

Teorema del Virial. Energía térmica y potencial de una estrella en equilibrio hidrostático

Equilibrio hidrostático \rightarrow relación entre la energía térmica (o cinética en un sistema de partículas) y la energía potencial gravitatoria.

- La ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

– Multiplicando por $V = (4/3)\pi r^3$ e integrando a toda la estrella:

$$\int_0^{P(R)} V dP = -\frac{1}{3} \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \quad (1)$$

Lado derecho: energía potencial de la estrella (energía requerida para formarla)

$$\Omega = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \quad (2)$$

Integrando por partes el lado izquierdo:

$$\int_0^{P(R)} V dP = PV|_0^R - \int_0^{V(R)} P dV \quad (3)$$

– el primer término desaparece ($V(0) = 0$ $P(R) = 0$)

Queda:

$$-3 \int_0^{V(R)} P dV = \Omega \quad ; \quad -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = \Omega \quad (dV = dm/\rho) \quad (4)$$

– ecuación que se conoce como la expresión general del *teorema del virial*

- Consideramos el caso de un gas ideal:

$$P = \frac{\rho}{m_g} kT$$

- La energía cinética por partícula es:

$$E_c = (3/2)kT$$

- Por unidad de masa.

$$u = \frac{3 kT}{2 m_g} = \frac{3 P}{2 \rho} \quad (5)$$

- sustituyendo en la eq. del teorema del virial:

$$\int_0^M u dm = -\frac{1}{2}\Omega$$

- El lado izquierdo es la energía interna total del sistema U . Resulta:

$$U = -\frac{1}{2}\Omega \quad (6)$$

- Este simple teorema permite estimar:

- Temperatura interna de una estrella
- Escala de tiempos de la contracción
- Energía liberada por la misma.

Aplicación: Temperatura media interna de la estrella

– La energía interna y potencial de una estrella son:

$$U = \int_0^M \frac{3}{2} \frac{kT}{m_g} dm \simeq \frac{3}{2} \frac{k}{m_g} \bar{T} M \quad ; \quad \Omega \simeq -\alpha \frac{GM^2}{R} \quad (7)$$

– $\alpha \sim 1$, cte. determinada por la distribución de masa

$$\bar{T} = \frac{\alpha}{3} \frac{m_g G}{k} \frac{M}{R} \quad (8)$$

– Tomando $\alpha = 1/2$ y suponiendo H

$$\bar{T} \approx 4 \times 10^6 \frac{M}{M_\odot} \frac{R_\odot}{R} K$$

i) $\bar{T} > T_e$: *gradiente de temperatura en el interior estelar*

ii) *Interior estelar material ionizado*

iii) *Temperatura central suficiente para reacciones nucleares*

Escala térmica de tiempos (Kelvin-Helmholtz)

Teorema del virial $\Omega = 2U$: estrella dispone de la mitad de la energía gravitacional para ser irradiada.

– Suponemos que la generación de energía se realiza mediante procesos gravitacionales. Energía disponible (térmica):

$$U \simeq \frac{3}{2} k \bar{T} \frac{M}{\bar{\mu} m_H} \quad (9)$$

– m_H = masa del protón, $\bar{\mu}$ = peso molecular medio y $M/\bar{\mu}m_H$ = número de partículas.

Suponemos una estrella con luminosidad constante. El tiempo (*Kelvin-Helmholtz*) que tarda en irradiarse toda la energía (escala de tiempos térmica - *Kelvin-Helmholtz*):

$$\tau_{KH} = \frac{U}{L} \quad (10)$$

• Para el Sol:

$$T \sim 10^7 K, \bar{\mu} \sim 1, U \sim 2 \times 10^{41} J, L_{\odot} \sim 2 \times 10^{33} \text{ ergs}^{-1} \\ \Rightarrow \tau_{KH} \sim 2 - 3 \times 10^7 \text{ años}$$

– En general:

$$\tau_{KH} \approx 10^{15} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right) \quad (11)$$

i) τ_{KH} mucho mayor que la escala de tiempo dinámica

ii) $\tau_{KH} \sim 1\%$ del tiempo de vida de una estrella

- Edad de la Tierra $\sim 5 \times 10^9$ años: Energía gravitacional no puede explicar la luminosidad del Sol. Necesitamos otras fuentes de energía: *Procesos nucleares*

Ecuaciones de estado

- Ecuación de estado: $P = P(\rho, T, \chi)$ en cada punto de la estrella:

$$P = P_g + P_r = \text{gaseosa} + \text{radiación}$$

- $P_r = \frac{4\pi}{3c}T^4 = \frac{1}{3}aT^4$ (campo isótropo)

- Presión gaseosa: componentes iónica y electrónica.

- Interior estelar: gas altamente ionizado, plasma, que puede soportar presiones muy elevadas sin desviarse del gas ideal (partículas libres no interactuantes).

- Dimensiones nucleares ($\sim 10^{-15} m$) \ll atómicas ($\sim 10^{-10} m$).

- Pero: interacciones coulombianas entre las partículas del plasma. \rightarrow Se debe evaluar:

Gas de densidad media $\bar{\rho}$ y masa por partícula $\mathcal{A}m_H$. Distancia media entre partículas es:

$$d = \left(\frac{\mathcal{A}m_H}{\bar{\rho}}\right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi\mathcal{A}m_H}{3M}\right)^{1/3}R$$

- Energía de Coulomb (carga eléctrica de la partícula $\mathcal{Z}e$):

$$e_C \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{d}$$

- La razón con la energía cinética (kT por partícula):

$$\frac{e_C}{kT} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{Z}^2 e^2}{\mathcal{A}^{4/3} m_H^{4/3} G M^{2/3}} \quad (12)$$

- Para $\mathcal{Z} = 1$, $\mathcal{A} = 1$, $M = M_\odot \rightarrow e_C/kT \sim 1\%$

- En general $\mathcal{A} \approx 2\mathcal{Z}$ (razón varía como $\mathcal{Z}^{2/3}$) $\rightarrow e_C/kT < 1$, incluso Fe

- $e_C/kT > 1$ para $M < 10^{-3}M_\odot \rightarrow$ estrellas de masa baja, enanas marrones, planetas

Presión gaseosa

$$P_g = P_i + P_e = NkT = \frac{\rho}{\bar{\mu}m_p}kT = \frac{\rho}{\bar{\mu}}\mathcal{R}T \quad (13)$$

– $N = N_i + N_e$ = partículas por unidad de volumen, m_p = unidad de masa atómica, $\bar{\mu}$ = peso molecular medio

• Hay que ver la relación entre N y $\bar{\mu}$ para un gas ionizado

Fracción de masa del elemento i :

$$\chi_i = \frac{\rho_i}{\rho} = \frac{N(A_i)A_im_p}{\sum N(A_i)A_im_p} = \frac{N(A_i)A_i}{\sum N(A_i)A_i} \quad (14)$$

– $N(A_i)$ = partículas por unidad de volumen del elemento i ; A_i = peso atómico

Densidades iónicas y electrónicas:

$$N_i = \sum N(A_i) = \sum \frac{\chi_i \rho}{A_i m_p} \quad N_e = \sum \frac{Z_i \chi_i \rho}{A_i m_p} \quad (15)$$

– Z_i = número atómico (cada átomo suministra Z_i electrones)

La presión del gas:

$$\begin{aligned} P_g = P_i + P_e &= (N_i + N_e)kT = kT \left(\sum \frac{\chi_i \rho}{A_i m_p} + \sum \frac{Z_i \chi_i \rho}{A_i m_p} \right) = \\ &= kT \frac{\rho}{m_p} \sum (1 + Z_i) \frac{\chi_i}{A_i} \end{aligned} \quad (16)$$

igualando:

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \sum (1 + Z_i) \frac{\chi_i}{A_i} \quad (17)$$

Gas degenerado

Interiores estelares: *no siempre* se pueden despreciar efectos cuánticos y relativistas en el gas.

– Principio de incertidumbre de Heisenberg: no se puede conocer simultáneamente la posición y momento de una partícula.

$$\Delta V \Delta^3 p \geq h^3$$

Supongamos un gas ideal de electrones a temperatura T . Su distribución de momentos en el elemento dV (Maxwell- Boltzmann) es:

$$n_e(p) dp dV = n_e \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2m_e kT}} dp dV \quad (18)$$

• Máximo de la distribución: $p_{max} = \sqrt{2m_e kT}$

Para una T (distribución constante), si n_e aumenta: $\rightarrow dV$ disminuye.

\rightarrow Eventualmente, n_e puede alcanzar valores que violen el principio de incertidumbre de Heisenberg (dV muy pequeño) y el rango de momentos puede exceder el momento correspondiente a T .

Principio de exclusión de Pauli: un máximo de dos electrones pueden ocupar un elemento de volumen del espacio de las fases.

Cuando ocurre esto, se habla de gas degenerado \rightarrow presión de degeneración (de los electrones)

Degeneración es gradual desde la distribución de Maxwell.

Se habla de degeneración total cuando no hay volumen disponible en el espacio de las fases. En este caso, el principio de Heisenberg es la igualdad (solo ocurre a $T = 0 K$, pero es una referencia para establecer alta degeneración).

Se llega a consideraciones similares con el caso alternativo de $n_e = \text{cte.}$ y T disminuyendo.

Presión de degeneración

El número de electrones en un gas completamente degenerado con momento en el intervalo $(p, p + dp)$ es:

$$n_e(p)dp = \frac{2}{dV} = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (19)$$

– El momento máximo se obtiene integrando, $n_e = \int_0^{p_0} n_e(p)dp$:

$$p_0 = \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi} \right)^{1/3} \quad (20)$$

De aquí se puede llegar a una relación entre presión y momento:

$$P_{e,deg} = \frac{8\pi}{15m_e h^3} p_0^5 = \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{1}{m_H^{5/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (21)$$

– donde $\mu_e = \frac{\rho}{n_e m_H}$

– Vemos:

- $P_{e,deg}$ inversamente proporcional a la masa de las partículas (electrón)
- Efectos cuánticos para protones y neutrones (mucho más masivos) importantes para densidades mucho mayores (a T dada) o T mucho menores (a densidad dada)
- A pesar de la elevada densidad, materia degenerada se puede considerar libre: energía por partícula ($\sim p_0^2/2m_e$) es más alta que energía de Coulomb (e_C)

Poniendo valores numericos:

$$P_{e,deg} = K'_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (22)$$

– $K'_1 = 1,0 \times 10^7 Nm^{-2} (kg m^{-3})^{-5/3}$

– Si suponemos sólo $H : \rightarrow \mu_e = 1/2$

$$P_{e,deg} = K_1 \rho^{5/3} \quad (23)$$

A valores muy elevados de n_e , el momento máximo en un gas completamente degenerado puede ser tal que la velocidad (p_0/m_e) se aproxime a valores relativistas. En este caso:

$$P_{e,deg-r} = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{m_H^{4/3}} \right) \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (24)$$

– con valores numericos

$$P_{e,deg-r} = K'_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (25)$$

$$-K'_2 = 1,24 \times 10^{10} Nm^{-2} (kgm^{-3})^{-4/3}$$

- y para un valor fijo de μ_e

$$P_{e,deg-r} = K_2 \rho^{4/3} \quad (26)$$

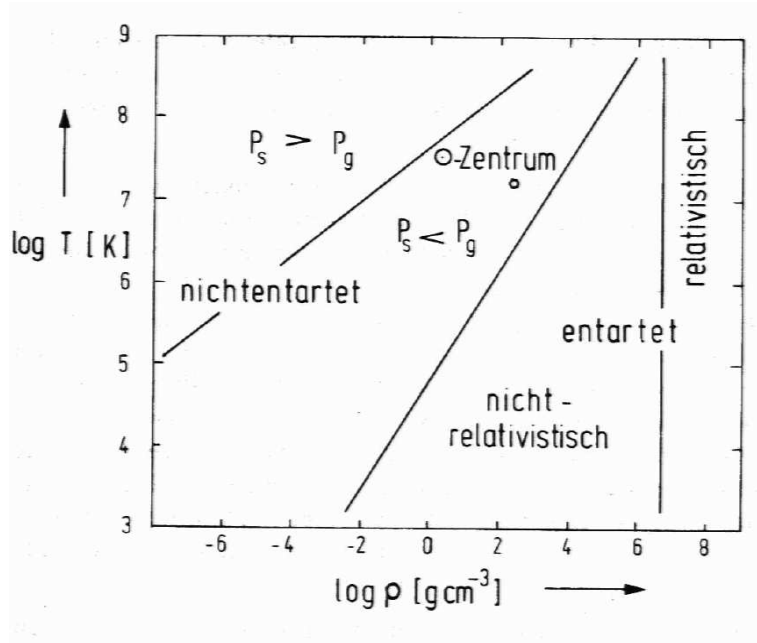


Figura 1: Zonas en el diagrama $\log \rho - \log T$ en las que son válidas las distintas ecuaciones de estado

Ejemplos

1. En un ejercicio anterior hemos visto que para un perfil de densidad de una estrella de masa M dado por:

$$\rho = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

– ($\rho_c = \text{cte.}$, $R = \text{radio estelar}$)

la masa $m(r)$ es:

$$m(r) = 4\pi\rho_c \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right)$$

.

Por otra parte, la energía potencial gravitacional es:

$$\Omega = -\alpha \frac{GM^2}{R}$$

.

Se pide estimar el valor de α para el perfil de densidad dado.

$$dm = \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned} \Omega &= - \int_0^M \frac{Gm dm}{r} = \\ &= -4\pi G \rho_c^2 \int_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] 4\pi r dr \end{aligned}$$

$$\Omega = -\frac{5}{7} \frac{GM^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,71$$

2. Estimar el peso molecular medio de una estrella compuesta de 90 % de H , 9.8 % de He y 0.2 % de metales (aproximar por C), suponiendo que el gas está completamente ionizado.

El peso molecular medio es:

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \sum (1 + Z_i) \frac{\chi_i}{A_i}$$

- Para H : $Z = 1$, $A = 1 \rightarrow$ contribuye con $2 \chi_H = 2X$
- Para He : $Z = 2$, $A = 4 \rightarrow \frac{3}{4} \chi_{He} = \frac{3}{4}Y$
- Metales: Z , $A = 2Z \rightarrow (1 + Z)/A \sim 1/2 \rightarrow \frac{1}{2} \chi_{met} = (1/2)Z$

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$$

- Para los datos del problema ($\chi_i = \frac{N(A_i)A_i}{\sum N(A_i)A_i}$):

$$X = \frac{0,9}{0,9 + 0,098 \times 4 + 0,002 \times 12}$$

$$Y = \frac{0,098 \times 4}{0,9 + 0,098 \times 4 + 0,002 \times 12}$$

$$Z = \frac{0,002 \times 12}{0,9 + 0,098 \times 4 + 0,002 \times 12}$$

Operando:

$$\bar{\mu} = 0,62$$

3. Una masa de gas en equilibrio termodinámico a $T = 10^4 K$ se compone de 50 % de H y 50 % de He y tiene una densidad $\rho = 10^{-7} g cm^{-3}$. Determinar la presión total P_T , la electrónica P_e y el peso molecular medio $\bar{\mu}$, sabiendo que a esa temperatura el He se encuentra en estado neutro y que 10 % de H está ionizado.

Datos: $m_p = 1,67 \times 10^{-24} g$; $m_e = 9,10 \times 10^{-28} g$; $k = 1,38 \times 10^{-16} erg grado^{-1}$; $N_{Av} = 6,0225 \times 10^{23} mol^{-1}$

$$P_T = P_N + P_e = (N_n + N_e)kT$$

– N_n = número de núcleos; N_e = número de electrones

- H y He están al 50 % en masa (según enunciado). Por tanto, por cada He hay 4 H .

$$N_n \mu_n = N_H m_H + N_{He} m_{He}$$

$$\mu_n = \frac{4m_H + 1m_{He}}{5} = 2,67 \times 10^{-24} g$$

– donde $m_{He} = 4m_H$ y $m_H = m_p$

- El número de núcleos por cm^3 será:

$$N_n = \frac{\rho}{\mu_n} = 3,75 \times 10^{16}$$

- La presión:

$$P_N = N_n kT = 5,175 \times 10^4 dinas cm^{-2}$$

- Número de electrones libres:

$$N_e = N_{H^+} = 0,1 N_H \quad N_N = \frac{4}{5} N_n = 3,0 \times 10^{16} \Rightarrow N_e = 3 \times 10^{15} cm^{-3}$$

- Presión electrónica:

$$P_e = N_e kT = 4,2 \times 10^3 dinas cm^{-2}$$

- Presión total:

$$P_T = 5,6 \times 10^4 \text{ dinas } cm^{-2}$$

- Peso molecular medio.

$$\bar{\mu} = \frac{\rho}{N} N_{Av} = 1,49$$

– donde $\frac{\rho}{N} = \frac{\rho}{N_n + N_e} = 2,47 \times 10^{-24} g$ es la masa media por partícula

4. El núcleo de una estrella está compuesto por 90 % de H y 10 % de He . Suponiendo el material completamente ionizado y que la densidad en el núcleo es $\rho = 150 \text{ g cm}^{-3}$, estimar la distancia recorrida para que la intensidad del campo de radiación decaiga un factor e , si la fuente de opacidad es scattering por electrones ($\sigma_\nu \approx 0,6 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$).

$$N = N_{ion} + N_e \quad \chi_i = \frac{N(A_i)A_i}{\sum N(A_i)A_i}$$

$$N_i = \sum \frac{\chi_i \rho}{A_i m_p} \quad N_e = \sum \frac{Z_i \chi_i \rho}{A_i m_p}$$

A_i = peso atomico, Z_i = numero atomico, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ (masa del proton)

Con los datos:

$$A_H = 1, A_{He} = 4, Z_H = 1, Z_{He} = 2 \rightarrow \chi_H = 9/13, \chi_{He} = 4/13$$

\Downarrow

$$N_e = 7,60 \times 10^{25} \text{ cm}^{-3}$$

\Downarrow

$$\alpha_\nu = N_e \sigma_\nu = 45,6 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\tau_\nu}$$

$$\frac{1}{e} = e^{-\tau_\nu} \Rightarrow \tau_\nu = \alpha_\nu s = 1 \Rightarrow s = 0,02 \text{ cm}$$

5. Encontrar la condición que debe satisfacer el número de electrones n_e para que un gas degenerado pueda ser considerado perfecto.

• Para que consideremos el gas como perfecto se debe satisfacer que la energía de Coulomb por partícula, e_C , sea menor que la energía cinética, $p_0^2/2m_e$.

– p_0 está dado por:

$$p_0 = \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi}\right)^{1/3}$$

– La distancia media entre electrones es: $\sim n_e^{-1/3}$.

– La energía de Coulomb por partícula:

$$e_C \approx \frac{e^2 n_e^{1/3}}{4\pi\epsilon_0}$$

– La condición es:

$$\frac{e^2 n_e^{1/3}}{4\pi\epsilon_0} < \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3}$$

– Por tanto:

$$n_e > \frac{8}{9\pi} \left(\frac{m_e e^2}{\epsilon_0 h^2}\right)^3 \approx 6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

6. Evaluar la degeneración del gas frente al comportamiento como gas ideal en el interior solar y en una enana blanca.

Datos:

Sol: $\bar{\rho}_{\odot} = 1,44 \text{ gr cm}^{-3}$, $T_{\odot} \sim 10^7 \text{ K}$

Enana blanca: $M \sim 1 M_{\odot}$, $R \sim 10^{-2} R_{\odot}$

El impulso de Fermi (gas completamente degenerado) es:

$$p_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi} N_e \right)^{1/3}$$

La energía de Fermi:

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} N_e^{2/3}$$

La energía térmica del gas:

$$\epsilon_T \sim kT$$

- En el Sol $N_e \sim N_i \sim \bar{\rho}_{\odot}/m_p \approx 10^{24} \text{ cm}^{-3}$.

– Por tanto:

$$\epsilon_T \approx 1,5 \times 10^{-16} \text{ J} \sim 1 \text{ keV}$$

$$\epsilon_F \approx 37 \text{ eV}$$

– No hay degeneración

- En la enana blanca:

$$N_e \sim 10^6 N_{e,\odot} \rightarrow \epsilon_F \sim 10^4 \epsilon_{F,\odot} > \epsilon_T$$

– Hay degeneración