97	1.70	1.35	1.10

– Valores de τ : 0.01, 0.03, 0.06, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 1.0

- La figura nos indica que la relación entre $\log \bar{\kappa}$ y $\log P_g$ es:

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_0 P_g^n$$

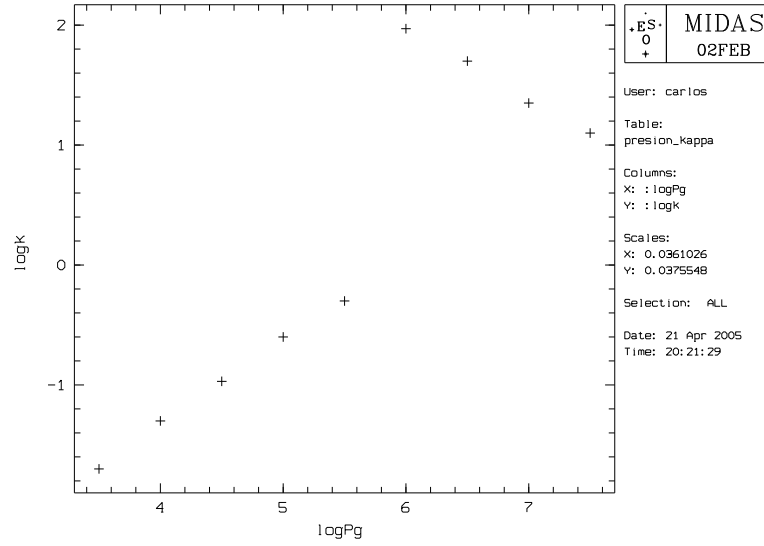
$$\log \bar{\kappa} = \log \bar{\kappa}_0 + n \log P_g$$

– Dividimos la dependencia en dos rectas:

$$1. \text{ recta: } (3.5, -1.7) \rightarrow (5.5, -0.3)$$

$$2. \text{ recta: } (6.0, 1.97) \rightarrow (7.5, 1.10)$$

- Regresión lineal:



$$1. recta : \log \kappa_0 = -4,124 \quad ; \quad n = 0,70$$

$$2. recta : \log \kappa_0 = +5,526 \quad ; \quad n = -0,59$$

Para construir el modelo de atmósfera calculamos

- Presión gaseosa:

$$P_g = [(n+1) \frac{g}{\kappa_0} \tau]^{1/(n+1)}$$

$$\log P_g = \frac{1}{n+1} [\log(n+1) + \log g + \log \tau - \log \kappa_0]$$

$$dP = \frac{g}{\kappa} d\tau \quad \rightarrow \quad P_{g_{i+1}} = P_{g_i} + \left(\frac{g}{\kappa}\right)_i \Delta\tau$$

- Opacidad

$$\kappa = \kappa_0 P_g^n$$

- Temperatura:

$$T^4 = \frac{T_e^4}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right)$$

- densidad:

$$\rho = \frac{P_g \mu}{RT}$$

- Profundidad geométrica:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta\tau \left(\frac{1}{\kappa \rho}\right)_i$$

- Presión de radiación:

$$P_R = \frac{4\sigma}{3c} T^4$$

- 1^{er} punto: $\tau = 0,01$, $n = 0,7$, $\log \kappa_0 = -4,12$, $T_e = 4500K$, $\mu = 1,45$

$$\log P_g = \frac{1}{1,7} [\log 1,7 + 4 - 2 + 4,12] = 3,74 \rightarrow P_{g_{0,01}} = 5249$$

$$\kappa = \kappa_0 P_g^n \rightarrow \kappa = 0,03$$

$$T^4 = \frac{T_e^4}{2} (1 + \frac{3}{2} \tau) = 3789$$

$$\dots\dots\dots \text{Para } \tau = 0,01 \rightarrow x = 0,0$$

- 2. punto: $\tau = 0,03$

$$P_{g_{i+1}} = P_{g_i} + \left(\frac{g}{\kappa}\right)_i \Delta \tau$$

$$P_{g_{0,03}} = 5249 + \frac{10000}{0,03} 0,02 = 11916$$

$$\kappa = \kappa_0 P_g^n \rightarrow \kappa = 0,054$$

.....

- — los valores de P_R son despreciables
- Para $\tau = 1$ se llega a $\kappa = 0,23$ (sólo primera recta)

τ	P_g	$\bar{\kappa}$	T	P_R	ρ	x
0.01	5249	0.03	3789			
...						
1.0	87142	0.23	4805			