

## Capítulo 3

### El cuerpo negro.

- *Cuerpo negro*: Distribución de fotones dentro de un recinto cuyas paredes se mantienen en equilibrio termodinámico ( $T = \text{cte.}$ ): radiación del cuerpo negro ( $BB$ ).

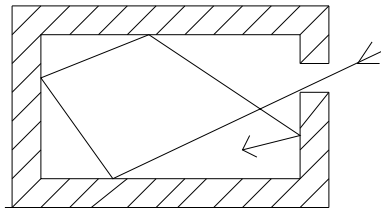


Figura 3.1: Cuerpo negro

- Cuerpo negro: cavidad cerrada excepto por un agujero muy pequeño en una de sus paredes.
  - Radiación que entra tiene probabilidad muy pequeña de escapar
  - Se absorbe por las paredes de la cavidad o por el gas del interior.
  - Si la cámara se calienta: paredes emiten fotones.
  - Cada foton se reabsorbe; los que escapan son despreciables.
  - Hay equilibrio termodinámico si  $T = \text{cte.}$  dentro de la cámara
  - Pequeña fracción de fotones que escapan permite que se mida el espectro del interior (sólo depende de la temperatura)

- *Fotosfera estelar*: Básicamente se comporta como un cuerpo negro:
  - Escapa una fracción despreciable de radiación:
    - en lo más profundo,  $\tau_\nu$  suficientemente grande para impedir que se escape la inmensa mayor parte de los fotones emitidos.
  - Se reabsorben muy cerca de donde son emitidos.
  - Son tantos los que se dirigen hacia afuera como hacia adentro.
  - Material cercano al equilibrio termodinámico: radiación  $BB$
  - Las capas más elevadas se desvían de  $BB$ : el “agujero” se vuelve más y más importante.
    - Hay una transición de equilibrio termodinámico local casi perfecto (LTE) a una situación de no-LTE en las capas más altas.

### 3.1. Función de Planck

- *Función de Planck*: Campo de radiación emitido por un cuerpo negro. La intensidad es:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad ; \quad B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (3.1)$$

- $h$  = cte. de Planck =  $6,626 \times 10^{-27} \text{ erg s}$
- $k$  = cte. de Boltzmann =  $1,38 \times 10^{-16} \text{ erg grad}^{-1}$

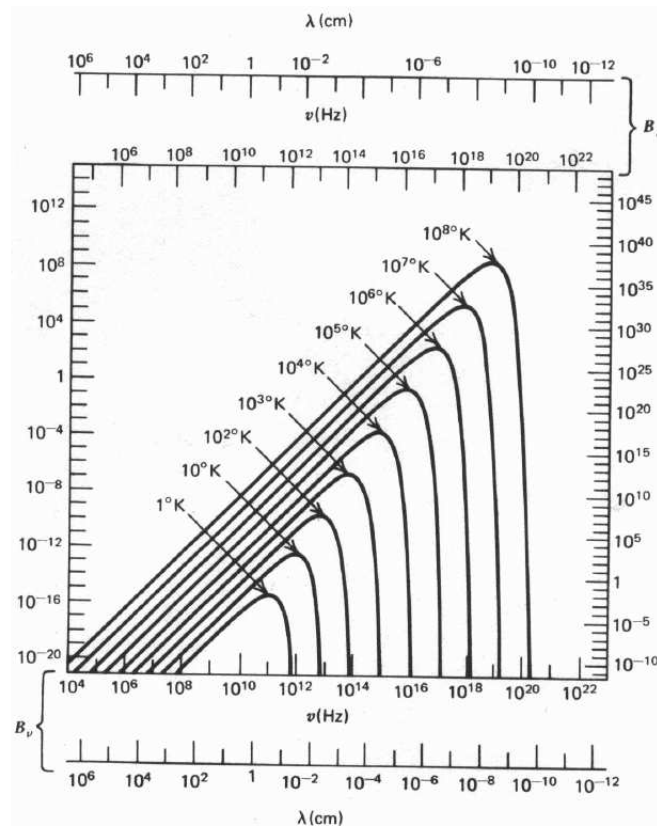


Figura 3.2: Curvas de cuerpo negro

### 3.1.1. Aproximación de Rayleigh-Jeans

- $h\nu \ll kT$ :

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \quad (3.2)$$

- Línea recta en un diagrama  $(\log B_\nu, \log \nu)$ .
- Útil en radio.

### 3.1.2. Aproximación de Wien

- $h\nu \gg kT$ :

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (3.3)$$

- $B_\nu(T) \downarrow$  muy rápidamente con  $\nu$ .

### 3.1.3. Ley del desplazamiento de Wien

– Frecuencia para la cual  $B_\nu(T)$  es máximo.

•  $\left[\frac{\delta B_\nu}{\delta \nu_{\nu=\nu_{max}}}\right] = 0$ :

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 5,88 \times 10^{10} \text{ Hz grad}^{-1} \quad (3.4)$$

–  $\nu_{max}$  se desplaza linealmente con la temperatura.

• Con la representación en  $\lambda$  de la función de Planck:

$$\lambda_{max} T = 0,290 \text{ cm grado} \quad (3.5)$$

– !!!! Máximos de  $B_\lambda$  y  $B_\nu$  no ocurren simultáneamente en  $\lambda$  y  $\nu$ :

$$\lambda_{max} \nu_{max} \neq c$$

– Muy útil para caracterizar el rango de frecuencias válido para las que las aproximaciones anteriores:

$$\begin{array}{ll} R - J : & \nu \ll \nu_{max} \quad \left(\frac{h\nu}{kT} \ll 1\right) \\ W : & \nu \gg \nu_{max} \quad \left(\frac{h\nu}{kT} \gg 1\right) \end{array}$$

### 3.1.4. Ley de Stefan-Boltzmann

- Flujo de radiación:

$$F_\nu = \int_{\Omega} I_\nu \cos \theta d\Omega$$

- Para un  $BB$ : radiación escapa ( $F_\nu$ ) y es isótropa:

$$F_\nu = \pi I_\nu$$

- Flujo total de la radiación de un  $BB$  (integrando en  $\nu$ ):

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kt}} - 1} d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4 \quad (3.6)$$

$$F = \sigma T^4 \quad (3.7)$$

- $\sigma$  = cte. de Stefan-Boltzmann =  $5,67 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ grad}^{-4} \text{ cm}^{-2}$

### 3.2. Ley de Kirchoff para la emisión térmica

- Función fuente,  $S_\nu$ , de un  $BB$  es  $B_\nu(T)$ . La emisividad del material es:

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \quad (3.8)$$

- Ley de Kirchoff para emisión térmica.
- En este caso, la ecuación de transporte:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \quad (3.9)$$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \quad (3.10)$$

- *Nota:* Radiación de cuerpo negro:  $I_\nu = B_\nu$   
Radiación térmica de un material:  $S_\nu = B_\nu$

### 3.3. Temperatura de brillo (brightness temperature)

- Para un campo de radiación  $I_\nu$ , se define la temperatura de brillo,  $T_b(\nu)$ , a la frecuencia  $\nu$  como:

$$I_\nu = B_\nu(T_b) \quad (3.11)$$

- Util especialmente en radioastronomía (medio interestelar): aproximación de R-J aplicable ( $h\nu \ll kT$ ):

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_b \quad \rightarrow \quad T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu \quad (3.12)$$

- Ecuación de transporte se puede poner en función de  $T_b$ :

$$\frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T \quad (3.13)$$

$$T_b = T_b(0) e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (3.14)$$

- $T$  = temperatura del medio.
- Si  $\tau_\nu > 1$  :  $T_b \rightarrow T$
- Unicidad de  $T_b$  se basa en la condición monótona de la ley de Planck.
- En la aproximación de Wien  $T_b$  no es útil: no se puede formular una ecuación de transporte lineal en  $T_b$ .



### 3.4. Temperatura de color

- Temperatura de BB a partir de los flujos relativos en dos  $\lambda$  distintas:

$$\frac{S(\lambda_1)}{S(\lambda_2)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 e^{\frac{hc}{kT}(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1})} \quad (3.15)$$

- Util para determinar la l.d.o.máxima del espectro de radiación.
- Se utiliza la aproximación de Wien
- En la práctica, hay que tener en cuenta  $\tau_\nu$  para cada  $\lambda$

### 3.5. Temperatura efectiva. Luminosidad

- $T_e$  se determina a partir del flujo total emitido:

$$F = \int_\nu \int_\Omega I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu = \sigma T_e^4 \quad (3.16)$$

- Si suponemos un *BB* de radio  $R$  y temperatura  $T$  (por ejemplo, una estrella), la energía total emitida por segundo es:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (3.17)$$

- $L$  = Luminosidad de una estrella de radio  $R$  y temperatura efectiva  $T$

### 3.6. Comentarios. Otras temperaturas

- $T_e$ ,  $T_b$  dependen del valor de la intensidad de la fuente.
- $T_c$  sólo depende de la forma del espectro.
- **Temperatura cinética:** relacionada con la velocidad media de las partículas del gas:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT_k \quad (gas \text{ ideal})$$

- $T_k$  (corona solar)  $\approx 10^6 K (\rightarrow v_e \approx 6800 km s^{-1})$
- $T_k$  (ionosfera)  $\approx 2 \times 10^3 K (\rightarrow v_e \approx 300 km s^{-1})$

- Temperatura de excitación, ionización
- En equilibrio termodinámico: todas las  $T$ s iguales.

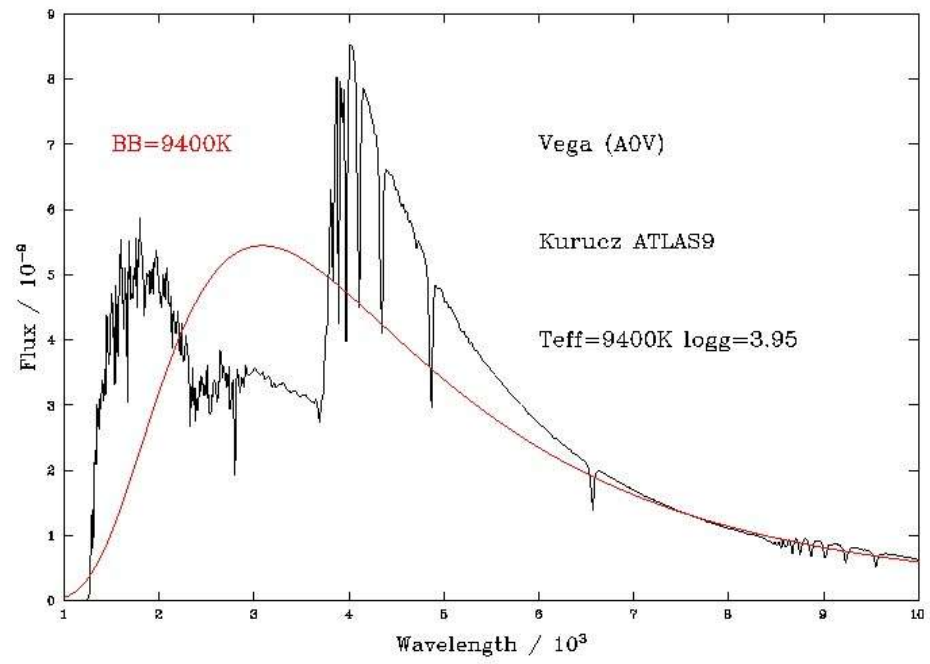


Figura 3.3: Distribución energética de una estrella : No es un cuerpo negro exacto

### 3.7. Cuestiones y ejercicios

- Un remanente de supernova tiene un diámetro angular  $\theta = 4.3$  arcmin y un flujo a  $100$  MHz de  $F_{100} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ , siendo la radiación térmica. a) Estimar la temperatura de brillo? b) Si la región emisora es en realidad más compacta que la indicada por el tamaño angular observado, indicar el efecto sobre el valor de  $T_b$

*Respuesta:* a) La intensidad específica (brightness) es  $I_\nu = F_\nu / \Delta\Omega$ , donde  $\Delta\Omega = \pi(\Delta\theta)^2$ . En nuestro caso  $\Delta\theta = \theta/2 = 2,15 \text{ arcmin} = 6,25 \times 10^{-4} \text{ radian}$ . Por tanto:

$$I_\nu = 1,3 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ ster}^{-1}$$

y:

$$T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu = 4,2 \times 10^7 \text{ K}$$

(aproximación de Rayleigh-Jeans es apropiada).

b)  $T_b \propto I_\nu \propto (\Delta\theta)^{-2}$ . Si el  $\Delta\theta$  verdadero es menor,  $T_b$  será mayor que el dado arriba.

- Una nube interestelar de radio  $R$  situada a una distancia  $d$  de la Tierra tiene una temperatura  $T$  y emite térmicamente a una razón  $P(\nu)$  (energía por unidad de tiempo, volumen y rango de frecuencia). a) Suponiendo que la nube es ópticamente delgada, ¿cuál es la intensidad de la nube medida en la Tierra? (dar la respuesta en función de la distancia  $b$  de un punto de la nube a su centro y suponer que la nube se observa a lo largo de rayos paralelos) b) ¿Cuál es la temperatura efectiva de la nube?

*Respuesta:*

Nótemos que la emisividad de la nube es:

$$j_\nu = P(\nu)/4\pi$$

y que podemos suponer que la opacidad es cero. Utilizando la ecuación de transporte obtenemos:

$$I_\nu(b) = \int j_\nu u(z) dz = \frac{P(\nu)}{2\pi} (R^2 - b^2)^{1/2}$$

La potencia total emitida por la nube es:

$$L = \frac{4}{3} \pi R^3 P$$

con  $P = \int P(\nu) d\nu$ . Por definición  $L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$  y por tanto:

$$T_e = \left( \frac{PR}{3\sigma} \right)^{1/4}$$

- La corona interna del Sol emite ondas de radio con un flujo sobre la superficie terrestre de  $5 \times 10^{-22} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$  a una frecuencia de  $200$  MHz. Estimar la temperatura de la corona si suponemos que emite como un cuerpo negro.
  - $\frac{h\nu}{kT} = 10^{-2}/T << 1 \rightarrow$  Aprox. de R-J

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \quad ; \quad F_\nu = \pi I_\nu$$

– La energía emitida por segundo es:  $L_\nu = F_\nu 4\pi R_\odot^2$

– La energía recibida es:  $L_\nu = E_\nu 4\pi d^2$

con  $F_\nu = E_\nu \frac{d^2}{R_\odot^2}$

$$T = \frac{c^2}{2\nu^2 k\pi} F_\nu = \frac{c^2}{2\nu^2 k\pi} E_\nu \frac{d^2}{R_\odot^2} \approx 10^5 \text{ K}$$

4. Encontrar la relación entre la energía total de un cuerpo negro y la que irradia a  $\lambda$  mayores que una  $\lambda_0$  dada.  
Hipótesis: suponer que la  $T$  es tal que la aproximación R-J es válida.

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

– En la aprox. R-J:  $\frac{h\nu}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{1 + hc/\lambda kT - 1} = 2ckT\lambda^{-4}$$

$$\frac{\int_{\lambda_0}^{\infty} B_\lambda d\lambda}{\int_0^{\infty} B_\lambda d\lambda} = \frac{2ckT \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{-4} d\lambda}{\sigma T^4/4} = \frac{2ck\pi}{3\sigma} \lambda^{-3} T^{-4} = 0,153 \lambda^{-3} T^{-4}$$