

## Capítulo 2

# Transporte radiativo

### 2.1. Introducción

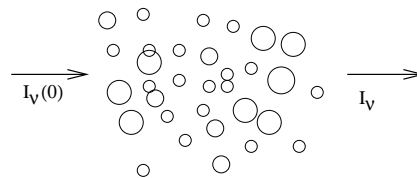


Figura 2.1: Interacción materia-radiación

- Radiación se propaga a través de un medio material  $\Rightarrow I_\nu \neq \text{cte.}$
- Interacción materia–radiación añade o sustrae energía de  $I_\nu(\Omega)$  (carácter estadístico)

- **Absorción**: toma fotones de  $I_\nu(\Omega)$ . Se calienta el medio.
- **Dispersión (scattering)**: toma fotones del ángulo sólido  $\Omega$  y los transporta a  $\Omega'$ .

*Nota: scattering toma también fotones de  $\Omega'$  y los lleva a  $\Omega$  (añade energía  $I_\nu$ ).*

- **Emisión**: Añade fotones a  $I_\nu(\Omega)$  (p. e., movimiento de una partícula cargada; estados excitados atómicos o moleculares).

## 2.2. Opacidad

- Suponemos haz de radiación propagándose en un medio. La variación de  $I_\nu$  se puede expresar como:

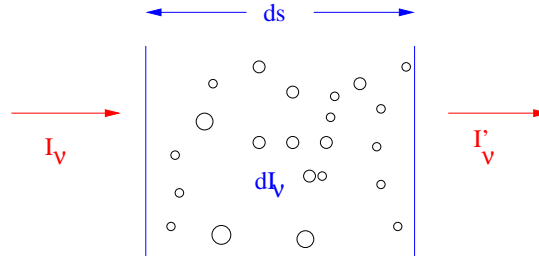


Figura 2.2: Variación de  $I_\nu$  a lo largo de un medio de espesor  $ds$

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \quad (2.1)$$

–  $\alpha_\nu$  ( $cm^{-1}$ ) = coeficiente de extinción, (también opacidad o coef. de absorción).

– Alternativamente:

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds \quad (2.2)$$

–  $\kappa_\nu$  ( $cm^2 g^{-1}$ ) = coef. másico de absorción u opacidad específica.

–  $\rho$  = densidad del material ( $g cm^{-3}$ )

$$\alpha_\nu = \kappa_\nu \rho \quad (2.3)$$

## Opacidad en términos microscópicos

- Suponemos un medio con:  $n$  = partículas/ $cm^{-3}$ ,  $\sigma_\nu$  = sección eficaz (área efectiva).

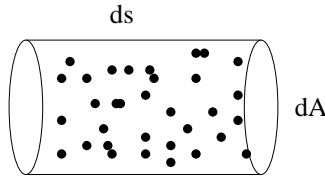


Figura 2.3: Elemento de volumen en un medio

- Sección eficaz total en el área  $dA$  a lo largo de  $ds$ :

$$n \sigma_\nu dA ds \quad (2.4)$$

- por unidad de área:

$$n \sigma_\nu ds \quad (2.5)$$

- (2.5) = número de fotones absorbidos o dispersados en el espesor  $ds$ . Por tanto:

$$\alpha_\nu = \kappa_\nu \rho = n \sigma_\nu \quad (2.6)$$

- $\alpha$ ,  $\kappa$  y  $\sigma = f(\nu)$ , pero no son una distribución del tipo de  $I_\nu$ .

## Camino libre medio

–  $\alpha_\nu$  "da una idea" de lo que se desplaza un fotón en un medio sin ser absorbido o dispersado. El inverso:

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} \quad ; \quad (cm)$$

– "representa" el camino libre medio del fotón (distancia entre encuentros con partículas).

• Opacidad incluye absorción y scattering, siendo cada proceso independiente:

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s$$

–  $l_\nu$  se puede definir para absorción o para scattering

## 2.3. Profundidad óptica

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds$$

– Radiación “ve” la combinación de  $\alpha_\nu$  y  $ds$  simultáneamente.

• Profundidad óptica:

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds = \kappa_\nu \rho ds \quad (2.7)$$

–  $\tau_\nu$  = razón entre la distancia recorrida y el camino libre medio del fotón.

Por tanto:

$$dI_\nu = -I_\nu d\tau_\nu \quad (2.8)$$

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -\alpha_\nu ds = -d\tau_\nu \quad (2.9)$$

– Integrando:

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) \exp\left(-\int_0^s \alpha_\nu ds'\right) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} \quad (2.10)$$

– (2.10) es la ley de extinción en su forma más simple.

– Si en un medio vamos de 0 a  $s$ :

$$\tau_\nu = \int_0^s \alpha_\nu(s') ds' \quad (2.11)$$

- En un medio vamos de 0 a  $s$ :

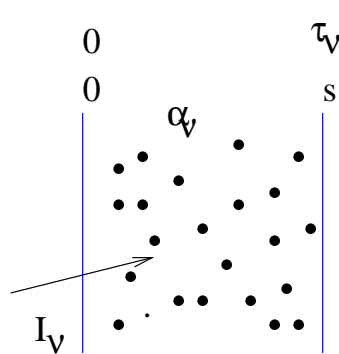
$$\tau_\nu = \int_0^s \alpha_\nu ds$$


Figura 2.4: Medio de espesor  $s$  y profundidad óptica  $\tau_\nu$

- La transparencia relativa del medio depende de  $\tau_\nu$ 
  - $\tau_\nu \approx 1$ : los fotones han viajado lo suficiente para ser absorbidos o dispersados.
  - $\tau_\nu \gg 1$ : El fotón es absorbido muchas veces antes de recorrer la distancia  $0 - S$ . *Medio ópticamente grueso*
  - $\tau_\nu \ll 1$ : no hay absorción o dispersión en  $0 - S$ . *Medio ópticamente delgado*

## 2.4. Emisividad

- Un medio medio emite fotones por:
  - Conversión de energía térmica en radiación
  - Átomos excitados previamente
- Coeficiente de emisión  $j_\nu$ : Energía emitida por unidad de volumen, de tiempo, de ángulo sólido e intervalo espectral:

$$dE_\nu = j_\nu dV d\Omega dt d\nu \quad (2.12)$$

– Unidades:  $j_\nu = \text{erg cm}^{-3} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{s}^{-1}$ .

- Cantidad de energía emitida por un medio de espesor  $ds$  y coeficiente de emisión  $j_\nu$ :

$$dI_\nu(\Omega) = j_\nu(\Omega) ds \quad (2.13)$$

- $j_\nu$  incluye:

- **Emisión espontánea:** tendencia natural de todo sistema cuántico a alcanzar su estado de más baja energía. Esta emisión no es función del campo de radiación.
- **Emisión inducida:** relacionada con el número de fotones ( $I_\nu$ ) en la vecindad de un átomo o molécula excitados y capaces de emitir otro fotón.

- El coeficiente de emisión se puede expresar como:

$$j_\nu = \epsilon_\nu \rho \quad ; \quad (\epsilon_\nu = \textit{emisividad}) \quad (2.14)$$

–  $\rho$  = densidad del medio ( $g \, cm^{-3}$ )

– Unidades de  $\epsilon_\nu$ :

$$erg \, s^{-1} \, Hz^{-1} \, ster^{-1} \, g^{-1})$$

$$erg \, s^{-1} \, Hz^{-1} \, g^{-1}, \text{ (integrada en ángulo solido).}$$

- **Caso isótropo.**

– Energía emitida:

$$dE_\nu = \frac{1}{4\pi} \epsilon_\nu \rho \, dV \, dt \, d\nu \, d\Omega \quad (2.15)$$



## 2.5. Contribución del scattering a la emisión

- Dispersión de fotones contribuye a la “emisión”: la energía del fotón retorna al campo de radiación pero en otra dirección.

– Casos sencillos:

– Scattering coherente:  $\nu$  del fotón dispersado igual a la del fotón incidente

– Scattering isótropo: dirección del fotón dispersado no guarda relación con la dirección del fotón incidente

–  $dI_\nu$  en estos casos::

$$dI_\nu = \int_{\Omega} \alpha_\nu^s I_\nu(\Omega) \frac{d\Omega}{4\pi} ds \quad (2.16)$$

$$dI_\nu = \alpha_\nu^s J_\nu ds \quad (2.17)$$

–  $J_\nu$  = intensidad media

## 2.6. Ecuación de transporte radiativo (radiative transfer)

- Radiación  $I_\nu$  a través de un medio sufre una variación al atravesar un medio (*expresión formal de la ecuación de transporte radiativo*):

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (2.18)$$

- Para cada caso concreto  $\rightarrow$  opacidad y emisividad
- De forma más explícita:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -(\alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s) I_\nu + \int_\Omega \alpha_\nu^s I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi} + j_\nu \quad (2.19)$$

- Solución en dos casos sencillos:

- Sólo emisión ( $\alpha_\nu = 0$ ):

$$I_\nu = I_\nu^0 + \int_0^s j_\nu(s') ds'$$

- Sólo absorción ( $j_\nu = 0$ ):

$$I_\nu = I_\nu^0 \exp\left(-\int_0^s \alpha_\nu(s') ds'\right)$$

## 2.7. Función fuente

- Dividimos la ecuación de transporte por  $\alpha_\nu$  (y  $d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$ ):

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (2.20)$$

*Función fuente:  $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$*

- Solución formal de la eq. de transporte:
- Integrando (multiplicamos por  $e^{\tau_\nu}$  primero):

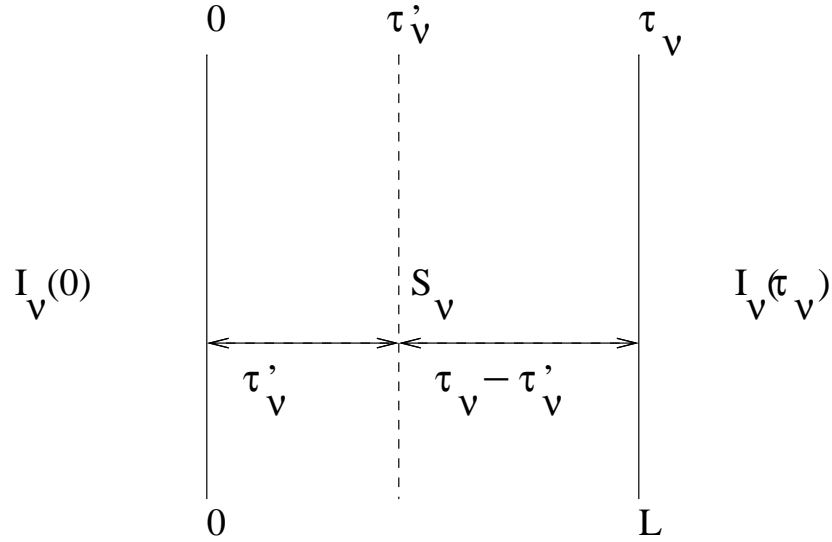
$$e^{\tau_\nu} \left( \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu \right) = \frac{d}{d\tau_\nu} (e^{\tau_\nu} I_\nu) = e^{\tau_\nu} S_\nu$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu \quad (2.21)$$

- Da la intensidad en el punto con  $\tau_\nu$ .

- $I_\nu$  tiene dos términos:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu$$



1.  $I_\nu(0)$  disminuida por el factor de extinción  $e^{-\tau_\nu}$ .
2. Integral de  $S_\nu$  sobre todas las  $\tau_\nu$  disminuida por la absorción  $e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)}$ , donde  $(\tau_\nu - \tau'_\nu)$  es la diferencia de profundidad óptica entre el punto de emisión y el de observación.

- $S_\nu = \text{constante}$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$$

1.  $\tau_\nu \ll 1$

$$e^{-\tau_\nu} \approx 1 - \tau_\nu$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)(1 - \tau_\nu) + S_\nu\tau_\nu$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) + \tau_\nu(S_\nu - I_\nu(0))$$

– Si  $I_\nu(0) > S_\nu \rightarrow$  atenuación (absorción)

– Si  $I_\nu(0) < S_\nu \rightarrow$  “emisión” sobre  $I_\nu$

2.  $\tau_\nu \gg 1$ .

$$e^{-\tau_\nu} \approx 0 \quad ; \quad (1 - e^{-\tau_\nu}) \approx 1$$

$$I_\nu = S_\nu$$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

- Si  $I_\nu > S_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0$   
 $\Rightarrow I_\nu$  disminuye a lo largo del camino
- Si  $I_\nu < S_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} > 0$   
 $\Rightarrow I_\nu$  tiende a crecer

$\Downarrow$

–  $S_\nu$  es la cantidad a la que  $I_\nu$  tiende a aproximarse. De hecho, alcanza ese valor cuando  $\tau_\nu$  es lo suficientemente grande.

## Caso sencillo: $S_\nu$ en el caso de scattering isótopo puro

- Energía emitida se debe a fotones dispersados en la dirección que se considere.
- Isótopo:  $\alpha_\nu^S \neq f(\Omega)$
- El coeficiente de emisión es:

$$j_\nu = \int_{\Omega} \alpha_\nu I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \int_{\Omega} I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$S_\nu = J_\nu$$

## 2.8. Cuestiones y ejercicios

1. La principal contribución a la opacidad en el núcleo solar es scattering por electrones,  $\sigma_\nu \approx 0,6 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Suponiendo una densidad en el núcleo de  $\rho = 100 \text{ g cm}^{-3}$ , estimar la distancia recorrida por un fotón entre encuentros.

**Solución:** Para estimar el coeficiente de extinción total estimamos el número de electrones en el núcleo. Suponemos que el Sol está compuesto exclusivamente de  $H$  y que éste se encuentra ionizado en el núcleo. La densidad de protones es:

$$N_p = \frac{\rho}{m_p}$$

– siendo  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$  la masa del protón  
de aquí resulta:

$$N_p = 1,2 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-3}$$

– La opacidad es

$$\alpha_\nu = N \sigma_\nu \approx 72 \text{ cm}^{-1}$$

y el camino recorrido

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} \approx 0,01 \text{ cm}$$

2. Supongamos un fotón de un campo de radiación  $I_\nu$  viajando en un medio homogéneo con densidad  $\rho = 2,5 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$  y una opacidad  $\kappa_\nu = 0,264 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  (valor aproximado para una  $\lambda = 5000 \text{ Å}$ ). Calcular la distancia media característica recorrida por el fotón para que la intensidad decaiga en un factor  $e^{-1}$ . (Nota: los valores dados se aproximan a zonas de la fotosfera solar).

**Solución:** Ecuación que da la intensidad:

$$I(\nu) = I_0(\nu) e^{-\int_0^s \kappa_\nu \rho ds} = I_0(\nu) e^{-\kappa_\nu \rho s}$$

Por tanto:

$$\frac{I(\nu)}{I_0(\nu)} = e^{-1} = e^{-\kappa_\nu \rho s}$$

Operando  $s = 1,52 \times 10^7 \text{ cm}$

3. Una nube de gas de radio  $R$  situada a una distancia  $d$  produce fotones de rayos  $X$  a un tasa  $\Gamma$  (fotones por unidad de volumen y unidad de tiempo). Suponemos que el medio es ópticamente delgado y los fotones no son absorbidos. Un detector en la Tierra tiene un haz de tamaño angular de radio  $\Delta\theta_d$  y un área efectiva  $\Delta A$ . a) ¿cuál es la intensidad observada (fotones por unidad de tiempo, área y estereoradián) hacia el centro de la nube, si la fuente está resuelta completamente? b) ¿cuál es el flujo observado cuando la fuente no se resuelve?

*Respuesta:*

a) Suponemos que la nube emite isotrópamente. La ecuación de transporte es (no hay absorción):

$$\frac{dI}{ds} = j = \frac{\Gamma}{4\pi}$$

con  $I$  definida en función del número de fotones (fotones  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1}$ ).

Por tanto, integrando a lo largo de una línea a través del centro:

$$I = j \cdot 2R = \frac{R\Gamma}{2\pi}$$

b) En este caso, el tamaño angular de la fuente  $\Delta\theta_s = R/d$  es menor que el haz del detector  $\Delta\theta_d$ .

El flujo es:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

y la luminosidad (energía por segundo) de la fuente:

$$L = \frac{4\pi}{3} R^3 \Gamma$$



por tanto:

$$F = \frac{R^3 \Gamma}{3d^2}$$

4. Mostrar que la condición para que una nube ópticamente delgada de material pueda ser barrida por la presión de radiación de una estrella cercana es que la razón  $M/L$  de la estrella sea menor que  $\kappa/(4\pi Gc)$ , siendo  $G$  la constante de gravitación,  $c$  la velocidad de la luz y  $\kappa$  el coeficiente de absorción másico del material de la nube (lo suponemos independiente de la frecuencia).

*Respuesta:*

El flujo a una distancia  $r$  de la estrella es  $F = L/(4\pi r^2)$ , arrastrando la radiación un momento por unidad de tiempo (tasa del momento)  $L/c$ . La fuerza de la radiación por unidad de masa que se ejerce sobre la nube es la tasa del momento por unidad de superficie absorbido por el material:

$$f_{rad} = \frac{\kappa F}{c} = \frac{\kappa L}{4\pi r^2 c}$$

Por otra parte, la fuerza gravitacional debida a la estrella por unidad de masa es

$$f_{grav} = \frac{GM}{r^2}$$

La condición para que el material sea barrido es  $f_{grav} < f_{rad}$ . Por tanto:

$$\frac{M}{L} < \frac{\kappa}{4\pi Gc}$$

• *Límite de Eddington*

La expresión anterior es válida en toda configuración esférica.

Si en la relación anterior, consideramos la situación es de equilibrio:

$$L = \frac{4\pi cGM}{\kappa}$$

La luminosidad crítica depende de  $\kappa$ . Si consideramos scattering Thompson por electrones libres -da el valor mínimo de la opacidad de un gas de  $H$  ionizado -(ver problema 1) y el coeficiente másico por 'átomo de  $H$  es  $\sigma_T/m_H$ , el valor resultante es el conocido por el *límite de Eddington*:

$$L = \frac{4\pi cGMm_H}{\sigma_T}$$

5. Se llama fotoionización a un proceso en el que un átomo o molécula absorbe un fotón y se libera un electrón. La energía requerida es al menos igual al potencial de ionización,  $h\nu_0$ . Mostrar que el número de fotoionizaciones por unidad de tiempo y volumen viene dado por:

$$4\pi n_a \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\sigma_\nu J_\nu}{h\nu} d\nu = cn_a \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\sigma_\nu u_\nu}{h\nu} d\nu$$

siendo:

$n_a$  = densidad del número de átomos

$\sigma_\nu$  = sección eficaz de fotoionización

*Respuesta:*

Supongamos un elemento de volumen  $dV$  de sección  $dA$  y espesor  $dl$  normal a la propagación del haz de radiación. La variación de la intensidad del haz será:

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu dl$$

con  $\alpha_\nu$  la opacidad del medio. La energía absorbida en  $dV$ ,  $dt$ ,  $d\nu$  y  $d\Omega$  es:

$$-dI_\nu dA dt d\nu d\Omega$$

o

$$\alpha_\nu I_\nu dV dt d\nu d\Omega$$

. La energía total (en todas las direcciones) absorbida por unidad de tiempo, volumen y unidad de intervalo espectral es:

$$\int_{\Omega} \alpha_{\nu} I_{\nu} d\Omega = 4\pi \alpha_{\nu} J_{\nu}$$

Siendo  $J_{\nu}$  la intensidad media.

Cada fotoionización requiere una energía  $h\nu$  con  $\nu > \nu_0$ . Por otra parte, la opacidad es:

$$\alpha_{\nu} = n_a \sigma_{\nu}$$

Por tanto, el número de fotoionizaciones por unidad de volumen y tiempo es (teniendo en cuenta que  $J_{\nu} = \frac{u_{\nu} c}{4\pi}$ ) el resultado del enunciado.