

Ecuación de la energía

En estado estacionario (equilibrio hidrostático y térmico, duración $\sim 10^{10}$ años) se conserva la energía total de la estrella.

En general, si consideramos un volumen V rodeado por la superficie S :

$$\int_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_V \rho \epsilon dV \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{F} = \rho \epsilon \quad (2)$$

– \mathbf{F} = flujo neto de energía

– ϵ = energía generada por unidad de masa y segundo

• ϵ = función de T , ρ , μ . Incluye:

– reacciones nucleares ϵ_n , neutrinos, gravedad, etc...

Considerando simetría esférica la luminosidad generada en la cáscara r , $r + dr$ es:

$$dL_r = \epsilon \rho \pi r^2 dr \quad (3)$$

La energía irradiada

$$L_r = 4\pi r^2 F \quad (4)$$

– Diferenciando e igualando con (3):

$$\frac{dL_r}{4\pi r^2 dr} = \frac{dF}{dr} + \frac{2F}{r} = \epsilon \rho \quad (5)$$

– Ecuación de la energía:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \rho \quad ; \quad \frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon \quad (6)$$

– $\epsilon = \epsilon_n$ es la componente principal en las fases de equilibrio térmico e hidrostático.

En general, cuando hay fases de contracción o expansión, se debe complementar la energía nuclear con el cambio producido en la energía interna y gravitatoria:

$$\epsilon_n \rightarrow \epsilon_n + \frac{dQ}{dt}$$

donde:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du_g}{dt} \quad (7)$$

- $du_g = -P dV$, trabajo realizado por la gravitación contra la presión
- como estamos considerando el cambio por unidad de masa, $V = \frac{1}{\rho}$:

$$du_g = P \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (8)$$

La generación de energía queda:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left(\epsilon_N + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{du}{dt} \right) \quad (9)$$

- considerando gas ideal:

$$P_g = \frac{\rho}{\bar{\mu}} \mathcal{R} T \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} \quad (10)$$

- el segundo término de la derecha de (9):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{\mathcal{R}}{\bar{\mu}} \frac{dT}{dt} \quad (11)$$

y considerando los calores específicos por gramo:

$$\mathcal{R} = (c_p - c_v) \bar{\mu} \quad du = c_v dT \quad (12)$$

nos queda:

$$\frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - c_p \frac{dT}{dt} \quad (13)$$

que es el término que complementa a ϵ_N .

Transporte de la radiación

Transporte energético: determina el gradiente de T .

Transporte: radiación, conducción o convección

• Excepto en núcleos estelares muy densos (gas degenerado), conductividad térmica es mucho menor que el transporte radiativo ($\kappa_c \ll \kappa_r$). Motivo: camino libre medio de protones y electrones es mucho menor que el de los fotones)

Transporte radiativo

Consideramos caso isótropo. La presión de radiación en un punto r y temperatura T es:

$$P_r = \frac{4\pi\sigma}{3c}T^4 = \frac{1}{3}aT^4$$

La absorción de la radiación implica una variación del momento, relacionada a la fuerza neta que se ejerce sobre una cáscara de radio r y por tanto con la presión.

La variación de la presión entre r y $r + dr$ es:

$$P_r(r) - P_r(r + dr) = -\frac{dP}{dr}dr$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{4}{3}aT^3\frac{dT}{dr} \quad (14)$$

El momento que se absorbe en r por unidad de tiempo y unidad de área es:

$$\frac{\kappa \rho F}{c}$$

– $\kappa \rho F$ = energía absorbida por unidad de tiempo y área

El momento absorbido debe ser igual a la variación de la presión

$$\frac{\kappa \rho F}{c} = -\frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr} \quad (15)$$

$$F = -\frac{4ac}{3\kappa\rho}T^3 \frac{dT}{dr} \quad (16)$$

La energía total absorbida:

$$L = -4\pi r^2 \frac{4ac}{3\kappa\rho}T^3 \frac{dT}{dr} \quad (17)$$

Y el gradiente de T

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \frac{L}{4\pi r^2} \quad ; \quad \frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa}{4acT^3} \frac{L}{(4\pi r^2)^2} \quad (18)$$

– En los interiores estelares la principal fuente de opacidad es scattering por electrones

– También transiciones libre-libre

Convección

Convección: volumen de gas en equilibrio con el medio que lo rodea pero con $\neq T$

- Si $T_{el} > T_{alred} \rightarrow$ Volumen se eleva
- Si $T_{el} < T_{alred} \rightarrow$ Volumen cae

Ejemplo: inversión térmica en la atmósfera terrestre

- Movimiento se mantiene mientras que $T_{el} \neq T_{alred}$
- En el interior estelar, el elemento de volumen se mueve (asciende) mientras que $T_{el} > T_{alred}$. Esto se cumple si:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{el} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{rad} \quad (19)$$

– Nota: T en el interior estelar disminuye hacia afuera (gradiente negativo)

Por tanto, la condición para flujo convectivo:

- El elemento se encuentra en equilibrio hidrostático con el medio (debe conservar su entidad física)
- El elemento se comporta adiabáticamente (no hay intercambio de energía con los alrededores)
- La condición para transporte convectivo la expresamos:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{rad} \quad (20)$$

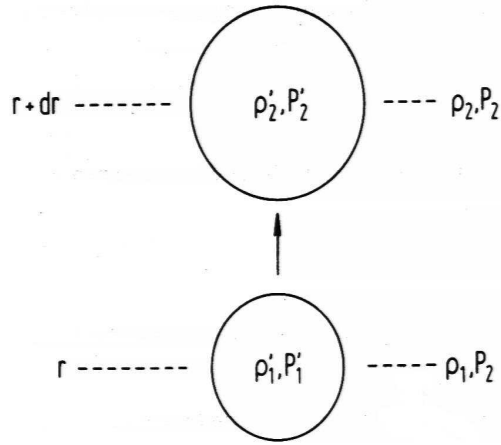


Figura 1: Ilustración para convección

Consideramos el interior estelar en r y $r + dr$:

• En r :

- Elemento: ρ'_1, P'_1
- Medio: ρ_1, P_1

• En $r + dr$:

- Elemento: ρ'_2, P'_2
- Medio: ρ_2, P_2

– con $\rho_2, P_2 < \rho_1, P_1$ y $P_2 = P'_2, P_1 = P'_1$.

El elemento se mueve adiabáticamente ($P \propto \rho^\gamma$) :

$$\rho' = K P'^{1/\gamma} = K P^{1/\gamma} \quad (21)$$

– $\gamma = c_p/c_v$ (c_p, c_v = calores específicos).

– Por estar en equilibrio $P' = P$

En el elemento de volumen, la variación de densidad es:

$$\rho_2' - \rho_1' = d\rho' = \left(\frac{d\rho'}{dr}\right)_{ad} dr = K \frac{1}{\gamma} P^{1/\gamma-1} \frac{dP}{dr} dr = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} dr \quad (22)$$

En los alrededores:

$$\rho_2 - \rho_1 = d\rho = \frac{d\rho}{dr} dr = \rho \left(\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) dr \quad (23)$$

– donde hemos supuesto gas ideal: $\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}$

La variación de ρ en el medio y el elemento es negativa. Se mantiene la convección mientras que el elemento permanece menos denso que el medio:

$$|d\rho'| > |d\rho| \Leftrightarrow d\rho' < d\rho$$

.

#Por tanto, la condición de convección es:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} dr < \frac{d\rho}{dr} dr \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad (24)$$

– En el caso de los gases ideales ($P = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T$):

$$\frac{dT}{dr} > \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} = \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} \quad (25)$$

– o dividiendo por T y con expresiones logarítmicas:

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} > 1 - \frac{1}{\gamma} \quad ; \quad \nabla > \nabla_{ad} \quad (26)$$

– $\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}$, $\nabla_{ad} = 1 - \frac{1}{\gamma}$.

La condición de transporte radiativo frente a convectivo se puede evaluar en función de la luminosidad de la estrella.

El “equilibrio” transporte convectivo frente a radiativo lo ponemos como:

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} = \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

Combinamos las ecuaciones de equilibrio hidrostático y equilibrio radiativo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} &= -G \frac{M_r}{r^2} \frac{\rho}{P} \\ \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} &= -\frac{3\kappa\rho}{4ac} \frac{L_r}{4\pi r^2 T^4} \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{3}{16ac\pi G} \frac{\kappa P}{T^4} \frac{L_r}{M_r}$$

La estabilidad viene gobernada por $\kappa L_r/M_r$. La convección se encuentra favorecida en:

- Zonas de alta opacidad (por ejemplo zonas de elevada ionización) L no tiene porque ser demasiado alta
- Valores elevados de L/M : Si la producción de energía está muy localizada en el centro, $L_r \approx L_*$, pero $M_r < M_*$. Por tanto, las zonas centrales tenderán a ser inestables frente a convección (mayor en estrellas masivas).

Ecuaciones de estructura interna

Resumimos las ecuaciones de estructura:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r}{r^2} \rho \quad ; \quad \frac{dP}{dM_r} = -\frac{G}{4\pi} \frac{M_r}{r^4} \quad (27)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi \rho r^2 \quad ; \quad \frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi \rho r^2} \quad (28)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi \rho r^2 \left(\epsilon_n + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{du}{dt} \right) \quad ; \quad \frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon_N - c_p \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} \quad (29)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad ; \quad \frac{dT}{dM_r} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa}{T^3} \frac{L_r}{(4\pi r^2)^2} \quad (30)$$

$$\frac{dT}{dr} = \nabla_{ad} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad ; \quad \frac{dT}{dM_r} = \nabla_{ad} \frac{T}{P} \frac{dP}{dM_r} \quad (31)$$

– Son un sistema de ecuaciones diferenciales dependientes del radio o la masa. Se deben dar condiciones de contorno para resolverlas:

- $r = 0, M = 0, L_r = 0$
- $r = R, P = 0, T = 0$

La resolución de estas ecuaciones no es sencilla (eq. no lineales, condiciones de contorno en dos puntos requiriendo iteración, están acopladas,..)

Hay modelos simples

Se pueden hacer aproximaciones físicas que suministran información relevante sobre el comportamiento de las estrellas.

Teorema de Vogt-Russell

Si en las ecuaciones de estructura interna consideramos el caso de equilibrio, $\frac{dT}{dt} = 0$; $\frac{dP}{dt} = 0$, quedan cuatro ecuaciones diferenciales para las cuatro variables P , r , L y T , que en general tienen una solución.

• *Teorema de Vogt-Russell*: Para una masa y una composición química dadas existe únicamente una configuración de equilibrio. En otras palabras, la estructura de una estrella está fijada unívocamente.

– Este teorema (formalmente incorrecto) da una primera explicación a una serie de hechos observacionales muy relevantes.

1. Diagrama H-R

– Si para χ prefijada dada tenemos que $L, T = f(M) \rightarrow L = L(T_e) \Leftrightarrow M_V = M_V$ (tipo espectral).

\Rightarrow La secuencia principal se puede describir como el lugar que ocupan las estrellas con igual composición química pero distinta masa.

2. Relación masa-luminosidad

– Si suponemos $\frac{dT}{dr} \sim \frac{T}{R}$ (caso lineal) y transporte radiativo:

$$\frac{dT}{dr} \sim \frac{T}{R} \propto \frac{\rho}{T^3} \frac{L}{4\pi R^2} \quad \rightarrow L \propto \frac{R^4 T^4}{M}$$

– Para gases ideales y equilibrio hidrostático:

$$T \propto \frac{P}{\rho} \propto \frac{PR^3}{M} \quad ; \quad P \propto \frac{M^2}{R^4} \quad \rightarrow T \propto \frac{M}{R}$$

– Por tanto:

$$L \propto M^3 \quad \Leftrightarrow \quad L = L(M)$$

3. Límite de Eddington

- La presión de radiación ejerce una fuerza hacia el exterior por unidad de masa:

$$g_r = \frac{\bar{\kappa} F}{c} = \frac{\bar{\kappa}}{c} \frac{L}{4\pi R^2}$$

- La aceleración gravitatoria

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

- Para la estabilidad ambas deben compensarse:

$$L = c \frac{4\pi R^2}{\bar{\kappa}} g_r = \frac{4\pi R^2 c}{\bar{\kappa}} \frac{GM}{R^2} = 2,5 \times 10^5 \frac{M}{\bar{\kappa}}$$

- tomando $\bar{\kappa} \sim 0,3 \text{ g cm}^{-2}$

$$\frac{L}{L_\odot} \approx 4 \cdot 10^4 \frac{M}{M_\odot}$$

$$L \sim 10^6 L_\odot \rightarrow M \sim 50 - 100 M_\odot$$

- Para masas mayores, P_r produce inestabilidades con fluctuaciones radiales \rightarrow parte de las capas exteriores dejan la estrella (masa estelar se hace menor). Esta pérdida de masa ocurre en escalas de tiempos mucho menores que el de la combustión de hidrógeno.

4. Escalas de tiempo en la secuencia principal

La permanencia de una estrella en la secuencia principal depende de la producción de energía ($\propto M$) y es inversamente proporcional a la pérdida de energía:

$$\tau_{SP} \sim \frac{M}{L} \sim M^{-2} \quad (\Leftrightarrow L^{-\frac{2}{3}})$$

La escala nuclear de tiempos nuclear:

$$\tau_N = \frac{E_t}{L} = \frac{\epsilon_{ij} M}{L}$$

– ϵ_{ij} = energía producida por gramo en la transformación del elemento i al j .

Las estrellas dejan la secuencia principal cuando $\sim 10\%$ del H disponible se ha transformado en He .

$$\tau_{SP} \approx \frac{1}{10} \tau_N \approx 6 \times 10^9 \frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} = 6 \times 10^9 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2}$$

– τ en años; $\epsilon_{H,He} = 10^{18,8} \text{ erg g}^{-1}$

Cuadro 1: Tiempo de vida en la secuencia principal

Tipo espectral	O5	B0	A0	F0	G0	K0	M0
τ_{SP} (años)	2×10^6	2×10^7	6×10^8	2×10^9	5×10^9	9×10^9	2×10^{10}

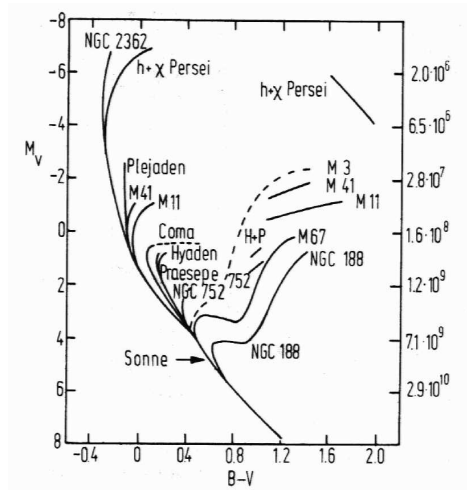


Figura 2: Diagrama HR de cúmulos estelares