

## Atmósferas estelares

- Región de transición entre el interior estelar y el medio interestelar
  - *Lugar donde se origina la información* (interior estelar invisible)
- **Fotosfera**: capa donde se origina el espectro estelar observado

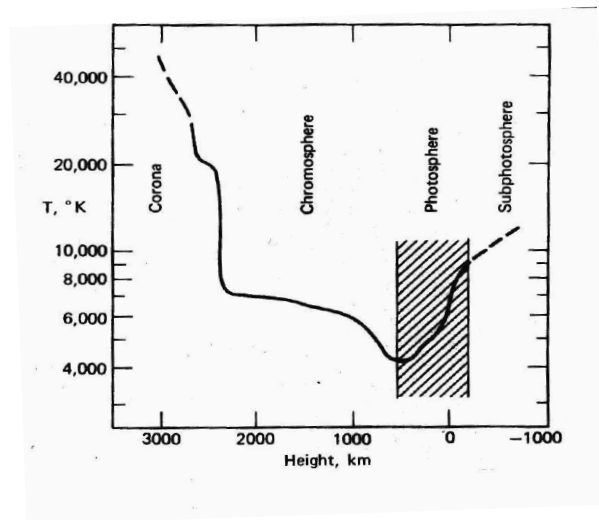


Figura 1: Distribución de temperatura en las capas externas del Sol en función de la profundidad geométrica. Centro del Sol hacia la derecha

- **Parámetros que definen la fotosfera**
  - $T_e$   $L = 4\pi R_*^2 \sigma T_e^4$
  - $g$   $g = GM_*/R_*^2$
  - Composición química  $\chi$
  - secundarios: rotación,  $\mathbf{B}$ ,...

## # Descripción de una atmósfera estelar:

- Distribución de  $T(r)$  y  $P(r)$  para unos valores de  $T_e$ ,  $g$  y  $\chi$ .

## # Modelos de atmósferas $\Leftrightarrow$ Magnitudes observables:

- Ecuación de transporte de energía (**radiativo**, *convección*, conducción mecánica, magnética)  $\rightarrow$  distribución de  $T$ .
  - **Radiativo**: Modo dominante
  - *Convección*: estrellas frías y pre-secuencia principal
- Ecuación hidrostática (hidrodinámica, magnetohidrodinámica)  $\rightarrow$  distribución de  $P$ .
- Composición química: ionización, población de estados, constantes del material.

# Transporte radiativo en una atmósfera estelar

# Ecuación de transporte radiativo:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (1)$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)e^{-(\tau_\nu-t_\nu)}dt_\nu \quad (2)$$

- Expresa  $I_\nu(\tau_\nu)$  a lo largo de la línea de visión
- Acopla los parámetros físicos del material atmosférico al espectro emergente.
- Hay que conocer  $S_\nu(t_\nu)$
- Hay que suponer una **geometría** apropiada y las direcciones  $z$  relevantes para el observador

## Geometría esférica (no dependencia azimutal)

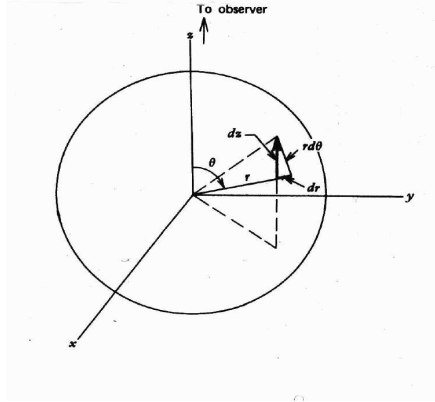


Figura 2: Estrella con geometría esférica

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{dr}{dz} + \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dz} \quad (3)$$

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial r} \frac{\cos \theta}{\kappa_\nu \rho} - \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\kappa_\nu \rho r} = -I_\nu + S_\nu \quad (4)$$

–  $dr = \cos \theta dz$ ,  $rd\theta = -\sin \theta dz$  (en la figura  $-d\theta$ )

- Atmósferas extensas: supergigantes (interiores estelares).
- Secuencia principal:  $R_* \gg$  espesor fotosfera  $\Rightarrow$  Atmósfera plano-paralela

#  $\alpha$  Eri :  $\frac{R_e}{R_p} \sim 1,5$  (VINCI, VLTI, 2003)

([www.eso.org/outreach/press-rel/pr-2003/pr-14-03.html](http://www.eso.org/outreach/press-rel/pr-2003/pr-14-03.html))

## Atmósfera plano-paralela

- Estrellas SP (V):  $R_* \gg$  espesor fotosfera ( $\odot$  :  $R_{at} \approx 0,1 \% R_\odot$ )
- $\theta$  independiente de  $z$

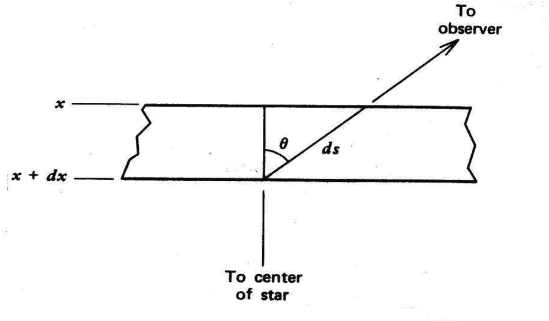


Figura 3: Geometría atmósfera plano-paralela

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{\kappa_\nu \rho dr} = -I_\nu + S_\nu \quad (5)$$

- Usualmente se utiliza la profundidad en la atmósfera:

$$x = -r \quad dx = -dr$$

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \quad (6)$$

$$I_\nu(\tau_\nu) = - \int_c^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu) \sec \theta} \sec \theta dt_\nu \quad (7)$$

# ( $c$  reemplaza a  $I_\nu(0)$ ). Se elige debido a las condiciones son diferentes para la radiación entrante ( $\theta \geq \pi/2$ ) y saliente ( $\theta \leq \pi/2$ ).

# Intensidad entrante ( $\cos \theta < 0$ ):

$$I_{\nu}^{in}(\tau_{\nu}) = - \int_0^{\tau_{\nu}} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-(t_{\nu}-\tau_{\nu}) \sec \theta} \sec \theta dt_{\nu}$$

# Intensidad saliente ( $\cos \theta > 0$ ):

$$I_{\nu}^{out}(\tau_{\nu}) = - \int_{\infty}^{\tau_{\nu}} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-(t_{\nu}-\tau_{\nu}) \sec \theta} \sec \theta dt_{\nu} = \int_{\tau_{\nu}}^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-(t_{\nu}-\tau_{\nu}) \sec \theta} \sec \theta dt_{\nu}$$

– En la superficie estelar ( $\tau_{\nu} = 0$ ):

$$I_{\nu}^{in}(0) = 0 \tag{8}$$

$$I_{\nu}^{out}(0) = \int_0^{\infty} S_{\nu} e^{-t_{\nu} \sec \theta} \sec \theta dt_{\nu} \tag{9}$$

- Ecuación de transporte relevante para el Sol
- Estrellas: Flujo

## Caso sencillo: Aproximación de Eddington-Barbier

$$I_{\nu}^{+}(\tau_{\nu} = 0, \theta) = \int_0^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-t_{\nu} \sec \theta} d(t_{\nu} \sec \theta) \quad (10)$$

- Suponemos que  $S_{\nu}$  depende  $\tau_{\nu}$  en la forma:

$$S_{\nu}(\tau_{\nu}) = a_0 + a_1 \tau_{\nu} + a_2 \tau_{\nu}^2 + \dots + a_n \tau_{\nu}^n \quad (11)$$

- Usando:  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

$$I_{\nu}^{+}(\tau_{\nu} = 0, \theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + 2a_2 \cos^2 \theta + \dots + n! a_n \cos^n \theta \quad (12)$$

- Si la dependencia es lineal (aprox. Eddington-Barbier):

$$\mathbf{I}_{\nu}^{+}(\tau_{\nu} = \mathbf{0}, \theta) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cos \theta = \mathbf{S}_{\nu}(\tau_{\nu} = \cos \theta) \quad (13)$$

# Dependencia  $I_{\nu}(\theta) \rightarrow$  oscurecimiento en el limbo observable en el Sol.

- En el centro ( $\theta = 0, \cos \theta = 1$ ):  $I_{\nu} = a_0(\nu) + a_1(\nu)$ . Se ve la función fuente  $S_{\nu}$  a  $\tau_{\nu} = 1$
- En el borde ( $\theta = \pi/2, \cos \theta = 0$ ):  $I_{\nu} = a_0(\nu)$ . Se ve la función fuente  $S_{\nu}$  en la superficie
- Eddington-Barbier  $\rightarrow$  se ve la atmósfera hasta  $\tau_{\nu} = 1$

## Flujo estelar emergente

- Flujo de radiación:

$$F_\nu = \int_{\Omega} I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (14)$$

$$\# d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi.$$

- Si  $F_\nu \neq f(\phi)$  y tomando  $I_\nu^+(0 < \theta < \pi/2)$  e  $I_\nu^-(\pi/2 < \theta < \pi)$ :

$$F_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu^+ \cos \theta \sin \theta d\theta + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_\nu^- \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (15)$$

$$F_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu) \sec \theta} \sin \theta dt_\nu d\theta - 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu) \sec \theta} \sin \theta dt_\nu d\theta \quad (16)$$

- En la superficie estelar:  $I_\nu^- = 0$
- Cómo  $d(\cos \theta) = -\sin \theta d\theta$ :

$$F_\nu(0) = 2\pi \int_0^1 I_\nu^+ \cos \theta d(\cos \theta) \quad (17)$$



## Aprox. Eddington-Barbier

- $S_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu$

$$F_\nu(0) = 2\pi \int_0^1 (a_\nu + b_\nu \cos \theta) \cos \theta d(\cos \theta) = (a_\nu + \frac{2}{3}b_\nu)\pi \quad (18)$$

- Comparando  $F_\nu$  con  $S_\nu$ :

$$F_\nu(0) = \pi S_\nu(\tau_\nu = \frac{2}{3}) \quad (19)$$

- **Flujo emergente es  $\pi$  veces la función fuente en  $\tau_\nu = 2/3$**

# Hipótesis  $S_\nu = B_\nu(T)$  (LTE):

$$F_\nu(0) = \pi B_\nu(T(\tau_\nu = \frac{2}{3})) \quad (20)$$

# Hipótesis  $\kappa_\nu \neq f(\nu)$  (**Atmósfera gris**):

$$F_\nu(0) = \pi B_\nu(T(\tau = \frac{2}{3})) \quad (21)$$

$\Rightarrow F_\nu(0)$  corresponde a un **bb** cuya temperatura es la de la atmósfera estelar a  $\tau = 2/3$

$$F(0) = \sigma T_0^4 \quad (T_0 = T(\tau = \frac{2}{3})) \quad (22)$$

# Por definición  $T_0$  corresponde a la **Temperatura efectiva** de la estrella

## Equilibrio radiativo

- La energía se produce en el interior estelar y se conserva en su paso por la atmósfera
- En la atmósfera no hay fuentes ni sumideros

⇓

$$\text{Div } \mathbf{F} = 0$$

*# Se deben incluir todas las formas de transporte de la energía relevantes (por ejemplo, convección en algunos tipos de estrellas). Aquí sólo consideramos transporte radiativo*

### Atmosfera plano-paralela

- Conservación de energía:

$$\frac{d}{dx} F(x) = 0 \rightarrow F(x) = F_0 = cte \quad ; \quad F_0 = \int_0^\infty F_\nu d\nu = \sigma T_e^4 \quad (23)$$

## ■ 1. Ecuación de Milne

- La eq. de transporte radiativo:

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \quad (24)$$

- Integrando en ángulos sólidos:

$$\int_{\Omega} \cos \theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} d\Omega = \int_{\Omega} I_\nu d\Omega - \int_{\Omega} S_\nu d\Omega \quad (25)$$

- De otra forma ( $d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho dx$ ):

$$\frac{d}{dx} \int_{\Omega} \cos \theta I_\nu d\Omega = \int_{\Omega} \kappa_\nu \rho I_\nu d\Omega - \int_{\Omega} \kappa_\nu \rho S_\nu d\Omega \quad (26)$$

- Integrando en frecuencias y suponiendo  $S_\nu$  isótropa:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty F_\nu d\nu = 4\pi \rho \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu - 4\pi \rho \int_0^\infty \kappa_\nu S_\nu d\nu = 0 \quad (27)$$

$$\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu S_\nu d\nu \quad (28)$$

*# Significado: Lado izquierdo describe la cantidad total de radiación absorbida; lado derecho describe la radición total emitida.*

*# Eqs. (23) y (27) son equivalentes*

## ■ 2. Ecuación de Milne

- El flujo integrado en frecuencias en equilibrio radiativo ( $F(x) = F_0 = cte.$ ) escrito explícitamente - ecuación (16):

$$\int_0^\infty \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu) \sec \theta} \sin \theta dt_\nu d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-(t_\nu - \tau_\nu) \sec \theta} \sin \theta dt_\nu d\theta \right] d\nu = 0 \quad (29)$$

# En equilibrio radiativo  $S_\nu$  debe satisfacer esta condición

### ■ 3. Ecuación de Milne

- Multiplicamos por  $\cos \theta$  la ecuación de transporte e integramos en ángulos sólidos:

$$\int_{\Omega} \cos^2 \theta \frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} d\Omega = \int_{\Omega} \cos \theta I_{\nu} d\Omega - \int_{\Omega} \cos \theta S_{\nu} d\Omega$$

- La integral de la izquierda corresponde a la integral  $K_{\nu}$  multiplicada por  $4\pi$  (relacionada con la presión de radiación).
- La primera integral de la derecha es  $F_{\nu}$
- La segunda integral de la derecha es cero ( $S_{\nu}$  se puede considerar isótropa)

# Integrando en frecuencias:

$$\int_0^{\infty} \frac{dK_{\nu}}{d\tau_{\nu}} d\nu = \frac{F_0}{4\pi} \quad (30)$$

# Las ecuaciones de Milne (28), (29) y (30) no son independientes: misma  $S_{\nu}$

## Caso gris. Aproximación de Eddington

#  $\kappa \neq f(\nu)$ : Opacidad independiente de la frecuencia, (*única fuente de opacidad gris: dispersión por electrones*).

- Integrando la ecuación de transporte en frecuencias y haciendo  $(I, S) = \int_0^\infty (I_\nu, S_\nu) d\nu$  :

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - S \quad (31)$$

- Las ecuaciones de equilibrio radiativo quedan:

$$F = F_0 \quad (32)$$

$$J = S \quad (33)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F_0}{4\pi} \rightarrow K(\tau) = \frac{F_0}{4\pi} \tau + cte. \quad (34)$$

- Aproximación de Eddington: Campo de radiación isótopo  
 $\Leftrightarrow I = J$

$$K(\tau) = \frac{1}{4\pi} J \int_{\Omega} \cos^2 d\Omega = \frac{1}{3} J \quad (35)$$

- (35) en (34):

$$\frac{1}{3} \frac{dJ}{d\tau} = \frac{F_0}{4\pi} = cte \quad (36)$$

- Integrando

$$J(\tau) = \frac{3}{4\pi} F_0 \tau + cte \quad (37)$$

- Como  $J = S$  (equilibrio radiativo)

$$S(\tau) = \frac{3}{4\pi} F_0 \tau + cte \quad (38)$$

# *Da la dependencia de la función fuente con la profundidad óptica*

- Si suponemos que la función fuente es la función de Planck:

$$S(\tau) = B(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (39)$$

$$\sigma T^4(\tau) = \frac{3}{4} F_0 \tau + cte \quad (40)$$

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_e^4 \tau + cte = \frac{3}{4} T_e^4 (\tau + cte) \quad (41)$$

- La constante tiene que ser determinada.

# Hipótesis (Eddington):  $I^- = 0$ ,  $I^+$  no depende de la dirección ( $0 < \theta < \pi/2$ ). La integración sobre el ángulo sólido se reduce a la semi-esfera ( $I^+ = cte$ ):

$$J(\tau) = \int \frac{I d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} I^+ \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} I^- \sin \theta d\theta \quad (42)$$

$$J(\tau) = \frac{1}{2}[I^+(\tau) + I^-(\tau)] = \frac{1}{2}I^+(\tau) \quad (43)$$

$$F(\tau) = 2\pi \int_0^{\pi/2} I^+ \cos \theta \sin \theta d\theta + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I^- \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (44)$$

$$F(\tau) = \pi[I^+(\tau) - I^-(\tau)] = \pi I^+(\tau) \quad (45)$$

- En la capa límite ( $\tau = 0$ ):

$$F_0 = 2\pi J(0) \quad (46)$$

- operando con las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}J(\tau) &= \frac{F_0}{4\pi}\tau + \frac{1}{3}J(0) \\ J(\tau) &= \frac{3}{4\pi}\left(\tau + \frac{2}{3}\right)F_0 \\ S(\tau) &= \frac{3}{4\pi}\left(\tau + \frac{2}{3}\right)F_0 \\ T^4 &= \frac{3}{4}T_e^4\left(\tau + \frac{2}{3}\right) \end{aligned} \quad (47)$$

**Para**  $\tau = \frac{2}{3} \rightarrow T = T_e$



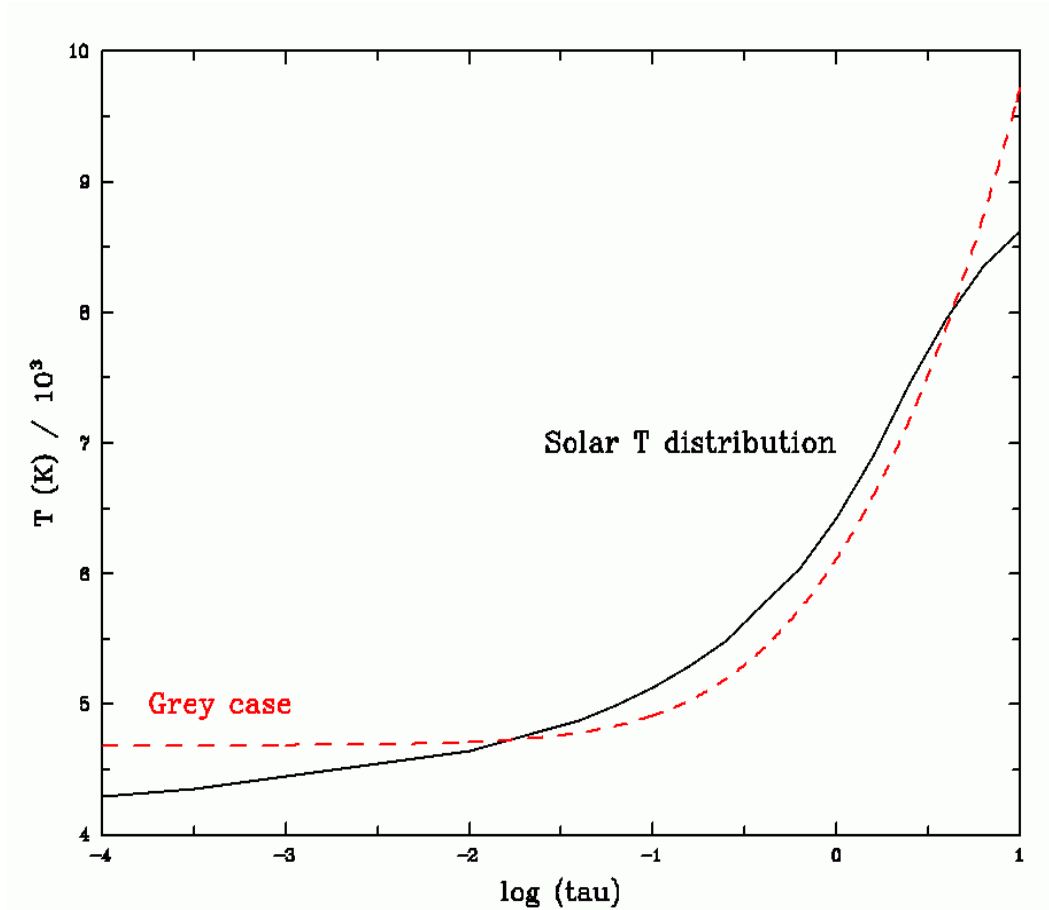


Figura 4: Comparación de la distribución de temperaturas para el caso gris con la observada a  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  (Gray 1992).

## Ejercicio: Oscurecimiento en el limbo en una atmósfera gris

# La intensidad en la superficie:

$$I_{\nu}(0, \theta) = \int_0^{\infty} S_{\nu} e^{-\tau_{\nu} \sec \theta} \sec \theta d\tau$$

• En el caso gris:  $S(\tau) = \frac{3}{4\pi}(\tau + \frac{2}{3})F_0$

# Por tanto, la intensidad es de la forma:

$$I(0, \theta) = a + b \cos \theta$$

$$I(0, \theta) = \frac{3}{4\pi}(\cos \theta + \frac{2}{3})F_0$$

– Para  $\theta = 0$ :

$$I(0, 0) = \frac{3}{4\pi}(1 + \frac{2}{3})F_0$$

– Y de aquí se obtiene una relación simple para el oscurecimiento en el limbo:

$$\frac{I(0, 0)}{I(0, \theta)} = \frac{2 + 3 \cos \theta}{5}$$

## *Ejemplo:*

1. Suponer una estrella con una atmósfera plano-paralela gris en donde la aproximación de Eddington es válida:

$$T^4 = \frac{3}{4}T_e^4(\tau + \frac{2}{3})$$

Hallar la fracción de la intensidad emitida en la dirección  $\theta = 0$  que se origina a distintas profundidades ópticas, suponiendo que la estrella radia como un cuerpo negro.

- En general, la intensidad de radiación que emite la estrella es:

$$I_\nu(\theta) = \int_0^\infty S_\nu e^{-\tau_\nu \sec \theta} \sec \theta d\tau_\nu$$

- En nuestro caso ( $\theta = 0$ ;  $\sec \theta = 1$ )

$$I(\theta = 0) = \int_0^\infty B e^{-\tau} d\tau = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^\infty T^4 e^{-\tau} d\tau = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \int_0^\infty (\tau + \frac{2}{3}) e^{-\tau} d\tau$$

$$I = \frac{5\sigma}{4\pi} T_e^4$$

– es la intensidad que sale para todas las profundidades ópticas

- La que sale a partir de una profundidad  $\tau$ :

$$I(\tau) = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \int_0^\tau (\tau + \frac{2}{3}) e^{-\tau} d\tau = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 [\frac{5}{3} - (\tau + \frac{5}{3}) e^{-\tau}]$$

$$\frac{I(\tau)}{I} = 1 - (0,6\tau + 1) e^{-\tau}$$

$\tau$	0.0	0.2	0.4	0.6	1	10	$\infty$
$\frac{I(\tau)}{I}$	0.0	0.08	0.17	0.25	0.41	$\sim 1$	1