


MANUEL AHUADO
PILAR GRAU
SUSANA CORTÉS



PROBLEMAS DE MICROECONOMÍA
PARA DIPLOMATURA
EN CIENCIAS EMPRESARIALES

 EDICIONES ACADÉMICAS, S.A.

Índice

Prólogo	9
Capítulo 1. El sistema de precios y la asignación de recursos	11
Capítulo 2. Teoría de la demanda, elasticidad, gastos e ingresos	21
Capítulo 3. Teoría de la producción, los costes y la oferta	85
Capítulo 4. Competencia perfecta y monopolio	117
Capítulo 5. Mercados de factores de producción y distribución de la renta	151
Capítulo 6. Oligopolios tradicionales, otras estructuras de competencia imperfecta y nueva economía industrial	161
Capítulo 7. Regulación e intervención del Estado en la economía: políticas microeconómicas públicas	203
Capítulo 8. De la microeconomía a la macroeconomía: equilibrio general de todos los mercados y bienestar social	219
Bibliografía	255

Reservados todos los derechos.

Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética, o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito de Ediciones Académicas, S. A.

© Manuel Ahijado, Pilar Grau, Susana Cortés

© EDICIONES ACADÉMICAS, S. A.
Bascuñuelos, 13 - P - 28021 Madrid

ISBN: 84-96062-75-9 (Tomo II)
ISBN: 84-96062-76-7 (Obra completa)
Depósito legal: M. 31.376-2006

Compuesto e impreso en Fernández Ciudad, S. L.
Coto de Doñana, 10. 28320 Pinto (Madrid)

Impreso en España/Printed in Spain

Prólogo

Este libro está concebido fundamentalmente pero no sólo, para acompañar a libros de texto de Introducción a la Microeconomía para Diplomaturas en Ciencias Empresariales, y muy en particular para la impartida en la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Cubre por ello el núcleo de la enseñanza estándar de la materia, y acaso presenta la peculiaridad de que en ocasiones los problemas están desarrollados paso a paso, teniendo en cuenta las dificultades de la enseñanza no presencial, que a veces se hace en solitario.

Recoge la experiencia de la enseñanza de dicha materia durante décadas, en concreto en ese ámbito, y puede considerarse de tercera o cuarta generación. Pero sobre todo porque ha sido rodado por diversos profesores, entre ellos los autores, directamente, en al menos tres universidades españolas a lo largo de ese periodo.

El CD Rom que se incluye, es un instrumento de entrenamiento y autoevaluación, por capítulos, o en simulación de un examen convencional. Este es ciertamente, de cuarta generación, porque es su versión 4.0. Presenta más de 1.500 preguntas y ejercicios de test de elección múltiple similares a los exámenes típicos aunque no tópicos.

Parte de la consideración que el desarrollo de ejercicios y problemas, es junto a la teoría, la mejor forma de fijar los conocimientos de teoría económica, por lo que esperamos que sea fructífero y de utilidad para los usuarios del mismo.

Madrid, junio 2006.

MANUEL AHIJADO

Capítulo 1

El sistema de precios y la asignación de recursos¹

Demanda y oferta: puntos extremos

PROBLEMA 1.1

Dada la función de demanda $p = 4 - 0,5x$, ¿la cantidad máxima permitida por la misma es?

Es necesario despejar la cantidad demandada en la ecuación de demanda:

$$\frac{1}{2}x = 4 - p \quad x = 8 - 2p \quad \text{Si } p = 0 \quad \text{entonces} \quad x_{\text{máx}} = 8$$

PROBLEMA 1.2

Dada la función de demanda $p = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)x$, si los precios son $p_1 = 1$; $p_2 = 2$; $p_3 = 3$, las cantidades demandadas son:

- (a) $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$
- (b) $x_1 = 2$; $x_2 = 8$; $x_3 = 3$
- (c) $x_1 = 8$; $x_2 = 6$; $x_3 = 4$
- (d) Ninguna de las anteriores.

¹ Este capítulo, como su correspondiente del libro teórico, se establece como una suerte de *vacuna* introductoria para evitar entrar de golpe en la teoría de la demanda y la oferta a nivel intermedio, a la vez que establece algunos conceptos previos relativos a esos temas.

PROBLEMA 1.3

Para los datos del problema 2 la cantidad para la que ($x_{m\acute{a}x}$) de ese bien es:

- (a) 5
- (b) 8
- (c) 10
- (d) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMA 1.4

Para los datos del problema 2 el precio prohibitivo es aquel que:

- (a) Aquel que maximiza la cantidad demandada.
- (b) Aquel que minimiza la cantidad demandada.
- (c) Aquel que hace nula la cantidad demandada.
- (d) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta para los problemas 2, 3 y 4 es obviamente la c.

Excesos de demanda y de oferta

PROBLEMA 1.5

Suponga las siguientes curvas de demanda y oferta lineales:

$$p^d = 60 - \left(\frac{x}{2}\right) \quad p^s = -10 + 2x$$

Si el gobierno establece que $p = 35$, ¿cuál es el exceso de demanda que se genera?

Cuando el precio es 35, la cantidad demandada es 50 y la cantidad ofrecida 22,5, el exceso de demanda es, por tanto la diferencia: 27,5.

PROBLEMA 1.6

Si un mercado está representado por el siguiente cuadro:

p	x^d	x^s
4	100	10
8	90	30
12	80	50
16	70	70

Si p es 12, ¿el exceso de demanda es?

Equilibrio

PROBLEMA 1.7

Por la misma razón apuntada en el problema anterior el exceso de demanda al precio del enunciado es:

$$x^d - x^s = 80 - 50 = 30$$

en sus unidades respectivas.

Si un mercado viene representado por las siguientes funciones de oferta y demanda: $x^s = 10 + 4p$, $x^d = 70 - 2p$, obtenga el precio y la cantidad de equilibrio.

En el mismo ha de darse para el equilibrio que la oferta sea igual a la demanda $x^d(p) = x^s(p) = x(p)$ para un precio determinado, por lo que sustituyendo:

$$10 + 4p = 70 - 2p \quad 6p = 60 \quad p = 10$$

Sustituyendo ahora en x^d , por ejemplo:

$$x^d = 70 - 2p = 70 - 2 \cdot 10 = 50$$

Se puede comprobar también que la cantidad ofrecida coincide con la demandada para el precio de equilibrio:

$$x^s = 10 + 4p = 10 + 4 \cdot 10 = 50$$

PROBLEMA 1.8

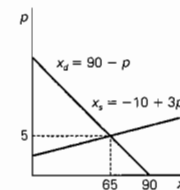


Figura 1.1

Sea un mercado cuyas funciones de demanda y oferta de libros de Arte Manierista son respectivamente: $x^d = 90 - p$, $x^s = -10 + 3p$. Hallar el precio y la cantidad de equilibrio (las cantidades se miden en unidades físicas por mes y los precios en euros por unidad de libro).

La función de demanda sólo contiene una variable independiente, el precio, por lo que el resto de los factores que la afectan se considerarán incluidos en la cláusula *caeteris paribus* (todo lo demás constante). La primera ecuación indica cuando el precio es cero los demandantes conjuntamente estarán dispuestos a demandar 90 libros y que cuando el precio es 90 unidades de cuenta (por ejemplo, euros) que la cantidad demandada sería nula. El signo menos denota la relación inversa entre los movimientos de los precios y de las cantidades. La función de oferta señala que a un precio cero los oferentes ofrecerían -10 unidades (quizás una señal para generar órdenes al departamento de producción de no producir y/o acumular en los almacenes 10 unidades) y que cuando el precio es 15, por ejemplo, la cantidad ofrecida sería 35. Como las suponemos a ambas lineales basta obtener dos puntos de las mismas.

La condición de equilibrio del mercado es:

$$x^d(p) = x^s(p) = x(p)$$

PROBLEMA 1.9

que en este caso concreto tiene la siguiente especificación:

$$90 - p = -10 + 3p$$

Operando: $100 = 4p$ de donde $p = 25$ y calculando la oferta y demanda, agregada de mercado en este caso:

$$x^d(25) = 90 - p = 90 - 25 = 65 \quad x^s(25) = -10 + 3 \cdot 25 = 65$$

Se comprueba que coinciden; es decir, que a ese precio la cantidad que desean demandar los demandantes y ofrecer los oferentes (sobre sus respectivas ecuaciones o curvas) ambos conjuntamente, son iguales. Nótese las pendientes negativas y positivas respectivamente de las curvas de demanda y oferta de mercado, reflejando la conducta discutida antes.

Si la demanda de mercado de un bien es $x = 24 - 6p$ y su oferta $x = 2p$ ¿cuáles serán la cantidad y precio de equilibrio?

Igualando, sin más, y de nuevo la ecuación de oferta a la de demanda: $24 - 6p = 2p$. El precio de equilibrio es 3 y en consecuencia la cantidad que hace iguales a la oferta y la demanda es 6.

Variaciones en los parámetros y reequilibrios

PROBLEMA 1.10

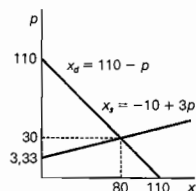


Figura 1.2

Suponga que en el problema 8 la demanda ha variado hasta ser $x^d = 110 - p$. Obtenga el equilibrio del mercado y compárelo con aquél.

Mientras el precio de mercado no cambie y no cambien los parámetros (los valores 90, 1, 10, 3, en valor absoluto o prescindiendo de los signos, en el Problema 8) o algunas de las variables contenidas en la cláusula *ceteris paribus*, el modelo se replicaría por unidad de tiempo, semana a semana, etc., por ejemplo, y continuaría prediciendo que el precio de equilibrio es 25 euros (y la cantidad de equilibrio 65 libras). Pero en el nuevo enunciado el parámetro independiente de la función de demanda ha pasado a ser 110, lo que hace desplazar paralelamente la curva hacia la derecha (la pendiente, -1, no se ha alterado porque los precios no han variado), obteniendo un nuevo precio de equilibrio de 30 y una nueva cantidad de equilibrio de 80. Todo ello parece razonable y esperado: la mayor demanda con una oferta dada hace aumentar el precio, pero a ese precio los oferentes están dispuestos a ofrecer 15 unidades más que antes satisfaciendo la demanda adicional.

Podemos utilizar el modelo algebraico para comprobarlo desde otro ángulo. La condición de equilibrio $x^d(p) = x^s(p) = x(p)$ ahora es $110 - p = -10 + 3p$, de donde operando se obtiene $120 = 4p$, por lo que $p = 30$. Sustituyendo:

$$x^d(30) = 110 - p = 110 - 30 = 80 \quad x^s(30) = -10 + 3 \cdot 30 = 80$$

con los mismos comentarios que antes.

PROBLEMA 1.11

Debe apreciarse que aunque tan sólo ha variado la demanda, el precio viene determinado por las dos fuerzas, la oferta y la demanda; y la elevación del precio ha llevado también a ofrecer más y a demandar más, ambas a lo largo de las curvas respectivas.

Si con $x^d(p)$ del problema 8 el precio hubiera permanecido en 30 euros (digamos por una intervención gubernamental) ¿cuál sería la cantidad demandada y cuál la ofrecida? y ¿cuál sería la reacción que cabría esperar del mercado?

Sin más que sustituir este precio en las funciones de demanda y oferta respectivas:

$$x^d(30) = 90 - p = 90 - 30 = 60 \quad x^s(30) = -10 + 3 \cdot 30 = 80$$

Naturalmente, como el precio es superior al de equilibrio (debemos suponer que es un precio mínimo para que la restricción sea operativa), se crea un exceso de oferta.

PROBLEMA 1.12

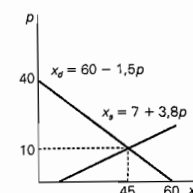


Figura 1.3

Si un mercado viene representado por las siguientes funciones de oferta y demanda: $x = 7 + 3,8p$, $x = 60 - 1,5p$. Obtener precio y cantidad de equilibrio.

No se identifican las curvas de oferta y demanda en el enunciado, pero son ya autoevidentes (debido a las condiciones de signo de las pendientes mientras no se especifique lo contrario). La primera ecuación es la de oferta y la segunda la de demanda. Aplicando el procedimiento ya conocido, sustituyendo en la condición de equilibrio, $x = x^s = x^d$; $5,3p = 53$; $p = 10$. Sustituyendo en x^d (o en x^s):

$$x^d = 7 + 3,8 \cdot 10 = 7 + 38 = 45$$

Excedente del consumidor y excedente del productor

PROBLEMA 1.13

Sea una función de demanda como $x = a - bp = 50 - 2p$. Calcule la variación del excedente del consumidor en las dos siguientes situaciones: a) si p pasa de 5 a 4, y b) si p pasa de 5 a 10.

a) En el primer caso, si: $p = 5$ entonces $x = 50 - (2 \cdot 5) = 40$, y por otro lado, si: $p = 4$ entonces $x = 50 - (2 \cdot 4) = 42$.

Gráficamente en la figura 1.4 sabemos que bajo ciertos supuestos la variación en el excedente es un triángulo más un rectángulo cuya área se calcula como:

$$\frac{(\text{base} \cdot \text{altura})}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

- El rectángulo (base por altura) = $40 \cdot 1 = 40$.
- Área total: 41.

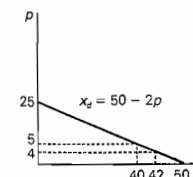


Figura 1.4

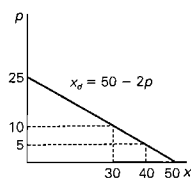


Figura 1.5

PROBLEMA 1.14

b) En el segundo caso, análogamente:

$$\begin{aligned} \text{si } p = 5 \quad x &= 50 - (2 \cdot 5) = 40 \\ \text{si } p = 10 \quad x &= 50 - (2 \cdot 10) = 30 \end{aligned}$$

Gráficamente (fig. 4.5) las áreas son:

- Triángulo $\frac{(\text{base} \cdot \text{altura})}{2} = \frac{(10 \cdot 5)}{2} = 25$
- Rectángulo $(\text{base} \cdot \text{altura}) = (30 \cdot 5) = 150$
- Área total: 175.

Dada la función de demanda $x = 48 - 6p$, con $p = 4$, ¿el excedente del consumidor será?:

$$\text{Si } p = 8 \quad x = 0 \quad \text{Si } p = 4 \quad x = 24$$

Por tanto, el excedente del consumidor para la variación del precio será ahora un área:

$$\frac{(8 - 4)24}{2} = 48$$

PROBLEMA 1.15

Dada la función de oferta $x = 4p$, con $p = 3$, ¿el excedente del productor será?:

El caso es simétrico con el del lado de la demanda (excedente del consumidor), por lo que:

$$\text{Si } p = 0 \quad x = 0 \quad \text{Si } p = 3 \quad x = 12$$

El excedente del productor será $\frac{3 \cdot 12}{2} = 18$.

Mercados intervenidos

PROBLEMA 1.16

Dadas las siguientes funciones de oferta y demanda de mercado: $x^s = 10.000 + 110p$, $x^d = 20.000 - 90p$. ¿Cuántas unidades se venderían de x si se establece un precio máximo de 40 unidades de cuenta?

Primero igualando oferta a demanda obtenemos el precio de equilibrio:

$$200p = 10.000 \quad p = 50 \quad \text{precio de mercado}$$

PROBLEMA 1.17

Como el precio máximo es $p_{\text{máx}} = 40$, que es menor que el precio de equilibrio, se vende la cantidad del lado de la oferta:

$$14.400 = 10.000 + 110 \cdot 40 = x^s$$

El lado de la demanda estaría dispuesto a comprar 16.400, es decir, $(20.000 - 90 \cdot 40)$, pero el lado corto restringe. Nótese que ignoramos calcular el precio de mercado porque en este caso (el del enunciado) no es operativo.

Dadas las siguientes funciones de oferta y demanda de mercado, $x^s = 10.000 + 110p$, $x^d = 20.000 - 90p$. ¿Cuántas unidades se venderían de x si se establece un precio mínimo de 60 unidades de cuenta?

Por el mismo procedimiento y por las mismas razones que en el problema anterior, el lado corto impone su ley y, podemos a calcularlo directamente sobre la función de demanda, que ahora es el lado corto:

$$x^d = 20.000 - 90(60) = 14.600$$

Nótese que ignoramos calcular el precio de mercado porque en este caso, como en el anterior, no es operativo.

PROBLEMA 1.18

Dado un mercado con funciones de oferta y demanda: $x^d = 140 - 3p$ y $x^s = -20 + 5p$. ¿Cuál será la cantidad intercambiada en el equilibrio, si en el mercado la autoridad fija un precio máximo de 15 unidades?

El precio de equilibrio es 20, sin más que igualar la oferta a la demanda, pero como el de intervención es inferior si es operativo, por lo que la restricción, la oferta (el lado corto), establecerá la cantidad intercambiada que será:

$$x^s = -20 + 5p = -20 + 75 = 55 \text{ unidades}$$

PROBLEMA 1.19

Dado un mercado con funciones de oferta y demanda: $x^d = 140 - 3p$ y $x^s = -20 + 5p$, si el precio mínimo fijado por la autoridad económica fuese de 15 unidades ¿cuál sería la cantidad intercambiada en el equilibrio?

Nótese que este es un caso distinto de los anteriores; técnicamente sería un error de la autoridad, porque la restricción sería la que no fuera operativa y el mercado funcionaría como si esta no existiera. Si el precio es 15 (inferior al de equilibrio) en el mercado se intercambiará la cantidad de equilibrio, luego:

$$x^d = 140 - 3p = -20 + 5p = x^s \quad p = 20 \quad x = 80$$

Dinámica: teorema de la tela de araña

PROBLEMA 1.20

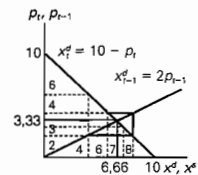


Figura 1.6

Si en un mercado la función de oferta es $x_t^s = 2p_{t-1}$ y la situación inicial es $p = 4$ y $x = 2$, y la función de demanda de mercado es $x_t^d = 10 - p_t$; (a) ¿cuál sería el precio de equilibrio?; (b) ¿el modelo converge al equilibrio?; y (c) establecer gráficamente la secuencia de precios y cantidades para los dos siguientes periodos partiendo de un precio inicial $p_1 = 4$.

Es un caso de modelo de telaraña o ajuste retrasado de los precios. Gráficamente los datos podrían representarse como:

$$p_e = 3,33 \quad x_e = 6,66$$

Frontera de posibilidades de producción

PROBLEMA 1.21

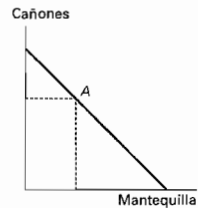


Figura 1.7

Dada la curva de transformación *cañones por mantequilla* siguiente. ¿Cuál es el coste de oportunidad de una unidad más de mantequilla partiendo de A?

Al ser la frontera una línea recta la proporción de las unidades *intercambiadas* (el aumento de una de uno implica la reducción de una del otro) de un bien y otro que muestra es constante y en este caso unitaria por construcción, al formar la frontera un ángulo de 45° con los ejes; es decir, que el ratio de las variaciones de las unidades de mantequilla y cañones es 1.

PROBLEMA 1.22

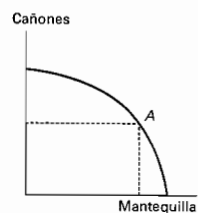


Figura 1.8

Con la curva de transformación siguiente ¿cuál es el coste de oportunidad de una unidad más de mantequilla partiendo de A?

En este caso la curva de transformación o frontera de posibilidades de producción es cóncava respecto al origen de coordenadas. Por construcción se observa que el ratio es mayor que 1 (> 1). Nótese que en el ratio el numerador aparecen los cañones y que el número de unidades de mantequilla es cada vez menor en la dirección de movimiento partiendo de A hacia la derecha (menor que 1), por lo que el cociente es mayor que la unidad.

PROBLEMA 1.23

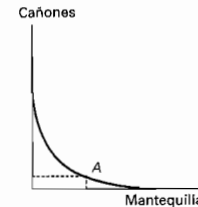


Figura 1.9

Con la curva de transformación siguiente ¿cuál es el coste de oportunidad de una unidad más de mantequilla partiendo de A?

En este caso (convexa) menor que 1 (< 1). Véanse las dos respuestas a los dos problemas previos.

Repaso

PROBLEMA 1.24

Para los datos del problema 25 el precio prohibitivo en $p = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)x$ es:

- (a) $p_p = 5$
- (b) $p_p = 3$
- (c) $p_p = 4$
- (d) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la (a).

PROBLEMA 1.25

Para un mercado del bien x cuya función de oferta es $p = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)x^s$ y de demanda $p = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)x^d$, a los precios $p = 1$, $p = 2$, $p = 4$, ¿cuáles son las cantidades demandadas x_1^d , x_2^d , x_3^d ?

- (a) $x_1 = 8$ $x_2 = 6$ $x_3 = 2$
- (b) $x_1 = 6$ $x_2 = 4$ $x_3 = 2$
- (c) $x_1 = 3$ $x_2 = 2$ $x_3 = 1$
- (d) Ninguna de las anteriores.

Sin más que aplicar la fórmula y sustituir en la función de demanda se tendrá;

$$p = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)x; \quad 2p = 10 - x; \quad x = 10 - 2p \quad \text{que para:}$$

$$p = 1; \quad x = 10 - 2 = 8$$

$$p = 2; \quad x = 10 - 4 = 6$$

$$p = 4; \quad x = 10 - 8 = 2$$

PROBLEMA 1.26

Para los datos del problema 25 el precio y la cantidad de equilibrio son:

- (a) $x = 2$; $p = 4$
- (b) $x = 1$; $p = 3$
- (c) $x = 3$; $p = 2$
- (d) Ninguna de las anteriores.

Igualando la oferta a la demanda y despejando:

$$1 + \frac{3}{2}x = 5 - \frac{1}{2}x \quad x_e = 2$$

sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones del enunciado $p_e = 4$.

PROBLEMA 1.27

Para los datos del problema 25, ¿cuál es el exceso de oferta para $p = 4,5$?

- (a) $4/3$
- (b) $3/4$
- (c) 3
- (d) Ninguna de las anteriores.

Para $p = 4,5$ la oferta será $x^s = \frac{7}{3}$, mientras que la demanda será de $x^d = 1$, por lo que se da un exceso de oferta de $4/3$ unidades.

PROBLEMA 1.28

Para los datos del problema 25 ¿cuál es el exceso de demanda para $p = 3$?

- (a) $8/3$
- (b) $6/5$
- (c) $3/2$
- (d) Ninguna de las anteriores.

Para $p = 3$ la oferta será $x^s = \frac{4}{3}$, mientras que la demanda será de $x^d = 4$, por lo que se da un exceso de demanda de $8/3$ unidades.

Capítulo 2

Teoría de la demanda, elasticidad, gastos e ingresos

Notas teóricas

Obtención matemática del equilibrio del consumidor

Para la resolución analítica están disponibles algebraicamente diversos procedimientos; usualmente tres de ellos aparte del geométrico ya revisado en el texto principal del capítulo. Veamos primero el más frecuentemente utilizado. Si el problema del consumidor consiste en maximizar la función de utilidad $u(x_1, x_2)$ sujeta a la restricción presupuestaria $(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$ formando la función auxiliar de Lagrange²:

$$S = u(x_1, x_2) = \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$$

donde λ es el llamado multiplicador de Lagrange, las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 - \lambda p_1 = 0 & u_1 &= \lambda p_1 \\ S_2 &= u_2 - \lambda p_2 = 0 & u_2 &= \lambda p_2 \\ S_\lambda &= p_1x_1 + p_2x_2 - y = 0 \end{aligned}$$

siendo:

$$S_i = \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad i = 1, 2$$

² Se presupone conocido el método matemático; en caso contrario deberá repasarse un libro de Matemáticas.

y donde ahora, sin pérdida de generalidad³, u_1 y u_2 son las derivadas parciales de la función de utilidad respecto a x_1 y x_2 , respectivamente.

Las tres ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones, con las cantidades y el multiplicador como incógnitas; tres ecuaciones ($n + 1$ en el caso general de n bienes), con tres incógnitas ($n + 1$ en el caso general) las demandas de los bienes y el multiplicador de Lagrange. La tercera ecuación es la recta de balance por lo que implica por tanto situarse sobre ella⁴. La forma más habitual de resolver el sistema anterior es eliminar λ , es decir, hacer:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \lambda$$

A esta última expresión se la conoce con el nombre de «ley» de la igualdad de las utilidades marginales ponderadas, en este caso ponderadas por sus precios respectivos. La ley se interpreta de modo que, en el equilibrio, la utilidad que le proporciona al consumidor una unidad monetaria gastada en un bien, es idéntica a la que le proporciona el mismo gasto en otro bien, dados los supuestos. Partiendo de la ecuación de las utilidades marginales ponderadas por sus precios, si el consumidor obtuviese un incremento de renta, estaría indiferente entre adquirir más de cualquiera de los dos bienes, pues los dos le reportan el mismo incremento de utilidad. Es fácil apreciar, que el primer miembro es la relación marginal de sustitución, y que es claramente igual al cociente invertido de los precios. En efecto:

$$RMS_2^1 = -\lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

pero $\frac{p_2}{p_1}$ es la pendiente de la recta de balance y $-\frac{dx_1}{dx_2}$ es la pendiente de la curva de indiferencia; en consecuencia, hemos vuelto a obtener el resultado que logramos también geoméricamente en el texto teórico. Nótese que se cumple la siguiente igualdad:

$$\left. \frac{dx_i}{dx_j} \right|_{\bar{u}} = \left. \frac{dx_i}{dx_j} \right|_{\bar{y}}$$

las de las pendientes de la curva de indiferencia y de la restricción presupuestaria respectivamente. Es fácil apreciar intuitivamente también, que el multiplicador de Lagrange da la sensibilidad de la función objetivo –función de utilidad– ante cambios en los parámetros, es decir, los precios y la renta, y es la utilidad marginal de la renta, sin más que diferenciar en la recta de balance. En consecuencia, el incremento de utilidad derivado de un aumento de la renta es igual, en el equilibrio, al aumento en la utilidad derivada de la adquisición o consumo de cualquiera de los dos bienes (ello se apreciará en los problemas siguientes).

³ A veces utilizamos los subíndices como puros índices, y en otros, como en el presente, como derivadas; en todos los casos el contexto será clarificador, o el cambio será advertido explícitamente.

⁴ En alguna medida, la exigencia de situarse sobre la recta de balance proviene del supuesto de no saciación, o lo que es lo mismo, de que las utilidades marginales son positivas; por ello, para maximizar la utilidad debe gastarse toda la renta. Si se prefiere se puede suponer esto último sin más (es decir, no ahorrar).

PROBLEMA 2.1

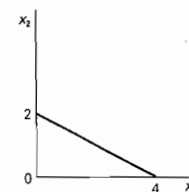


Figura 2.1

Dibuje los gráficos de la restricción presupuestaria y el conjunto factible definidos por: $p_1x_1 + p_2x_2 \leq y$, si los precios son $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, y la renta, $y = 4$, para los siguientes casos: a) aumentan los precios y la renta en la misma proporción; b) el consumidor recibe una herencia de dos unidades de renta; c) existe una oferta del bien 1, por el que se regalan las dos primeras unidades, y d) se produce un descuento del 50 por ciento en el precio del bien 2.

Es inmediato que la restricción se puede escribir, en ausencia de ahorro, como:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

por lo que tomando los casos extremos siguientes:

$$\begin{array}{lll} x_2 = 0 & x_1 = 4 \\ x_1 = 0 & 2x_2 = 4 & x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{array}$$

la misma queda establecida geoméricamente, en la figura 2.1. Nótese, que al ser una línea recta, basta obtener dos puntos de la misma, por ejemplo los extremos. La pendiente es:

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{1}{2}$$

Los casos del enunciado se entienden como alternativos.

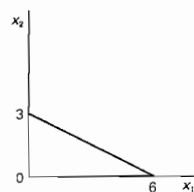


Figura 2.2

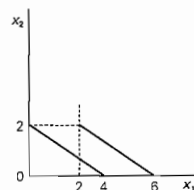


Figura 2.3

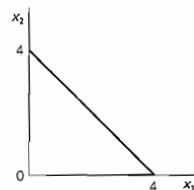


Figura 2.4

- (a) Aumentan precios y renta en la misma proporción, por ejemplo en un 100%, al cambiar el gobierno la unidad de cuenta multiplicándola por dos, entonces:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

y del mismo modo que antes:

$$x_2 = 0 \quad x_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{8}{4} = 2$$

es decir, las cantidades máximas de consumo de cada bien permanecen inalteradas, como sabemos por la teoría.

- (b) El consumidor recibe mediante herencia 2 unidades. La renta o disponibilidad para el gasto queda suplementada en dos unidades, por lo que su representación es:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

La pendiente no ha variado, porque los precios no lo han hecho, pero las cantidades obviamente sí, siendo las máximas potenciales:

$$x_2 = 0 \quad x_1 = 6$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

mayores —lógicamente— al haber aumentado la renta *caeteris paribus*, que las anteriores (fig. 2.2).

- (c) Hay una oferta del bien 1, por la que se regalan las dos primeras unidades, pagándose a su precio normal el resto de las unidades adquiridas. Es fácil observar el efecto, gráficamente (figura 2.3), sin que se requiera más comentarios; es como si el eje del bien 2 se hubiera desplazado hacia la derecha, y como se apareciera una recta de balance *marginal* (la recta de balance a partir de ese punto).

- (d) Se produce un descuento del 50% en el precio de bien 2, a partir de la primera unidad. La recta queda ahora modificada como figura 2.4:

$$x_1 + x_2 = 4$$

Porque al modo habitual:

$$\text{Si } x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$\text{Si } x_2 = 0 \quad x_1 = 4$$

Función de utilidad y relación marginal de sustitución

PROBLEMA 2.2

Dada una función de utilidad ordinal, $u = f(x)$, donde x representa vectores o combinaciones de bienes, discuta si las siguientes son, o no, asimismo, funciones de utilidad admisibles: $2u$; u^2 ; $u + 5$; $\log u$; $\ln u$.

Lo son, al ser todas transformaciones monótonas de la primera. Si los índices de u son 1, 2, 3, 4, ..., los índices de $2u$ serían 2, 4, 6, 8. Lo mismo ocurre con las restantes transformaciones.

PROBLEMA 2.3

Discuta el significado de la siguiente proposición: «si la relación marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 es igual a 2, significa que el consumidor está dispuesto a ceder 2 unidades del bien 2, para obtener 1 del 1». Verdadero o falso y por qué.

La relación marginal de sustitución se define como:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} \quad \text{o} \quad RMS_1^2 = -\frac{dx_1}{dx_2}$$

Y son el límite de los incrementos del bien 2 (1) por una unidad de 1 (2) respectivamente, siempre a lo largo de una curva de indiferencia, es decir, para un nivel de utilidad constante; en rigor siempre que la variación del denominador sea una unidad (variación) infinitesimal. Por ello, a veces se dice que la relación marginal de sustitución, es decir, la pendiente de la curva de indiferencia en un punto indica la *inclinación a pagar* por parte del consumidor, naturalmente expresada en unidades físicas o lo que es lo mismo expresada en cantidades de bienes. La curva de indiferencia usualmente tiene pendiente negativa. Luego si la RMS_1^2 es igual a 2, ello quiere decir que la proposición del texto no es correcta:

$$RMS_1^2 = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

$$\Delta x_2 = 2\Delta x_1$$

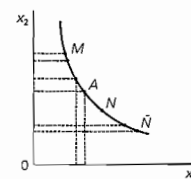


Figura 2.5

En la figura 2.5, si el consumidor está situado en el punto A de la curva de indiferencia, el renunciar a una unidad del bien 1 (un movimiento hacia la izquierda), implica que está dispuesto a ceder, o ganar en este caso, $0,5\Delta x_1$ unidades del bien 2. Si Δx_1 es 1, es decir, una unidad, entonces está dispuesto a ganar el equivalente a 2 unidades del bien 1 en unidades del 2. O, inversamente si cede Δx_2 , o una unidad del 2 —un desplazamiento hacia la derecha desde el punto inicial—, obtendrá 2 unidades del bien 1.

PROBLEMA 2.4

Otra cuestión —a no confundir con la anterior— es si hubiéramos tomado la relación marginal de sustitución inversa, es decir, del 1 por el 2. Si hubiese sido $RMS_2^1 = 2$, entonces el consumidor estaría dispuesto a ceder 2 unidades del 2 por 1 del 1.

Por otro lado, y en este caso, la relación marginal de sustitución es constante; o, mejor dicho, con más rigor, tomada en un punto de la curva de indiferencia. Pero sabemos que puede ser variable en otros; para una curva de indiferencia estrictamente convexa hacia el origen, es decreciente a lo largo de la misma, si nos movemos de izquierda a derecha, es decir cediendo unidades del bien 1. En la figura 2.5 y el punto M , el consumidor dispone de *mucho* x_2 por lo que estará dispuesto a ceder «mucho» de él por una unidad del 1; en N la relación de valoración es aproximadamente equivalente para ambos bienes, porque lo son las disponibilidades de ambos bienes; y, finalmente, en \bar{N} se ha invertido la situación inicial.

Comente la siguiente proposición: «el precio de un bien en el equilibrio, indica la cantidad de otro bien que el consumidor está dispuesto a entregar, para obtener una cantidad infinitesimal del primero».

La proposición es cierta. Sabemos que la curva de demanda $x_i = F(p_i)$, se puede escribir en su forma inversa como $p_i = f(x_i)$, pero también hemos derivado anteriormente que, en valor absoluto, la relación marginal de sustitución es igual al cociente invertido de los precios $RMS_i^j = \frac{p_i}{p_j}$, de donde, despejando $p_i = RMS_i^j p_j$, e igualando,

$p_i = f(x_i) = RMS_i^j \cdot p_j$ que se cumple para los valores de equilibrio. Pero, recordando la interpretación que damos a la relación marginal de sustitución, podemos afirmar, si suponemos que el precio del bien j es 1, por simplificación, que el precio de i indica la cantidad de j , que estaría dispuesto a entregar para obtener una pequeña (infinitesimal) cantidad de i , o serle entregado para desprenderse de dicha cantidad.

Sea una función de utilidad, $u = x_2 + ax_1$, donde a es un parámetro positivo. Analice la convexidad de la función.

Está claro que la ecuación es una línea recta. Dando valores extremos:

$$\begin{aligned} - \text{ Si } x_1 &= 0 & x_2 &= u \\ - \text{ Si } x_2 &= 0 & x_1 &= \frac{u}{a} \end{aligned}$$

Operando, en el caso general (x_1 y x_2 ambos distintos de cero):

$$x_1 = \frac{u}{a} - \frac{1}{a}x_2$$

la pendiente es:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{1}{a} < 0$$

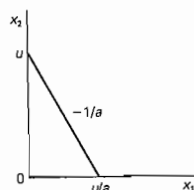


Figura 2.6

para nuestros supuestos; indica la tasa constante a la que el consumidor está dispuesto a intercambiar los dos bienes. Y la segunda derivada:

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = 0$$

luego es matemáticamente convexa en el sentido discutido en la teoría.

Preferencias y demanda en casos especiales

PROBLEMA 2.6

Discutir con generalidad algunos casos de funciones de utilidad, curvas de indiferencia, equilibrio y demanda en casos distintos del ya habitual o normal de libro de texto analizado en epígrafes anteriores que se toma como referencia. Se trata de (a) funciones de utilidad para bienes complementarios; (b) para bienes sustitutivos; (c) de la familia Cobb-Douglas; (d) Cobb Douglas en sentido estricto, y (e) para bienes y «males».

Debe tenerse en cuenta que ellos representan preferencias alternativas y no necesariamente extrañas, sino acaso a consumidores distintos con distintas inclinaciones respecto a la utilidad y las combinaciones de bienes que la proporcionan. En todo caso aportan marcos alternativos y en consecuencia flexibilidad de representación, cuando no casos más realistas que el estándar en ocasiones.

(a) *Para bienes complementarios y complementarios perfectos.* En este caso los bienes deben utilizarse en combinaciones constantes, es decir, en términos proporcionales, pudiendo variar la proporción según los casos. En el de complementarios perfectos, se aprecia con claridad que cada uno de ellos establece un *mínimo* a la cantidad utilizada; por ejemplo, el número de zapatos, tazas de café y terrones de azúcar, etc.; lo mismo con tazas de té y rodajas de limón, ensalada y aceite, etc.⁵ Por ello las funciones adoptan la forma:

$$u = \min(x_1, x_2)$$

o, con más generalidad:

$$u = \min(ax_1, bx_2)$$

donde a y b son parámetros de proporcionalidad.

(b) *Sustitutivos (funciones aditivas y separables).* La función utilidad sería de tipo:

$$u = x_1 + x_2$$

⁵ La disponibilidad total de uno de los dos bienes también limita el número de combinaciones posibles —usos unitarios—, y puede implicar sobrantes; como de hecho los implicará.

Debe apreciarse que los bienes son sustitutivos perfectos, es decir, idénticos en valoración para el consumidor; para una u constante, si aumenta el consumo de uno debe disminuir el otro en la misma cantidad exactamente. (Pero, debe notarse que cualquier transformación monótona también guarda la relación, por ejemplo, $\ln u = \ln x_1 + \ln x_2$.) Diferenciando, para \bar{u} es decir, con utilidad constante:

$$\begin{aligned} 0 &= f' dx_1 + 1 dx_2 \\ -dx_1 &= dx_2 \\ -\frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{1}{1} = 1 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -1 \end{aligned}$$

Al consumidor le es indiferente el consumo de una unidad de un bien, o del otro, lo único que le importa es la cantidad total.

Una variante de la anterior es:

$$u = 2x_1 + x_2$$

El valor del bien 2 para el consumidor es el doble que el del 1. Por el mismo razonamiento que en el punto anterior:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -2$$

Que es la pendiente de la curva de indiferencia. En caso de ser, $u = x_1 + 2x_2$ sería, obviamente, el reverso:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{2}$$

Generalizando, si la función de utilidad es $u = ax_1 + bx_2$, siendo a y b parámetros, análogamente a los caso anteriores:

$$-\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a}{b}$$

Una función de utilidad muy interesante y que utilizaremos con gran profusión en lo sucesivo, es una denominada Cobb-Douglas —de la familia y en sentido estricto— por analogía con las funciones de producción del mismo nombre.

(c) *Funciones de la familia Cobb-Douglas.* Sea, por ejemplo, $u = x_1 x_2$ y nótese que es como si fuese:

$$u = x_1^1 x_2^1$$

es decir, como si los exponentes fueran 1. Fijando el valor de u para obtener las curvas de indiferencia:

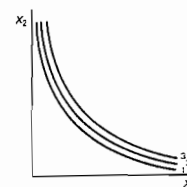


Figura 2.7

$$\bar{u} = x_1 x_2$$

y despejando:

$$x_1 = \frac{\bar{u}}{x_2} = \frac{\text{constante}}{x_2}$$

de donde, el numerador puede adoptar los valores:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \quad x_1 = \frac{2}{x_2} \quad \text{etc.}$$

Se aprecia con facilidad que, geométricamente, las curvas de indiferencia son hipérbolas equiláteras (figura 2.7) en las que según el índice que adopte u estarán más o menos alejadas del origen además de variar su curvatura.

Otras funciones tipo Cobb-Douglas, son funciones del tipo $u = x_1^a x_2^b$. Apreciamos que es la función del caso anterior, elevada al cuadrado; y como es un cuadrado tiene que ser necesariamente positivo, es obvio que esta función de utilidad es una transformación monótona creciente (positiva) de la anterior. Por ello, las curvas de indiferencia serán exactamente iguales a la de la figura anterior, aunque ahora los índices de utilidad serán los cuadrados de aquellos: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, etc.

Generalizando, en $u = x_1^a x_2^b$ los parámetros a y b , puede ser, $a = 0,5$, $b = 0,5$, u otra cualquier combinación que sume 1, ($a + b = 1$). Es conocido ya, que podemos realizar una transformación del tipo:

$$\begin{aligned} h &= \ln u = \ln (x_1^a x_2^b) \\ h &= a \ln x_1 + b \ln x_2 \end{aligned}$$

ya que como sabemos el logaritmo neperiano es una transformación monótona admisible, es decir, cumple las reglas teóricas ya discutidas. Nótese también que se puede realizar otra transformación interesante de la función del punto anterior. En efecto, si

elevamos toda la función $u = x_1^a x_2^b$ al exponente, $\frac{1}{(a+b)}$, tenemos que:

$$h = x_1^{a/(a+b)} x_2^{b/(a+b)}$$

y definiendo $\frac{a}{a+b}$ como β es evidente que:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

por lo que podemos reescribir la función de utilidad como:

$$h = x_1^\beta x_2^{1-\beta}$$

de modo que se pueden transformar muchas funciones en funciones Cobb-Douglas mediante las adecuadas normalizaciones de los exponentes.

(d) Una función de utilidad en la que uno de los bienes es un mal. La función podría ser del tipo (aunque podría adoptar otras formas también):

$$u = \frac{x_2}{x_1}$$

de donde:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{-x_2}{x_1^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1^3} > 0$$

Luego el bien 1 es un mal, ya que su utilidad marginal es negativa (y creciente). La utilidad marginal del 2, en cambio, es positiva, al modo habitual, luego es un bien-bien.

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_1^2} > 0$$

De igual forma podría verse para $u = x_1 - x_2$, donde el último bien x_2 es un mal, ya que cualquier incremento en su consumo implica una reducción de la utilidad del consumidor.

Curvas de indiferencia: casos especiales

PROBLEMA 2.7

Representar las curvas de indiferencia de un consumidor individual correpondiente a: (a) dos bienes perfectamente sustitutivos; (b) dos bienes perfectamente complementarios; (c) bienes preferidos y bienes neutrales; (d) preferencias normales (de libro de texto); (e) males; (f) bienes discretos, y (g) saciación global.

(a) Primero el caso de dos bienes sustitutivos y dos bienes perfectamente sustitutivos. Empecemos por el segundo caso; como ya sabemos por epígrafes anteriores, al consumidor le es completamente indiferente consumir cantidades iguales de los dos bienes. Por ejemplo, unidades de un bien, digamos, refrescos diferenciados tan sólo por la etiqueta. Por ello está dispuesto a sustituir un bien por otro a *tasa constante*, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 3$, $1 \cdot 1$, etc.; si la tasa es $1 \cdot 1$, claramente lo único que importa es la cantidad total, y no la composición numérica del total. En todos los casos la curva de indiferencia es una línea recta.

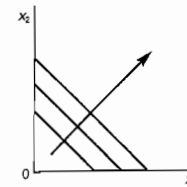


Figura 2.8

Si la relación de cambio es una a una, la curva de indiferencia no sólo es una línea recta, sino que forma un ángulo de 45° con los ejes (figura 2.8). El mapa de curvas de indiferencia estaría formado por rectas paralelas con la misma inclinación; nótese que también lo serán en el caso general. En el presente caso, la relación marginal de sustitución —pendiente de la curva de indiferencia, ahora recta— es constante e igual a 1 en valor absoluto.

$$RMS_2^1 = RMS_1^2 = \text{constante} = 1$$

Debe apreciarse también que la función de utilidad sería como la ya discutida por lo que la curva de indiferencia respectiva sería:

$$\bar{u} = x_1 + x_2$$

La pendiente de la curva de indiferencia (la RMS) en un punto, en este caso en todos los puntos al ser una recta, es:

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\bar{u}} = -1 \quad RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

La *dirección de crecimiento* del mapa de curvas de indiferencia sería como en el caso el normal o habitual, es decir, creciente hacia la derecha y hacia arriba (figura 2.8).

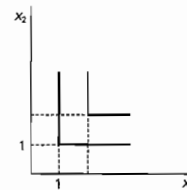


Figura 2.9

(b) En el caso de los bienes complementarios y complementarios perfectos, estos se combinan en proporciones fijas. Un ejemplo podría ser, zapatos⁶ del mismo diseño, horma, calidad y talla, uno del pie derecho y otro del izquierdo. Aunque su tratamiento se ajusta quizás más al caso de los bienes discretos, tratados en otra rúbrica. El poseer unidades adicionales de uno de los dos no reporta mayor utilidad al consumidor. Lógicamente no estaría dispuesto a intercambiar zapatos de un pie por unidades del otro pie, por que ello no le reportaría al consumidor incremento alguno de utilidad. Para el caso general, es decir, no necesariamente zapatos, sino otros dos bienes complementarios cualesquiera, el intercambio siempre tiene que ir en la relación, $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, etc., aunque la relación no tiene porque ser siempre como en el caso de los citados, puede ser menos rígida y no representar bienes complementarios perfectos.

Los bienes se consumen conjuntamente y en proporciones fijas; en este caso las dadas por las abscisas del vértice de la curva de indiferencia en las figuras 2.9 y 2.10. La relación marginal de sustitución, por su parte, es⁷ (casos límite, es como si no estuviera definida):

$$RMS_1^2 = 0 \quad \text{o} \quad RMS_2^1 = 0$$

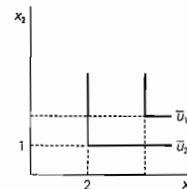
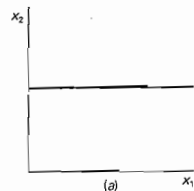


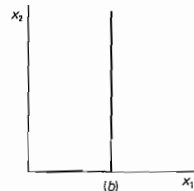
Figura 2.10

⁶ Es más difícil encontrar ejemplos que en el caso de los sustitutivos. El lector o lectora deberá probar a encontrar bienes estrictamente complementarios.

⁷ Si se toman las inversas serán infinito. En un caso, la derivada sería infinito y en el caso opuesto sería nula, pero en el punto concreto, la derivada no está definida por lo que le RMS tampoco lo está.



(a)



(b)

Figura 2.11

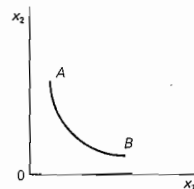


Figura 2.12

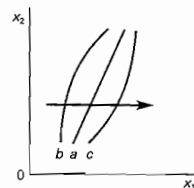


Figura 2.13

Si incrementamos la cantidad de bienes, el consumidor pasaría a una curva de indiferencia más elevada, siendo la dirección de movimiento hacia la derecha y hacia arriba en los mapas de indiferencia, al modo más habitual.

(c) *Caso en el que el consumidor siempre prefiere más de un bien con independencia de las cantidades consumidas de los otros.* Puede aplicarse a cada bien. En este caso se dice que los segundos son bienes *neutrales*⁸, o que las preferencias indican neutralidad respecto al que no se prefiere siempre más.

En la figura 2.11 (a), sólo le preocupa el 1 siendo neutral respecto al 2. Cuanto más posea del 1 mejor, pero la cantidad consumida x_2 le es indiferente⁹ (en (b) lo mismo, pero para el bien 1). En este caso $RMS_1^2 = \infty$, en todo su recorrido.

(d) *Preferencias normales* (de libro de texto). Normales, monótonas, y estrictamente convexas. La RMS varía a lo largo de la curva. La RMS es negativa, y la curva de indiferencia decreciente y estrictamente convexa. Recuerdese que cambia convencionalmente el signo, se le antepone un signo menos para que resulte positiva. En la figura 2.12 y en A la pendiente es elevada, ya que el consumidor dispone de mucho x_2 y poco de x_1 , por lo que está dispuesto a ceder mucho de x_2 a cambio de una unidad adicional de x_1 .

(e) *Un bien que es un mal para el consumidor.* Pero no un mal-mal, *sine qua non*, todo o nada, es decir, que el consumidor soporta demandar y consumir ese bien, siempre que obtenga compensación por hacerlo de otro bien-bien (las cantidades de los dos bienes crecen o decrecen, pero se mueven en la misma dirección a diferencia del caso normal.) Por ejemplo, que el mal vaya junto con otro bien-bien; es decir, exista *trade-off* o grado de sustitución o compensación del bien al mal. La curva de indiferencia es ahora *creciente* (figura 2.13).

Las cantidades adicionales del mal x_2 deben ser compensadas por cantidades del bien: proporcionales (caso a); cada vez mayores y menores en los casos (b) y (c). La RMS_1^2

es positiva y creciente, $RMS_1^2 = \frac{dx_2}{dx_1} > 0$. Nótese que la dirección de cambio del mapa

de curvas de indiferencia es hacia la derecha, y, en consecuencia, en este caso, hacia abajo.

(f) *Bienes discretos.* Los bienes discretos son aquellos que, a diferencia del caso habitual, no son *divisibles* infinitesimalmente, y necesariamente se consumen en cantidades *enteras*; pueden ser discretos los dos bienes a representar o uno discreto y uno continuo; en todo caso las curvas de indiferencia serán discontinuas, y también lo serán las combinaciones de bienes. La apreciación de si este es un caso más realista que el habitual o normal de libro de texto, es decir, si los bienes del mundo real son divisibles o no el sentido tradicional, se deja al lector. En la figura 2.14, el bien uno se obtiene en unidades enteras y el dos es completamente divisible; las «curvas» unen los «puntos» indiferentes. A lo largo de las verticales de trazos se encuentran las combinaciones al menos tan deseadas como una dada.

⁸ En cierto modo, son un caso de saciación parcial respecto al bien correspondiente.

⁹ Igual que ocurría con los complementarios; si se toman sus inversas, obviamente las RMS serán ahora cero.

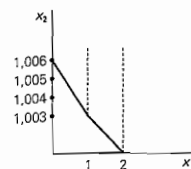


Figura 2.14

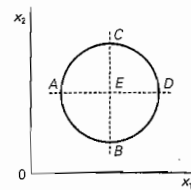


Figura 2.15

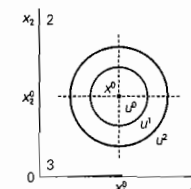


Figura 2.16

(g) *Saciación global* (respecto a los dos bienes). El punto de saciación es E, en la figura 2.15. El análisis se aprecia mejor, si estudiamos las partes del gráfico por separado:

- Cuadrante AEB. Las curvas de indiferencia son normales, decrecientes y estrictamente convexas.
- Cuadrante AEC. x_2 es un mal para una cantidad de x_1 ; si se consume más de x_2 la utilidad disminuye.
- Cuadrante BED. Igual que el anterior por el mismo razonamiento, sólo que a tasa decreciente.
- Cuadrante CED. Ambos bienes son males, respecto al punto de saciación.

Al punto, combinación de bienes, E, se le llama *punto de saciación* o *bliss-point*. Esa combinación es la óptima en términos de las preferencias, y cuanto más cercano se esté a ella (curva de indiferencia), se estará mejor e inversamente. En el caso de saciación, como ya sabíamos desde que discutimos los axiomas, las curvas de indiferencia son *cerradas*. Las curvas de indiferencia más alejadas del óptimo u_1, u_2 en la figura 2.16, rinden *menor* utilidad. Para aumentar la utilidad es necesario acercarse a dicho punto, deshacerse de bienes-males. Los cuadrantes 1 y 3 indican pendientes negativas, y el consumidor tiene mucho en el 1 y poco en el 3. En A los dos son bienes, pero dispone poco de ambos, respecto al punto de saciación. Si se tiene mucho es un mal. Si se tiene mucho de los dos, son males los dos.

Debe apreciarse que, $u^0 < u^1 < u^2$, contrariamente al caso habitual. Tiene más de los dos, luego tiene un índice de utilidad *menor* en este caso. En A los dos son bienes, pero tiene poco de ambos bienes, respecto al punto de saciación¹⁰.

Existen otros tipos y clasificaciones varias de las curvas de indiferencia: monótonas, no saciables de buen comportamiento (monótonas y convexas), convexas (RMS decreciente), cóncavas (combinaciones indeseadas de bienes), cuasi-lineales (las curvas de indiferencia en el mapa son desplazamientos verticales las unas de las otras), etc. De ellas, una de las más utilizadas es la que representa preferencias (curvas de indiferencia) *paralelas*, también conocidas como preferencias cuasi-lineales, o casi lineales, o incluso parcialmente lineales. Todas ellas se estudiarán en los ejercicios posteriores.

Funciones de demanda correspondientes a bienes sustitutivos y complementarios, neutrales y males

PROBLEMA 2.8

Halle funciones de demanda correspondientes a: (1) bienes perfectamente sustitutivos; (2) bienes complementarios y perfectamente complementarios; (3) neutrales y males.

Ya se ha discutido en problemas anteriores que al ser los bienes sustitutivos, si el precio de uno es mayor que del otro, la demanda del primero será cero; para precios iguales, la

¹⁰ Nótese, sin pérdida de generalidad, que los subíndices son indicadores de utilidad y no indican las derivadas parciales.

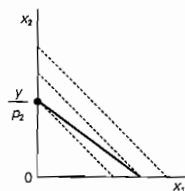


Figura 2.17

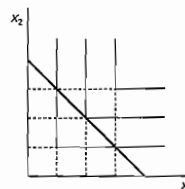


Figura 2.18

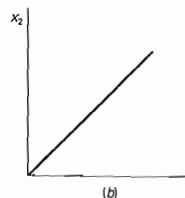
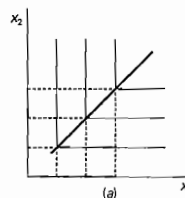


Figura 2.19

demanda queda indeterminada entre cero y el máximo potencial de demanda de cada uno de los dos (la renta dividida por el precio correspondiente), y ; si el precio de un bien es inferior al del otro, su demanda será la máxima potencial definida por los valores de la renta y el precio correspondiente, ya que no demandará cantidad alguna del otro bien.

En los sustitutivos perfectos se demandará entonces el de precio más bajo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que sea el bien 2, por lo que:

$$p_1 x_1 = 0 \quad p_2 x_2 = y$$

de donde $x_2 = \frac{y}{p_2}$. Y análogamente para el 1; por ello la curva de demanda es gráficamente como la de la figura 2.17. Si el precio fuera igual —por casualidad— entonces la renta se distribuye en función de los precios entre los dos bienes por lo que su demanda varía entre cero y el máximo potencial $\left(\frac{y}{p_2}\right)$. Si su precio fuera superior al del 1, su demanda sería nula. Análogamente, y de forma simétrica para el 1.

En el caso de complementarios perfectos por discusiones anteriores se aprecia que las cantidades demandadas de los dos bienes tienen que ser iguales (o crecer/decrecer a la misma tasa *caeteris paribus*) por lo que, en las unidades adecuadas, es decir, según sean complementarios perfectos o no:

$$x_1 = x_2 = x$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 x + p_2 x = x(p_1 + p_2) = y$$

y despejando:

$$x = \frac{y}{p_1 + p_2}$$

es decir, las cantidades son iguales, y dependen de los parámetros como predice la teoría, pero en este caso de un modo peculiar, positivamente de la renta y negativamente de la suma de los dos precios. Su representación (figura 2.18) es una curva de 45° (para que las cantidades sean iguales), con independencia de cuales sean los precios, siendo la cantidad concreta, la determinada por la función, en este caso única.

Neutrales y males. Aquí los neutrales y los males son iguales, en el sentido de que no se demandan. Sólo se demanda el bien deseado o bien-bien. Por lo que se convierten en un caso de bienes sustitutivos, y no se demandarán (se supone que las funciones de utilidad son separables en el sentido ya mencionado). Se demandará el otro bien-bien, y su demanda será el máximo potencial, y/p , siendo p el precio de este último.

Alternativamente si se demandara de un bien neutral una cantidad mínima determinada, una vez cubierta esta, la cantidad del bien-bien se llevaría hasta su máximo potencial.

Curvas de Engel para bienes complementarios, sustitutivos, preferencias homotéticas, funciones Cobb-Douglas, y cuasi-lineales

PROBLEMA 2.9

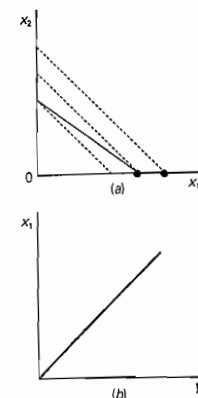


Figura 2.20

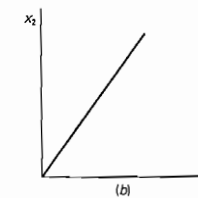
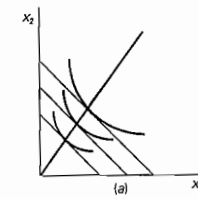


Figura 2.21

Establezca las curvas de Engel para demandas de bienes complementarios, sustitutivos, funciones Cobb-Douglas, y paralelas o cuasi lineales.

- Complementarios.** Para simplificar complementarios perfectos. Por el análisis de ejercicios anteriores, se aprecia que la curva *renta-consumo* es una línea recta creciente, las curvas de indiferencia forman ángulos rectos, el equilibrio se produce en los vértices, y la *curva de Engel* es una línea recta creciente con pendiente $(p_1 + p_2)$. En efecto, dados los equilibrios ya conocidos, su representación aparece en la figura 2.19, (b) deducida de la (a). Nótese que la curva de Engel se establece en el plano x_2 - y en este caso.
- Sustitutivos.** También perfectos, sin pérdida de generalidad; su curva *renta-consumo* coincide con el eje del bien 1 (figura 2.20), y la curva de Engel será una recta creciente con pendiente p_1 . Análogamente para el 2.
- Preferencias homotéticas o proporcionales.** Hay casos, en cambio, en los que las funciones no son lineales en la renta: todos los casos de *bienes de lujo*, por definición, no lo son (las demandas crecen a un ritmo más que proporcional al crecimiento de la renta); los *bienes de primera necesidad* tampoco, por una razón similar (crecimiento menos que proporcional). El caso de demanda-renta con elasticidad igual a uno implica, sin embargo, crecimientos proporcionales de ambas variables. En este caso, aún, la curva de Engel es una *recta* creciente.
- Preferencias homotéticas** son aquellas en las que las demandas de los dos bienes mantienen una relación constante, al igual que la mantienen en los casos de bienes complementarios, bienes sustitutivos y las preferencias Cobb-Douglas. En todos estos casos, la curva (recta) de Engel pasa por el origen. Como los precios no varían por definición, los puntos de corte de las rectas de balance para diversas rentas cortarían a las curvas de indiferencia de las del mapa que representa las preferencias del consumidor a lo largo de un rayo vector, indicando proporcionalidad de las cantidades demandadas de ambos bienes, cualesquiera que sea el incremento de renta (figura 2.21). Debe apreciarse que ello es lo mismo que suponer que el efecto de la renta, es decir, el efecto renta, produce un efecto muy sencillo en el sentido de proporcional.
- Preferencias Cobb-Douglas.** Las funciones son obviamente, lineales en la renta para precios dados, y crecen o decrecen, proporcionalmente con ella. En efecto, ya hemos apreciado repetidamente, que las funciones son del tipo:

$$x_1 = \frac{a}{(a+b)} \frac{y}{p_1} \quad x_2 = \frac{b}{(a+b)} \frac{y}{p_2}$$

por lo que la linealidad en la renta se aprecia directamente. Las pendientes de las curvas de Engel son del tipo:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{a}{(a+b)} \frac{1}{p_1} \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{b}{(a+b)} \frac{1}{p_2}$$

lo que para precios dados, indica constancia de las mismas. Para el caso de $u = x_1 x_2$ serían las pendientes respectivamente $\frac{1}{2} p_1$, $\frac{1}{2} p_2$.

Equilibrio

PROBLEMA 2.10

Dada la función de utilidad (Cobb-Douglas) $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, halle las utilidades marginales, la relación marginal de sustitución y las funciones de demanda.

Calculando las derivadas parciales (utilidades marginales):

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{1/2} > 0$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2} x_2^{-1/2} x_1^{1/2} = \frac{x_1^{1/2}}{2x_2^{1/2}} > 0$$

ambas son positivas. Por otro lado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4} x_1^{-3/2} x_2^{1/2} < 0$$

es decir, la utilidad marginal es decreciente. La relación marginal de sustitución es fácil de obtener, sin más que sustituir:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) x_1^{-1/2} x_2^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}\right) x_2^{-1/2} x_1^{1/2}} = \frac{x_2^{1/2} x_2^{1/2}}{x_1^{1/2} x_1^{1/2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

pero, como sabemos por teoría que debe cumplirse $RMS_1^2 = \frac{p_1}{p_2}$:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

y multiplicando:

$$p_2 x_2 = p_1 x_1$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

PROBLEMA 2.11

$$y = p_2 x_2 + p_1 x_1 = 2p_2 x_2 = 2p_1 x_1$$

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \quad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

que son las funciones de demanda. Debe apreciarse que las demandas no son totalmente generalizadas, ya que la de cada bien depende de la renta y, tan sólo, del precio del propio bien, y no del precio de los demás bienes (en este caso del otro bien).

Dada la función de utilidad $u = x_1^2 x_2^2$, halle e interprete las utilidades marginales respecto a los dos bienes y sus variaciones. Compárelas con las del Problema anterior; halle también la relación marginal de sustitución y las funciones de demanda, y compárelas asimismo.

Sin más que derivar, obtenemos las utilidades marginales:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 x_2^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_2 x_1^2$$

ambas positivas. El crecimiento o decrecimiento, como ya sabemos, viene indicado por la derivada segunda, por ejemplo, respecto al bien 1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 2x_2^2 > 0$$

la utilidad marginal es *creciente*, por tanto. Debe apreciarse que la función de utilidad es igual a la del Problema anterior elevada a 4 (o dos veces al cuadrado) Luego es una transformación monótona de aquella. Por otro lado:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{2x_1 x_2^2}{2x_2 x_1^2} = \frac{x_2}{x_1}$$

pero como $RMS_1^2 = \frac{p_1}{p_2}$, por el procedimiento ya conocido:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$p_2 x_2 = p_1 x_1$$

PROBLEMA 2.12

$$y = p_2x_2 + p_1x_1 = 2p_2x_2 = 2p_1x_1$$

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \quad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

que son idénticas a las del problema anterior, con todas las implicaciones e interpretaciones. Nótese que hemos obtenido, en ambos casos, las funciones de demanda sin el recurso a la función auxiliar de Lagrange, e incluso adelantándonos a la discusión del equilibrio del consumidor, aspecto que discutimos en el siguiente problema.

Dada la función de utilidad, $u = x_1x_2$, hallar el equilibrio del consumidor individual y las funciones de demanda normales o marshallianas.

Formando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = x_1x_2 + \lambda(y - p_1x_1 - p_2x_2)$$

y derivando, se obtienen las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = y - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

y despejando, por ejemplo:

$$x_1 = \lambda p_2 \quad \lambda = \frac{x_1}{p_2}$$

que sustituida en la primera ecuación de las condiciones de primer orden:

$$x_2 - \left(\frac{x_1}{p_2}\right)p_1 = 0$$

permite obtener:

$$x_2 = \frac{x_1}{p_2}p_1 \quad p_2x_2 = p_1x_1$$

Sustituyendo ahora en la restricción presupuestaria:

$$y - 2p_1x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{y}{2p_1}$$

función de demanda para el bien 1; y análogamente para el bien 2:

$$x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

De donde hemos vuelto a obtener las funciones de demanda, pero a partir de un método más general (se aplica para cualquier número de bienes) que en los dos Problemas anteriores. Estas son las funciones de demanda normales o marshallianas que dependen del precio y la renta. El multiplicador de Lagrange, que se puede demostrar es igual a la utilidad marginal de la renta (no lo demostramos aquí¹¹), es en este caso:

$$\lambda = \frac{x_1}{p_2} = \frac{\frac{y}{2p_1}}{p_2} = \frac{y}{2p_1p_2}$$

Sustituyendo las cantidades demandadas en la función de utilidad, se puede obtener el valor del índice de utilidad, dado que los precios y la renta, se suponen conocidos:

$$u = x_1x_2 = \frac{y}{2p_1} \frac{y}{2p_2} = \frac{y^2}{4p_1p_2}$$

PROBLEMA 2.13

Sea la función de utilidad $u = \frac{1}{4}x_1x_2$ halle las funciones de demanda y el índice de utilidad.

Por el procedimiento de problemas anteriores:

$$\text{máx } \frac{1}{4}x_1x_2$$

$$\text{s.a. } p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

las condiciones de primer orden son, directamente:

$$u_1 = \frac{1}{4}x_2$$

$$u_2 = \frac{1}{4}x_1$$

¹¹ Véase, por ejemplo, Ahijado (1994).

de donde:

$$\frac{\frac{1}{4}x_2}{p_1} = \frac{\frac{1}{4}x_1}{p_2}$$

y

$$p_2x_2 = p_1x_1$$

o

$$2p_1x_1 = 2p_2x_2 = y$$

por lo que las funciones de demanda son:

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \quad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

En este caso, el parámetro $1/4$ es un multiplicador que varía el valor del índice de utilidad, para unas x_1 y x_2 dadas. No altera estas últimas ni, en consecuencia, el producto x_1x_2 .

Variaciones en los precios sólo: efectos sustitución y renta

PROBLEMA 2.14

Sea un consumidor cuya función de utilidad viene descrita por $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ quien se enfrenta a unos precios paramétricos $p_1 = 3$, $p_2 = 4$ y cuya renta ha pasado de 90 unidades de cuenta a 180, obtenga geoméricamente la curva renta-consumo y explicita si es creciente o decreciente. Discuta el carácter normal o inferior de ambos bienes.

De las condiciones de primer orden del problema de óptimo, sabemos que se halla:

$$RSM_1^1 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

que en este caso es:

$$\frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_2^{-1/2}x_1^{1/2}} = \frac{3}{4}$$

$$4x_2 = 3x_1 \quad x_2 = \frac{3}{4}x_1$$

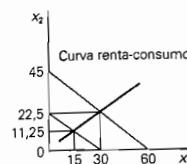


Figura 2.22

PROBLEMA 2.15

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 90 = 3x_1 + 4x_2$$

y para la expresión de x_2 :

$$3x_1 + 4\frac{3}{4}x_1 = 90$$

$$x_1 = 15$$

Sustituyendo ahora en x_2 :

$$x_2 = \frac{3}{4}x_1 = 11,25$$

Cuando la renta pasa a 180:

$$x_1 = \frac{180}{6} = 30$$

$$x_2 = 22,5$$

Como cuando aumenta la renta, aumenta el consumo de ambos bienes, la curva de renta-consumo es creciente.

Como cuando aumenta la renta se produce un aumento en el consumo de ambos bienes, se puede afirmar que ambos son normales.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$; $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$ cuando el precio del bien x_1 disminuye en una unidad el efecto renta a la Slutsky es:

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15$$

$$15x_1 + x_2 = 121$$

y permiten hallar las cantidades de equilibrio al modo habitual:

$$x_1 = 6 \quad x_2 = 31$$

En el efecto sustitución de Slutsky llevamos a cabo una acomodación de la renta tal que a los nuevos precios podamos adquirir la combinación inicial de bienes, lo cual nos permite saber la magnitud de esta acomodación. Los nuevos precios son $p_1 = 14$ y

$p_2 = 1$; la renta será $14 \cdot 6 + 31 = 115$. La combinación de bienes en donde el consumidor se situará nos vendrá dado por la resolución del sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_1 + x_2 = 115$$

Con lo que:

$$x_1 = 6,07$$

y el efecto sustitución:

$$E = 6,07 - 6 = 0,07$$

El efecto total se obtiene como:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_1 + x_2 = 121$$

De donde:

$$x_1 = 6,28$$

$$ET = 6,28 - 6 = 0,28$$

y el efecto renta por diferencia:

$$ER = ET - ES = 0,28 - 0,07 = 0,21$$

PROBLEMA 2.16

Sea una función de demanda de la familia Cobb-Douglas, $x_1 = \frac{y}{2p_1}$, suponga que la renta es 100 uu.cc. y que p_1 es 5 uu.cc. Hallar x_1^0 . Suponga después que el precio del bien 1 pasa a ser 2 uu.cc., entonces ¿ x_1^1 será? Calcule el efecto total y el efecto sustitución.

El valor de la demanda, con los datos propuestos es:

$$x_1^0 = \frac{y}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10$$

y, como el precio cae a 2, la demanda se reajusta a:

$$x_1^1 = \frac{y}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 2} = 25$$

El efecto total de la variación en el precio es.

$$x_1^1 - x_1^0 = 25 - 10 = 15$$

La renta ajustada para compensar el efecto de la caída en el precio, con p_2 constante, es:

$$\Delta y = x_1 \Delta p = 10(2 - 5) = -30$$

por lo que la renta ajustada es la inicial más—menos la compensación:

$$y^1 = y^0 + \Delta y = 100 - 30 = 70$$

y la demanda correspondiente a esa renta, y al nuevo precio es:

$$x_1^2 = \frac{y^1}{2p_1} = \frac{70}{2 \cdot 2} = 17,5$$

El efecto sustitución se calcula, por tanto, como la diferencia entre la cantidad demandada renta-compensada y la inicial:

$$x_1^2 - x_1^0 = 17,5 - 10 = 7,5$$

PROBLEMA 2.17

Si la recta de balance de un consumidor es:

$$y = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 100 = 4 \cdot 15 + 2 \cdot 20$$

y el precio del bien 1 cae un 25%, ¿cuál es el nuevo gasto nominal? ¿cuál será la compensación por el método de Slutsky?

La combinación inicial de demanda de los dos bienes es (15,20) respectivamente, y la nueva recta de balance:

$$3 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 45 + 40 = 85$$

Luego al consumidor se le deben compensar 15 unidades monetarias negativas (100 - 85).

PROBLEMA 2.18

Dada la función de utilidad $u = 2 \log x_1 + 4 \log x_2$, donde x_1 y x_2 son bienes. Si denominamos y a la renta, ¿entonces $\frac{du}{dy}$ es?

La función auxiliar es:

$$S = 2 \log x_1 + 4 \log x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - y)$$

y las condiciones de primer orden:

$$\frac{2}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{4}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - y = 0$$

de donde:

$$\lambda = \frac{2}{x_1 p_1} = \frac{4}{x_2 p_2}$$

multiplicando:

$$2x_2 p_2 = 4p_1 x_1$$

$$x_2 p_2 = 2p_1 x_1$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = 3x_1 p_1$$

obtenemos las funciones de demanda:

$$x_1 = \frac{y}{3p_1}$$

$$x_2 = \frac{2y}{3p_2}$$

que sustituidas ahora en la expresión para λ .

$$\lambda = \left(\frac{du}{dy} \right) = \frac{2}{x_1 p_1} = \frac{6}{y}$$

Curvas precio-consumo

PROBLEMA 2.19

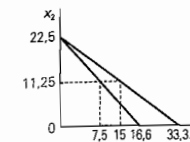


Figura 2.23

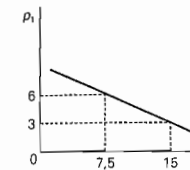


Figura 2.24

Sea un consumidor cuya función de utilidad viene descrita por $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, quien se enfrenta a unos precios paramétricos, $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, y cuya renta es de 90 unidades de cuenta. Si el precio del bien 1 pasa a ser 6 unidades, obtenga las cantidades consumidas, la curva precio-consumo, y establezca la curva de demanda.

Sabemos por el problema 14, que comparte datos iniciales con este, que cuando los precios y la renta son los iniciales, las cantidades de equilibrio son:

$$x_1 = 15 \quad y \quad x_2 = 11,25$$

Si el precio del bien 1 pasa a ser de 6 unidades, entonces, la restricción presupuestaria cambia a:

$$y = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 6x_1 + 4x_2 = 90$$

de donde, por el procedimiento ya bien conocido, las nuevas cantidades de equilibrio son:

$$x_1 = 7,5 \quad x_2 = 11,25$$

Caracterización de los bienes: complementarios y sustitutivos

PROBLEMA 2.20

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1 x_2$, caracterice a los bienes en complementarios o sustitutivos brutos, o independientes.

Sabemos que a este tipo de funciones, y sus transformaciones monótonas, le corresponden funciones de demanda del tipo:

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \quad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

A simple vista ya se observa la independencia. Aplicando la elasticidad cruzada de demanda se corrobora la observación:

$$E_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \frac{p_2}{x_1} = 0$$

ya que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0$$

PROBLEMA 2.21

Sabemos que, en el caso general, si E_{ij} mayor o menor que cero, serán respectivamente sustitutivos o complementarios brutos. Nótese, por último, que la elasticidad directa es:

$$E_{11} = -\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = -\frac{-2y}{(2p_1)^2} \frac{p_1}{x_1} = \frac{y}{2p_1} \frac{1}{x_1} = 1 > 0$$

Mostrar que x_1 y x_2 no pueden ser a la vez bienes inferiores.

Un bien es inferior cuando:

$$\frac{dx}{dy} < 0$$

Por otra parte tenemos:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$$

considerando a p_1 y p_2 constantes:

$$dy = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$$

$$1 = p_1 \frac{dx_1}{dy} + p_2 \frac{dx_2}{dy}$$

Si $\frac{dx_1}{dy}$ y $\frac{dx_2}{dy}$, fuesen ambas menores que cero nunca la suma de los dos componentes del segundo miembro de la ecuación anterior daría un valor positivo (ya que los precios son positivos axiomáticamente). Luego no pueden ser ambos bienes inferiores.

Propiedades de las funciones de demanda

PROBLEMA 2.22

Obtenga e interprete las funciones de demanda asociadas a la función de utilidad, $u = \ln x_1 + x_2$.

La función se comportaría simétricamente para el bien 2 si la función fuese:

$$u = x_1 + \ln x_2$$

sólo que la manera en que miramos los ejes coordenados, con el bien 1 en el eje de abscisas, invita a llevar a cabo el análisis del bien 1.

Formando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = \ln x_1 + x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - y)$$

las condiciones de primer orden son, en este caso:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - y = 0$$

De donde es fácil, por el método habitual, obtener:

$$\frac{1/x_1}{1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{x_1} \quad x_1 = \frac{p_2}{p_1}$$

La cantidad demandada del bien 1 depende, por tanto, de los dos precios, pero no depende, es decir, es independiente de, la renta, luego no presenta efectos renta; del precio del primero de forma inversa como es de esperar, y del segundo de forma directa. Sustituyendo ahora en la restricción presupuestaria ¹²:

$$p_2 + p_2 x_2 = p_2(1 + x_2) = y$$

por lo que, despejando:

$$1 + x_2 = \frac{y}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{y}{p_2} - 1$$

Se aprecia que x_2 depende de su propio precio de forma inversa, y de forma directa (compárese por ejemplo, con las funciones de demanda que surgen de una función de utilidad Cobb-Douglas estricta) Y, además, como la función de utilidad es del tipo Cobb-Douglas es también independiente del otro precio.

Gráficamente (figura 2.25) la recta renta-consumo, puntos de tangencia de las curvas de indiferencia y las rectas de balance —que a su vez es una curva de Engel implícita— es vertical. La curva de Engel para el bien 1 es completamente vertical a su eje, es decir, el efecto renta es nulo; un aumento en la renta no produce aumento alguno en la cantidad demandada de ese bien. Lo cual es aplicable a numerosos bienes de los habitualmente demandados en el mundo real, para cada tramo de renta. El bien uno es constante, y el 2 aumenta proporcionalmente, es decir, la función de demanda es lineal en la renta.

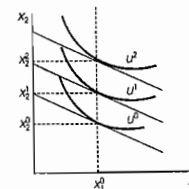


Figura 2.25

¹² Para este tipo de preferencias, es útil interpretar el bien 2 como renta a consumir en otros bienes, de modo que cuando aumenta la renta no necesariamente aumenta la cantidad demandada del bien bajo análisis.

PROBLEMA 2.23

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 3)(x_2 - 2)(x_3 - 1)$, establecer las relaciones de complementariedad o sustitución entre los bienes x_1 y x_2 .

Obtenemos las funciones de demanda al modo habitual de las condiciones de primer orden de máximo:

$$\frac{(x_2 - 2)(x_3 - 1)}{(x_1 - 3)(x_3 - 1)} = \frac{p_1}{p_2} \quad \frac{(x_2 - 2)(x_3 - 1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 1)} = \frac{p_1}{p_3}$$

$$p_1 x_1 - p_2 x_2 = 3p_1 - 2p_2 \quad p_1 x_1 - p_3 x_3 = 3p_1 - p_3 \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = y$$

$$x_1 = \frac{y + 6p_1 - 2p_2 - p_3}{3p_1} \quad x_2 = \frac{y - 3p_1 + 4p_2 - p_3}{3p_2} \quad x_3 = \frac{y - 3p_1 - 2p_2 + 2p_3}{3p_3}$$

El criterio que se aplica para conocer las relaciones entre los bienes es estudiar el signo del efecto sustitución cruzado:

- Si $S_{12} = S_{21} > 0$ son sustitutivos.
- Si $S_{12} = S_{21} < 0$ son complementarios.
- Si $S_{12} < 0$ son complementarios brutos.

Por lo que es preciso hallar:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{D_{21}}{D} + x_2 \frac{D_{31}}{D} \quad \text{en las que} \quad \frac{D_{21}}{D}$$

es igual al efecto S_{12} :

$$S_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + x_2 \frac{\partial x_1}{\partial y} \quad \text{ya que} \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = -\frac{D_{31}}{D}$$

Con los datos del problema:

$$S_{12} = -\frac{x_2 - 2}{3p_1} + x_2 \left(\frac{1}{3}\right)p_1 \quad \text{y de aquí} \quad S_{12} = \frac{x_2 - 2}{3p_1}$$

La relación entre los bienes depende del valor que adopte x_2 . Si $x_2 > 2$, los bienes serán sustitutivos; y si $x_2 < 2$, los bienes serán complementarios.

Elasticidades

PROBLEMA 2.24

Los gustos de un sujeto se conocen por la función índice de utilidad: $u = \ln [(x_1 + 2)(x_2 + 10)]$. Hallar la ecuación que exprese la demanda del bien x_1 en función del precio y determinar para qué intervalos de éste la

demanda es normal o anormal, rígida o elástica, para valores de $y = 30$ y $p_2 = 1$.

La expresión de la ley de las utilidades marginales, condición de primer orden de máximo:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

en este caso y para $p_2 = 1$ adopta la forma siguiente:

$$\frac{\frac{1}{(x_1 + 2)(x_2 + 10)}(x_2 + 10)}{\frac{1}{(x_1 + 2)(x_2 + 10)}(x_1 + 2)} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 + 10 = x_1 p_1 + 2p_1$$

$$p_1 x_1 - x_2 = 10 - 2p_1$$

Por otra parte la ecuación de balance es:

$$x_1 p_1 + x_2 = 30$$

Y del sistema que forman las dos ecuaciones así halladas, se obtiene la función de demanda:

$$x_1 = \frac{20 - p_1}{p_1}$$

Su elasticidad es:

$$E_{11} = \frac{p_1}{20 - p_1} \left(-\frac{20}{p_1^2} \right) = \frac{-20}{20 - p_1}$$

Se aprecia que la elasticidad es negativa y mayor en valor absoluto que la unidad para precios inferiores a 20. Como para precios superiores no está definida la demanda, puede decirse que la demanda se comporta como normal y elástica para, $0 < p_1 < 20$.

PROBLEMA 2.25

Dada la función de demanda $x = \frac{60}{p + 4} - 5$, calcular su elasticidad y comprobar que ésta crece al crecer el precio.

La elasticidad de la demanda con respecto al precio en valor absoluto, es decir, ignorando el signo convencional:

$$E = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

En este caso concreto al ser:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-60}{(p+4)^2}$$

se convierte en:

$$E = \frac{p}{\frac{60}{p+4} - 5} \left[\frac{-60}{(p+4)^2} \right] = \frac{-12p}{-p^2 + 4p + 32}$$

La elasticidad aparece como una función del precio. Para valores de los precios situados entre 0 y 8 ($0 < p < 8$), la elasticidad es negativa y la demanda es normal. Para cantidades superiores a 8 la demanda es positiva. La variación de la elasticidad al variar el precio se puede estudiar a través del valor de derivada de la elasticidad con respecto al precio.

Los gastos de los consumidores como ingresos de los productores

PROBLEMA 2.26

La demanda de localidades de un espectáculo público se relaciona con los precios según la fórmula:

$$p = \left(a - \frac{x}{b} \right)^2 \quad a > 0, b > 0$$

El local, que tiene una capacidad máxima para 150 personas, está vacío en su tercera parte, cuando la entrada cuesta 100 unidades de cuenta; y en sus cuatro quintas partes, cuando la entrada cuesta 2.025, ¿para qué precio y cantidad la recaudación total es máxima?

- (a) $x = 40, p = 1.600$
- (b) $x = 20, p = 1.600$
- (c) $x = 40, p = 1.800$
- (d) $x = 20, p = 1.800$

RESPUESTA: (a) En primer lugar es preciso determinar las constantes a y b , para lo que se sabe que cuando $p = 100$, $x = \left(\frac{2}{3}\right)150 = 100$ y que para $p = 2.025$, $x = \left(\frac{1}{5}\right)150 = 30$. Luego el sistema que queda es:

$$100 = \left(a - \frac{x}{b} \right)^2 = a^2 - \frac{200a}{b} + \frac{10.000}{b^2}$$

$$100b^2 = a^2b^2 - 200ab + 10.000$$

$$b^2(a^2 - 100) - 200ab + 10.000 = 0$$

$$2.025 = \left(a - \frac{x}{b} \right)^2 = a^2 - \frac{60a}{b} + \frac{900}{b^2}$$

$$2.025b^2 = a^2b^2 - 60ab + 900$$

$$b^2(a^2 - 2.025) = 60ab + 900 = 0$$

Las soluciones son:

$$a = 60 \quad b = 2$$

La función de demanda es, por tanto:

$$p = \left(60 - \frac{x}{2} \right)^2 \quad 0 < x < 120$$

Para calcular la máxima recaudación puede hacerse por el método de igualar la elasticidad igual a 1 o derivando la expresión del gasto respecto del precio e igualando a cero y despejar la cantidad, es decir:

$$I = px = x \left[\left(60 - \frac{x}{2} \right)^2 \right] \text{ por lo que } I_m = 3.600 - 120x + \left(\frac{3}{4} \right)x^2 = 0$$

Con soluciones en x , 120 y 40, de las que sólo es válida $x = 40$, ya que para $x = 120$, $p = 0$ y el ingreso nulo.

PROBLEMA 2.27

Dada una función de demanda de mercado como $x = Ap^{-\epsilon}$ establezca la variación de los ingresos totales cuando el precio aumenta (disminuye) a partir de uno inicial.

La función es del tipo elasticidad-constante. Para apreciar el movimiento de la variación solicitada es conveniente multiplicar ambos miembros por p :

$$px = Ap^{-\epsilon+1}$$

que nos da directamente los ingresos totales en función del precio y de los parámetros. Operando:

$$IT = Ap^{-\epsilon+1} = \frac{A}{p^{\epsilon-1}}$$

lo que indica que la respuesta dependerá del valor de E . Si es mayor que la unidad aumentos (disminuciones) en p implican reducciones (aumentos) en I .

PROBLEMA 2.28

Sea la función de demanda de elasticidad constante $x = \frac{ay^c}{p^b}$, siendo a , b y c parámetros, y donde la elasticidad precio es igual para cualquier valor de p e y , obtener la elasticidad-renta.

Si escribimos la función como:

$$x = ap^{-b}y^c$$

y derivamos:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -bap^{-b-1}y^c = \frac{-b}{p}ap^{-b}y^c = \frac{-b}{p}x$$

por lo que:

$$E = -\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = (-)(-)\frac{b}{p}x \frac{p}{x} = b$$

que no depende ni del precio ni de la renta.

La elasticidad-renta es:

$$E_y = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{y}{x}$$

y como:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = cy^{c-1}ap^{-b} = \frac{c}{y}(ap^{-b}y^c) = \frac{c}{y}x$$

$$E_y = \frac{c}{y}x \frac{y}{x} = c$$

que tampoco depende de aquellas variables. Nótese que:

- (i) La función no es lineal, es más compleja, y quizá más realista.
- (ii) Indica que el efecto de las variaciones en el precio también depende de la renta, y análogamente, que el efecto de la renta sobre la demanda también depende del precio(s).
- (iii) Y –quizá más importante– es comparativamente fácil de estimar, especialmente en su forma logarítmica, que es lineal.

(Aunque debe apreciarse que en realidad es como la de las funciones Cobb-Douglas cuando $a = 1/2$.)

PROBLEMA 2.29

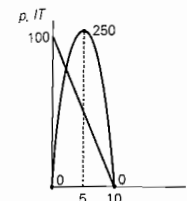


Figura 2.26

Sea la siguiente función de demanda $p = 100 - 10x$ hallar los gastos totales de los consumidores (ingreso totales de los productores), su gasto marginal (ingreso marginal de las empresas), y la elasticidad de la demanda clasificando los valores de la misma.

Debe observarse para comenzar que se trata de una función de demanda inversa, es decir en la que la cantidad aparece como variable independiente, y el precio la dependiente, contrariamente al caso directo más usual quizás, en la que dicha variable es la dependiente (y el precio la independiente). Como los gastos de los consumidores coinciden con los ingresos de los productores (empresas) nos referiremos a estos últimos, sin pérdida de generalidad:

Es ya fácil de establecer que la forma de la misma es ($IT = px$) (figura 2.26).

El ingreso total es $IT = px$, por lo que en este caso sin más que sustituir:

$$IT = (100 - 10x)x = 100x - 10x^2$$

y el ingreso marginal (lo que varía el ingreso total ante una variación de la cantidad demandada en una unidad):

$$I_m = 100 - 20x = 0$$

de donde:

$$100 - 20x = 0 \quad x = \frac{100}{20} = 5$$

Se sabe por la teoría que cuando el I_m es cero, el IT es máximo y la elasticidad de la demanda igual a 1. En efecto, cuando $x = 5$, $IT = px = 50 \cdot 5 = 250$, y:

$$E = \left(\frac{1}{\frac{dp}{dx}} \right) \frac{p}{x} = \frac{1}{10} \frac{50}{5} = 1$$

Preferencia revelada

PROBLEMA 2.30

Un consumidor registra los precios y las cantidades adquiridas de dos bienes en tres situaciones de mercado (tres configuraciones de precios), indicados por la siguiente tabla, donde los primeros subíndices denotan bienes y los segundos situaciones:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 40 \quad x_{21} = 60; \quad x_{12} = 60 \quad x_{22} = 30; \quad x_{13} = 80 \quad x_{23} = 20 \\ p_{11} &= 60 \quad p_{21} = 40; \quad p_{12} = 30 \quad p_{22} = 60; \quad p_{13} = 20 \quad p_{23} = 60 \end{aligned}$$

A los precios de la primera observación (60,40), el consumidor eligió las cantidades del par (40,60), siendo el gasto:

$$p_1 x_{11} + p_2 x_{21} = 60 \cdot 40 + 40 \cdot 60 = 4.800 \text{ uu.cc.}$$

A esos mismos precios las cantidades, y los gastos de los otros dos lotes serían:

$$p_1 x_{12} + p_2 x_{22} = 60 \cdot 60 + 40 \cdot 30 = 4.800 \text{ uu.cc.}$$

$$p_1 x_{13} + p_2 x_{23} = 60 \cdot 80 + 40 \cdot 20 = 5.600 \text{ uu.cc.}$$

De este análisis se desprende, que si bien el gasto de la tercera cesta a los precios vigentes resultaba superior, entre las otras dos cestas de mismo coste, el consumidor reveló preferida la primera, ya que la eligió.

(2) Repitiendo el análisis de los gastos de las tres cestas, ahora a los precios de la segunda y terceras observaciones respectivamente, se aprecia que:

$$p_{12} x_{11} + p_{22} x_{21} = 30 \cdot 40 + 60 \cdot 60 = 1.200 + 3.600 = 4.800$$

$$p_{12} x_{12} + p_{22} x_{22} = 30 \cdot 60 + 60 \cdot 30 = 1.800 + 1.800 = 3.600$$

$$p_{12} x_{13} + p_{22} x_{23} = 30 \cdot 80 + 60 \cdot 20 = 2.400 + 1.200 = 3.600$$

y

$$p_{13} x_{11} + p_{23} x_{21} = 20 \cdot 40 + 60 \cdot 60 = 800 + 3.600 = 4.400$$

$$p_{13} x_{12} + p_{23} x_{22} = 20 \cdot 60 + 60 \cdot 30 = 2.400 + 1.800 = 4.200$$

$$p_{13} x_{13} + p_{23} x_{23} = 20 \cdot 80 + 60 \cdot 20 = 1.600 + 1.200 = 2.800$$

En el segundo bloque revela preferido la segunda respecto a la tercera cesta, ya que implican el mismo gasto, pero eligió la segunda. En el tercer bloque, aunque reveló preferida a la tercera, en realidad no son comparables, dado que implican distintos gastos, y la elegida presenta el menor de ellos. Sin embargo, por transitividad, dado que eligió la primera frente a la segunda en el primer bloque, y la segunda respecto a la tercera en el segundo, la primera se reveló implícitamente preferida a la tercera. La decisión, por tanto, parece coherente.

PROBLEMA 2.31

Demuestre mediante preferencia revelada (para el caso de dos bienes) que el efecto sustitución debe ser siempre negativo.

Sean dos bienes x_1 y x_2 cuyos precios son p_1 y p_2 , en dos situaciones que llamaremos 0 y 1. Por la teoría de la preferencia revelada, sabemos que las dos siguientes situaciones no pueden ser ciertas simultáneamente:

$$p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0 > p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1$$

$$p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 > p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0$$

pero, si fuesen ciertas, ello implicaría que:

$$p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0 \leq p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1$$

$$p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \leq p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0$$

y sumando:

$$p_1^0 x_1^0 + p_1^1 x_1^1 \leq p_1^0 x_1^1 + p_1^1 x_1^0$$

por lo que ¹³:

$$(p_1^1 - p_1^0)(x_1^1 - x_1^0) \leq 0$$

Agregación a la demanda de mercado

PROBLEMA 2.32

Suponga dos consumidores cuyas funciones de utilidad sean $u(1) = 10x_1 x_2$ y $u(2) = 20x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, cuyas rentas respectivas son 100 y 120, siendo los precios de mercado 5 y 6; entonces ¿las cantidades demandadas individuales son (primer y segundo agente)?

Podríamos resolver el problema primero por partes, analizando el equilibrio para cada uno de los consumidores, y luego sumar. O discutirlo genéricamente, y aplicarlo luego a los datos del Problema. Veamos ambos procedimientos.

(A) El primer consumidor debe cumplir, como ya sabemos, la siguiente expresión:

$$RMS_1^2(1) = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$u_1(1) = 10x_2 \quad u_2(1) = 10x_1$$

ignorando ya el índice del consumidor:

$$\frac{10x_2}{10x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{6}$$

$$6x_2 = 5x_1$$

$$x_2 = \frac{5x_1}{6}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = 5x_1 + 5x_1 = 10x_1 = 100$$

$$x_1 = \frac{100}{10} = 10$$

$$x_2 = 8,3$$

¹³ Nótese que multiplicando los dos paréntesis: $p_1^1 x_1^1 - p_1^0 x_1^1 - p_1^0 x_1^1 + p_1^0 x_1^0 < 0$.

PROBLEMA 2.33

Al repetir el procedimiento obtenemos las cantidades demandadas por el segundo consumidor.

(B) El procedimiento genérico discurre de la siguiente forma. De maximizar la primera función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria, ya sabemos por Problemas anteriores, y al ser las funciones del tipo Cobb-Douglas, que se cumple:

$$x_{11} = \frac{y_1}{2p_1} \quad x_{12} = \frac{y_1}{2p_2}$$

y análogamente para el segundo consumidor:

$$x_{21} = \frac{y_2}{2p_1} \quad x_{22} = \frac{y_2}{2p_2}$$

Sería fácil ahora aplicar las fórmulas para los datos del Problema:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{y_1}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10 & x_{12} &= \frac{y_1}{2p_2} = \frac{100}{2 \cdot 6} = 8,3 \\ x_{21} &= \frac{y_2}{2p_1} = \frac{120}{2 \cdot 5} = 12 & x_{22} &= \frac{y_2}{2p_2} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10 \end{aligned}$$

Para los datos del problema anterior $u(1) = 10x_{11}x_{12}$ y $u(2) = 20x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2}$, $y_1 = 100$ e $y_2 = 120$ con $p_1 = 5$ y $p_2 = 6$, obtener las demandas de mercado de los dos bienes.

Podríamos resolver el problema primero por partes, analizando el equilibrio para cada uno de los consumidores, y luego sumar. O discutirlo genéricamente, y aplicarlo luego a los datos del problema. Veamos ambos procedimientos.

Sabemos que se cumple que:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{y_1}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10 & x_{12} &= \frac{y_1}{2p_2} = \frac{100}{2 \cdot 6} = 8,3 \\ x_{21} &= \frac{y_2}{2p_1} = \frac{120}{2 \cdot 5} = 12 & x_{22} &= \frac{y_2}{2p_2} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10 \end{aligned}$$

Por lo que, sumando:

$$\begin{aligned} x_1^M &= x_{11} + x_{21} = \frac{y_1}{2p_1} + \frac{y_2}{2p_1} = \frac{1}{2p_1} (y_1 + y_2) = \frac{1}{2 \cdot 5} 220 = 22 \\ x_2^M &= x_{12} + x_{22} = \frac{y_1}{2p_2} + \frac{y_2}{2p_2} = \frac{1}{2p_2} (y_1 + y_2) = \frac{1}{2 \cdot 6} 220 = 18,3 \end{aligned}$$

Repaso

PROBLEMA 2.34

El procedimiento, se puede apreciar, es de suma horizontal, es decir, suma de las cantidades respectivas demandadas por los consumidores, a los respectivos precios. Nótese que es como si, fuera un sólo consumidor que dispusiera de la renta de ambos. Obviamente se está utilizando un supuesto simplificador, que implica no prestar atención, entre otras cosas, a la distribución de la renta.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$ los precios de los bienes $p_1 = 15$, $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$ ¿en el equilibrio, la utilidad será?

La condición de equilibrio del consumidor será

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{sujeto a} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

de donde

$$\frac{(x_2 - 1)}{(x_1 - 4)} = \frac{15}{1} \quad 15x_1 - 60 = x_2 - 1 \quad x_2 = 15x_1 - 59$$

y sustituyendo en la recta de balance se tendrá que

$$\begin{aligned} p_1x_1 + 15x_1 - 59 &= 121 & 15x_1 + 15x_1 &= 180 \\ 30x_1 &= 180 & x_1 &= 6 & x_2 &= 31 \end{aligned}$$

combinación de bienes que proporciona al consumidor su máxima utilidad

$$u = (6 - 4)(31 - 1) = 60$$

PROBLEMA 2.35

Sea un consumidor cuya función de utilidad viene descrita por $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$, quien se enfrenta a unos precios paramétricos $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, y cuya renta es de 90 unidades, entonces ¿ x_1 y x_2 son?

De las condiciones de primer orden del problema de óptimo, sabemos que se halla:

$$RMS_1^u = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

que en este caso es:

$$\frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_2^{-1/2}x_1^{1/2}} = \frac{3}{4}$$

$$4x_2 = 3x_1 \quad x_2 = \left(\frac{3}{4}\right)x_1$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 90 = 3x_1 + 4x_2$$

y para la expresión de x_2 :

$$3x_1 + 4\left(\frac{3}{4}\right)x_1 = 90$$

$$x_1 = 15$$

Sustituyendo ahora en x_2 :

$$x_2 = \frac{3}{4}x_1 = 11,25$$

PROBLEMA 2.36

Para un consumidor cuya función de utilidad es $u = x_1x_2$ que se enfrenta a los siguientes datos de mercado: $y = 100$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, si el precio del primer bien pasa a ser 6 unidades, entonces, ¿ x_1 , antes y después de la variación en el precio, es?

Para el equilibrio inicial, que debemos tomar como referencia, se debe cumplir, como ya sabemos:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{3}$$

$$3x_2 = 5x_1$$

$$x_2 = \frac{5}{3}x_1$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 5x_1 + \frac{5}{3}3x_1 = 100$$

$$10x_1 = 100 \quad x_1 = 10$$

PROBLEMA 2.37

Si ahora p_1 pasa a ser 6, por el mismo método:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_2 = 2x_1$$

$$6x_1 + 3x_2 = 100$$

$$x_1 = 8,33$$

Con los datos del problema anterior $u = x_1x_2$, $y = 100$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, si el precio del primer bien pasa a ser 6 unidades, entonces, x_2 , antes y después de la variación del precio, es? ¿Y el índice de utilidad?

Para el equilibrio inicial, que debemos tomar como referencia, se debe cumplir, como ya sabemos:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{3} \quad 3x_2 = 5x_1 \quad x_2 = \frac{5}{3}x_1$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 5x_1 + \frac{5}{3}3x_1 = 100$$

$$10x_1 = 100 \quad x_1 = 10 \quad x_2 = 16,6$$

Si ahora p_1 pasa a ser 6, por el mismo método:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_2 = 2x_1$$

$$6x_1 + 3x_2 = 100$$

El índice de utilidad correspondiente a la combinación de equilibrio es:

$$u = x_1x_2 = 10 \cdot 16,6 = 166$$

PROBLEMA 2.38

Para un consumidor cuya función de utilidad es $u = x_1x_2$ que se enfrenta a los siguientes datos de mercado: $y = 100$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, si el precio del primer bien pasa a ser 6 unidades, entonces, por el método de Hicks, deberá demandar respectivamente (x_1, x_2) :

Sabemos por el problema anterior que:

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 16,6$$

Si ahora p_1 pasa a ser 6, por el mismo método:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{3} = 2 \quad x_2 = 2x_1 \quad 6x_1 + 3x_2 = 100 \quad x_1 = 8,33 \quad x_2 = 16,6$$

Por el método de Hicks el índice de utilidad correspondiente a la combinación de equilibrio inicial es:

$$u = x_1 x_2 = 10 \cdot 16,6 = 166$$

luego para mantenerse sobre la misma curva de indiferencia, es decir, mantener ese nivel de utilidad, y desplazándose a lo largo de la misma, el consumidor, al nuevo precio del bien 1, deberá demandar:

$$u = x_1 2x_1 = 166 = 2x_1^2$$

y dado que sabemos que a los nuevos precios $x_2 = 2x_1$:

$$x_1 = 9,11 \quad x_2 = 18,22$$

PROBLEMA 2.39

Conocida la función de utilidad de un consumidor, dada por la expresión $u = (x_1 + 2)^{1/2}(x_2 + 6)^{1/3}$, ¿la relación marginal de sustitución entre los bienes x_2 y x_1 (RMS_2^1) en el punto $x_1 = 6$, $x_2 = 10$ es?

Deberá cumplirse que:

$$RMS_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

En vez de trabajar con la función del enunciado, se trabaja más fácilmente con una función transformada de ésta, por ejemplo, con la transformación $\ln u$:

$$\ln u = \frac{1}{2} \ln (x_1 + 2) + \frac{1}{3} \ln (x_2 + 6)$$

Por lo que aplicando las fórmulas iniciales, que implican tan sólo hallar las derivadas parciales respecto a la función de utilidad:

$$RMS_2^1 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2(x_1 + 2)}{3(x_2 + 6)} \quad RMS_2^1(6, 10) = \frac{2(6 + 2)}{3(10 + 6)} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 2.40

Un consumidor cuyos gustos vienen representados por la función índice de utilidad $u = 20x_1^{1/2}x_2^{1/3}$ dispone inicialmente de las cantidades $x_1^0 = 15$ y $x_2^0 = 4$ con esas cantidades acude a un mercado en el que rigen los precios $p_1 = 12$ y $p_2 = 5$ entonces, el valor de las combinaciones iniciales de bienes es:

PROBLEMA 2.41

El valor de las combinaciones iniciales en el mercado será:

$$15 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 200$$

Un consumidor cuyos gustos vienen representados por la función índice de utilidad $u = 20x_1^{1/2}x_2^{1/3}$ dispone inicialmente de las cantidades $x_1^0 = 15$ y $x_2^0 = 4$ con esas cantidades acude a un mercado en el que rigen los precios $p_1 = 12$ y $p_2 = 5$ entonces ¿ las cantidades x_1 y x_2 de equilibrio son?

El valor de las combinaciones iniciales en el mercado será:

$$15 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 200$$

Las combinaciones que podrá adquirir pertenecerán a la recta de balance cuya ecuación es:

$$12x_1 + 5x_2 = 200$$

La combinación que maximice la utilidad del consumidor se obtendrá a partir de las ecuaciones de equilibrio que son la ley de las utilidades marginales ponderadas y la restricción presupuestaria:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ 12x_1 + 5x_2 = 200$$

Operaremos con una función de utilidad transformada de la del enunciado:

$$\ln u = \ln 20 + \frac{1}{2} \ln x_1 + \frac{1}{3} \ln x_2$$

por lo que las utilidades marginales son:

$$u_1 = \frac{1}{2x_1} \quad u_2 = \frac{1}{3x_2}$$

y construyendo el ratio de las utilidades marginales a los precios:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{3x_2}{2x_1} = \frac{12}{5}$$

que junto con la restricción presupuestaria:

$$12x_1 + 5x_2 = 200$$

PROBLEMA 2.42

permiten obtener

$$\begin{aligned}x_1 &= 10 \\12x_1 + 5x_2 &= 200\end{aligned}$$

que permite obtener:

$$x_2 = 16$$

Dada la función de utilidad $u = x_1x_2$ ¿la elasticidad de demanda renta del bien x_1 es, en valor absoluto?

Como:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{y}{2p_1} \\E &= \frac{dx_1}{dy} \frac{y}{x_1} = \frac{1}{2p_1} \frac{y}{\frac{y}{2p_1}} = 1 \\|E| &= 1\end{aligned}$$

PROBLEMA 2.43

Dada la función de utilidad $u = x_1^a x_2^b$, ¿la elasticidad de demanda-precio cruzada del segundo bien es?

Como según sabemos la demanda del bien 2 vendrá dada por la expresión;

$$x_2 = \frac{b}{a+b} \frac{y}{p_2}$$

y como quiera que $\frac{dx_2}{dp_1} = 0$, se tendrá necesariamente que $E_{21} = E_{12} = 0$.

PROBLEMA 2.44

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$, ¿la relación marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 es?

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

PROBLEMA 2.45

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿el precio relativo del bien 2 en términos del 1 es?

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 2.46

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿el precio relativo del bien 1 en términos del 2 es?

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{20}{10} = 2$$

PROBLEMA 2.47

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿la relación marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 en el punto óptimo es?

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = 2$$

PROBLEMA 2.48

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿las cantidades demandadas de los dos bienes en el equilibrio son?:

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{u_2} &= \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} = 2 \\x_2 &= 2x_1 \\p_1x_1 + p_2x_2 &= y \quad 20x_1 + 10x_2 = 200 \\20x_1 + 10(2x_1) &= 200 \\20x_1 + 20x_1 &= 40x_1 = 200 \\x_1 &= 5 \quad x_2 = 2x_1 = 10\end{aligned}$$

PROBLEMA 2.49

Dada la función de utilidad $u = x_1^2x_2$, ¿la función de demanda del bien 1 es?

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Como:

$$u_1 = 2x_1x_2 \quad u_2 = x_1^2$$

Sustituyendo:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad x_2 = \frac{p_1x_1}{2p_2}$$

Por otro lado:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

$$p_1x_1 + p_2 \frac{p_1x_1}{2p_2} = y$$

$$\frac{3}{2}p_1x_1 = y$$

$$x_1 = \frac{2y}{3p_1}$$

PROBLEMA 2.50

Dada la función de utilidad $u = x_1x_2$ si la renta es 600 y el precio del bien 1 es 25 y el del 2 es 30, ¿las cantidades demandadas de los bienes en equilibrio son?

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{6} \quad x_2 = \frac{5}{6}x_1$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y \quad 25x_1 + 30x_2 = 600$$

$$25x_1 + 30\left(\frac{5}{6}x_1\right) = 600$$

$$x_1 = \frac{600}{50} = 12$$

$$x_2 = \frac{5}{6}12 = 10$$

PROBLEMA 2.51

Dada la función de utilidad $u = x_1x_2$ si la renta es 600 y el precio del bien 1 es 25 y el del 2 es 30, el índice de utilidad es:

Como sabemos por el ejercicio anterior que:

$$x_1 = \frac{600}{50} = 12 \quad x_2 = \frac{5}{6}12 = 10$$

PROBLEMA 2.52

Entonces:

$$u = x_1x_2 = 12 \cdot 10 = 120$$

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = 2x_1 + 4x_2$ y se enfrenta a unos precios $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ y posee renta monetaria $y = 100$ entonces las cantidades de equilibrio son:

La ecuación que permite hallar las condiciones de equilibrio es la conocida ley de las utilidades marginales ponderadas:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

en este caso las utilidades marginales son:

$$u_1 = 2 \quad u_2 = 4$$

y los precios:

$$p_1 = 3 \quad p_2 = 2$$

luego:

$$\frac{2}{4} \neq \frac{3}{2}$$

lo que indica que las pendientes de la recta de balance y de la curvas de indiferencia no coinciden; en efecto la de la recta es $-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{3}{2}$, y la de la curva $-\frac{u_1}{u_2} = -\frac{2}{4}$. Este resultado indica que las curvas de indiferencia son rectas y su pendiente distinta a la de la recta de balance. El punto de equilibrio se encontrará en uno de los extremos de la recta de balance. Las posibles combinaciones serán $x_1 = \frac{100}{3}$, $x_2 = 0$. O bien, $x_1 = 0$ y $x_2 = 50$, en efecto:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 0 & p_2x_2 = y & 2x_2 = 100 & x_2 = 50 \\ x_2 = 0 & p_1x_1 = y & 3x_1 = 100 & x_1 = 33,33 \\ u(x_1, 0) = 2 \cdot 33,33 & & & = 66,66 \\ u(0, x_2) = 4 \cdot 50 & & & = 200 \end{array}$$

El consumidor alcanza la máxima satisfacción en este caso y al ser los bienes sustitutos, consumiendo el de precio más bajo, es decir:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 50$$

PROBLEMA 2.53

Conociendo las preferencias de un consumidor mediante:

$$RMS_2^1 = \frac{x_1 + 100}{2x_2 + 100}$$

Si los precios de los bienes $p_1 = 8$ y $p_2 = 4$ y la renta $y = 120$, entonces las cantidades de equilibrio son:

Las condiciones de equilibrio son:

$$RMS_2^1 = \frac{p_2}{p_1}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$$

que con los datos del problema permiten obtener el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x_1 + 100}{2x_2 + 100} = \frac{4}{8} \quad y \quad 8x_1 + 4x_2 = 120$$

$$\text{de donde: } x_1 = -\frac{20}{3}, x_2 = \frac{130}{3}$$

El equilibrio se desplaza a la izquierda del primer cuadrante, lo que, gráficamente, significa que las pendientes de las curvas de indiferencia, tomadas en la dirección negativa del eje $0 - x_2$, son siempre mayores que la recta de balance en el primer cuadrante.

Como no pueden consumirse cantidades negativas de los bienes, el equilibrio se encontrará en uno de los dos ejes; en este caso sobre el eje x_2 . Las cantidades consumidas serán $x_1 = 0$ y $x_2 = 30$.

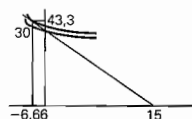


Figura 2.27

PROBLEMA 2.54

Conocida la función de utilidad del consumidor $u = x_1^2 x_2^2$ los precios de los bienes $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ y la renta monetaria igual a 120, entonces las cantidades demandadas y el índice de utilidad son:

Es necesario en primer lugar conocer las cantidades demandadas, antes de la variación en el precio. Aplicando las ya bien conocidas, por la teoría, condiciones de primer orden:

$$\frac{2x_1 x_2^2}{2x_2 x_1^2} = \frac{3}{2}$$

$$3x_1 + 2x_2 = 120$$

obtenemos las cantidades.

$$x_1 = 20 \quad x_2 = 30$$

PROBLEMA 2.55

Estas cantidades dan un índice de satisfacción:

$$u = 20^2 30^2 = 360.000$$

Dada la función de utilidad $u = x_1^2 x_2$, la función de demanda del bien 1 (x_1) es:

- (a) Isoelástica.
- (b) De elasticidad 0.
- (c) De elasticidad ∞ .
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a).

PROBLEMA 2.56

Dada la función de utilidad $u = x_1^2 x_2$:

1. La función de demanda del bien 1 (x_1) es de elasticidad:

- (a) 1
- (b) 0
- (c) ∞
- (d) Ninguna de las anteriores

RESPUESTA: (a).

2. La función de demanda del bien 1 (x_1) es:

- (a) Constante.
- (b) Variable.
- (c) Constante o variable, depende.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b).

3. La función de demanda del bien 1 (x_1) es:

- (a) $\frac{2}{2} \frac{y}{p_1}$
- (b) $\frac{3}{2} \frac{y}{p_2}$
- (c) $3 \frac{p^2}{p_1}$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (d).

En efecto:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2x_1x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1}$$

de donde

$$p_1x_1 = 2p_2x_2$$

por lo que

$$x_1 = \frac{2p_2x_2}{p_1}$$

por otro lado, deberá cumplirse que $p_1x_1 + p_2x_2 = y$, por lo que $p_2x_2 = y - p_1x_1$; por lo que ahora tendremos:

$$x_1 = \frac{2(y - p_1x_1)}{p_1} = \frac{2y}{p_1} - \frac{2p_1x_1}{p_1}$$

de donde

$$x_1 = \frac{2y}{3p_1}$$

o lo que es lo mismo:

$$2p_2x_2 + p_2x_2 = y$$

La elasticidad será:

$$E = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \right) \left(\frac{p_1}{x_1} \right) = - \left(\frac{6y}{3p_1^2} \right) \left[\frac{p_1}{\left(\frac{2y}{3p_1} \right)} \right] = 1$$

PROBLEMA 2.57

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$:

1. x_1 y x_2 de equilibrio son:

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15$$

$$15x_1 + x_2 = 121$$

de donde se obtiene

$$x_1 = 6, x_2 = 31$$

2. ¿El índice de utilidad es?:

El índice de utilidad para estas cantidades es: $u = 2 \cdot 30 = 60$.

3. Cuando su precio aumenta en una unidad, el efecto sustitución de Hicks en la demanda del bien x_1 es:

Sabemos que en caso:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 31, \quad u = 2 \cdot 30 = 60.$$

Como debe hallarse el efecto en la cantidad demandada de x_1 cuando su precio se convierte en $p_1 = 16$, manteniéndose la misma satisfacción, se debe resolver el sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 16$$

$$60 = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{15}}{2} + 4 = 5,936$$

El efecto sustitución es la diferencia entre esta cantidad y la de equilibrio inicial:

$$ES = \frac{\sqrt{15}}{2} + 4 - 6 = -0,0635$$

valor negativo como corresponde a la variación cuando el precio aumenta y se mantiene la misma satisfacción.

PROBLEMA 2.58

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$ cuando el precio del bien 1 disminuye en una unidad, en la nueva combinación de equilibrio hallar x_1 y la renta compensada al modo de Slutsky.

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15 \quad 15x_1 + x_2 = 121$$

y permiten hallar las cantidades de equilibrio al modo habitual:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 31$$

PROBLEMA 2.59

Con el cambio en el precio, la combinación de bienes en donde el consumidor se situará vendrá dada por la resolución del sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14 \quad 14x_1 + x_2 = 121$$

Con lo que: $x_1 = 6,28$.

En el efecto sustitución de Slutsky llevamos a cabo una acomodación de la renta tal que a los nuevos precios podamos adquirir la combinación inicial de bienes, lo cual nos permite saber la magnitud de esta acomodación. Los nuevos precios $p_1 = 14$ y $p_2 = 1$; la renta será $14 \cdot 6 + 31 = 115$.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$ los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$ cuando el precio del bien x_1 disminuye en una unidad en la nueva combinación de equilibrio el efecto sustitución en la demanda del bien x_1 (en la interpretación de Slutsky) es:

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15 \quad 15x_1 + x_2 = 121$$

y permiten hallar las cantidades de equilibrio al modo habitual:

$$x_1 = 6 \quad x_2 = 31$$

En el efecto sustitución de Slutsky llevamos a cabo una acomodación de la renta tal que a los nuevos precios podamos adquirir la combinación inicial de bienes, lo cual nos permite saber la magnitud de esta acomodación.

Los nuevos precios son $p_1 = 14$ y $p_2 = 1$; la renta será $14 \cdot 6 + 31 = 115$.

La combinación de bienes en donde el consumidor se situará nos vendrá dado por la resolución del sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_1 + x_2 = 115$$

Con lo que:

$$x_1 = 6,07$$

y el efecto sustitución:

$$ES = 6,07 - 6 = 0,07$$

PROBLEMA 2.60

Un consumidor no típico tiene una conducta altruista (AL) y tiene una función de utilidad $u = y_{AL}y_{ONG}$ donde y_{AL} es la renta de dicho consumidor e y_{ONG} es la renta de sus beneficiados percibida durante un período determinado. El consumidor dispone de 50 euros y las ONG sólo 2. A quiere maximizar su utilidad. ¿débe o no transferir renta a las ONG ?

La función de utilidad de AL será:

$$u = y_{AL}(52 - y_{AL})$$

dado que la renta de que dispondrán las ONG será el total disponible (52) menos lo que finalmente retenga AL para sí mismo. La condición de máximo para u será

$$\frac{\partial u}{\partial y_{AL}} = 0$$

lo que nos da $y_{AL} = 26$.

Con esa renta AL hace máxima su utilidad, por lo que deberá transferir a las ONG , $50 - 26 = 24$ unidades monetarias. Luego la respuesta es sí por ese valor.

PROBLEMA 2.61

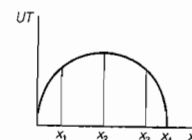


Figura 2.28

Si la utilidad total viene dada por la figura del margen, ¿a partir de qué punto pasará a ser negativa la utilidad marginal?

- (a) En x_4 .
- (b) En x_2 .
- (c) En x_3 .
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) porque la utilidad marginal se hace negativa cuando la utilidad total se hace decreciente.

PROBLEMA 2.62

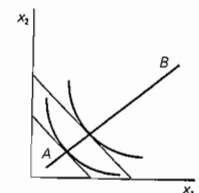


Figura 2.29

Dada la figura del margen, la curva AB representa:

- (a) Una curva de Engel.
- (b) Una curva renta-consumo.
- (c) Una curva de demanda.
- (d) Una curva demanda precio.

RESPUESTA: (b). La curva de renta-consumo es la resultante de unir las combinaciones óptimas correspondientes a distintos niveles de renta.

PROBLEMA 2.63

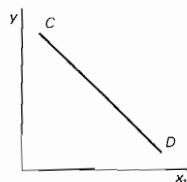


Figura 2.30

PROBLEMA 2.64

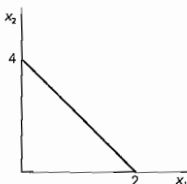


Figura 2.31

PROBLEMA 2.65

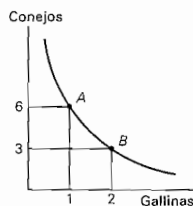


Figura 2.32

PROBLEMA 2.66

Dada la figura del margen, la curva CD corresponde a:

- (a) Un bien inferior.
- (b) Una curva demanda precio.
- (c) Un bien con efecto renta cero.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Es una curva de Engel decreciente, por lo tanto corresponde a un bien inferior (recordamos que un bien inferior es aquel del cual se consume menos ante aumentos en la renta).

Dada la figura del margen, ¿cuál de la siguiente combinación precios podría ser la de mercado?:

- (a) $p_1 = 2, p_2 = 3$
- (b) $p_1 = 4, p_2 = 2$
- (c) $p_1 = 3, p_2 = 6$
- (d) $p_1 = 6, p_2 = 4$

RESPUESTA: (b), porque sabemos que cuando $x_1 = 0, x_2 = 4$, luego $4p_2 = y$, y cuando $x_2 = 0, x_1 = 2, 2p_1 = y$, de donde dadas las respuestas la única válida es $p_1 = 4, p_2 = 2$.

Dada la figura del margen, la relación marginal de sustitución en valor absoluto entre conejos y gallinas y en el paso de A a B es:

- (a) 3
- (b) 2
- (c) 1
- (d) 1,5

RESPUESTA: (a) Ayuda; en efecto, RMS_g^c (entre A y B) = $-\left(\frac{\Delta c}{\Delta g}\right) = \frac{3}{1} = 3$.

Para que una función de demanda $x = p_1^a p_2^b y^c$ sea homogénea de grado cero, ¿qué relación deben guardar los parámetros a, b y c (restricciones)?:

- (a) $a > 0, b > 0, (c + b) = 1$
- (b) $(a + b + c) < 1$

PROBLEMA 2.67

- (c) $(a + b + c) = 1$
- (d) $(a + b + c) = 0$

RESPUESTA: (d) Al ser homogénea multiplicar por, por ejemplo, h a las tres variables, se aprecia que se obtiene una potencia de h de valor cero, $h^0 = 1$, y $x = x'$.

Considere el siguiente cuadro de consumo de una economía doméstica, por unidad de tiempo (donde las u son utilidades marginales):

x_1	u_1	x_2	u_2
1	20	1	10
2	15	2	7
3	10	3	2
4	5	4	1

Para que el consumidor esté en equilibrio (maximice la utilidad), de entre todos, sólo podrá ser el precio relativo, $\frac{p_1}{p_2}$:

- (a) 2
- (b) 5,5
- (c) 2,2
- (d) 1

RESPUESTA: (a) Se aplica la ley de las utilidades marginales ponderadas; en la primera fila $\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{20}{10} = 2$ y como debe ser igual al cociente de los precios respectivos $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ la respuesta es (a).

PROBLEMA 2.68

Si se da a siguiente configuración:

Bien	Cantidad	Precio	Utilidad marginal
x_1	30	36	12
x_2	20	90	¿?

Y suponiendo que el consumidor maximiza la utilidad respecto a ambos bienes, la utilidad marginal de x_2 es:

- (a) 10
- (b) 20

- (c) 30
(d) 60

RESPUESTA: (c) En el equilibrio se debe cumplir que el cociente de precios debe ser igual al de utilidades marginales es decir:

$$\frac{36}{90} = \frac{12}{u_2} \quad u_2 = 30$$

PROBLEMA 2.69

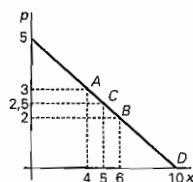


Figura 2.33

PROBLEMA 2.70

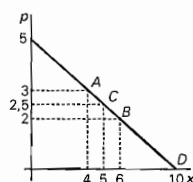


Figura 2.34

PROBLEMA 2.71

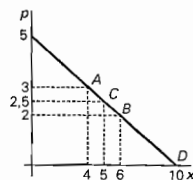


Figura 2.35

Dada la curva de demanda lineal de la figura 2.33, ¿en qué punto la elasticidad-precio vale 1?

- (a) A
(b) B
(c) No hay suficientes datos para contestar a la pregunta.
(d) C

RESPUESTA: (d) La elasticidad renta vale uno en el punto medio del segmento en abscisas que va desde el origen al punto de corte de la recta de demanda con dicho eje.

Dada la curva de demanda del margen, ¿en qué punto la elasticidad es mayor que la unidad?

- (a) A
(b) B
(c) No se puede contestar con los datos del enunciado.
(d) C

RESPUESTA: (a) El que esté (uno sólo) a la izquierda del punto medio del segmento en abscisas.

Para la curva de demanda de la figura 2.35, ¿en torno a qué punto la demanda es inelástica?

- (a) A
(b) B
(c) No hay suficientes datos para contestar a la pregunta.
(d) C

RESPUESTA: (b) En (uno sólo) a la derecha del punto medio del segmento en abscisas.

PROBLEMA 2.72

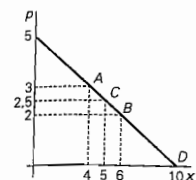


Figura 2.36

PROBLEMA 2.73

Si la cantidad ofrecida (y demandada) cae (en el segmento inelástico) de C a D el ingreso total:

- (a) Aumentará.
(b) Descenderá.
(c) Permanecerá inalterada.
(d) No tenemos información suficiente.

RESPUESTA: (a) En el tramo inelástico, cuando cae la demanda, el ingreso aumenta.

Dada la siguiente tabla, los bienes de la casilla (3, 2) (el primer número corresponde a la fila y el segundo a la columna) se denominan:

E_d	E_y	E_c
$-\infty$	> 0	$-\infty$
> 1	> 0	> 0
1	> 1	0
-1		< 0
0		$+\infty$

- (a) Elástico.
(b) Inferior.
(c) De lujo.
(d) Veblen.

RESPUESTA: (c) La elasticidad demanda-precio mayor que 1 implica que es un bien de lujo.

PROBLEMA 2.74

Dada la siguiente tabla, los bienes caracterizados por la elasticidad de la casilla (5, 1) (leyendo primero por filas y luego por columnas) se denominan:

E_d	E_y	E_c
$-\infty$	> 0	$-\infty$
> 1	> 0	> 0
1	> 1	0
-1		< 0
0		$+\infty$

- (a) Elásticos.
(b) De demanda rígida.
(c) Veblen.
(d) Inferiores.

RESPUESTA: (b) Por definición, ya que cualquier cambio en el precio, no modifica la cantidad demandada.

PROBLEMA 2.75

Si sabemos que la elasticidad precio cruzada de un bien es 2,5, y el precio del otro bien desciende en un 2 por ciento, en sus respectivas unidades, ¿cuál será la variación porcentual prevista en la cantidad del bien?:

- (a) $-\frac{1}{2}$
- (b) $-0,25$
- (c) $1,25$
- (d) 5

RESPUESTA: (d) $E_{ij} = \frac{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)} = 2,5$, como $\left(\frac{\Delta p}{p}\right) = 2$, la respuesta es 5, sin más que

sustituir y multiplicar.

PROBLEMA 2.76

Una curva de demanda creciente y lineal (Veblen o Giffen) que pasa por el origen tiene (necesariamente) una elasticidad demanda-precio:

- (a) Unitaria.
- (b) No necesariamente unitaria.
- (c) Puede ser nula.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) La forma genérica de una curva de demanda creciente y lineal que parta del origen es:

$$p = ax \quad a > 0$$

$$E = \frac{dx}{dp} \frac{p}{x} = \frac{1}{a} \frac{ax}{x} = 1$$

PROBLEMA 2.77

Para una curva de demanda normal y lineal, la elasticidad (en valor absoluto) medida a partir de cualquier punto:

- (a) Es la misma en cualquier dirección y para cualquier intensidad.
- (b) Varía entre 0 y $-\infty$.
- (c) Varía entre 0 y 1.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) Va de 0 a ∞ . La forma genérica de una curva de demanda lineal es:

PROBLEMA 2.78

Para una curva de demanda normal (pendiente negativa) y no-lineal del tipo $x = Ap^h$ la elasticidad:

- (a) Es la misma en cualquier dirección y para cualquier intensidad.
- (b) No varía entre 0 y ∞ .
- (c) Varía siempre entre ∞ y 0.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $E = \frac{dx}{dp} \frac{p}{x} = \frac{Ahp^{h-1}p}{Ap^h} = h$.

PROBLEMA 2.79

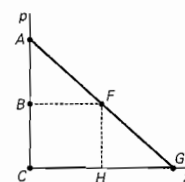


Figura 2.37

Para la curva de demanda del gráfico del margen el valor monetario del excedente del consumidor para un volumen demandado H es:

- (a) ABF
- (b) ACG
- (c) $ACG-ABF$
- (d) BHC

RESPUESTA: (a) El excedente del consumo es la diferencia entre lo que el consumidor estaría dispuesto a pagar y lo que paga. Si consume H unidades, dicha diferencia viene dada por el triángulo ABF .

PROBLEMA 2.80

Si la elasticidad de la demanda es $|2|$ y el precio varía en un 3% más, el gasto total varía:

- (a) Un 3%.
- (b) Un -3%.
- (c) No varía.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) $I = px = G$, $\frac{dG}{G} = \frac{dp}{p} + \frac{dx}{x}$. Multiplicando y dividiendo el segundo término del segundo miembro por $\frac{dp}{p}$ se cumple que:

$$\frac{dG}{G} = \left(\frac{dp}{p} \right) \left[1 + \frac{\left(\frac{dx}{x} \right)}{\left(\frac{dp}{p} \right)} \right] \quad y \quad 3\%(1-2) = -3\%$$

PROBLEMA 2.81

Dada la función inversa de demanda de un consumidor $p = 100 - 2x$ el excedente del consumidor para $x = 25$ es:

- (a) 500
- (b) 1.000
- (c) 625
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) $x = 0, p_{\max} = 100$
 $x = 25, p = 50$
 $\frac{(25 \cdot 50)}{2} = 625$

PROBLEMA 2.82

¿Cuáles son las soluciones esquina de una recta de balance para el caso de ahorro?:

- (a) $y_t = 0, y_{t+1} = 0$
- (b) $c_t = 0, c_{t+1} = 0$
- (c) $y_t = 0, y_{t+1} = 0, c_t = 0, c_{t+1} = 0$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (d) Las soluciones esquina son, para el consumo futuro:

$$(1+r)y_t + y_{t+1}$$

y para el consumo presente

$$\frac{y_{t+1}}{(1+r)} + y_t$$

PROBLEMA 2.83

¿Cuáles son las esquinas (y potenciales soluciones esquina) de una recta de balance para el caso de ahorro?:

- (a) $y_t = 0, y_{t+1} = 0, c_t = \max, c_{t+1} = \max$
- (b) $y_t = 0, y_{t+1} = 0, c_t = 0, c_{t+1} = 0$
- (c) $y_t = \max, y_{t+1} = \max, c_t = 0, c_{t+1} = 0$
- (d) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMA 2.84

RESPUESTA: (d) La solución esquina, para el consumo futuro es:

$$(1+r)y_t + y_{t+1}$$

Si un individuo tiene $y_t = 500$ uu.cc. y $y_{t+1} = 1.000$ uu.cc. para compensar una caída de una unidad de cuenta en t tendría que recibir dos de $t+1$, por lo que se puede decir que su tasa de preferencia temporal es del:

- (a) 1%
- (b) 0,5%
- (c) No tenemos información.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) Para realizar la comparación homogénea las rentas de los dos períodos tienen que ser iguales.

PROBLEMA 2.85

Si un individuo tiene $y_t = y_{t+1} = 3.000$ uu.cc. para compensar una caída de una unidad de cuenta en t tendría que recibir una de $t+1$, por lo que se puede decir que su tasa de preferencia temporal es del:

- (a) 100%
- (b) 50%
- (c) No tenemos información.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) La tasa de preferencia temporal es la *RMS* entre consumo presente y futuro igual a (-1) , con renta constante.

PROBLEMA 2.86

Dada la función $u = x_1 x_2$ con $y = 600$; $p_1 = 25$; $p_2 = 30$, las cantidades x_1 y x_2 de equilibrio del consumidor serán:

- (a) $x_1 = 12 \quad x_2 = 40$
- (b) $x_1 = 12 \quad x_2 = 10$
- (c) $x_1 = 10 \quad x_2 = 12$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) Ayuda:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}, \text{ lo que implica } x_2 = \left(\frac{5}{6} \right) x_1$$

$$y = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 25x_1 + 30 \left(\frac{5}{6} x_1 \right) = 50x_1$$

de donde:

$$x_1 = 12 \quad x_2 = \left(\frac{5}{6} \right) x_1 = \left(\frac{5}{6} \right) 12 = 10$$

PROBLEMA 2.87

Dada la función $u = x_1 x_2$ con $y = 600$; $p_1 = 25$; $p_2 = 30$, el efecto sustitución de Slutsky para el bien 1 es:

- (a) Positivo.
- (b) Negativo.
- (c) No varía.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) Es siempre negativo.

PROBLEMA 2.88

Dada la función $u = x_1 x_2$ con $y = 600$; $p_1 = 25$; $p_2 = 30$, con el efecto renta de Slutsky para el bien 1 es:

- (a) Positivo.
- (b) Negativo.
- (c) No varía.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Ya que como podemos comprobar, la demanda de este bien será:

$$x_1 = \frac{y}{2p_1}$$

que es siempre positivo.

PROBLEMA 2.89

Dada la función $u = x_1 x_2$ con $y = 600$; $p_1 = 25$; $p_2 = 30$, hallar x_1 y x_2 si *ceteris paribus* p_2 pasa a ser 40 entonces:

- (a) $x_1 = 10$ $x_2 = 14$
- (b) $x_1 = 12$ $x_2 = 7,5$
- (c) $x_1 = 8$ $x_2 = 10$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) $y = 600 = 25x_1 + 40x_2$.

$$\frac{x_2}{25} = \frac{x_1}{40} \quad x_2 = \frac{25}{40} x_1 = \frac{5}{8} x_1$$

$$600 = 25x_1 + 40 \cdot \frac{5}{8} x_1 = 50x_1$$

$$x_1 = 12 \quad x_2 = \left(\frac{5}{8}\right) x_1 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

2. El efecto sustitución de Hicks para el bien (x_1) es:

- (a) 1,33
- (b) 1,5
- (c) 1,85
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

Sustituyendo (120 es el índice inicial):

$$u = x_1 x_2 = x_1 \frac{5}{8} x_1 = 120 \quad 120 = \frac{5}{8} x_1^2 \quad x_1^2 = \frac{120 \cdot 8}{5} = 192$$

$$x_1 = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} = 13,85$$

$$x_2 = \left(\frac{5}{8}\right) 8\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\Delta x_1 = 8\sqrt{3} - 12 = 13,85 - 12 = 1,85$$

$$\Delta x_2 = 5\sqrt{3} - 10 = 8,66 - 10 = -1,33$$

3. El efecto sustitución de Hicks para el bien (x_2) es:

- (a) -1,33
- (b) -1,5
- (c) 1,85
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$.

Sustituyendo:

$$u = x_1 x_2 = x_1 \frac{5}{8} x_1 = 120 \quad 120 = \frac{5}{8} x_1^2 \quad x_1^2 = \frac{120 \cdot 8}{5} = 192$$

$$x_1 = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} = 13,85$$

$$x_2 = \left(\frac{5}{8}\right) 8\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\Delta x_1 = 8\sqrt{3} - 12 = 13,85 - 12 = 1,85$$

$$\Delta x_2 = 5\sqrt{3} - 10 = 8,66 - 10 = -1,33$$

4. ¿Cuál será el nivel de utilidad si p_2 pasa a ser 40?

- (a) 90
- (b) 10
- (c) 50
- (d) Ninguna de las anteriores

RESPUESTA: (a) u (inicial) = $x_1 x_2 = 12 \cdot 10 = 120$:

$$u(p_2 = 40) = x_1 x_2 = 127 \left(\frac{1}{2} \right) = 90$$

5. ¿Cuál es el efecto renta de Hicks para el bien 2 (x_2) si p_2 pasa a ser 40?

- (a) -1,16
- (b) 1,75
- (c) -1,85
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$.

Sustituyendo:

$$u = x_1 x_2 = x_1 \frac{5}{8} x_1 = 120 \quad 120 = \frac{5}{8} x_1^2 \quad x_1^2 = \frac{120 \cdot 8}{5} = 192$$

$$x_1 = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} = 13,85$$

$$x_2 = \left(\frac{5}{8} \right) 8\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\Delta x_1 = 8\sqrt{3} - 12 = 13,85 - 12 = 1,85$$

$$\Delta x_2 = 5\sqrt{3} - 10 = 8,66 - 10 = -1,33$$

$$\Delta x_1 = 12 - 13,85 = -1,85 \quad \Delta x_2 = 7,5 - 8,66 = -1,16$$

PROBLEMA 2.90

¿Cuánto debería aumentar (variar) la renta para que se mantuviese el nivel de utilidad inicial (primera configuración precios-renta) cuando el precio del bien 2 es 40?

- (a) 92,82 unidades
- (b) 318,40
- (c) 25,30
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $u = x_1 x_2 = 1210 = 120, y = 25x_1 + 40x_2$.

PROBLEMA 2.91

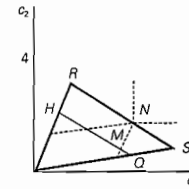


Figura 2.38

Dibuje un esquema de características tal que el hecho de que las demandas de los dos bienes sea normales respecto a la renta no impliquen que lo sean las de todas las características (suponga que las proporciones de características aportadas por los bienes sean distintas).

La cantidad de característica es proporcional al consumo de un bien. La frontera inicial es HQ y el consumo de equilibrio, por ejemplo, M . Con lo que si la renta crece la frontera pasa a ser RS y el consumo N , que implica más de los dos características que el anterior.

Pero como el nuevo punto de equilibrio N el consumo del bien intensivo en características no ha variado porque está sobre el radio paralelo a OQS . Por ello cualquier punto a la derecha o arriba del nuevo equilibrio, N , que implicará más de las dos características que él. Pero no es por ello menos cierto que precisamente debido a la diferencia de intensidades (que seguramente es el caso general y más realista) es posible adquirir menos del bien más intensivo.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{u_1}{u_2} \quad \frac{25}{40} = \frac{5}{8} \quad x_2 = \frac{5}{8} x_1$$

$$u \text{ (inicial)} = x_1 x_2 = x_1 \frac{5}{8} x_1 = 120$$

$$x_1^2 = \frac{120 \cdot 8}{5} = 192$$

$$x_1 = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} = 13,85$$

$$x_2 = \left(\frac{5}{8} \right) 8\sqrt{3} = 5\sqrt{3} = \left(\frac{5}{8} \right) 13,85 = 8,66$$

$$y = 25 \cdot 8\sqrt{3} + 40 \cdot 5\sqrt{3} = 400\sqrt{3} = 692,82$$

Capítulo 3

Teoría de la producción, los costes y la oferta

Conceptos básicos de producción y costes

PROBLEMA 3.1

En el cuadro que aparece a continuación se expresan las cantidades de los factores y_1 , y_2 e y_3 precisas para obtener una unidad de producto final según cuatro procesos técnicos diferentes:

Proceso	Cantidad de factor		
	y_1	y_2	y_3
A	1	2	3
B	2	2	2
C	0,5	0,5	1
D	3	0,5	2,5

elegir la alternativa correcta:

- (a) Es más eficaz A que B.
- (b) Es eficaz el proceso B.
- (c) Son ineficaces todos los procesos.
- (d) Ninguna de las anteriores alternativas es cierta.

RESPUESTA: (d) Es ineficaz el proceso B porque utiliza más de los dos factores que, C por ejemplo. A y B no son comparables pues utilizan más de un factor pero menos de otro.

PROBLEMA 3.2

En el cuadro siguiente, donde q y P_m denotan, respectivamente el precio y la productividad marginal del factor correspondiente, y para un coste dado de 100 unidades de cuenta:

y_1	$P_m(y_1)$	q_1	y_2	$P_m(y_2)$	q_2
1	20	10	1	30	10
2	19	10	2	25	10
3	18	10	3	20	10
4	18	10	4	15	10
5	15	10	5	15	10
6	10	10	6	10	10
7	-1	10	7	0	10

¿Cuál será la combinación óptima de factores?:

$$\frac{P_m(y_1)}{q_1} = \frac{P_m(y_2)}{q_2}$$

$$1,5 = 1,5$$

para una utilización de 5 unidades de cada input y , $5 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 100$. Los ratios de las productividades marginales a los precios respectivos son:

2	3
1,9	2,5
1,8	2,0
1,8	1,5
1,5	1,5
1	1
0,1	∞

Nótese que no tienen por qué ser iguales siempre las cantidades de los dos inputs; pero en este caso coinciden.

PROBLEMA 3.3

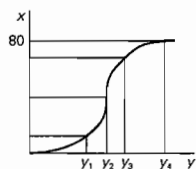


Figura 3.1

Dada la curva de la figura 3.1, cuando la cantidad producida es 80:

- (a) La productividad marginal será negativa.
- (b) La productividad marginal será cero.
- (c) La productividad marginal será máxima.
- (d) Coincidirán la productividad media y la marginal.

RESPUESTA: (b) Cuando la producción es máxima la productividad marginal se anula.

PROBLEMA 3.4

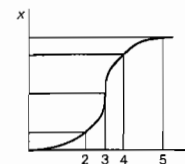


Figura 3.2

Dada la curva de la figura 3.2, la productividad media es creciente hasta:

- (a) $y = 3$
- (b) $y = 4$
- (c) $y = 2$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b). Radio vector desde el origen tangente a la curva.

PROBLEMA 3.5

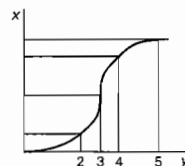


Figura 3.3

Dada la curva de la figura 3.3, la productividad marginal es:

- (a) Máxima en $y = 3$.
- (b) Cero en $x = 70$.
- (c) Negativa en $y = 3$.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) En el punto de inflexión del gráfico.

PROBLEMA 3.6

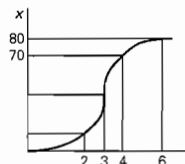


Figura 3.4

Dada la curva de la figura 3.4, los rendimientos son:

- (a) Crecientes hasta $y_1 = 3$.
- (b) Decrecientes desde $y_1 = 4$.
- (c) Constantes en $x = 70$.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Cuando son crecientes la función de producción es convexa y cuando es decreciente la función de producción es cóncava.

PROBLEMA 3.7

Dada la función de costes $C = x + 5$ los costes medios variables para $x = 3$, son:

- (a) 3
- (b) 5
- (c) 10
- (d) 1/2

PROBLEMA 3.8

RESPUESTA: (a) $CMV = x$.

x	CF	CMV
0	5	0
1	5	1
2	5	2
3	5	3
4	5	4
5	5	5
6	5	6

Dada la función de costes $C = x^2 + 5$ los costes fijos para $x = 0$, son:

- (a) 5
- (b) 7
- (c) 3
- (d) 4

RESPUESTA: (a).

x	CF
0	5
1	5
2	5
3	5
4	5
5	5
6	5

PROBLEMA 3.9

Dada la función de costes $C = x^2 + 5$ los costes marginales para $x = 2$, son:

- (a) 6
- (b) 4
- (c) 0
- (d) 12

RESPUESTA: (b) $C_m = 2x$.

x	C_m
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

PROBLEMA 3.10

Dada la función de costes $C = x^2 + 5$ los costes medios totales para $x = 6$, son:

- (a) 6,83
- (b) 4,5
- (c) 4,6
- (d) 6

RESPUESTA: (a) $CMT = x + \frac{5}{x}$.

x	CF	CMV	CMT
0	5	0	
1	5	1	6
2	5	2	4,5
3	5	3	4,67
4	5	4	5,25
5	5	5	6
6	5	6	6,83

Productividades

PROBLEMA 3.11

Sea una función de producción $x = y_1^2 y_2^2$ y suponga que las cantidades utilizadas de los dos inputs son respectivamente 10 y 20 unidades. Obtenga el volumen de output y la elasticidad del mismo respecto a los inputs o factores de producción.

Debe apreciarse, que tan pronto conozcamos las cantidades utilizadas de input, se obtiene la cantidad de output, perfectamente cardinal y medible en unidades físicas.

1. Sabemos que la función puede reescribirse como:

$$x = 2 \ln(10) + 2 \ln(20) = 10,58$$

También se podría haber obtenido el índice de producción, simplemente, sustituyendo los valores de los dos inputs en la función de producción original.

$$10^2 \cdot 20^2 = 40.000$$

2. La elasticidad del output respecto a las variaciones en un input viene dada, por el concepto de elasticidad, o por analogía con la elasticidad de la demanda, por la fórmula:

$$N = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{y}{x}$$

PROBLEMA 3.12

y como la derivada es:

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} = 2y_1y_2^2$$

la elasticidad del output para el primer input será:

$$N_1 = 2y_1y_2^2 \frac{y_1}{x} = \frac{2y_1^2y_2^2}{y_1^2y_2^2} = 2$$

y análogamente para el y_2 .

Nótese que es igual a la productividad marginal multiplicada por la inversa de la productividad media, o lo que es lo mismo, igual al cociente de la productividad marginal y la productividad media. Luego la elasticidad del output respecto al input es positiva, si lo son las productividades medias y marginales. Y mayor o menor que la unidad, según que la marginal sea mayor, menor o igual que la media.

Sea la función de producción tipo Cobb-Douglas $x = y_1^a y_2^{1-a}$ con $a > 0$. Halle las productividades marginales de los dos inputs, y las elasticidades del output respectivas.

1. Las productividades son las derivadas primeras:

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} = ay_1^{a-1}y_2^{1-a} = ay_1^a y_2^{1-a} y_1^{-1} = \frac{ax}{y_1} > 0$$

análogamente:

$$\frac{\partial x}{\partial y_2} = (1-a)y_1^a y_2^{-a} = (1-a) \frac{x}{y_2} > 0$$

ambas positivas, porque lo son sus elementos componentes.

2. Las elasticidades son (por analogía con el concepto general de elasticidad¹⁴), entonces:

$$N_1 = a \frac{x}{y_1} \frac{y_1}{x} = a > 0$$

$$N_2 = (1-a) \frac{x}{y_2} \frac{y_2}{x} = (1-a) > 0$$

es decir, los exponentes respectivos.

¹⁴ Medida cociente entre las variaciones de dos variables, una como independiente y la otra como dependiente de la primera, en lo que se refiere a la medida bajo análisis, en términos porcentuales o no porcentuales.

PROBLEMA 3.13

Determinar las funciones de productividad total, media y marginal, así como la elasticidad del rendimiento (productividad) para una función de producción $x = 20y_1y_2 + 21y_1 - 2y_2^3$ y la combinación inicial de los inputs o medios de producción $y_1^0 = 3$, $y_2^0 = 2$.

Como los medios de producción varían en la misma proporción las cantidades empleadas de cada medio se obtienen multiplicando la cantidad inicial por el coeficiente de empleo, es decir:

$$y_1 = 3k \quad y_2 = 2k$$

La función de rendimiento (productividad) total será:

$$x = 20 \cdot 3k \cdot 2k + 21 \cdot 3k - 2(2k)^3 \quad \text{es decir} \quad x = -16k^3 + 120k_2 + 63k$$

La función de rendimiento medio (productividad media) será:

$$\frac{x}{k} = -16k^2 + 120k + 63$$

La función de rendimiento marginal (productividad marginal del factor o input) será:

$$\frac{dx}{dk} = -48k^2 + 240k + 63$$

Y la elasticidad de rendimiento:

$$E_r \frac{\frac{dx}{dk}}{\frac{x}{k}} = \frac{-48k^2 + 240k + 63}{-16k^2 + 120k + 63}$$

Funciones de producción e isocuantas: casos especiales

PROBLEMA 3.14

Establezca funciones de producción que representen inputs sustitutivos perfectos y complementarios perfectos (coeficientes fijos) dibujando sus isocuantas.

1. *Sustitutivos perfectos*. Las funciones de producción serían del tipo:

$$x = f(y_1, y_2) = y_1 + y_2$$

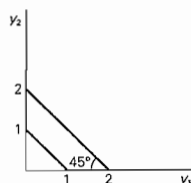


Figura 3.5

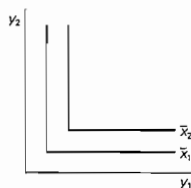


Figura 3.6

Funciones de costes para funciones de producción en que los inputs son complementarios perfectos y sustitutivos perfectos

PROBLEMA 3.15

Discuta funciones de costes correspondientes a funciones de producción en las que los inputs sean: a) complementarios perfectos; y b) sustitutivos perfectos.

Al ser los inputs complementarios y perfectos, deben utilizarse en cantidades fijas, es decir, los coeficientes de producción o relaciones input-output son fijos o constantes; para producir una unidad de output x se precisan un número de unidades fijas de y_1 y de y_2 . Como los precios de los inputs son positivos, y el objetivo último del empresario es maximizar el beneficio, utilizará las cantidades mínimas posibles de inputs para producir un output:

$$f(y_1, y_2) = \min(y_1, y_2)$$

luego para producir una cantidad x de output, por ejemplo, los costes serán:

$$C(q, y) = q_1 y_1 + q_2 y_2$$

pero como y_1 e y_2 guardan una relación fija con x , expresamos al función de costes en su forma habitual dependiente del volumen de output como:

$$C = q_1 x + q_2 x = x(q_1 + q_2)$$

dados los precios de los factores.

porque al ser sustitutivos perfectos le es indiferente a la empresa utilizar uno u otro. Las isocuantas serían líneas rectas decrecientes (figura 3.5).

2. **Coefficientes fijos (complementarios perfectos).** Los inputs deben utilizarse en este caso en proporciones fijas necesariamente, por lo que las funciones de producción serían del tipo:

$$x = \min(y_1, y_2)$$

Sus isocuantas aparecen en la figura 3.6.

Debe observarse que son formalmente –pero no conceptualmente– similares a las curvas de indiferencia en la teoría del comportamiento del consumidor (véase capítulo 2).

Para los sustitutivos perfectos, como un input sustituye perfectamente al otro, lo único que importa es la cantidad total:

$$x = f(y_1, y_2) = y_1 + y_2 = 2y_1 (= 2y_2)$$

y se utilizará sólo el input de menor precio. Es decir el coste total será de entre $(q_1 \cdot 2y_1)$ y $(q_2 \cdot 2y_2)$, el menor de los dos, y:

$$C = \min(q_1, q_2)x$$

Relación marginal de sustitución o transformación técnica

PROBLEMA 3.16

Dada la función de producción $x = (y_1 - 2)^2(y_2 - 1)^3$, ¿la relación marginal técnica de sustitución RMS_2^1 en el punto $y_1 = 4$, $y_2 = 5$ es?

La RMS técnica o $RMST$ del input y_1 por el y_2 , es decir, en notación RMS_2^1 se obtiene hallando la expresión:

$$RMS_2^1 = -\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_2}{f_1}$$

$$RMS_2^1 = \frac{3(y_1 - 2)^2(y_2 - 1)^2}{2(y_1 - 2)(y_2 - 1)^3} = \frac{3(y_1 - 2)}{2(y_2 - 1)}$$

En el punto $(y_1 = 4, y_2 = 5)$ es:

$$RMS_2^1(4, 5) = \frac{3}{4}$$

Rendimientos constantes, crecientes y decrecientes a escala

PROBLEMA 3.17

¿Qué tipo de rendimientos a escala presentan las siguientes funciones de producción?: (1) $x = y_1^2 y_2^2$, (2) $x = y_1^{1/2} y_2^{1/3}$, (3) $x = A y_1^a y_2^b$, (4) $x = 10 + 10L + 5L^2$ (L denota el input trabajo). Demuéstrelo.

1. Multiplicando los dos inputs de la primera, por, por ejemplo, 2:

$$x = (2y_1)^2(2y_2)^2 = 2^2 y_1^2 2^2 y_2^2 = 2^4 (y_1^2 y_2^2)$$

luego presenta rendimientos crecientes a escala, ya que si se doblan los inputs se cuadruplica el output.

2. Análogamente para la segunda:

$$x = (2y_1)^{1/2}(2y_2)^{1/3} = 2^{1/2}y_1^{1/2}2^{1/3}y_2^{1/3} = 2^{1/2+1/3}(y_1^{1/2}y_2^{1/3})$$

la suma de los exponentes de 2 es 5/6, menor que uno, y menor que dos, la escala en que hemos aumentado todos los inputs; luego se dan rendimientos decrecientes a escala.

3. Por el mismo procedimiento:

$$x = A(2y_1)^a(2y_2)^b = A2^a y_1^a 2^b y_2^b = A2^{a+b} y_1^a y_2^b = A2^{a+b} y_1^a y_2^b$$

Los rendimientos dependen de si $a + b$ es mayor, menor o igual a 1.

- Si $a + b = 1$ entonces $2^{a+b} = 2^1 = 2$ rendimientos constantes.
- Si $a + b > 1$ entonces $2^{a+b} = 2^{(>1)} = [e.j., 2] = 4$ rendimientos crecientes.
- Si $a + b < 1$ (e.j., 1/2) entonces $2^{a+b} = 2^{1/2} = \sqrt{2} < 2$ rendimientos decrecientes.

4. Del mismo modo:

$$x = 10 + 10(2L) + 5(2L)^2 = 10 + 10 \cdot 2L + 5 \cdot 2^2 L^2$$

el segundo término del segundo miembro se dobla, siendo constante el primero, pero el tercero más que se dobla (siempre que $L > 1$). Por tanto se dan rendimientos crecientes a escala.

PROBLEMA 3.18

Dada la función de producción $x = y_1^{0.5} y_2^{0.5}$, establezca los rendimientos a escala, la presencia o ausencia de rendimientos decrecientes, comparándolos, en su caso.

Multiplicando por un factor constante, digamos λ , los dos inputs:

$$(\lambda y_1)^{0.5} (\lambda y_2)^{0.5} = \lambda^{0.5} y_1^{0.5} \lambda^{0.5} y_2^{0.5} = \lambda x$$

luego presenta rendimientos constantes a escala. Por otro lado, derivando en la función de producción respecto de -por ejemplo- y_1 :

$$\frac{dx}{dy_1} = 0.5 y_1^{-0.5} y_2^{0.5}$$

productividad marginal positiva; y volviendo a derivar:

$$\frac{d^2x}{d^2y_1} = -0.25 y_1^{-1.5} y_2^{0.5}$$

No debe confundirse -por tanto- los rendimientos a escala que implican variaciones en todos los factores, y los rendimientos decrecientes (ley de) que implican a su vez, que sólo uno de ellos varía; en este caso el y_1 .

Zona de actuación racional

PROBLEMA 3.19

Dada la función de producción $x = -y_1^3 - 2y_2^2 + 10y_1y_2 + 45y_1 + 2y_2$, hallar la ecuación de las líneas que limitan la zona de sustitución y el máximo absoluto de producción.

La curva S_1 cumple la condición de que:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{f_1}{f_2} = 0$$

para que esta expresión sea nula, ha de anularse el numerador ($f_1 = 0$):

$$f_1 = \frac{dx}{dy_1} = -3y_1^2 + 10y_2 + 45 = 0$$

que es la línea de sustitución S_1 . Para la línea S_2 se cumple que:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \infty \quad \frac{dy_1}{dy_2} = 0$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{f_2}{f_1} = 0 \Rightarrow f_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dy_2} = -4y_2 + 10y_1 + 2 = 0$$

línea de sustitución de S_2 .

En el máximo absoluto de la producción se cortan ambas líneas de sustitución:

$$-3y_1^2 = 10y_2 + 45 = 0$$

$$-4y_2 + 10y_1 + 2 = 0$$

despejando y_2 en la segunda, queda:

$$y_2 = \frac{10y_1 + 2}{4} = \frac{5y_1 + 1}{2}$$

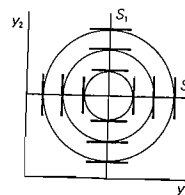


Figura 3.7

sustituyendo en la primera se llega a:

$$-3y_1^2 + 10 \frac{5y_1 + 1}{2} + 45 = 0$$

o bien:

$$3y_1^2 - 25y_1 - 50 = 0 \quad y_1 = 10$$

ya que la raíz negativa no es significativa:

$$y_2 = \frac{5y_1 + 1}{2} = \frac{51}{2} = 25,5$$

Sustituyendo estos valores en la función de producción, se obtiene el valor de x que corresponde al máximo absoluto:

$$x = -1.000 - 1.300,5 + 2.550 + 450 + 51 = 750,5$$

Ley de las productividades marginales ponderadas

PROBLEMA 3.20

Si dada la función de producción de una empresa, la productividad marginal del factor 1 es 20, la del 2, 6, y el precio de los factores es, 5, y 3, respectivamente: 1) ¿está la empresa en equilibrio? ¿por qué?; 2) ¿debe aumentar o disminuir la cantidad utilizada de alguno de los dos factores?

La primera pregunta no puede responderse, ya que desconocemos el precio del bien producido. Respecto a la segunda, como debe cumplirse la ley de las productividades marginales ponderadas por los precios:

$$\frac{Pm(y_1)}{q_1} = \frac{Pm(y_2)}{q_2}$$

que en este caso es:

$$4 = \frac{20}{5} > \frac{6}{3} = 2$$

Luego debe aumentarse la cantidad del factor 1.

Senda de expansión de la empresa

PROBLEMA 3.21

Hállese la senda de expansión correspondiente a una función de producción Cobb-Douglas $x = Ay_1^a y_2^{1-a}$ e interprétela.

La ecuación de la senda de expansión viene dada por las condiciones de primer orden:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

como la función es: $x = Ay_1^a y_2^{1-a}$ y sabemos que es homogénea de grado 1, las productividades marginales son:

$$f_1 = aAy_1^{a-1}y_2^{1-a}$$

$$f_2 = (1-a)(Ay_1^a y_2^{-a})$$

multiplicando f_1 por λ , por ejemplo:

$$\begin{aligned} a[A(\lambda y_1)^{a-1}(\lambda y_2)^{1-a}] &= a[A\lambda^{a-1}y_1^{a-1}\lambda^{1-a}y_2^{1-a}] = \lambda^0 aAy_1^{a-1}y_2^{1-a} = \\ &= \lambda^0 (aAy_1^a y_2^{-a}y_1^{-1}) = \lambda^0 Pm_1 = Pm_1 \end{aligned}$$

ya que:

$$\lambda^{a-1+1-a} = \lambda^0 \quad \lambda^0 = 1$$

donde Pm_1 es la productividad marginal del primer factor. Por otro lado:

$$\lambda f_2 = (1-a)[A(\lambda y_1)^a(\lambda y_2)^{-a}] = \lambda^0(1-a)(Ay_1^a y_2^{-a})$$

Luego las *productividades marginales* son homogéneas de grado cero. La ecuación de la senda de expansión es por tanto:

$$\frac{aAy_1^{a-1}y_2^{1-a}}{(1-a)(Ay_1^a y_2^{-a})} = \frac{ay_2}{(1-a)y_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

por lo que:

$$(1-a)q_1 y_1 = a q_2 y_2$$

o en forma implícita:

$$(1-a)q_1 y_1 - a q_2 y_2 = 0$$

obviamente, una función lineal.

Optimalidad: minimización de costes y maximización del beneficio

PROBLEMA 3.22

Obtenga las cantidades de inputs que minimizan los costes de producción, dada una tecnología Cobb-Douglas $x = y_1^a y_2^b$.

Para una tecnología Cobb-Douglas se trata de:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } q_1 y_1 + q_2 y_2 \\ \text{s.a. } x = y_1^a y_2^b \end{aligned}$$

las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda a y_1^{a-1} y_2^b \\ q_2 &= \lambda b y_1^a y_2^{b-1} \\ x &= y_1^a y_2^b \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por y_1 y la segunda por y_2 :

$$\begin{aligned} q_1 y_1 &= \lambda a y_1^a y_2^b = \lambda a x \\ q_2 y_2 &= \lambda b y_1^a y_2^b = \lambda b x \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\lambda a x}{q_1} \\ y_2 &= \frac{\lambda b x}{q_2} \end{aligned}$$

que son las demandas de factores para precios y cantidad de producto dados. Sustituyendo en la función de producción:

$$x = y_1^a y_2^b = \left(\frac{\lambda a x}{q_1} \right)^a \left(\frac{\lambda b x}{q_2} \right)^b$$

resolviendo para λ :

$$y_1 = \left(\frac{a}{b} \right)^{b/a+b} q_1^{b/a+b} q_2^{1/a+b} x^{1/a+b}$$

Para y_2 análogamente. Nótese que son funciones de los precios de los factores y de la cantidad de output además de los parámetros a y b . No deben confundirse con las funciones de demanda de maximización del beneficio (ver más abajo) que dependen de tan sólo los precios de los inputs y del output. Reconstruyendo la función de costes:

PROBLEMA 3.23

$$C = q_1 y_1 + q_2 y_2 = \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{b/a+b} + \left(\frac{a}{b} \right)^{a/a+b} \right] q_1^{b/a+b} q_2^{1/a+b} x^{1/a+b}$$

que depende de la cantidad de producto y de los precios de los factores.

Maximice el beneficio de una empresa que disponga una tecnología Cobb-Douglas $x = y_1^a y_2^b$.

Podemos plantear el problema como:

$$\text{máx } B = px - qy$$

siendo q e y vectores y $x = y_1^a y_2^b$, la función de producción, por lo que se trata de maximizar:

$$B = p(y_1^a y_2^b) - q_1 y_1 - q_2 y_2$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} p a y_1^{a-1} y_2^b - q_1 &= 0 \\ p y_1^a b y_2^{b-1} - q_2 &= 0 \end{aligned}$$

que, multiplicando la primera por y_1 y la segunda por y_2

$$\begin{aligned} p a y_1^a y_2^b &= q_1 y_1 \\ p b y_1^a y_2^b &= q_2 y_2 \end{aligned}$$

permiten obtener:

$$\begin{aligned} p a x &= q_1 y_1 \\ p b x &= q_2 y_2 \end{aligned}$$

que son dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde se pueden despejar las cantidades (óptimas de maximización del beneficio), como funciones de los precios (parámetros) de los inputs, y de las cantidades (óptimas) del output:

$$y_1 = \frac{apx}{q_1} \quad y_2 = \frac{bpx}{q_2}$$

Si sustituimos ahora las dos últimas expresiones en la función de producción, obtenemos la función de oferta del output:

$$x = y_1^a y_2^b = \left(\frac{apx}{q_1} \right)^a \left(\frac{bpx}{q_2} \right)^b$$

y obteniendo factor común x :

$$x = x^a + b \left[\left(\frac{ap}{q_1} \right)^a \left(\frac{bp}{q_2} \right)^b \right]$$

que se puede reescribir, elevando los tres elementos del segundo miembro a $\left(\frac{1}{1-a-b} \right)$:

$$x = x^{\frac{a+b}{1-a-b}} \left(\frac{pa}{q_1} \right)^{a/(1-a-b)} \left(\frac{pb}{q_2} \right)^{b/(1-a-b)}$$

con lo que podemos relacionar la función de oferta con los rendimientos a escala. Aquí obtenemos el resultado de indeterminación de la oferta, en presencia de rendimientos constantes a escala, y a largo plazo. En efecto cuando los exponentes se anulan, y si los precios p y q dan beneficios cero, la empresa es indiferente respecto a la escala de operaciones o nivel de output.

de donde, sustituyendo:

$$C = y_1 q_1 + y_2 q_2 = 3y_2 q_1 + y_2 q_2 = 3y_2 + 3y_2 = 6y_2$$

Y operando:

$$x = (3y_2)^{1/2} (y_2)^{1/2} = y_2 \sqrt{3}$$

por lo que

$$C(x) = 6 \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)$$

Función de costes

PROBLEMA 3.24

Dada la función de producción $x = y_1^{1/2} y_2^{1/2}$ si los precios de los factores de producción son respectivamente $q_1 = 1$ y $q_2 = 3$, ¿la función de costes es?

Obteniendo primero la relación marginal de sustitución técnica e igualándola al cociente invertido de los precios de los dos factores de producción al modo habitual:

$$RMST_{y_1}^{y_2} = - \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\frac{\partial x}{\partial y_1}}{\frac{\partial x}{\partial y_2}} = \frac{q_1}{q_2}$$

Cuyas productividades marginales parciales son:

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} = \left(\frac{1}{2} \right) y_1^{-1/2} y_2^{1/2} \quad \frac{\partial x}{\partial y_2} = \left(\frac{1}{2} \right) y_1^{1/2} y_2^{-1/2}$$

por lo que se cumple que:

$$\frac{1}{3} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{1}{2} y_1^{-1/2} y_2^{1/2}}{\frac{1}{2} y_1^{1/2} y_2^{-1/2}} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{3} \quad y_1 = 3y_2$$

Costes a largo plazo

PROBLEMA 3.25

Dada la función de producción $x = Ay_1^a y_2^{1-a}$ en la que, como es habitual, A y a son constantes y a se encuentra entre 0 y 1, obtener la curva de costes a largo plazo, en el caso de que la empresa adquiera los factores en régimen de competencia perfecta.

La relación marginal de sustitución es, e implica que:

$$RMS_1^2 = \frac{Pm_1}{Pm_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

que aplicada a los datos del enunciado significa:

$$RMS_1^2 = \frac{Aay_1^{a-1}y_2^{1-a}}{A(1-a)y_1^a y_2^{-a}} = \frac{ay_2}{(1-a)y_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

de donde:

$$y_2 = y_1 \frac{(1-a)}{a} \frac{q_1}{q_2}$$

por lo que sustituyendo ahora en la función de producción:

$$x = Ay_1^a y_2^{1-a} = Ay_1^a y_1^{(1-a) \frac{q_1}{q_2}} = Ay_1 \left(\frac{(1-a)}{a} \frac{q_1}{q_2} \right)^{1-a}$$

y de aquí:

$$y_1 = \frac{x}{A} \left(\frac{q_2}{q_1} \frac{a}{(1-a)} \right)^{1-a}$$

los costes totales a largo son:

$$CTL = q_1 y_1 + q_2 y_2 = q_1 y_1 + q_2 y_1 \left(\frac{q_1}{q_2} \frac{(1-a)}{a} \right)$$

por lo que sustituyendo ahora la expresión para y_1 , y sacando factor común:

$$CTL = y_1 \left[q_1 + q_2 \left(\frac{q_1}{q_2} \frac{(1-a)}{a} \right) \right]$$

Multiplicando y dividiendo el primer término por a quedará:

$$CTL = y_1 \left[\frac{aq_1}{a} + \left(\frac{q_2 q_1}{q_2} \frac{-q_1 q_2 a}{a} \right) \right] \quad CTL = y_1 \left[\frac{aq_1}{a} + \left(\frac{q_1 - q_1 a}{a} \right) \right]$$

$$CTL = y_1 \left[\frac{q_1}{a} \right] \quad CTL = \frac{q_1}{a} \frac{x}{A} \left(\frac{q_2}{q_1} \frac{a}{(1-a)} \right)^{1-a}$$

Teorema de Le Chatelier-Samuelson

PROBLEMA 3.26

Dada la función de producción de la familia Cobb-Douglas $x = y_1 y_2$, establezca si se cumple para ella el teorema de Le Chatelier-Samuelson.

El teorema afirma que la función de oferta del producto será más elástica, a medida que se consideren variables un mayor número de factores de producción.

1. *Método I.* Podemos reescribir la función de producción como:

$$x = \ln y_1 + \ln y_2 = \sum \ln y_i$$

y análogamente para cualquier número de factores, y si maximizamos el beneficio:

$$B = px - q_1 y_1 - q_2 y_2$$

$$B = p(\sum \ln y_i) - q_1 y_1 - q_2 y_2$$

de donde, por las condiciones de primer orden, sabemos que, y problemas anteriores:

$$y_i = \frac{p}{q_i} \quad i = 1, 2$$

en este caso. Y sabemos que las funciones de oferta del producto se obtienen por sustitución de las anteriores en la función de producción:

$$x = \sum_{i=1}^2 \ln y_i = \sum_{i=1}^2 \ln \left(\frac{p}{q_i} \right) = \sum_{i=1}^2 (\ln p - \ln q_i) = 2 \ln p - \sum_{i=1}^2 \ln q_i$$

por lo que calculando ahora las elasticidades:

$$E_{xp} = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{2}{p}$$

luego:

$$E_{xp} = \frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = \frac{p}{x} \frac{2}{p} = \frac{2}{x}$$

o en el caso general:

$$E_{xp} = \frac{n}{x}$$

que será tanto mayor cuanto mayor sea n .

Homogeneidad y escala

PROBLEMA 3.27

Dada la función de producción $x = 2y_1^{0.6}y_2^{0.2}$ indicar si es homogénea, de qué grado y qué tipo de rendimientos a escala presenta.

Un grado de homogeneidad menor que la unidad (aquí 0,8) supone rendimientos decrecientes a escala.

PROBLEMA 3.28

Dada la función de producción $x = 5y_1 + y_1 y_2 - 3y_2^2$ y empleándose 24 unidades de y_1 , el valor de y_2 que hace máxima la cantidad de producto es:

Para hallar la función de productividad total del input y_2 sustituimos en la ecuación anterior el valor de y_1 , en este caso 24:

$$x = 120 + 24y_2 - 3y_2^2$$

La condición de máximo exige que:

PROBLEMA 3.29

$$(1) \frac{dx}{dy_2} = 24 - 6y_2 = 0; y_2 = 4$$

$$(2) \frac{d^2x}{dy_2^2} = -6 < 0$$

luego el máximo está en $y_2 = 4$.

Dada la función de producción $x = 5y_1 + y_1y_2 - 3y_2^2$ si se emplean 24 unidades de y_1 , la cantidad máxima de producto será.

Para hallar la función de productividad total del input y_2 sustituimos en la ecuación anterior el valor de y_1 , en este caso 24:

$$x = 120 + 24y_2 - 3y_2^2$$

La condición de máximo exige que:

$$(1) \frac{dx}{dy_2} = 24 - 6y_2 = 0; y_2 = 4$$

$$(2) \frac{d^2x}{dy_2^2} = -6 < 0$$

luego el máximo está en: $y_2 = 4$.

La cantidad de producto será:

$$x = 120 + 24 \cdot 4 - 3 \cdot 4^2 = 168$$

Repaso

PROBLEMA 3.30

Si la función de producción es $x = y_1^2(8y_2 + 4) - 4y_1^3$, el valor de y_1 para que la productividad marginal sea máxima, cuando el input y_2 es constante e igual a 7 unidades, es.

La función de productividad total al sustituir:

$$y_2 = 7 \quad \text{es} \quad x = 60y_1^2 - 4y_1^3$$

y la de productividad marginal:

$$\frac{dx}{dy_1} = 120y_1 - 12y_1^2 = 0$$

PROBLEMA 3.31

Para que esta sea máxima se requiere:

$$(1) \frac{d^2x}{dy_1^2} = 120 - 24y_1 = 0$$

$$(2) \frac{d^3x}{dy_1^3} = -24 < 0$$

máxima para $y_1 = 5$.

Con los datos del problema anterior ¿la cantidad de producto máxima cuando el input y_2 es constante e igual a 7 unidades, será?

La función de productividad total al sustituir $y_2 = 7$ es $x = 60y_1^2 - 4y_1^3$ y la de productividad marginal $\frac{dx}{dy_1} = 120y_1 - 12y_1^2 = 0$. Para que el producto sea máximo implica:

$$120 - 12y_1 = 0 \quad y_1 = 10$$

$$x = 60 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^3 = 6.000 - 4.000 = 2.000$$

máximo para $y_1 = 5$. La cantidad de producto será por tanto:

$$x = 60 \cdot 25 - 4 \cdot 125 = 1.500 - 500 = 1.000$$

PROBLEMA 3.32

Dada la función de producción $x = 10y_1^2y_2 + 6y_1^2 - 3y_1^3$, ¿el valor máximo de la productividad media para $y_2 = 12$ es?

La función de productividad total de y_1 para $y_2 = 12$ será: $x = 126y_1^2 - 3y_1^3$, y la función de productividad media será:

$$\frac{x}{y_1} = \frac{126y_1^2 - y_1^3}{y_1} = 126y_1 - 3y_1^2$$

Para que dicha productividad media sea máxima es condición necesaria que:

$$(1) \frac{d\left(\frac{x}{y_1}\right)}{dy_1} = 126 - 6y_1 = 0; y_1 = 21$$

$$(2) \frac{d^2\left(\frac{x}{y_1}\right)}{dy_1^2} = -6 < 0$$

PROBLEMA 3.33

El valor máximo de la productividad media es:

$$\frac{x}{y_1} = 126 \cdot 21 - 3 \cdot 21^2 = 1.323$$

Dada la función de producción $x = (y_1 - 2)(y_2 - 1)^3$ y la relación marginal técnica de sustitución RMS_1^2 en el punto (6, 3) es:

La RMS técnica o $RMST$ del input y_2 por y_1 , es decir, en notación RMS_1^2 se obtiene hallado la expresión:

$$RMS_1^2 = -\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$RMS_1^2 = \frac{2(y_1 - 2)(y_2 - 1)^3}{3(y_1 - 2)^2(y_2 - 1)^2} = \frac{2(y_2 - 1)}{3(y_1 - 2)}$$

En el punto ($y_1 = 6, y_2 = 3$) es:

$$RMS_1^2(6, 3) = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 3.34

Si una empresa utiliza los inputs y_1 e y_2 para la obtención de los productos x_1 y x_2 según la función de producción conjunta $x_1^2 + x_2^2 - (2y_1 + 5) \cdot (y_2 + 1) - 1.300 = 0$ y los precios de los inputs son $q_1 = 8$ y $q_2 = 4$, y los de los productos son $p_1 = 4$ y $p_2 = 10$, la cantidad obtenida del producto x_2 será:

El equilibrio de la empresa implica que ha de cumplirse la siguiente cadena de ecuaciones:

$$-\frac{1}{q_1} \frac{\partial F}{\partial y_1} = -\frac{1}{q_2} \frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{1}{p_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2} \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

que se obtiene maximizando la función de beneficios de la producción conjunta sujeta a la restricción de la función de producción; lo que se concreta en este caso en:

$$\frac{2}{8}(y_2 + 1) = \frac{1}{4}(2y_1 + 5) = \frac{2}{4}x_1 = \frac{2}{10}x_2$$

o bien simplificando:

$$\frac{1}{4}(y_2 + 1) = \frac{1}{4}(2y_1 + 5) = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{5}x_2$$

Esta cadena de ecuaciones y la función de producción constituye un sistema del que se obtienen la cantidad empleada de inputs y las obtenidas de productos. De la comparación de los primeros términos de la cadena anterior se obtiene la ecuación:

$$y_2 + 1 = 2y_1 + 5$$

Análogamente de la comparación entre las dos intermedias:

$$2y_1 + 5 = 2x_1$$

y finalmente de la igualdad entre los últimos:

$$5x_1 = 2x_2$$

Teniendo en cuenta las tres ecuaciones anteriores, la función de producción puede escribirse como:

$$x_1^2 + \frac{25x_1^2}{4} - 4x_1^2 - 1.300 = 0$$

De donde:

$$x_1^2 = 400 \quad x_1 = 20$$

La cantidad obtenida del producto x_2 será:

$$x_2 = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50$$

2. ¿La cantidad del input y_2 utilizada es?

La cantidad del input y_2 es:

$$y_2 = 2 \cdot 20 - 1 = 39$$

4. ¿Y la cantidad del input y_1 utilizada es?

La cantidad del input y_2 es:

$$y_2 = 2 \cdot 20 - 1 = 39$$

y del input y_1 :

$$y_1 = \frac{39 + 1 - 5}{2} = 17,5$$

5. ¿Los ingresos de la empresa son?

Los ingresos de la empresa son:

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 = 20 \cdot 4 + 50 \cdot 10 = 580$$

6. El beneficio que obtiene la empresa en el equilibrio es:

Los ingresos de la empresa son:

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 = 20 \cdot 4 + 50 \cdot 10 = 580$$

Los costes de la empresa son:

$$C = q_1y_1 + q_2y_2 = 39 \cdot 4 + 17,5 \cdot 8 = 296$$

Por lo tanto los beneficios serán:

$$B = I - C = 284$$

PROBLEMA 3.35

Conocida una función de producción conjunta $x_1^2 + x_2^2 - (y_1 - 40)(y_2 - 20) = 0$ y siendo los precios de los outputs y de los inputs $p_1 = 4$, $p_2 = 8$, $q_1 = 2$ y $q_2 = 1$ respectivamente, el máximo ingreso que puede obtenerse con las cantidades de inputs $y_1 = 100$, $y_2 = 200$ es:

Habrà que maximizar la función de ingresos sujeta a la restricción de una curva de transformación de outputs:

$$W = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu \cdot [F(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0)]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$(1) \frac{\partial W}{\partial x_1} = p_1 + \mu \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$(2) \frac{\partial W}{\partial x_2} = p_2 + \mu \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

$$(3) \frac{\partial W}{\partial \mu} = F(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0) = 0$$

Es decir:

$$\frac{2x_1}{2x_2} = \frac{4}{8}$$

$$x_1^2 = x_2^2 - 10.800 = 0$$

De donde:

$$x_1 = 12\sqrt{15}$$

$$x_2 = 24\sqrt{15}$$

Por lo que el ingreso máximo será:

$$I = 240\sqrt{15}$$

2. ¿El coste más bajo con que es posible producir con $x_1 = 40$, $x_2 = 120$ es?

Para minimizar el coste, habrá que minimizar la función de los mismos sujeta a la restricción de una curva de transformación de outputs:

$$W = q_1y_1 + q_2y_2 + \mu \cdot [F(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0)]$$

resolviendo mediante las condiciones de primer orden:

$$\frac{y_2 - 20}{y_1 - 40} = \frac{2}{1}$$

$$16.000 - (y_1 - 40)(y_2 - 20) = 0$$

y operando:

$$y_1 = 40\sqrt{5} + 40$$

$$y_2 = 80\sqrt{5} + 20$$

El correspondiente coste es:

$$C = 160\sqrt{5} + 100$$

PROBLEMA 3.36

Dada la función de producción $(x_1 + 1)^2(x_2 + 2)^2 - 25y^2 = 0$ si los precios de los outputs y del input son, respectivamente, $p_1 = 4$, $p_2 = 6$ y $q = 25$ los ingresos máximos que podrían obtenerse con una inversión de 1.500 unidades monetarias son:

Es una función de producción conjunta que depende de un sólo input y permite despejar el input y en función de los outputs:

$$y = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 2)}{5}$$

la función de costes será:

$$C = q \cdot y = 25 \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 2)}{5} = 5(x_1 + 1)(x_2 + 2)$$

PROBLEMA 3.37

Para hallar el ingreso máximo sujeto a una restricción de 1.500 unidades monetarias de coste:

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda \cdot [1.500 - 5(x_1 + 1)(x_2 + 2)]$$

Las condiciones de primer orden del problema son:

$$(1) \frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 - \lambda 5(x_2 + 2) = 0$$

$$(2) \frac{\partial L}{\partial x_2} = 6 - \lambda 5(x_1 + 1) = 0$$

$$(3) \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1.500 - 5(x_1 + 1)(x_2 + 2) = 0$$

de donde:

$$x_1 = 15\sqrt{2} - 1$$

$$x_2 = 10\sqrt{2} - 2$$

El ingreso correspondiente será:

$$I = 120\sqrt{2} - 16 = 153,70$$

Conocida la función de producción $x = (y_1 - 4)^{1/3}(y_2 - 2)^{2/3}$ y los precios de los inputs $q_1 = 10$ y $q_2 = 20$ y siendo el coste fijo igual a 20 ($CF = 20$), la función de costes totales es:

La función de coste a corto plazo se expresa como una función del volumen de output en producción simple. Teniendo en cuenta que debe representar el coste mínimo para cualquier cantidad de output, tiene que cumplir las ecuaciones:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$x = f(y_1, y_2)$$

$$y_1 = h(x) \quad y_2 = g(x)$$

en la segunda de las cuales x se conserva como variable. Con ambas ecuaciones es posible obtener las ecuaciones de los inputs en función de la cantidad de output.

Con los datos del problema:

$$\frac{\frac{1}{3}(y_1 - 4)^{-2/3}(y_2 - 2)^{2/3}}{\frac{2}{3}(y_1 - 4)^{1/3}(y_2 - 2)^{-1/3}} = \frac{10}{20}$$

$$x = (y_1 - 4)^{1/3}(y_2 - 2)^{2/3}$$

De la primera ecuación resulta:

$$(y_1 - 4) = (y_2 - 2)$$

y por sustitución en la segunda:

$$y_1 = x + 4 \quad y_2 = x + 2$$

Los costes en función del output son:

$$C = 10(x + 4) + 20(x + 2) + 20$$

El coste total es:

$$C = 30x + 100$$

2. ¿La función de costes medios totales es?

La función de coste a corto plazo se expresa como una función del volumen de output en producción simple.

El coste medio total es:

$$CMT = 30 + \frac{100}{x}$$

3. ¿La función de costes marginales es?

El coste total es:

$$C = 30x + 100$$

El coste marginal es:

$$C_m = 30$$

PROBLEMA 3.38

La función de producción de una empresa consta de dos factores sustituidos y uno limitativo, relacionados con la cantidad de producto según

las funciones $(x - 2)^3 = (y_1 + 5)^{1/2}(y_2 + 2)^{1/2}$, $y_3 = \frac{2x + 153}{2}$, siendo los

respectivos precios $q_1 = 2$, $q_2 = 0,5$ y $q_3 = 6$, entonces, la elasticidad del coste total para la cantidad de producto $x = 12$ es:

De la igualdad de las productividades marginales ponderadas y de la función de producción se despejan y_1 e y_2 en función de x , que llevadas a la ecuación de costes determinará la función de costes de la empresa.

$$x = (y_1 + 5)^{\frac{1}{6}} \cdot (y_2 + 2)^{\frac{1}{6}} + 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (y_1 + 5)^{-\frac{5}{6}} \cdot (y_2 + 2)^{\frac{1}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{6} (y_1 + 5)^{\frac{1}{6}} \cdot (y_2 + 2)^{-\frac{5}{6}}$$

$$(y_2 + 2) = 2(y_1 + 5)$$

De donde:

$$(y_2 + 2)^{1/2} = 2(y_1 + 5)^{1/2}$$

Sustituyendo en la función de producción se tiene:

$$(x - 2)^3 = 4(y_1 + 5)$$

$$y_1 = \frac{(x - 2)^3}{4} - 5$$

$$y_2 = 4(y_1 + 5) - 2 = 2(x - 2)^3 - 2$$

La función de costes será:

$$CT = 2\left(\frac{(x - 2)^3}{2} - 5\right) + \frac{1}{2}[2(x - 2)^3 - 2] + 6\frac{2x + 153}{2}$$

$$CT = 2x^3 - 12x^2 + 30x + 432$$

La elasticidad del coste total será:

$$N_{CT} = \frac{C_m}{CMT} = \frac{6x_2 - 24x + 30}{2x^2 - 12x + 30 + \frac{432}{x}}$$

para $x = 12$:

$$N_{CT} = \frac{606}{210} = \frac{101}{35}$$

2. ¿La elasticidad del coste medio para $x = 12$ es?

La elasticidad del coste medio:

$$N_{CM} = \frac{\frac{x}{CT}}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{CT}{x} \right)} = \frac{x}{CT} \cdot \frac{x C_m - CT}{x^2}$$

$$N_{CM} = \frac{C_m - \left(\frac{CT}{x} \right)}{\frac{CT}{x}} = \frac{C_m}{CT} - 1 = N_{CT} - 1$$

para $x = 12$:

$$N_{CM} = \frac{101}{35} - 1 = \frac{66}{35}$$

PROBLEMA 3.39

Dada la función de producción $x = y_1^{1/4} y_2^{3/4}$ si los precios de los factores de producción son respectivamente $q_1 = 1$ y $q_2 = 3$, la función de costes es:

(a) $C(x) = 3(3/2)^{2/3} x^{4/3}$

(b) $C(x) = 4x$

(c) $C(x) = 1/3 x^{4/3}$

(d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) $RMT_1^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial y_2} \right)} = \frac{q_1}{q_2}$

$$\frac{\left(\frac{1}{4} y_1^{-3/4} y_2^{3/4} \right)}{\left(\frac{3}{4} y_2^{-1/4} y_1^{1/4} \right)} = \frac{1}{3}$$

de donde $\frac{y_2}{3y_1} = \frac{1}{3}$, lo que implica $y_1 = y_2$:

$$C = q_1 y_1 + q_2 y_2 = y_1 + 3y_2 = y_1 + 3y_1 = 4y_1$$

$$x = y_1^{1/4} y_2^{3/4} = y_1^{1/4} y_1^{3/4} = y_1$$

lo que implica que $C = 4x$.

PROBLEMA 3.40

Si los costes fijos de una empresa son 2.400.000 unidades de cuenta (euros), los costes medios totales 20.000 y los costes medios variables 14.000, ¿cuál es el volumen de output?

$$\frac{CV}{x} + \frac{CF}{x} = \frac{CT}{x} = 14.000 + \frac{2.400.000}{x} = 20.000$$

$$\frac{2.400.000}{x} = 6.000 \quad x = 400$$

PROBLEMA 3.41

Dada la función de costes marginales $C_m = 3x^2 - 18x + 90$, la elasticidad del coste variable para la cantidad de producto $x = 10$ es:

- (a) 2,10
- (b) 1,2
- (c) 60
- (d) 21

RESPUESTA: (a) Es necesario obtener la función de costes variables:

$$CV = \int C_m(x) = \int (3x^2 - 18x + 90) dx = x^3 - 9x^2 + 90x$$

De aquí:

$$N_{CV} = \frac{3x^2 - 18x + 90}{x^2 - 9x + 90}$$

para $x = 10$:

$$N_{CV} = 2,10$$

PROBLEMA 3.42

Dada la función de costes marginales $C_m = x^2 - 4x + 10$, ¿cuál será función de costes totales para unos costes fijos de $33\frac{1}{3}$?

- (a) $10x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 33\frac{1}{3}$
- (b) $10x - 4x + x^2$
- (c) $2x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)x^3 + 33\left(\frac{1}{3}\right)$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $C(x) = \int (10 - 4x + x^2) dx = 10x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + c$.

Siendo c la constante de integración que constituye la incógnita ahora:

$$C(0) = c \text{ cuando } x = 0, CF = c, \text{ por lo que:}$$

$$CT = 10x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 33\frac{1}{3}$$

2. ¿El valor mínimo de los costes marginales para el volumen de output que hace que esa función esté en su mínimo es?

- (a) 7
- (b) 4

(c) 10

(d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $C'(x)$ = mínimo cuando su derivada primera (ella es a su vez una derivada) es igual a cero:

$$CMV = 10 - 2x + \frac{1}{3}x^2$$

$$\frac{dCMV}{dx} = -2 + \frac{2}{3}x = 0 \quad x = 3$$

$$CMV(3) = 10 - 2 \cdot 3 + \frac{1}{3}(3)^2 = 7$$

$$\frac{dCMT}{dx} = -2 + \frac{2}{3}x - \frac{33\left(\frac{1}{3}\right)}{x^2} = 0$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 11\frac{1}{3} = 0 \quad x = 5$$

$$CMT = 10 - 2 \cdot 5 + \frac{1}{3}(5)^2 + \frac{33\left(\frac{1}{3}\right)}{5} = 15$$

$P_{op \text{ exp}} = 15$ precio para el óptimo de explotación

3. Si $p = 10$, ¿cuál es el output de máximo beneficio?

- (a) 4
- (b) 6
- (c) 3
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $p = C_m$, $10 = x^2 - 4x + 10$, $x = 4$.

4. ¿Cuál es el porcentaje de los costes fijos cubiertos en ese caso?

- (a) 32,33%
- (b) 21%
- (c) 33%
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a):

$$Cv = 10x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 = 10 \cdot 4 - 2(4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3 = \frac{88}{3}$$

$$IT = px = 10 \cdot 4 = 40 = \frac{120}{3}$$

luego

$$\frac{\frac{120}{3} - \frac{88}{3}}{\frac{32}{3}} = \frac{\frac{32}{3}}{\frac{100}{3}} \cdot 100 = 32,33\%$$

Capítulo 4

Competencia perfecta y monopolio

Notas teóricas

Las matemáticas del equilibrio a corto plazo de la empresa monopolista

Usualmente el precio determina la cantidad, de modo que la cantidad depende del precio y $x = f(p)$ es la función de demanda directa. Pero como ya sabemos, en este caso y desde un punto de vista analítico es más conveniente trabajar con la función inversa (el tema claramente se solapa con el llevado a cabo en el capítulo 2). Si la función inversa de demanda para el producto a la que se enfrenta el monopolista $p = f(x)$ es decreciente $f' < 0$ y denotamos por $C = C(x)$, sus costes totales, dado que el objetivo de la empresa es maximizar el beneficio, definido ahora como:

$$B = I - C = px - C(x) = f(x)x - C(x)$$

la condición de primer orden de máximo es:

$$B_m = I_m - C_m = 0$$

Es decir, la empresa deberá llevar el volumen de output hasta que el ingreso derivado de la venta de una unidad de output, es decir, el ingreso marginal de la misma, sea igual al coste marginal derivado de producir dicha unidad. Pero debe notarse que el ingreso marginal en este caso es ¹⁵:

$$I_m = f'(x)x + f(x)$$

¹⁵ El ingreso medio, que tiene menos interés por el momento, es: $IM = (px/x) = [f(x)x/x] = f(x) = p$ es decir, de nuevo y al igual que en la competencia perfecta, es la curva de demanda; sólo que aquí es una función de p y no una constante.

donde $f'(x) = (dp/dx)$ indicando la mencionada variación en el precio, y sus más complicados efectos que en el caso de la competencia perfecta. Su multiplicación por x indica que ello afecta a todas las unidades, incluidas las ventas con anterioridad a la variación en el precio. Igualando al coste marginal y reordenando se obtiene:

$$f(x) + f'(x)x = C_m$$

$$f(x) = C_m - xf'(x)$$

$$f(x) - C_m = -xf'(x)$$

Pero $f(x)$ es igual a p , por lo que:

$$p - C_m = -xf'(x)$$

o, lo que es lo mismo:

$$C_m - p = xf'(x)$$

$$x_M = \frac{C_m - p}{f'(x)}$$

obtenemos una fórmula para la cantidad de output de maximización del beneficio que lanzará el monopolista, siempre que se cumplan las demás condiciones de óptimo (máximo aquí). Conocida como fórmula de Cournot. Alternativamente, donde p_M es el precio del monopolio:

$$p_M = C_m - x_M f'(x)$$

O, de otro modo, conocida la cantidad de equilibrio, basta sustituir en la función inversa de demanda y se obtendrá el precio de monopolio. La diferencia, $C_m - p$ es —obviamente— la divergencia entre el precio y el coste marginal, y se toma como indicador del grado de monopolio (y se le conoce en la literatura como *índice de Lerner*); cuanto mayor sea la divergencia, mayor el índice de monopolio; recuérdese que en competencia perfecta el precio era igual a C_m , y por tanto cero la divergencia.

La condición de segundo orden de máximo viene dada por:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = I'_m - C'_m < 0$$

o lo que es lo mismo:

$$I'_m < C'_m$$

la relación entre las pendientes ya indicada. Es decir se acotan los costes marginales a su tramo positivo $C'_m(x) < 0$ y creciente $C'_m(x) > 0$.

Función de demanda de la empresa competitiva

PROBLEMA 4.1

En un mercado de competencia perfecta la función de oferta es: $x^s = 0,5p - 5$ y la demanda $x^d = 55 - 2,5p$. Hallar la función de demanda para una empresa que opere en dicho mercado.

En el enunciado primero se identifica al problema como de competencia perfecta; luego se aprecia que las funciones se refieren al *mercado*. Es posible obtener el equilibrio de éste sin más que igualar oferta a demanda:

$$x^d = x^s = x \quad -5 + (1/2)p = 55 - 2,5p$$

y operando:

$$1/2p + 2,5p = 55 + 5$$

$$p + 5p = 120$$

$$6p = 120$$

de donde:

$$p = (120/6) = 20$$

Sustituyendo ahora en la función de demanda de mercado:

$$x^d = 55 - 2,5p = 55 - 2,5 \cdot 20 = 5$$

o en la de oferta de mercado, como comprobación:

$$x^s = -5 + (1/2) \cdot 20 = -5 + 10 = 5$$

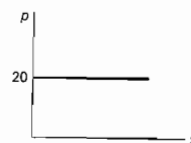


Figura 4.1

Se aprecia que se igualan las cantidades ofrecidas y demandadas para ese precio. Por otro lado la función de demanda a la que se enfrenta la empresa competitiva es *como si* fuera una recta horizontal paralela al eje de abscisas a la altura del precio de mercado. Por lo que, en este caso: la función de demanda solicitada es $p = 20$.

Elasticidad de la demanda de mercado

PROBLEMA 4.2

Con los datos del problema anterior, obtenga la elasticidad de la demanda de mercado en el equilibrio.

La fórmula de la elasticidad de la demanda es:

$$E = -\frac{dx}{dp} \frac{p}{x}$$

y derivando en $x^d = 55 - 2,5p$:

$$\frac{dx}{dp} = -2,5$$

p es simplemente p y x es la función entera $x^d = 55 - 0,5p$, por lo que sustituyendo en E :

$$E = (-)(-2,5) \frac{p}{55 - 0,5p}$$

(se explicitan los signos menos para recordar la convención de signos en este caso) y como $p = 20$:

$$E = \frac{2,5 \cdot 20}{55 - 2,5 \cdot 20} = \frac{50}{55 - 50} = \frac{50}{5} = 10$$

La demanda es, por tanto, en ese punto elástica.

Equilibrio y beneficios

PROBLEMA 4.3

En un mercado de competencia perfecta existen 1.000 empresas que se reparten una demanda de mercado, $x = 500 - 2p$. La tecnología de las empresas implica funciones de costes totales del tipo, $CT_i = x_i^2 + 10x_i + 20$. Halle el equilibrio a corto plazo del mercado y de las empresas, y los beneficios individuales.

La maximización del beneficio por parte de la empresa individual implica hacer igual precio a coste marginal (suponiendo las condiciones de segundo orden, y que el precio sea superior al mínimo el coste medio variable) por lo que:

$$C_{mi} = 2x_i + 10 = p$$

$$x_i = \frac{p - 10}{2} = \frac{p}{2} - 5$$

por lo que la oferta global es:

$$\sum_{i=1}^{1.000} [(p/2) - 5] = 1.000(p/2) - 1.000 \cdot 5 = 500p - 5.000$$

Igualando la oferta a la demanda:

$$x^s = 500p - 5.000 = 500 - 2p = x^d$$

$$p = 10,95$$

de donde:

$$x_i = \frac{10,95 - 10}{2} = 0,475 \quad i = 1, \dots, 1.000$$

Que es lo que ofrece cada empresa. Los beneficios individuales son:

$$\begin{aligned} B_i &= I_i - C_i = 10,95 \cdot 0,475 - (0,475)^2 - 10 \cdot 0,475 - 20 = \\ &= 5,20 - 24,97 = -19,77 \text{ uu.cc. (euros)} \end{aligned}$$

Curva de oferta

PROBLEMA 4.4

Una empresa cuya función de costes variables es $CV = x^3 - 10x^2 + 30x$, trabaja en un mercado de competencia perfecta en el que el precio de mercado (p) es 20. Determinar la función de oferta de la empresa, el volumen de output óptimo y la elasticidad de la oferta en el equilibrio.

Elementos: competencia perfecta; costes variables; precio de mercado; se pide la E sobre x^s . Sabemos que para que la empresa esté en equilibrio debe hacer:

$$p = C_m$$

(además de $C'_m > 0$ y $p \geq$ mínimo de los CMV). El enunciado nos da el p y podemos hallar los C_m sin más que hacer la primera derivada de los CV que nos la provee el enunciado, $CV = x^3 - 10x^2 + 30x$. Operando:

$$C_m = \frac{dCV}{dx} = 3x^2 - 20x + 30 = p$$

$$3x^2 - 20x + 10 = 0$$

función cuadrática con dos raíces:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 120}}{6}$$

$$x_1 = 6,12 \quad y \quad x_2 = 0,5$$

(las condiciones de segundo orden $C'_m > 0$, eliminan como posible a la raíz menor). La función de oferta es la función de C_m a partir del mínimo de los costes medios variables, y estos son fáciles de obtener:

$$CMV = \frac{CV}{x} = x^2 - 10x + 30$$

y tendrá un mínimo cuando:

$$\frac{dCMV}{dx} = 2x - 10 = 0 \quad x = 5 < 6,12$$

(es decir, nótese que es inferior a la raíz máxima anterior o volumen de output óptimo para estos parámetros). La función de oferta de la empresa es por tanto:

$$3x^2 - 20x + 30 = p = 20 \quad (x \geq 5)$$

La fórmula de la elasticidad es:

$$N = \frac{dx}{dp} \frac{p}{x}$$

(nótese que sin signo menos, a diferencia de la demanda, ya que la oferta tiene pendiente positiva) p lo da el problema, en este caso 20, x lo hemos hallado, es 6,12 y (dx/dp) se puede hacer sobre la ecuación anterior. Nótese que en este caso es más sencillo hacer (dp/dx) y tomar su inversa en la fórmula:

$$N = \frac{dx}{dp} \frac{p}{x} = \frac{1}{dp/dx} \frac{p}{x} = \frac{1}{6x - 20} \frac{20}{6,12} = \frac{20}{(6 \cdot 6,12 - 20) \cdot 6,12} = \frac{20}{102,31} = 0,195$$

Función de oferta que es, por tanto, inelástica.

Punto de cierre

PROBLEMA 4.5

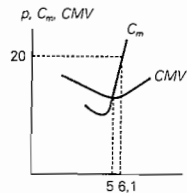


Figura 4.2

Una empresa que actúa en un mercado de competencia perfecta, está caracterizada por una función de costes variables $CV = x^3 - 10x^2 + 30x$. Establezca la cantidad mínima ofrecida.

Se trata tan sólo de hallar el punto de la curva de costes marginales, curva de oferta, donde arranca, es decir el mínimo de la de costes medios variables. Pero para esta misma función lo hemos hallado en el Problema anterior. El objetivo del problema es reparar en el significado de la cantidad mínima ofrecida. Por tanto, la cantidad es $x = 5$.

Cuantificación de beneficios

PROBLEMA 4.6

Una empresa que actúa en un mercado de competencia perfecta está caracterizada por cuya función de costes totales $CT = x^3 - 10x^2 + 30x + 50$, la función de oferta de mercado es $x^s = 0,5p - 5$ y la demanda $x^d = 55 - 2,5p$. Obtener la cantidad que ha de ofrecer la empresa para maximizar su beneficio, así como los beneficios de las empresas.

En realidad lo que se hace es optimizar; o dicho de otro modo, a veces lo mejor que se puede hacer es minimizar las pérdidas. Esta última coletilla nos pone en guardia de que puede ser un caso especial en algún sentido. Debe notarse que el problema es una combinación de los anteriores; la diferencia es que en vez de darnos el precio, nos aporta las funciones de oferta y de demanda de mercado, por lo que tendrá que hallarse. Pero precisamente para esas funciones lo obtuvimos ya en el Problema 4 el precio de equilibrio del mercado era $p = 20$. Ya sabemos que para maximizar el beneficio tendrá que hacer $I_m = C_m$, o lo que es lo mismo en este contexto $p = C_m$, al igual que en los problemas anteriores; y $C'_m > 0$ y $p \geq CMV$.

Otra novedad es que la función de costes incluye los fijos (en este caso 50) y en consecuencia es de costes totales, pero el resto de la función es idéntica a la de los Problemas anteriores. Ello en cambio permite obtener los beneficios, ya que en ausencia de los costes fijos no podrían ser determinados con precisión. En efecto, ahora, sin más que llevar a cabo unos productos y una resta:

$$IT = p \cdot x = 20 \cdot 6,12 = 122,4$$

$$CT = (6,12)^3 - 10(6,12)^2 + 30(6,12) + 50 = 229,2 - 374,5 + 183,6 + 50 = 88,28$$

$$B = IT - CT = 122,4 - 88,28 = 34,12$$

Cantidades y precios de equilibrio

PROBLEMA 4.7

Una empresa cuya función de costes es, $CT = x^3 - 10x^2 + 30x + 50$ opera en un mercado en el que obtiene las mismas pérdidas funcione o no funcione. Hállese el precio vigente en dicho mercado.

COMENTARIO INICIAL: Cuando afirma que obtiene las mismas *pérdidas* tanto si funciona como si cierra obviamente se está refiriendo al mínimo de los costes medios variables (en él pierde todos los fijos actúe o no). Debe tenerse en cuenta. Pero no debe confundirse con el caso de un problema anterior en el que se afirmaba que la empresa «no obtiene ni beneficios ni pérdidas» (beneficio extraordinario nulo).

El problema por lo demás es como los del tipo habitual, ya discutidos. Se trata de hallar el mínimo de explotación, donde pierde los costes fijos y donde:

$$I = CV \quad y \quad p = CMV$$

Además de que $p = C_m$, como es habitual y $C_m = CMV$. Ahora se halla fácilmente:

$$CV = x^3 - 10x^2 + 30x$$

(sin más que eliminar el término CF , o lo que es lo mismo aquí, 50) y el CMV (dividiendo por x) sabemos ya por Problemas anteriores que tiene un mínimo para $x = 5$.

Otro método consiste en igualar coste marginal a medio. El C_m es $3x^2 - 20x + 30$ y al igualar CMV a C_m se simplifica la expresión:

$$x^2 - 10x + 30 = 3x^2 - 20x + 30$$

resultando:

$$2x^2 - 10x = 0 \quad 2x - 10 = 0$$

$$2x = 10 \quad x = 5$$

$$CMV = x^2 - 10x + 30 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 30 = 5$$

COMENTARIO: Se puede hallar igualmente haciendo $C_m(5) = p$.

$$C_m = x^2 - 10x + 30 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 30 = 5$$

Equilibrio a largo plazo de la empresa competitiva

PROBLEMA 4.8

Una empresa cuya función de costes es $CML = -x_i^2 + 4x_i$ está en situación de equilibrio a largo plazo en un mercado cuya función de demanda es $x^d = 1.000/p$. Hállese la cantidad lanzada y el precio de mercado.

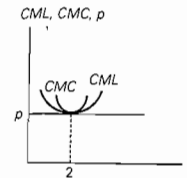


Figura 4.3

Debe repararse en la situación de equilibrio a largo plazo.

Bastará para obtener la cantidad de equilibrio lanzada por la empresa hallar el mínimo de los costes a largo:

$$CML = x_i^2 + 4x_i$$

que en este caso es:

$$-2x_i + 4 = 0 \quad 2x_i = 4 \quad x_i = 2$$

Y con el mínimo de los costes para esa cantidad, el coste-precio, es decir, la ordenada para ese volumen de producción es:

$$CML(x_i = 2) = 2^2 + 4 \cdot 2 = 12 = p$$

y para ese precio la demanda de mercado es:

$$x^d = \frac{1.000}{12} = 83,3$$

Industria y número de empresas

PROBLEMA 4.9

Con los datos del problema anterior hállese el número de empresas existentes en ese mercado y la elasticidad de la demanda en el equilibrio.

Como x^d es 83,3 el número de empresas es:

$$n = \frac{x^d}{x_i} = \frac{83,3}{2} = 41,6 \approx 41$$

Hallar ya la elasticidad es un proceso mecánico ya conocido por Problemas anteriores, recordando que (dx/dp) sobre la función de demanda que nos provee el enunciado es:

$$\left(\frac{dx}{dp}\right) = -\frac{1.000}{p^2} = -\frac{1.000}{144} = -6,94$$

y sustituyendo en la fórmula de la elasticidad:

$$E = -\frac{dx}{dp} \frac{p}{x} = -(-6,94) \frac{12}{83,3} = 1$$

Que tiene elasticidad unitaria¹⁶.

¹⁶ Quizá tendría más sentido calcular la elasticidad sobre la curva de demanda de mercado.

PROBLEMA 4.10

En una industria la función de costes de adaptación parcial a largo que obedece a la expresión: $C = a + \frac{(x^3 - 10x^2 + 40x)^2}{4a}$ siendo a el parámetro que define a cada una de las empresas componentes, la función de demanda total del mercado es: $x(p - 3) = 3.120$. Determinar el número de empresas que abastecerán el mercado en el equilibrio a largo plazo.

A largo plazo la industria está formada por empresas con la dimensión óptima, que funcionan según su óptimo de explotación. Por tanto, el número de ellas resultará de dividir la cantidad demandada al precio igual al menor coste a largo plazo, por la dimensión óptima de la empresa:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = 1 - \frac{(x^3 - 10x^2 + 40x)^2}{4a^2} = 0$$

de donde:

$$a = \frac{1}{2}(x^3 - 10x^2 + 40x)$$

y en consecuencia:

$$C_L = \frac{1}{2}(x^3 - 10x^2 + 40x) + \frac{(x^3 - 10x^2 + 40x)^2}{4 \cdot \frac{1}{2}(x^3 - 10x^2 + 40x)}$$

o lo que es lo mismo:

$$C_L = x^3 - 10x^2 + 40x$$

la dimensión óptima de la empresa corresponde al punto donde:

$$\frac{\partial C_L}{\partial x} = 2x - 10 = 0 \quad x = 5$$

cantidad para la que el coste medio es mínimo y a su vez igual al precio que existirá en el mercado en la consideración a largo plazo, el cual será:

$$p = C_m = 3x^2 - 20x + 40 = 15 \quad \text{en el punto } x = 5$$

a este precio la cantidad demandada es, según la función de demanda:

$$x = \frac{3.120}{15 - 3} = 260$$

luego el número de empresas que abastecerán el mercado será:

$$n = \frac{260}{5} = 52$$

Pérdidas y beneficios

PROBLEMA 4.11

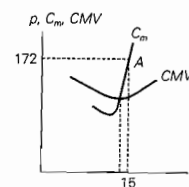


Figura 4.4

La función de costes de una empresa que trabaja en régimen de competencia perfecta es $C = \frac{2x^3}{3} - 12x^2 + 82x + 576$. Determinar el beneficio o pérdida obtenido si el precio vigente en el mercado es $p = 172$.

Por tratarse de un mercado de competencia perfecta la empresa lanzará aquella cantidad que haga igual precio de mercado al coste marginal para esa cantidad:

$$C_m = 2x^2 - 24x + 82 = p = 172$$

Es decir:

$$x^2 - 12x - 45 = 0$$

ecuación cuya raíz positiva es la abscisa del punto A en la figura 4.4:

$$x = 6 \pm \sqrt{36 + 45} = 6 \pm 9 = 15$$

La cantidad ofrecida por la empresa es $x = 15$, y los ingresos que se obtienen son:

$$I = p \cdot x = 172 \cdot 15 = 2.580$$

Los costes totales resultan de sustituir $x = 15$ en la función de costes dada por el enunciado:

$$C = 2.250 - 2.700 + 1.230 + 576 = 1.356$$

de donde:

$$B = I - C = 2.580 - 1.356 = 1.224$$

PROBLEMA 4.12

Una empresa que trabaja en un sector de competencia perfecta, tiene la siguiente función de costes totales $C = 2x^3 + 5x + 100$ y vende su producto obteniendo un beneficio de 3.900, determínese el precio a que vende dicho producto.

Sabemos que en la situación de equilibrio el precio es igual al coste marginal de cada empresa; además se conoce el beneficio que viene dado por:

$$B = I - C = 3.900$$

Los ingresos en este caso vienen dados por $(C_m \cdot x)$, es decir:

$$I = p \cdot x = C_m \cdot x = x \cdot (6x^2 + 5) = 6x^3 + 5x$$

Y como se conoce la función de costes totales, el beneficio se puede expresar de la siguiente forma:

$$B = 3.900 = 6x^3 + 5x - 2x^3 - 5x - 100$$

$$4x^3 = 4.000 \Rightarrow x = 10$$

para $x = 10$, el precio es:

$$p = C_m = 6x^2 + 5 = 600 + 5 = 605$$

Equilibrio con varias empresas

PROBLEMA 4.13

Tres empresas venden un producto homogéneo en un mercado de competencia perfecta, siendo las funciones de costes respectivamente: $C_1 = x^3 + 12x + 185$, $C_2 = 2x^2 + 12x + 40$, $C_3 = 4x^2 + 20x + 100$. Para el precio que existe en el mercado la tercera empresa no obtiene beneficios ni pérdidas. Determinar el beneficio de las dos restantes.

Como la tercera empresa no tiene ni beneficios ni pérdidas, ello quiere decir que ofrece la cantidad correspondiente al óptimo de explotación, esto es:

$$C_{m3} = 8x + 20 = CMT_3 = 4x + 20 + \frac{100}{x} \Rightarrow 4x^2 = 100 \quad x = 5$$

Ahora ya se puede conocer el precio que existe en el mercado (el tema es algo trivial por el supuesto de información perfecta), ya que al ser igual al coste marginal de la empresa implica:

$$p = C_{m3} = 8x + 20 = 40 + 20 = 60 = p$$

Para este precio la primera empresa ofrece la cantidad de producto:

$$p = 60 = C_{m1} = 3x^2 + 12 \quad x = 4$$

obteniendo unos ingresos:

$$I_1 = p \cdot x_1 = 4 \cdot 60 = 240$$

y como los costes totales son:

$$C_1 = 64 + 48 + 185 = 297$$

Lo que da un pérdida de 57 unidades de cuenta (euros). Sin embargo, le interesa seguir produciendo porque cubre parte de los *costes fijos*. Por su parte la segunda empresa:

$$p = 60 = 4x + 12 \quad x = 12$$

$$I_2 = p \cdot x = 60 \cdot 12 = 720$$

$$C_2 = 288 + 144 + 40 = 472$$

Con lo que obtiene un beneficio extraordinario de:

$$B_2 = I_2 - C_2 = 720 - 472 = 248$$

Costes marginales y costes fijos

PROBLEMA 4.14

Una empresa tiene una función de costes medios variables, $CMV = 2x^2 - 10x + 36$. Determinar los costes fijos, sabiendo que en un mercado de competencia perfecta si el precio fuese $p = 260$, el beneficio neto sería 1.300 unidades.

A partir de la función de costes variables:

$$CV = 2x^3 - 10x^2 + 36x$$

se obtiene la de costes marginales $C_m = 6x^2 - 20x + 36$ que se iguala al precio de mercado, $p = 260$:

$$260 = 6x^2 - 20x + 36$$

$$3x^2 - 10x - 112 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(25 \pm 336)}}{3} = \frac{5 \pm 19}{3} = 8$$

Para esta cantidad de producto la empresa obtiene unos ingresos:

$$I = p \cdot x = 260 \cdot 8 = 2.080$$

en tanto que los costes variables serían:

$$CV = 1.024 - 640 + 288 = 672$$

PROBLEMA 4.15

y como el beneficio es 1.300 puede establecerse la igualdad:

$$1.300 = 2.080 - 672 - CF$$

de donde los costes fijos son:

$$CF = 108$$

Una empresa que fabrica *puzzles* está caracterizada por una función de costes marginales $C_m = 3x^2 - 20x + 30$, y opera en un mercado de competencia perfecta en el que el precio es tal que la empresa se nivela (no obtiene ni beneficios extraordinarios ni pérdidas). Determinénse los costes fijos de la empresa.

COMENTARIO PREVIO: Este problema es claramente irreal; es un *puzzle*, y de aquí el juego de palabras del enunciado. Las empresas conocen su tecnología y los precios de los mercados tanto de productos como de factores en los que trabajan. Con razón de más conocen sus costes fijos, por lo que el problema es muy artificioso; sin embargo algunos similares son relativamente comunes en la literatura, razón por la que se introduce aquí.

Aceptando el planteamiento, el hecho no habitual de dar como dato los C_m (cuando siempre los teníamos que obtener derivando, como un resultado) nos tiene que hacer sospechar que el «proceso de resolución» es inverso a los anteriores. Lo que dice el problema es que el *óptimo de explotación* (beneficios extraordinarios nulos) es decir, el mínimo de los costes medios *totales* para el que por otro lado es igual al coste marginal, se obtiene para un volumen de producción tal que se nivela (es decir, no obtiene ni beneficios ni pérdidas extraordinarias, por definición, es decir, porque lo dice el enunciado del problema).

Por otro lado se obtienen los costes totales mediante el proceso inverso al normal de pasar de los costes totales a marginales, es decir, *integrando* (como es bien conocido, la integral es la operación inversa de la derivación habitual):

$$CT = \int C_m = \int (3x^2 - 20x + 30) dx$$

$$CT = x^3 - 10x^2 + 30x + CF$$

de donde los costes medios serán:

$$CMT = \frac{x^3 - 10x^2 + 30x + CF}{x} = x^2 - 10x + 30 + \frac{CF}{x}$$

Pero en el mínimo se debe cumplir que su derivada tiene que ser igual a cero:

$$\frac{dCMT}{dx} = 2x - 10 - \frac{CF}{x^2} = 0$$

por lo que cualquier cuantía de coste fijo que verifique la ecuación sería un coste fijo admisible. Por ejemplo $CF = 0$ y $x = 5$, o $CF = 10$ y $x = 5,1859$. Como estos valores no son fáciles de hallar, quizá sería mejor pedir el enunciado la expresión que debe verificar los costes fijos que sería $CF = 2x^3 - 10x^2$.

Se comprueba que es un mínimo al hacer:

$$\frac{d^2CMT}{dx^2} = 2 + \frac{2CF}{x^3} > 0$$

Monopolio: condiciones de equilibrio

PROBLEMA 4.16

Sea una empresa monopolista de oferta, cuya función de costes es $C = x^2 + x + 100$, siendo la función de demanda de mercado a la que se enfrenta, $x = 20 - p$. Establezca el volumen de beneficio si lo hay, y discuta si el monopolista se sitúa o no en el tramo elástico.

La primera condición de equilibrio es:

$$I_m = C_m$$

por lo que operando:

$$I = px = (20 - x)x = 20x - x^2$$

$$I_m = 20 - 2x$$

$$C_m = 2x + 1$$

Luego:

$$2x + 1 = 20 - 2x \quad 4x = 19$$

$$x_M = \frac{19}{4} = 4,75$$

Por lo que sustituyendo en la función de demanda inversa el precio de monopolio:

$$p_M = 20 - x = 15,25$$

La condición de segundo orden es en este caso:

$$I'_m = -2 < C'_m = 2$$

Y la elasticidad:

$$E = -\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = -(-) \frac{15,25}{4,75} = 3,21 > 1$$

PROBLEMA 4.17

Luego el monopolista se sitúa en el tramo elástico de la curva de demanda. Los costes totales son:

$$C = 22,56 + 4,75 + 100 = 127,31$$

y los ingresos totales:

$$I = 72,43$$

y los beneficios:

$$B = I - C = 72,43 - 127,31$$

Por lo que los beneficios, negativos (pérdidas), son:

$$B = 54,88$$

Una empresa monopolista cuya función de costes es $CV = 2x^3 - 10x^2 + 50x$ se enfrenta a la función de demanda, $x = 48 - p$. Obtener el precio y cantidad para los que la empresa maximiza su beneficio.

Sabemos por la teoría correspondiente que las condiciones de maximización del beneficio para un monopolio son:

$$I_m = C_m \quad I'_m < C'_m \quad p \geq \text{mín } CMV$$

Como $I = px$ y a su vez la función de demanda puede reescribirse como $p = 48 - x$, entonces los ingresos totales son:

$$I = px = (48 - x)x = 48x - x^2$$

de donde los marginales son $I_m = 48 - 2x$.

Por otro lado el coste marginal se obtiene directamente (derivando) de la función de costes de que nos provee el enunciado del problema:

$$C_m = 6x^2 - 20x + 50$$

Igualando I_m a C_m :

$$\begin{aligned} 48 - 2x &= 6x^2 - 20x + 50 \\ x &= \frac{18 \pm \sqrt{276}}{12} = \frac{18 \pm 16,61}{12} \end{aligned}$$

de donde $x_1 = 0,12$ y $x_2 = 2,88$. Como sólo $x_2 (= 2,88)$ cumple la condición de segundo orden:

$$I'_m = -2 < C'_m = 12x - 20 = 12 \cdot 2,88 - 20 = 14,56$$

y además:

$$\begin{aligned} CMV &= 2x^2 - 10x + 50 = 2(2,88)^2 - 10(2,88) + 50 = 37,79 \\ CMV(2,88) &= 37,79 < p = 48 - 2,88 = 45,12 \end{aligned}$$

Output y tramo elástico

PROBLEMA 4.18

Una empresa monopolista cuya función de costes totales es $CT = 0,2x^2 + x + 70$, se enfrenta a la función de demanda de mercado $x = 30 - 2p$. Obtener los resultados de la empresa y la elasticidad de la demanda en el equilibrio.

El problema es igual que los anteriores, sólo que además es necesario calcular el valor absoluto de los beneficios y, por ende, de los ingresos y costes (y no sólo los marginales como en los anteriores). Por lo tanto, operando al modo ya habitual:

$$\begin{aligned} I &= px = (15 - 0,5x)x \\ I_m &= 15 - x \quad C_m = 0,4x + 1 \\ I_m &= C_m \Rightarrow x_M = 10 \\ p &= 15 - 0,5 \cdot 10 = 10 \\ E &= -\frac{dx}{dp} \frac{p}{x} = -(-2) \frac{10}{10} = 2 > 1 \end{aligned}$$

Pero calcular B es trivial por lo sencillo:

$$\begin{aligned} B(x) &= I(x) - C(x) \\ I(x) &= 10 \cdot 10 = 100 \\ C(x) &= 0,2 \cdot 10^2 + 10 + 70 = 100 \end{aligned}$$

Luego el beneficio extraordinario es nulo en este caso. Es decir, que la función de costes medios es tangente a la de demanda para el volumen de output óptimo de equilibrio, de maximización del beneficio, o de otro modo que se cumple para ese volumen de output que, $p = CMV$.

Equilibrio en el monopolio con dos plantas

PROBLEMA 4.19

Si una estructura de mercado monopolista de oferta, en la que la empresa dispone de dos plantas, cuyas funciones de costes son $C_1 = 10x_1^2 - 20x_1 + 30$, $C_2 = 22x_2^2 + 15x_2 + 5$, y el precio de mercado es 150 euros, determine el equilibrio para la empresa: (a) si la empresa produce independientemente en cada una de las dos plantas, y; (b) si produce interrelacionadamente.

1. Planteemos primero la maximización del beneficio (hipótesis de equilibrio), conjuntamente:

$$B = I - C = px_1 + px_2 - C_1 - C_2$$

$$B = 150(x_1 + x_2) - 10x_1^3 + 20x_1 - 30 - 22x_2^2 - 15x_2 - 5$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 150 - 30x_1^2 + 20 = 0$$

$$30x_1^2 = 170$$

$$x_1^2 = \frac{17}{3}$$

$$x_1 = 2,38$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = 150 - 44x_2 - 15 = 0$$

$$x_2 = \frac{135}{44} = 3,06$$

Cuyas condiciones de segundo orden son:

$$B'_1 = -60x_1 \quad B'_2 = -44$$

ambas menores que cero, para los valores de equilibrio de x_1 y x_2 , luego estos son los máximos relativos.

2. Veamos lo que ocurre si produce con total independencia, es decir, maximiza el beneficio en cada planta:

$$B = 150x_1 - 10x_1^3 + 20x_1 - 30$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 150 - 30x_1^2 + 20 = 0$$

$$170 = 30x_1^2$$

$$x_1^2 = \frac{170}{30}$$

$$x_1 = 2,38$$

Para la segunda planta:

$$B = 150x_2 - 22x_2^2 - 15x_2 - 5$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = 150 - 44x_2 - 15 = 0$$

$$x_2 = 3,06$$

PROBLEMA 4.20

Qué, suman los mismos volúmenes de output que para maximización conjunta del beneficio.

Suponga un monopolio con dos plantas cuyas funciones de costes respectivas son $C_1 = 0,51x_1^2$, $C_2 = x_2^2 + 2x_2 + 3$; obtenga el equilibrio de la empresa y los beneficios, con especificación de las imputaciones a cada una de las plantas, si la función de demanda de mercado a la que se enfrenta es $x = 100 - 5p$.

La curva de demanda de mercado puede reescribirse como:

$$p = 20 - 0,2x$$

y la función de beneficio conjunto:

$$B = I - C = I - C_1 - C_2 = (20 - 0,2x)x - 0,51x_1^2 - x_2^2 - 2x_2 - 3$$

Para maximizarla será necesario hacer, al modo ya habitual:

$$I_m = C_{m1}$$

$$I_m = C_{m2}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$I = 20x - 0,2x^2$$

$$I_m = 20 - 0,4x$$

$$I_m = C_{m1} = 20 - 0,4x_1 = 1,02x_1$$

$$I_m = C_{m2} = 20 - 0,4x_2 = 2x_2 + 2$$

$$x_1 = 14,08$$

$$x_2 = 7,5$$

$$x = x_1 + x_2 = 21,58$$

$$p = 20 - 0,2 \cdot 21,58 = 15,68$$

$$B = I - C = 338,37 - 185,35 = 153,02$$

Intervenciones reguladoras

PROBLEMA 4.21

Ante un mercado monopolista, la autoridad económica quiere estimular la producción del mismo a través de una intervención reguladora consistente en establecer un precio máximo. Calcular dos alternativas, una relativa a obtener el mayor output, y otra que llevaría a cubrir los costes

tan sólo. La función inversa de demanda de mercado es $p = 100 - 0,2x$ y la de costes del monopolista es $C = 0,5x^2 + 60x$.

La teoría nos enseña que:

1. Si el monopolio no estuviese regulado haría $I_m = C_m$.
2. Que la primera alternativa es hacer $IM = C_m$.
3. Que la segunda es hacer $IM = CM$.

Calculando primero la segunda:

$$1. \quad IM = \frac{IT}{x} = \frac{px}{x} = p = 100 - 0,2x$$

y:

$$\begin{aligned} C_m &= x + 60 \\ IM = C_m &= 100 - 0,2x = x + 60 \end{aligned}$$

de donde:

$$x = 33,33$$

y:

$$p = 100 - 0,2 \cdot 33,33 = 93,33$$

La tercera alternativa es:

$$3. \quad IM = CM = 100 - 0,2x = \frac{C}{x} = \frac{0,5x^2 + 60x}{x} = 0,5x + 60$$

ecuación en x , de la que se obtiene como solución:

$$x = 57,14$$

siendo p ahora, 88,57.

Conviene analizar, por último, si esas acciones logran sus objetivos, al compararlas con la situación de monopolio puro, calculando la alternativa 1, $I_m = C_m$. Pero para ello necesitamos primero el IT :

$$IT = (100 - 0,2x)x = 100x - 0,2x^2$$

de donde:

$$I_m = 100 - 0,4x = C_m = x + 60$$

siendo ahora $x = 28,57$ y $p = 94,28$. Se observa, por tanto, que el output aumenta con ambas alternativas, pero más con la segunda, como era de esperar, de acuerdo con la teoría.

Discriminación de precios: primer, segundo y tercer grado

PROBLEMA 4.22

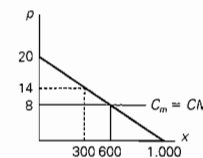


Figura 4.5

Un monopolista cuya función de costes es, $CT = 8x + 6$, que abastece un mercado cuya curva de demanda es, $x = 1.000 - 50p$, observa que puede llevar a cabo una discriminación de primer grado: calcular cantidad producida, el beneficio, y compararlo con el que obtenía como monopolista puro.

La función inversa de demanda se puede escribir:

$$p = 20 - 0,02x$$

por lo que los ingresos totales del monopolista puro serían:

$$IT = px = (20 - 0,02x)x = 20x - 0,02x^2$$

De ellos se obtienen los ingresos marginales:

$$I_m = 20 - 0,04x$$

y derivando en los costes totales, los costes marginales:

$$C_m = 8$$

que igualados a los ingresos marginales:

$$I_m = C_m = 20 - 0,04x = 8$$

permiten obtener el output de máximo beneficio:

$$x = 300$$

El precio correspondiente, sobre la función de demanda es:

$$p = 20 - 0,02 \cdot 300 = 14$$

Es fácil ahora establecer los ingresos totales del monopolista discriminador:

$$IT = 14 \cdot 300 + \frac{6 \cdot 300}{2} = 4.200 + 900 = 5.100$$

es decir, la suma de las áreas del rectángulo ($14 \cdot 300$) y del triángulo cuya base es 300 y altura 8; que junto con los costes totales para el volumen de output de equilibrio:

$$CT = 8 \cdot 300 + 6 = 2.406$$

permiten obtener los beneficios del monopolista discriminador:

$$B = I - C = 5.100 - 2.406 = 2.694$$

Vamos a obtener la solución del monopolista puro: La función inversa de demanda se puede escribir:

$$p = 20 - 0,02x$$

por lo que los ingresos totales del monopolista puro serían:

$$IT = px = (20 - 0,02x)x = 20x - 0,02x^2$$

De ellos se obtienen los ingresos marginales:

$$I_m = 20 - 0,04x$$

y derivando en los costes totales, los costes marginales:

$$C_m = 8$$

que igualados a los ingresos marginales:

$$I_m = C_m = 20 - 0,04x = 8$$

permiten obtener el output de máximo beneficio:

$$I_m = 20 - 0,04x$$

y derivando en los costes totales, los costes marginales:

$$x = 300$$

El precio correspondiente, se obtiene a partir de la función de demanda:

$$p = 20 - 0,02 \cdot 300 = 14$$

El ingreso total es:

$$IT = 14 \cdot 300 = 4.200$$

El coste total es:

$$CT = 8 \cdot 300 + 6 = 2.406$$

Por lo que el beneficio del monopolista puro es:

$$B = IT - CT = 4.200 - 2.406 = 1.794$$

Vamos a ver ahora el caso del monopolista discriminador de primer grado que lanzase un output como la competencia perfecta:

La cantidad total que va a vender es la que correspondería a:

$$C_m = 8 = p = 20 - 0,02x$$

de donde $x = 600$.

El ingreso total es el que acapara todo el excedente del consumidor, es decir:

$$IT = 600 \cdot 8 + \frac{(20 - 8)600}{2} = 8.400$$

El coste total es el correspondiente a 600 unidades de producto, es decir:

$$CT = 8 \cdot 600 + 6 = 4.806$$

Por lo que el beneficio para el monopolista discriminador es:

$$B = IT - CT = 8.400 - 4.806 = 3.594$$

siendo la diferencia de 1.800 unidades de cuenta.

PROBLEMA 4.23

Un monopolista que se enfrenta a la curva de demanda $p = 1.000 - 88x$, a partir de una curva de costes como $C = x^2 + 100x + 10$, trata de calcular si le es interesante discriminar precios del tipo primer grado.

Como en la discriminación de primer grado el monopolista drena todo el excedente del consumidor, la curva de demanda es la de ingresos marginales también además de ser la de ingresos medios, por lo que, para maximizar beneficios deberá hacer:

$$C_m = 2x + 100 = p = 1.000 - 88x$$

de donde se obtiene la cantidad:

$$90x = 900 \quad x = 10$$

y el precio:

$$p = 1.000 - 88 \cdot 10 = 120$$

Nótese que los ingresos se pueden estimar mediante las áreas de un rectángulo (precio de mercado por cantidad) y un triángulo (el que forma el precio de mercado el precio máximo permitido por la curva de demanda y la cantidad ofrecida); en efecto:

$$\text{Área del rectángulo} = 120 \cdot 10 = 1.200$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{(1.000 - 120)10}{2} = 4.400$$

$$IT = 5.600$$

Como los costes son:

$$C(10) = 1.110$$

los beneficios resultarán:

$$B = 4.490$$

El monopolio puro maximiza beneficios cuando

$$C_m = 2x + 100 = I_m = 1.000 - 176x$$

de donde

$$x = 5,05 \quad y \quad p = 1.000 - 88 \cdot 5,05 = 555,6$$

de donde los beneficios son:

$$B = IT - CT = 2.805,78 - 540,5 = 2.265,28$$

Luego le es interesante la discriminación, como cabía esperar.

Sea una empresa monopolista cuyos costes vienen representados por la función $C = 5x^2 + 100x + 5$, y la función inversa de demanda, $p = 1.000 - 10x$. La empresa se plantea discriminar precios, en dos tramos (segundo grado), con la convicción de que ello implicará mejorar los beneficios globales. Realice el tipo de cálculos que dicha empresa debería llevar a cabo, y coméntelos.

En primer lugar hemos de disponer de la situación inicial de la empresa, es decir, en monopolio puro, al modo habitual; la estructura de ingresos es:

$$I = (1.000 - 10x)x = 1.000x - 10x^2$$

$$I_m = 1.000 - 20x$$

y la de costes habitual:

$$C_m = 10x + 100$$

Igualando las dos entidades marginales:

$$I_m = C_m \quad 1.000 - 20x = 10x + 100 \quad 30x = 900$$

se obtienen la cantidad y el precio de equilibrio, ambos de monopolio puro:

$$x_M = 30$$

$$p_M = 1.000 - 10 \cdot 30 = 700$$

y los beneficios si los hay:

$$B(30) = I(30) - C(30) = 21.000 - 7.505 = 13.495$$

en este caso sí. Aunque los beneficios son positivos, como es de esperar, probablemente en un monopolio, poco importa ahora desde el punto analítico, el hecho es que la empresa trata de aumentarlos.

2. Un paso previo es analizar el límite, en términos de cantidades, que la potencial discriminación, podría plantear. Este límite podría estar en la cantidad que haga igual la demanda y la curva de costes marginales como *curva de oferta*:

$$C_m = p = 10x + 100 = 1.000 - 10x$$

es decir:

$$x = 45$$

que implica aumentar la producción en 15 unidades. De ellas, el primer tramo podría estar constituido por 25, y el segundo por 20; en último término ello es arbitrario para la empresa (o negociable con los compradores).

3. El precio de venta de las 25 primeras unidades se determina sobre la función de demanda como:

$$p = 1.000 - 10 \cdot 25 = 750$$

y para el de las 20 restantes debe tenerse en cuenta que son adicionales, sobre la función de demanda:

$$p = 1.000 - 10 \cdot 45 = 550$$

PROBLEMA 4.24

PROBLEMA 4.25

Ahora es posible calcular los ingresos correspondientes a los dos tramos:

$$I(25) = 25 \cdot 750 = 18.750$$

$$I(20) = 20 \cdot 550 = 11.000$$

y los ingresos totales:

$$I = 29.750$$

Los costes totales de producir 45 unidades son:

$$C(45) = 5 \cdot 45^2 + 100 \cdot 45 + 5 = 14.630$$

Por lo que los beneficios son:

$$B = 34.750 - 14.630 = 20.120$$

Por lo que la discriminación de precios aumenta los beneficios como era previsible:

Suponga un monopolio puro que observa que su mercado está segmentado en dos partes cuyas funciones de demanda respectivas son $x_1 = 25 - 0,3p_1$, $x_2 = 35 - 0,7p_2$ y su función de costes es $CT = 20x + 2$. Discuta si es posible la discriminación, y compare la solución (beneficios) con la que se daría en monopolio puro.

Veamos algo de teoría previa. Se trata de una discriminación de tercer grado. Sabemos que en monopolio puro se cumple que, $I_m = p(1 - 1/E)$, por lo que, dada la definición de discriminación de tercer grado, como la división del mercado en submercados con elasticidades diferentes, tendríamos:

$$I_{m1} = p_1 \left(1 - \frac{1}{E_1} \right)$$

$$I_{m2} = p_2 \left(1 - \frac{1}{E_2} \right)$$

siendo E_1 y E_2 —obviamente— las elasticidades de demanda en los dos submercados. Como I_{m1} debe ser igual a I_{m2} , porque ambos deben ser iguales a C_m , está claro que debe cumplirse también la igualdad:

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{E_1} \right) = p_2 \left(1 - \frac{1}{E_2} \right)$$

O, alternativamente, y reordenando:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{E_2} \right)}{\left(1 - \frac{1}{E_1} \right)}$$

Si, por reducción al absurdo $E_1 = E_2$, entonces $(p_1/p_2) = 1$, o lo que es lo mismo, $p_1 = p_2$ y no se puede dar discriminación; es decir, si las elasticidades son iguales no es posible discriminar; o dicho de otro modo, las diferentes elasticidades son una precondición para hacerlo. Si, por el contrario, $E_1 \neq E_2$ el precio será *menor* en el mercado cuya demanda sea *más* elástica en valor absoluto. En efecto:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - \frac{1}{E_2}}{1 - \frac{1}{E_1}}; \quad p_1 > p_2 \quad \text{si}$$

$$\left(1 - \frac{1}{E_2} \right) > \left(1 - \frac{1}{E_1} \right)$$

Lo que sucederá si, en valor absoluto, E_1 es menor que E_2 . En efecto, en:

$$p_1 \left(1 - \frac{1}{E_1} \right) = p_2 \left(1 - \frac{1}{E_2} \right)$$

y si:

$$|E_1| < |E_2| \quad \text{entonces:}$$

$$\left(1 - \frac{1}{E_1} \right) < \left(1 - \frac{1}{E_2} \right) \quad \text{o} \quad I_{m1} < I_{m2}$$

y para que I_{m1} sea igual a I_{m2} , p_1 debe ser mayor que p_2 .

Apliquemos esta teoría a los datos del problema. Debe apreciarse que las funciones inversas de demanda son:

$$p_1 = 83,3 - 3,3x$$

$$p_2 = 50 - 1,42x_2$$

y la directa e inversa de mercado total es:

$$x = 60 - p \quad p = 60 - x$$

El coste marginal, constante, es 20. Como monopolista puro la empresa obtenía:

$$\begin{aligned} IT_M &= px = (60 - x)x = 60x - x^2 \\ I_m &= 60 - 2x = C_m = 20 \\ x &= 20 \\ p &= 40 \\ B &= px - CT = 800 - 402 = 398 \end{aligned}$$

Como discriminador, y por el mismo método:

$$\begin{aligned} IT_1 &= p_1 x_1 = (83,3 - 3,3x_1)x_1 = 83,3x_1 - 3,3x_1^2 \\ I_{m1} &= 83,3 - 6,6x_1 = C_m = 20 \\ x_1 &= 9,5 \\ p_1 &= 83,3 - 3,3 \cdot 9,5 = 51,95 \\ IT_1 &= 493,5 \quad CT_1 = 192 \\ B_1 &= 301,5 \end{aligned}$$

para el primer submercado. Y para el segundo:

$$\begin{aligned} IT_2 &= p_2 x_2 = (50 - 1,42x_2)x_2 = 50x_2 - 1,42x_2^2 \\ I_{m2} &= 50 - 2,84x_2 = 20 = C_m \\ x_2 &= 10,5 \\ p_2 &= 35,09 \\ IT_2 &= 376,95 \quad CT_2 = 212 \quad B_2 = 164,9 \end{aligned}$$

para el segundo. La suma de los beneficios en los dos submercados es:

$$B_1 + B_2 = 301,5 + 164,9 = 466,4$$

Estableciendo las elasticidades respectivas, y prescindiendo ya del signo:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = 0,3 \frac{51,95}{9,5} = 1,6 \\ E_2 &= 0,7 \frac{35,09}{10,5} = 2,33 \end{aligned}$$

se aprecia que se dan las condiciones para discriminar (distintas las dos elasticidades) y como $p_1 > p_2$, se cumple $E_1 < E_2$.

Otra manera de resolver el problema sería plantear:

$$\text{máx } B = IT_1 + IT_2 - CT(x_1 + x_2)$$

que implica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x_1} &= I_{m1} - C_m = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &= I_{m2} - C_m = 0 \end{aligned}$$

y resolver un sistema de ecuaciones, ambas en x (x_1 y x_2 respectivamente en este caso ¹⁷). Después de hallar las dos x bastaría sustituir en sus respectivas funciones de demanda, hallar los precios respectivos y las elasticidades correspondientes del mismo modo que en el caso anterior.

PROBLEMA 4.26

Una empresa monopolista cuya función de costes variables es $CV = x^2 + 6x$ trabaja en un sector o mercado en el que la demanda está segmentada formalmente (el precio es único e independiente de la influencia de los consumidores) en dos grupos con las siguientes funciones de demanda parcial: $x_1^d = 50 - 2p$ y $x_2^d = 50 - (1/2)p$. Obtener el precio, cantidad intercambiada y elasticidad de la demanda en el equilibrio.

El problema es similar al anterior con la única especificidad de que existen dos funciones de demanda. Pero ello es trivial por que basta sumarlas sin más en este caso. Después será necesario hacer $I_m = C_m$ y las dos restantes condiciones ($I_m < C_m$ y $p \geq \text{mín } CMV$). Pero no conocemos I o IT ; aunque lo podemos construir. En efecto, sobre las funciones de demanda parcial:

Como se trata de un monopolista con precio único, basta con obtener la demanda total:

$$\begin{aligned} x_1^d &= 50 - 2p \\ x_2^d &= 50 - 0,5p \end{aligned}$$

como el bien es homogéneo:

$$\begin{aligned} x^d &= x_1^d + x_2^d = 100 - 2,5p \\ 2,5p &= 100 - x \end{aligned}$$

despejando p :

$$\begin{aligned} p &= \frac{100}{2,5} - \frac{1}{2,5}x \\ p &= 40 - 0,4x \end{aligned}$$

¹⁷ Porque el coste marginal es constante; si la función de costes totales fuese más compleja, por ejemplo del tipo $ax^2 + bx + c$, con a, b y c , parámetros, ambas ecuaciones serían funciones tanto de x_1 como de x_2 .

Será necesario hacer $I_m = C_m$ y las dos restantes condiciones ($I_m < C_m$ y $p \geq \text{mín CMV}$).

$$I = px = (40 - 0,4x)x = 40x - 0,4x^2$$

$$I_m = 40 - 0,8x$$

$$I'_m = -0,8 < 0$$

Por su parte el C_m es:

$$CV = x^2 + 6x$$

$$C_m = 2x + 6 \quad C'_m = 2 > I'_m$$

igualando ingreso marginal y coste marginal:

$$2x + 6 = 40 - 0,8x$$

$$x = \frac{34}{2,8} = 12,14$$

sustituyendo en p :

$$p = 40 - 0,4 \cdot 12,14 = 35,14 > \text{mín CMV}$$

$$CMV(12,14) = x + 6 = 12,14 + 6 = 18,14$$

Por último, la elasticidad de la demanda en el equilibrio se calcula al modo habitual ya conocido:

$$E = -\frac{dx}{dp} \frac{p}{x} = (-) \left(\frac{1}{\frac{dp}{dx}} \frac{p}{x} \right) = 2,5 \cdot 2,89 = 7,23 > 1$$

Debe recordarse que el monopolista maximizador del beneficio siempre debe situarse en el tramo elástico $E > 1$ de la curva de demanda).

Submercados

PROBLEMA 4.27

La función de costes de un monopolista es $C = 2x^2 - 5x + 3$. Las funciones de demanda de su producto en dos mercados son: $p_1 = 8 - 5x_1$, $p_2 = 7 - 2x_2$, ($x_1, x_2 \geq 0$). Determinar el output de maximización del beneficio en cada uno de los dos submercados y el nivel de beneficios.

Las funciones de ingresos totales en los dos submercados son:

$$IT_1 = p_1 x_1 = (8 - 5x_1)x_1 = 8x_1 - 5x_1^2$$

$$IT_2 = p_2 x_2 = (7 - 2x_2)x_2 = 7x_2 - 2x_2^2$$

Y la función de costes $C = 2x^2 - 5x + 3$ según el enunciado; como $x = x_1 + x_2$:

$$C = 2(x_1 + x_2)^2 - 5(x_1 + x_2) + 3 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 5x_2 + 3$$

La función de beneficio es, por tanto:

$$B = 8x_1 - 5x_1^2 + 7x_2 - 2x_2^2 - 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 5x_1 + 5x_2 - 3 = 13x_1 - 7x_1^2 + 12x_2 - 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 3$$

Y la maximización del beneficio implica hacer las primeras derivadas respecto a los outputs respectivos iguales a cero:

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 13 - 14x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = 12 - 8x_2 - 4x_1 = 0$$

Reordenando se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$14x_1 + 4x_2 = 13$$

$$4x_1 + 8x_2 = 12$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando la segunda:

$$24x_1 = 14 \quad x_1 = \frac{7}{12} \quad \text{de donde} \quad x_2 = \frac{29}{24}$$

Para estos outputs el nivel de beneficios, sin más que sustituir, es: 8,04.

Valoraciones sociales privadas

PROBLEMA 4.28

Muestre que si la elasticidad de la demanda pasa de 2 a 1,5, la divergencia entre las valoraciones sociales y privadas crece.

En competencia, $p = C_m = I_m$; en monopolio $p \neq C_m = I_m$. Pero $p_M = (E/E - 1)I_m$, y como $(E/E - 1) > 0$, ya que $|E| > 1$, si E aumenta desde un valor 1,5, a 2, por ejemplo, el paréntesis es decreciente:

$$\text{Si } E = 1,5 \quad \frac{E}{E - 1} = \frac{1,5}{1,5 - 1} = 3$$

$$\text{Si } E = 2 \quad \frac{E}{E-1} = 2$$

$$\text{Si } E = 3 \quad \frac{E}{E-1} = 1,5$$

pero el paréntesis es lo que diferencia ambas valoraciones. Luego si decrece E crece la diferencia.

Repaso

PROBLEMA 4.29

Si la cantidad demandada en el equilibrio por una industria en competencia perfecta es 30.000 unidades ¿cuánto lanzará una empresa individual si todas producen lo mismo (n es el número de ellas)?

- a) 30.000 n .
- b) 30.000 - n .
- c) $\frac{30.000}{n}$.
- d) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la c) porque las cantidades ofrecidas y demandadas (ambas de mercado) coinciden en el equilibrio; basta por ello dividir la cantidad demandada por el número de empresas.

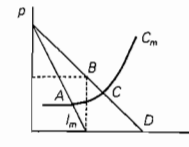
PROBLEMA 4.30

Si la función de demanda de mercado es $p = a - bx$ el excedente del consumidor del monopolista es:

- a) $\frac{p_{\text{máx}} x_M}{2}$.
- b) $\frac{p_M x_M}{2}$.
- c) $\frac{(p_{\text{máx}} - p_M) x_M}{2}$.
- d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: c) El $p_{\text{máx}}$ se da cuando $x = 0$, su diferencia con el p_M da la altura del triángulo en que consiste dicho excedente, la base es x_M y dividido entre 2, da el área del triángulo.

PROBLEMA 4.31



Para un monopolio como el mostrado en la figura del margen de la página siguiente la elasticidad de la demanda será 1 en valor absoluto:

- a) En el punto B.
- b) Sólo en el punto A.
- c) En el punto C.
- d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: a) Recuérdese que coincide con el punto donde el ingreso marginal se anula para el caso de demanda lineal.

PROBLEMA 4.32

Si $I_m = 1,5$, $p_M = 3$ y el precio de competencia es $p_c = 2,2$, $C_m = 2$, un monopolista:

- a) Reducirá su output.
- b) Cerrará.
- c) Aumentará su output.
- d) Mantendrá su output.

RESPUESTA: a) El monopolista se guiará por la regla coste marginal igual a ingreso marginal en el óptimo, por lo que reducirá el output (los precios teóricos de competencia y monopolio son distractores ahora en el enunciado).

PROBLEMA 4.33

Dada una empresa monopolista de oferta pura cuya función de costes totales es $CT = cx + d$, que se enfrenta a una función de demanda

$x = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p$ la cantidad ofrecida en el equilibrio a corto plazo es:

- a) $\frac{a+c}{2}$.
- b) $\frac{a-c}{2}$.
- c) $a - bc$.
- d) $\frac{a-c}{2b}$.

RESPUESTA: d) La función de demanda se puede escribir como $p = a - bx$ y como la de costes es:

$$CT = cx + d \quad I_m = a - 2bx \quad C_m = c \quad a - 2bx = c \quad x = \frac{a-c}{2b}$$

PROBLEMA 4.34

Dada una empresa monopolista de oferta pura cuya función de costes totales $CT = cx + d$ que se enfrenta a una función de demanda $x = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p$ los beneficios de equilibrio son:

- a) $\frac{1}{2}(a - c)^2 - d$
- b) d
- c) $\frac{1}{2b}(a - c)^2 - d$
- d) $\frac{1}{4b}(a - c)^2 - d$

RESPUESTA: d) $CT = cx + d$, $I_m = a - 2bx$, $C_m = c$, $a - 2bx = c$, $x = \frac{a - c}{2b}$:

$$p = a - b \frac{a - c}{2b} = \frac{a + c}{2}$$

$$B = IT - CT = px - (cx + d)$$

$$B = \frac{a - c}{2b} \frac{a + c}{2} - c \frac{a - c}{2b} - d = \frac{a^2 - c^2}{4b} - \frac{2ac}{4b} + \frac{2c^2}{4b} - d = \frac{(a - c)^2}{4b} - d$$

PROBLEMA 4.35

En un monopolio con una función de demanda como $x^d = \frac{50}{p}$ y una de costes como $C = 2x^2$, el precio de equilibrio será:

Sin más que aplicar la fórmula de Amoroso a los datos bien conocida e igualarla al coste marginal: el $IT = px = p \frac{50}{p} = 50$, por lo que el marginal es cero. Aunque $C_m = 4x$, $I_m = C_m \Rightarrow x = 0$, por lo que $p = \infty$.

Capítulo 5

Mercados de factores de producción y distribución de la renta

Demanda de factores por parte de la empresa competitiva

PROBLEMA 5.1

Dado un mercado de competencia perfecta cuya curva de demanda es $p = 10 - \frac{1}{2}x$, cuyas empresas producen según una función de producción $x = 2y$. Hallar la productividad marginal del factor, la curva de demanda del mismo y si la cantidad utilizada del factor es 5 el precio del factor en el equilibrio:

Si la función de producción es $x = 2y$, la productividad marginal de y es:

$$\frac{dx}{dy} = 2$$

y la función de demanda del factor por parte de la empresa es:

$$q = \left(\frac{dx}{dy} \right) p = 2p$$

El precio del factor para la configuración del enunciado será:

$$q = 2 \left(10 - \frac{1}{2} 2y \right) = 20 - 2y$$

$$y = 5 \quad q = 20 - 2 \cdot 5 = 10$$

PROBLEMA 5.2

Dado el siguiente cuadro:

Número de trabajadores	0	1	2	3	4	5
Productividad total	0	5	12	20	26	30
Pm_L	0	5	7	8	6	4
$VPML(p = 2)$	0	10	14	16	12	8

la productividad marginal al pasar de 2 a 3 trabajadores es:

- (a) 7
- (b) 8
- (c) 6
- (d) 4

La respuesta correcta es la (b) porque sin más que restar las productividades totales para esos dos números de trabajadores: $20 - 12 = 8$.

PROBLEMA 5.3

Dado el siguiente cuadro, en competencia perfecta, si $w = 12$, ¿cuántos trabajadores demandará una empresa típica?

Número de trabajadores	0	1	2	3	4	5
Productividad total	0	5	12	20	26	30
Pm_L	0	5	7	8	6	4
$VPML(p = 2)$	0	10	14	16	12	8

- (a) 4
- (b) 12
- (c) 10
- (d) 0

RESPUESTA: (a) La que demanda una cantidad tal que $VPML = w$, es decir $L = 4$.

Oferta de trabajo

PROBLEMA 5.4

Siendo una función de utilidad consumo-ocio como $u = x(x_o)^2$, en la que x es un bien compuesto de los restantes bienes distintos del ocio (x_o), determine las cantidades demandadas de ocio y trabajo y el índice de utilidad, si los precios y la renta están dados para el consumidor por: $p = 2$, $w = 50$ e $y_o = 70$ (donde w es el salario por unidad de tiempo).

Sabemos que en el equilibrio se debe cumplir:

$$RMS_{x_o}^x = -\frac{dx}{dx_o} = \frac{u_{x_o}}{u_x} = \frac{w}{p}$$

por lo que calculando las derivadas correspondientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x_o)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_o} = 2xx_o$$

es fácil obtener una expresión para x :

$$\frac{2xx_o}{x_o^2} = \frac{50}{2}$$

$$4xx_o = 50(x_o)^2$$

$$x = \frac{50}{4} x_o$$

Por su parte, la restricción presupuestaria, es:

$$px = y = w(24 - x_o) + y_o$$

de donde:

$$2x = 50(24 - x_o) + 70$$

por lo que, sustituyendo la x obtenida:

$$2 \cdot \frac{50}{4} x_o = 50 \cdot 24 - 50x_o + 70$$

$$25x_o = 1.270 - 50x_o$$

$$x_o = 16,9$$

que es la cantidad demandada de ocio. La cantidad de trabajo se halla trivialmente (basta restar de 24 horas) L , por último, es $24 - 16,9 = 7,1$ horas, además:

$$2x = 50(24 - 16,9) + 70$$

Es interesante, en cambio, determinar x , y a partir de ella el índice de utilidad; L , por último, es 7,1 horas.

Por otro lado, la restricción presupuestaria es:

$$px = w(H - x_o) + y_o$$

PROBLEMA 5.5

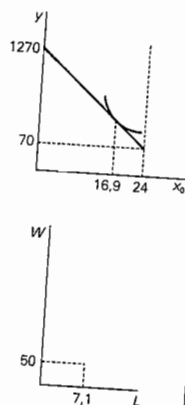


Figura 5.1

Salarios mínimos

PROBLEMA 5.5

Con los datos del problema anterior establezca el salario mínimo que induce a ofrecer trabajo al consumidor. Si las horas extras, a partir de ocho horas de trabajo, se pagan ahora a $w^{(2)} = 65$ unidades de cuenta la hora, ¿cómo variará la configuración de equilibrio?

Si el consumidor no ofreciese ninguna hora de trabajo, todas sus horas disponibles irían al ocio. Se debe cumplir en todo caso, la igualdad de la relación marginal de sustitución al cociente invertido de los precios:

$$\frac{2x_0}{x_0^2} = \frac{2 \cdot 35 \cdot 24}{24 \cdot 24} = \frac{w}{2} \quad \frac{140}{24} = w = 5,83$$

ya que si no trabaja:

$$y = y_0 + w \cdot 0 = y_0 = 70$$

de donde:

$$x = \frac{w}{p}(H - x_0) + \frac{y_0}{p}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = -\frac{w}{p} = -\frac{50}{2} = -25$$

$$y = p \cdot x = \text{renta} = \text{gasto}$$

y cuando $x_0 = 24$:

$$x = \left(\frac{50}{4}\right)24 = 300 \quad p \cdot x = y = 600$$

$$2x = 50(24 - 24) + 70 = 70 \quad x = 35$$

$$p \cdot x = wH + y_0 = 2x = 50 \cdot 24 + 70 = 1.270$$

$$x = \frac{1.270}{2} = 635$$

$$x_0 = 16,9 \quad 2x = 50(24 - 16,9) + 70$$

La combinación de equilibrio, por tanto, es $x_0 = 16,9$, $x = 212,5$. Por lo que el índice de utilidad es:

$$u = x(x_0)^2 = 3.570$$

$$x = \frac{y}{p} = \frac{70}{2} = 35$$

por todo lo que:

$$w = 5,83$$

Bastaría aplicar el método del problema anterior para el nuevo salario aunque deberán compararse los índices de utilidad. Y debe notarse, que anteriormente no se llegaba a la jornada institucional tradicional de 8 horas.

Monopolio demandando factores

PROBLEMA 5.6

Una empresa monopolista utiliza dos factores según una función de producción Cobb-Douglas del tipo $x = 20L^{1/2}K^{1/2}$, siendo la función de demanda a la que se enfrenta, $x = 1.000 - 2p$. Si el volumen de capital es de 1.600 y el salario es de 1.000 en sus unidades respectivas, hallar la cantidad de trabajadores empleada y el volumen de output de máximo beneficio.

Dados los datos del problema podemos despejar la función de demanda inversa:

$$x = 1.000 - 2p \quad p = \frac{1.000}{2} - \frac{x}{2}$$

y de la función de producción obtenemos la productividad marginal y con ella el ingreso del producto marginal, cual corresponde a un monopolio:

$$x = 20L^{1/2}K^{1/2} \quad P_{mL} = 10L^{-1/2}K^{1/2} \quad IP_m = P_{mL}I_m = w$$

Por otro lado el ingreso total y en consecuencia el ingreso marginal son sencillos de lograr:

$$IT = px = \left(\frac{1.000}{2} - \frac{x}{2}\right)x = 500x - \frac{x^2}{2} \quad I_m = 500 - x$$

Por lo que igualando el ingreso del producto marginal al precio del factor:

$$IP_m = P_{mL}I_m = 10L^{-1/2}K^{1/2}(500 - x) = w = 1.000$$

Sustituyendo K por su valor en el enunciado:

$$IP_m = 10L^{-1/2}(1.600)^{1/2}(500 - x) = w = 1.000$$

PROBLEMA 5.7

También la función de producción:

$$x = 10L^{1/2}(1.600)^{1/2} = 400L^{1/2}$$

Sistema de dos ecuaciones que permite conseguir las dos variables solicitadas, L y x :

$$L^{-1/2} = \frac{400}{x}$$

que sustituido en la ecuación del ingreso del producto marginal permite obtener:

$$x = 987,65 \text{ y } L = 6,09$$

Dado un mercado de competencia perfecta cuya curva de demanda es $p = 10 - \frac{1}{2}x$, cuyas empresas producen según una función de producción $x = 2y$, si dicho mercado pasa ser un monopolio, ¿cuál será la función de demanda del factor?:

(a) $\left(\frac{dx}{dy}\right)q = p$

(b) $q = \left(\frac{dx}{dy}\right)p$

(c) $q = \left(\frac{dx}{dy}\right)I_m$

(d) $p = \left(\frac{dx}{dy}\right)I_m$

RESPUESTA: (c) El ingreso del producto marginal, es decir:

$$q = \left(\frac{dx}{dy}\right)I_m$$

PROBLEMA 5.8

Un monopolista puro de oferta que produce según una función de producción $x = 0,5y$ se enfrenta a una curva inversa de demanda de mercado $p = 10 - 2x$ si el precio del factor es igual a 1, el monopolista utiliza el factor con relación a la competencia perfecta en una proporción:

(a) De un tercio.

(b) De un medio.

(c) En la misma cuantía.

(d) Del doble.

Monopsonio

PROBLEMA 5.9

Una empresa monopsonista (monopolista de demanda) se enfrenta a una curva de oferta de trabajo $L = w - 50$; con ese factor y según la función de producción $x = 10L^2 + 20$, produce un bien que vende en un mercado perfectamente competitivo al precio paramétrico, $p = 5$. Establezca la cantidad producida, el salario, y el beneficio de equilibrio.

El beneficio es:

$$B = px - wL = p(10L^2 + 20) - (L + 50)L = 49L^2 - 50L + 100$$

sin más que despejar w en la función de oferta de trabajo y sustituir la en la función de beneficio. Maximizando ahora B respecto a la cantidad de trabajo:

$$\frac{\partial B}{\partial L} = 98L - 50 = 0 \quad L = 0,51$$

por tanto:

$$w = L + 50 = 50,51$$

Respuesta: (b).

$$C = yq = y$$

$$x = \frac{1}{2}y \quad y = 2x$$

$$C = 2x \quad C_m = 2$$

En monopolio:

$$I_m = 10 - 4x$$

$$C_m = I_m \quad 10 - 4x = 2$$

$$x = 2 \quad y = 2x = 4$$

En competencia:

$$C_m = p \quad 2 = 10 - 2x$$

$$x = \frac{8}{4} = 2 \quad y = 2x = 4$$

siendo el coste:

$$C = wL = 50,51 \cdot 0,51 = 25,77$$

el volumen de output:

$$x = 10L^2 + 20 = 10(0,51)^2 + 20 = 22,60$$

los ingresos:

$$I = px = 5 \cdot 22,60 = 113$$

y los beneficios:

$$B = 113 - 25,77 = 87,23$$

Recursos no renovables y decisiones intertemporales en la empresa

PROBLEMA 5.10

Si disponemos de una bodega con vinos de crianza cuya calidad crece el primer año a una tasa del 10%, del 9,5% el segundo año, del 9% el tercero y así sucesivamente; con un tipo de interés del 4%. ¿Cuándo será conveniente poner a la venta los vinos?

- (a) El primer año, porque el tipo de interés ya es inferior a la tasa de crecimiento de dicha calidad desde el principio.
- (b) En cualquier momento, pues da lo mismo vender el vino ingresar el dinero en un banco.
- (c) En el duodécimo año, porque entonces se iguala el tipo de interés y la tasa de crecimiento.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) El momento ideal para la venta es cuando la calidad crece a la misma velocidad que el tipo de interés, porque entonces da igual vender el vino ingresar el dinero en un banco que dejar que siga mejorando. Sin embargo ello no es cierto antes de dicha igualdad, ni tampoco después.

PROBLEMA 5.11

Supongamos que disponemos de una mina de carbón, que el coste de extracción es de 10 euros por tonelada, que el tipo de interés es del 5% y que el precio del presente año es de 15 euros por tonelada. Si la explotación de la mina es sostenida en el tiempo ¿qué precio deberá tener el carbón el próximo año?:

- (a) 15,25 euros por tonelada.
- (b) 15 euros por tonelada.

(c) 17 euros por tonelada.

(d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) La regla de Hotelling establece que si el carbón debe explotarse todos los años se cumplirá que:

$$p_{t+1} = p_t + i(p_t - c)$$

donde i es el tipo de interés, c es el coste de extracción por tonelada y p_{t+1} y p_t los precios en dos años sucesivos. Sustituyendo, se obtiene 15,25.

PROBLEMA 5.12

Supongamos que disponemos de una mina de carbón, que el coste de extracción es de 10 euros por tonelada, pero descendiendo en un 10% cada año, que el tipo de interés es del 5% y que el precio del presente año es de 15 euros por tonelada. Si la explotación de la mina es sostenida en el tiempo ¿qué precio deberá tener el carbón el próximo año?:

La regla de Hotelling sería en este caso:

$$p_{t+1} = p_t + i(p_t - c_t) + (c_{t+1} - c_t)$$

es decir:

$$p_{t+1} = 15 + 0,05(15 - 10) + (9 - 10) = 14,25$$

PROBLEMA 5.13

Si la explotación de una mina es sostenida en el tiempo y los costes de extracción aumentan, dado un tipo de interés constante, el precio del recurso:

- (a) Aumenta necesariamente.
- (b) Puede reducirse o aumentar.
- (c) Se reduce necesariamente.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) La regla de Hotelling sería en este caso:

$$p_{t+1} = p_t + i(p_t - c_t) + (c_{t+1} - c_t)$$

y

$$c_{t+1} > c_t, \text{ por tanto, } c_{t+1} - c_t > 0$$

y el precio del recurso debe aumentar cada año necesariamente.

Capítulo 6

Oligopolios tradicionales, otras estructuras de competencia imperfecta y nueva economía industrial

Notas teóricas

Un modelo tradicional de oligopolio

Un modo aparentemente natural de aproximación al problema del oligopolio no colusivo, sería el extender o ampliar la teoría utilizada en capítulos anteriores en relación a la competencia perfecta y el monopolio, al caso del oligopolio. Supongamos para ello que la industria oligopolista: 1.º esté formada por un número pequeño de empresas, y un elevado número de consumidores; 2.º el producto que lanzan todas ellas sea homogéneo; 3.º las empresas maximicen el beneficio período a período; 4.º no haya intervención pública; 5.º las empresas dispongan de información perfecta, y 6.º haya libertad de entrada y salida de empresas, y movilidad de factores. Es decir, para facilitar la comparación establecemos un conjunto de supuestos muy similares a los que representan a las estructuras de mercado anteriormente estudiadas, pero adaptados al modelo de oligopolio de referencia.

Formalmente, $p = f(x)$ es la función inversa decreciente de demanda, es decir, se cumple que $f' < 0$; x , la cantidad total ofrecida por la industria oligopolista, por los n oligopolistas es igual a $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, siendo $C_1(x_1)$, $C_2(x_2)$, ..., $C_n(x_n)$ los costes respectivos, y B_1, B_2, \dots, B_n los beneficios correspondientes. Entonces, el planteamiento optimizador a corto plazo para el caso del oligopolio, consiste en maximizar, cada uno de los oligopolistas, la función de beneficios correspondiente; es decir:

$$B_1 = px_1 - C_1(x_1) = f(x)x_1 - C_1(x_1)$$

$$B_2 = px_2 - C_2(x_2) = f(x)x_2 - C_2(x_2)$$

$$\dots\dots\dots$$
$$B_n = px_n - C_n(x_n) = f(x)x_n - C_n(x_n)$$

al modo habitual. Cada oligopolista fija su output de tal modo que sea máximo su beneficio, $B'_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Pero como las empresas son ahora *interdependientes*, los restantes reaccionarán ante las acciones de cualquiera de ellas. Esta respuesta, en principio, se puede obtener matemáticamente, diferenciando:

$$\frac{dB_1}{dx_1} = f'(x)x_1 \frac{dx}{dx_1} + f(x) - C_{m_1}(x_1) = 0$$

$$\frac{dB_2}{dx_2} = f'(x)x_2 \frac{dx}{dx_2} + f(x) - C_{m_2}(x_2) = 0$$

$$\frac{dB_n}{dx_n} = f'(x)x_n \frac{dx}{dx_n} + f(x) - C_{m_n}(x_n) = 0$$

Pero como el volumen de output total es:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

diferenciando en la última expresión se obtiene:

$$\frac{dx}{dx_1} = 1 + \frac{dx_2}{dx_1} + \dots + \frac{dx_n}{dx_1}$$

$$\frac{dx}{dx_2} = \frac{dx_1}{dx_2} + 1 + \dots + \frac{dx_n}{dx_2}$$

$$\frac{dx}{dx_n} = \frac{dx_1}{dx_n} + \frac{dx_2}{dx_n} + \dots + 1$$

y sustituyendo en el sistema segundo sistema de ecuaciones, se halla:

$$f(x) + x_1 f'(x) \left[1 + \frac{dx_2}{dx_1} + \dots + \frac{dx_n}{dx_1} \right] - C_{m_1}(x_1) = 0$$

$$f(x) + x_2 f'(x) \left[\frac{dx_1}{dx_2} + 1 + \dots + \frac{dx_n}{dx_2} \right] - C_{m_2}(x_2) = 0$$

$$f(x) + x_n f'(x) \left[\frac{dx_1}{dx_n} + \frac{dx_2}{dx_n} + \dots + 1 \right] - C_{m_n}(x_n) = 0$$

A las derivadas, incluidas en los corchetes:

$$\frac{dx_2}{dx_1}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_1}{dx_2}, \dots, \frac{dx_1}{dx_n}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}$$

se les llama *variaciones conjeturales*, e indican lo que variará la cantidad producida por un oligopolista, ante variaciones en las producciones de los demás. Su contenido varío (puede haber infinitas en teoría, ya que significan todas las variaciones en el producto que quiera introducir cada una de ellas y las reacciones de las demás en ese caso), multiplicado por el número posible de ellos, es considerablemente elevado, por lo que en definitiva la teoría desemboca —como ya se ha señalado en el texto principal— en una *casuística* imposible de captar, y menos aún de hacer operativa para el cálculo económico relevante. Es significativo volver a señalar que, por tanto, no es tan importante el número de empresas como el *grado de control* que ellas pueden ejercer, lo que se pone aquí de manifiesto de manera distinta a la discutida en el capítulo anterior.

Formalización matemática del modelo de Cournot

Bajo los supuestos establecidos en el texto principal $p = f(x) = a - bx$ siendo a y b dos parámetros positivos al modo habitual, y $x = x_1 + x_2$, es decir, la cantidad total ofrecida es la suma de las que lanzan cada una de los dos duopolistas, y:

$$C_i(x_i) = hx_i \quad i = 1, 2$$

es el coste total correspondiente, respectivamente. Las empresas tratan de maximizar el beneficio período a período, por lo que tratarán de maximizar en este caso la función:

$$B_i(x_i) = px_i - C_i = [a - b(x_1 + x_2)]x_i - hx_i$$

Derivando la siguiente ecuación de beneficios marginales para el primer oligopolista:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = [a - b(x_1 + x_2)] + \left[-b - b \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right] x_1 - h = 0$$

y análogamente para el segundo. Pero el modelo de Cournot supone que las variaciones conjeturales $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$ son cero, es decir, supone que cada uno de los duopolistas estima que, aunque un duopolista varíe su oferta, el otro no modificará la suya, por lo que la fórmula anterior se simplifica, y se obtienen:

$$a - bx_1 - bx_2 - bx_1 - h = 0 \quad a - h = 2bx_1 + bx_2$$

$$\frac{a-h}{2b} - \frac{b}{2b}x_2 = \frac{2bx_1}{2b}$$

$$x_1 = \frac{a-h}{2b} - \frac{1}{2}x_2$$

y análogamente para la 2:

$$x_2 = \frac{a-h}{2b} - \frac{1}{2}x_1$$

Estas ecuaciones son conocidas como *funciones de reacción* (las líneas rectas de la figura 7.1 del texto teórico) porque indican la cantidad a producir por cada oligopolista una vez fijada la producción del otro y viceversa. A su vez las dos ecuaciones forman un sistema cuya solución, sin más que sustituir una en otra, por ejemplo, la segunda en la primera, da ecuaciones del tipo:

$$x_1 = \frac{a-h}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-h}{2b} - \frac{1}{2}x_1\right)$$

lo que permite obtener las soluciones de equilibrio en las cantidades, como:

$$x_{e_1} = x_{e_2} = \frac{a-h}{3b}$$

que sustituyendo en la función de demanda, lleva a lograr el p de equilibrio:

$$p_e = \frac{a+2h}{3}$$

y, análogamente, los beneficios correspondientes a cada duopolista como:

$$B_{e_1} = B_{e_2} = \frac{(a-h)^2}{9b}$$

Un modelo sencillo de ingresos por ventas (Baumol)

Si el problema al que se enfrenta la empresa que maximiza los ingresos por ventas se expresa como:

$$\text{maximizar } IV = IV(x, g) \text{ sujeta a } B = BM$$

(g son los gastos en promoción de ventas, etc., y los costes, C , son los habituales) la función de beneficios podría ser del tipo:

$$B = IV(x, g) - C(x) - g$$

Formando el lagrangeano típico de una maximización restringida:

$$S = IV(x, g) - \mu[IV(x, g) - C(x) - g - BM]$$

Las condiciones de primer orden de máximo son:

$$S_g = \frac{\partial IV}{\partial g} - \mu \frac{\partial IV}{\partial g} + \mu = 0$$

$$S_x = \frac{\partial IV}{\partial x} - \mu \frac{\partial IV}{\partial x} + \mu C_m(x) = 0$$

$$S_\mu = IV(x, g) - C(x) - g - BM = 0$$

Operando, tenemos:

$$\frac{\partial IV}{\partial x} = -\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{\mu}{\mu-1} \quad \mu \geq 1$$

$$\frac{\partial IV}{\partial x} = C_m(x) \frac{\mu}{\mu-1}$$

Es decir, el ingreso marginal igual al coste marginal por $\frac{\mu}{\mu-1}$ según la última de las dos fórmulas. Es obvio, por tanto, que en la empresa perfectamente competitiva tradicional de capítulos anteriores, el término $\frac{\mu}{\mu-1}$ valía 1. Por todo ello, en el equilibrio:

$$I_m < C_m \quad \left(\frac{\partial IV}{\partial g}\right) < 1$$

Una empresa que maximiza el volumen de producción y beneficio

Supongamos ahora una empresa que tiene un objetivo cuantitativo de producción llamémosle x , por lo que muy bien podría representar una empresa del tipo de las *empresas públicas*, o una empresa de un país en vías de desarrollo, pero que incluye entre sus argumentos una variable de beneficio, para que además el proceso sea eficiente, al modo más tradicional, actuando como una suerte de restricción o corrección del objetivo de cantidades. Formalmente podremos representar la función objetivo como:

$$M = hx + (1-h)B$$

donde h se haya entre 0 y 1 ($0 \leq h \leq 1$). Suponemos por tanto que la combinación $(B; x)$, beneficios-producción es lineal y que la función tiene un máximo finito. Supondremos adicionalmente que la empresa es precio aceptante tanto en los mercados de productos como de factores, y que la función de costes derivada de su tecnología es del tipo normal $C(x)$. Por tanto, se cumplirá que los beneficios son:

$$B = I - C = px - C(x)$$

que, sustituyendo en M :

$$M = hx + (1 - h)[(px - C(x))] = hx + (1 - h)px - (1 - h)C(x)$$

La condición de primer orden de máximo se obtiene fácilmente:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = h + (1 - h)p - (1 - h)C'_m = 0$$

de donde, operando, hallamos:

$$C'_m - p = \frac{h}{1 - h}$$

De esta fórmula se deduce que para todo h ($0 \leq h \leq 1$) si h es igual a 0, la condición coincide con la habitual de maximización de beneficio para la empresa atomística o competitiva típica ya conocida; si es igual a 1, $(1 - h)$ es cero, se elimina B de la función, y la única variable a maximizar es la producción, lo que deja indeterminada la condición de equilibrio, al ser cero el denominador, y a menos que se imponga una restricción adicional. Por último, para el caso intermedio ($0 < h < 1$) el coste marginal será siempre mayor que el precio, lo que implica que el volumen de producción será mayor que el de la empresa competitiva, para la que el coste marginal iguala al precio. Por la condición de segundo orden de máximo:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -(1 - h)C''_m > 0$$

sabemos que la empresa debe situarse en el tramo creciente de los costes marginales, es decir, para la «curva de oferta» normal, o habitual, a partir del mínimo de los costes medios variables.

El gasto en publicidad como porcentaje de los ingresos por venta

La *intensidad publicitaria* (es decir, gasto publicitario dividido por los ingresos por venta) depende de la razón entre la *elasticidad-publicidad* de la demanda (E_{pub}) y la *elasticidad-precio* de la demanda (E_{pre}). Se supone que el gasto en publicidad tiene un efecto positivo sobre la demanda del producto, pero también supone unos costes añadidos. Cabe preguntarse por el nivel óptimo de gasto en publicidad. En efecto, dadas las funciones de producción y de costes:

$$x = f(p, g) \quad C = f(x, g)$$

donde g es el gasto en publicidad, p el precio, x la producción y C el coste total. La función de beneficios sería:

$$B = px - C(x) - g = pf(x, g) - C[f(p, g)] - g$$

de la que, derivando, obtenemos las condiciones de primer orden para la maximización de beneficios:

$$\frac{\partial B}{\partial p} = x + p \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right) = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial g} = p \left(\frac{\partial x}{\partial g} \right) - \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial g} \right) - 1 = 0$$

Dividimos la primera de estas ecuaciones por $p \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)$ y operamos introduciendo la formulación de la elasticidad-precio de la demanda (E_{pre}). Tendremos:

$$\frac{p - \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)}{p} = \frac{1}{E_{pre}}$$

Despejando de aquí $\frac{\partial C}{\partial x}$ y sustituyendo en la expresión de $\frac{\partial B}{\partial g}$ pasamos a:

$$p \frac{\partial x}{\partial g} = E_{pre}$$

Ahora multiplicamos esta ecuación por $\frac{g}{x}$ y volvemos a reordenarla:

$$p \left(\frac{\partial x}{\partial g} \right) \left(\frac{g}{x} \right) = E_{pre} \frac{g}{x}$$

Sustituimos a continuación la fórmula de elasticidad-publicidad de la demanda (E_{pub})¹⁸ y obtenemos la expresión final:

$$\frac{g}{px} = \frac{E_{pub}}{E_{pre}}$$

que es conocida como *condición de Dorfman-Steiner*.

La diferenciación espacial de productos: un modelo circular

Los agentes económicos serán heterogéneos, diferentes, pues estarán localizados en distintos puntos del espacio, si bien éste no será un espacio tridimensional o bidimensional ilimitado sino que, simplificando, supondremos que se trata de una circunferencia (ciudad circular). Los posibles compradores están distribuidos uniformemente a lo largo de la circunferencia, uno sobre cada punto. Puede tratarse de bares en torno a una plaza circular, o de restaurantes en las playas de una isla montañosa o, como veremos, los horarios comerciales de una compañía aérea. z será el coste de desplazamiento por cada punto de distancia. Los consumidores comprarán teniendo en cuenta el precio y el coste de desplazamiento. Existirán N empresas equidistribuidas sobre la circunferencia, de manera que, si N fuese 12 estarían colocadas como las horas en la esfera de un reloj. Supondremos que la longitud de la circunferencia es igual a 1 en cualquier unidad de medida (un kilómetro, por ejemplo), y por tanto la distancia entre dos empresas o puntos de venta será $1/N$ (figura 6.1).

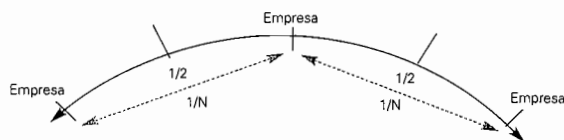


Figura 6.1. Modelo circular de localización espacial y diferenciación del producto.

En el modelo circular estudiamos el número óptimo de empresas. Para calcularlo minimizaremos los costes del producto, incluido el transporte. Si existen N empresas la distancia que las separa será $1/N$. Pero los potenciales compradores de esos puntos de venta no tendrán que recorrer una distancia tan larga. En efecto, a cada punto de venta acudirán compradores entre el punto medio de esa distancia, es decir, entre $1/2N$, y el propio punto de venta. Dado que los compradores están distribuidos uniformemente sobre la circunferencia podremos decir que, por término medio, tendrán que recorrer una distancia igual a $1/4N$. En efecto, los peores situados tendrán que desplazarse $1/2N$, y los mejor situados nada, por lo que la media será $1/4N$. Pero tendrán que hacer un viaje de ida y otro de vuelta a sus casas, por lo que el desplazamiento medio total será el doble de esa cantidad, es decir, $1/2N$. Multiplicamos ahora esa cantidad por el número de personas que

¹⁸ Sabemos que $E_{pre} = \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right) \left(\frac{p}{x} \right)$ y por analogía $E_{pub} = \left(\frac{\partial x}{\partial g} \right) \left(\frac{g}{x} \right)$.

acuden a comprar, que supondremos es un número positivo L , y tendremos la suma de desplazamientos totales que se hacen en esta plaza o isla. Los costes totales de transporte en la isla o plaza serán:

$$Z = zL \frac{1}{2N}$$

A este coste habrá que sumar los costes de producción. Supondremos que el coste marginal es constante e igual para todas las empresas. Ya que cada comprador adquiere sólo una unidad del producto la demanda total será L y el coste variable total será Lc . Pero además existe un coste fijo, por establecimiento e independiente de las unidades de producto por él vendidas. Este coste fijo es C y el total por este concepto será CN . Por tanto, el total de costes de la producción es:

$$S = Lc + CN$$

Tendríamos que escoger un valor para N tal que la suma $S + Z$ se vea minimizada¹⁹. Si se añade un establecimiento más los costes de transporte se verán reducidos porque los compradores tendrán que desplazarse menos. Hasta cierto punto esto compensa el coste fijo C de un establecimiento adicional. Ese punto en el que la reducción de un coste es igual al aumento del otro:

$$\frac{zL}{2N^2} = C$$

de donde podemos despejar N^* :

$$N^* = \sqrt{\frac{zL}{2C}}$$

El número óptimo de puntos de venta N^* dependerá de los costes fijos y de los costes de transporte, de manera que cuanto más altos sean éstos y más bajos sean aquellos mayor número de empresas tendrán cabida en la plaza o la isla. También influirá positivamente el número de consumidores potenciales L , sencillamente porque cuanto mayor sea la densidad de población más gente se beneficiará de un mayor número de puntos de venta. Imaginemos dos ciudades, una de ellas con una gran densidad de población y con un caos circulatorio que aconseja no coger el coche, como *Manhattan* (o centro de Madrid) y otra con igual número de habitantes pero dispersos en un área mucho más amplia, donde los distintos núcleos están interconectados por grandes autopistas (las M30, 40, 45), como *Los Ángeles* (*Las Rozas*). Obviamente en el primer caso z y L (entendido como densidad de población) serán muy grandes, y por tanto N^* será un número más elevado que en el segundo caso, donde z y L son más reducidos. Es lógico deducir que el número de establecimientos comerciales será mucho mayor en Manhattan que en Los Ángeles.

¹⁹ Mientras que S está relacionado linealmente con N , la relación de Z con N es más compleja: se trata de una curva cuya pendiente es:

$$\frac{\partial Z}{\partial N} = -\frac{zL}{2N^2}$$

Duopolios: Cournot y Stackelberg

PROBLEMA 6.1

Si en un mercado existen dos empresas duopolistas cuyas funciones de costes son $CT_1 = 310x_1 + 20$ y $CT_2 = 400x_2 + 25$, analice el equilibrio de Cournot con relación a precios, cantidades y beneficios, si la demanda de mercado es $p = 2.000 - x$.

Dada la teoría es obvio que en este contexto que:

$$x = x_1 + x_2$$

por lo que la función de demanda es:

$$p = 2.000 - x = 2.000 - (x_1 + x_2)$$

La función de beneficio, del primer duopolista, por su parte, es:

$$\begin{aligned} B_1 &= px_1 - CT_1 = [2.000 - (x_1 + x_2)]x_1 - CT_1 = \\ &= 2.000x_1 - x_1^2 - x_1x_2 - 310x_1 - 20 = -x_1^2 + 1.690x_1 - x_1x_2 - 20 \end{aligned}$$

Para maximizar el beneficio es preciso hacer:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = -2x_1 + 1.690 - \left(x_2 + x_1 \frac{dx_2}{dx_1} \right) = 0$$

Y para el segundo duopolista:

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = -2x_2 + 1.600 - \left(x_1 + x_2 \frac{dx_1}{dx_2}\right) = 0$$

En el modelo de Cournot suponemos que las variaciones conjetales son nulas:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_1}{dx_2} = 0$$

por lo que se simplifican las dos ecuaciones anteriores

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_2} = -2x_1 + 1.690 - x_2 = 0 \quad \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = -2x_2 + 1.600 - x_1 = 0$$

$$2x_1 = 1.690 - x_2 \quad x_1 = \frac{1.690 - x_2}{2}$$

y análogamente:

$$x_2 = \frac{1.600 - x_1}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que establece la dependencia de las dos empresas, se obtienen las cantidades de equilibrio:

$$x_1 = 593,3 \quad x_2 = 503,3$$

$$x = x_1 + x_2 = 1.096,6$$

el precio:

$$p = 903,4$$

y los beneficios de cada una de las dos empresas:

$$B_1 = 352.044,22 \quad B_2 = 253.336,22$$

PROBLEMA 6.2

Si en un mercado existen dos empresas duopolistas cuyas funciones de costes son $CT_1 = 310x_1 + 20$ y $CT_2 = 400x_2 + 25$ analice el equilibrio de Stackelberg con relación a precios, cantidades y beneficios, si la demanda de mercado es $p = 2.000 - x$.

El planteamiento es similar también al del problema anterior, salvo que en las ecuaciones:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = -2x_1 + 1.690 - \left(x_2 + x_1 \frac{dx_2}{dx_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x_2} = -2x_2 + 1.600 - \left(x_1 + x_2 \frac{dx_1}{dx_2}\right) = 0$$

la hipótesis de Stackelberg puede implicar que las variaciones conjetales sean, por ejemplo:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{2}$$

De donde, sustituyendo y operando:

$$-2x_1 + 1.690 - \left[\left(\frac{1.600 - x_1}{2}\right) + x_1 \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$-2x_2 + 1.600 - \left[\frac{1}{2}x_2 + \left(\frac{1.690 - x_2}{2}\right)\right] = 0$$

$$-2x_2 + 755 = 0 \quad -2x_1 + 890 = 0$$

$$x_1 = 445 \quad x_2 = 377,5$$

cantidades de equilibrio, por lo que la cantidad total será:

$$x = x_1 + x_2 = 822,5$$

y el precio de mercado:

$$p = 2.000 - x = 1.177,5$$

Por último, los beneficios correspondientes son:

$$B_1 \approx 524.210 - 137.970 = 386.240$$

$$B_2 \approx 444.106 - 150.825 = 293.281$$

Oligopolios colusivos: cárteles

PROBLEMA 6.3

En una estructura de mercado oligopolista (dos empresas sin pérdida de generalidad) cuyas funciones de costes respectivas son: $CT_1 = \left(\frac{x_1^2}{10}\right) + 6x_1 + 3$, $CT_2 = 9x_2^2 + 4x_2 + 5$, siendo la función de demanda $x = 150 - 0,5p$; discuta si las empresas tienen incentivo a formar un cártel, y cuáles serían los acuerdos probables y sus variantes.

Las empresas están produciendo en la situación inicial tratando de hacer máximo su beneficio. Pero, en este caso, existe interdependencia:

$$x_1 + x_2 = x$$

de modo que, para lograr sus objetivos tendrán que hacer iguales sus respectivos ingresos marginales y costes marginales, en este caso:

$$\begin{aligned}C_{m_1} &= 0,2x_1 + 6 \\IT_1 &= p \cdot x_1 = [300 - 2(x_1 + x_2)]x_1 = 300x_1 - 2x_1^2 - 2x_2x_1 \\I_{m_1} &= 300 - 4x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}0,2x_1 + 6 &= 300 - 4x_1 - 2x_2 \\4,2x_1 &= 294 - 2x_2\end{aligned}$$

y en el caso de la segunda:

$$\begin{aligned}C_{m_2} &= 18x_2 + 4 \\IT_2 &= p \cdot x_2 = [300 - 2(x_1 + x_2)]x_2 = 300x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\I_{m_2} &= 300 - 2x_1 - 4x_2 \\18x_2 + 4 &= 300 - 2x_1 - 4x_2\end{aligned}$$

El anterior es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$2,1x_1 = 147 - x_2 \quad 11x_2 = 148 - x_1$$

de donde:

$$x_1 = 66,47 \quad x_2 = 7,41 \quad p = 300 - 2 \cdot 73,88 = 152,24$$

por lo que los beneficios son:

$$\begin{aligned}B_1 &= 10.119,39 - 843,64 = 9.275,75 \\B_2 &= 1.128,09 - 528,81 = 599,28 \\B &= B_1 + B_2 = 9.875,04\end{aligned}$$

2. Si deciden actuar como monopolistas, es decir como un cártel, deberá cumplirse:

$$I_m = C_m$$

fácilmente obtenible de:

$$IT = px = (300 - 2x)x = 300x - 2x^2 \quad I_m = 300 - 4x$$

Por su parte, el coste marginal total es la suma de los costes marginales individuales (pero la suma horizontal, es decir, sumar las cantidades para cada coste marginal):

$$\begin{aligned}C_{m_1} &= 0,2x_1 + 6 \\C_{m_2} &= 18x_2 + 4 \\0,2x_1 &= C_{m_1} - 6 \\x_1 &= \frac{C_{m_1} - 6}{0,2} \quad x_2 = \frac{C_{m_2} - 4}{18}\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}C_m &= \frac{x + 30,02}{5,05} \\ \frac{x + 30,02}{5,05} &= 1.515 - 20,2 \quad 21,2x = 1.484 \quad x = 70,4\end{aligned}$$

La producción se la reparten los dos oligopolistas igualando los costes marginales individuales al coste marginal global, que para un volumen de output de 70,04 unidades es igual a 19,81:

$$\begin{aligned}C_{m_1} &= 0,2x_1 + 6 = C_m(70,4) = 19,81 \\x_1 &= 69,05 \\C_{m_2} &= 18x_2 + 4 = 19,81x_2 = 0,87 \\B_1 &= 250,869 - 593,1 = 17.305,2 \\B_2 &= 250,80,87 - 18 = 232,8 \\B &= 17.538\end{aligned}$$

muy superior al de lucha entre los competidores, luego, tienen incentivo a la coalición y el cartel.

Otra forma de obtener la solución del cartel es maximizar el beneficio conjunto:

$$B = [300 - 2(x_1 + x_2)](x_1 + x_2) - \left(\frac{x_1^2}{10} + 6x_1 + 3 \right) - (9x_2^2 + 4x_2 + 4x_2 + 5)$$

de donde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial x_1} &= 300 - 4x_1 - 2x_2 - 2x_2 - 0,2x_1 - 6 = -4,2x_1 - 4x_2 + 294 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} &= 300 - 2x_1 - 2x_1 - 4x_2 - 18x_2 - 4 = -4x_1 - 22x_2 + 296 = 0\end{aligned}$$

resolviendo el sistema se obtiene:

$$x_1 = 69,16$$

$$x_2 = 0,88$$

que es semejante a la solución obtenida anteriormente.

Modelos de liderazgo de empresas

PROBLEMA 6.4

Si en una estructura de mercado oligopolista la función de demanda de mercado es $x^d = 50 - p$, y existen 18 empresas cuyas funciones de costes son $CT_i = x_i^2$, y una empresa grande, líder, cuya función de costes es $CT_L = x_L + \frac{x_L^2}{5}$. Establecer el equilibrio mercado, y los beneficios, tanto del líder como de las empresas competitivas.

(a) Para obtener la oferta de las precio-aceptantes aplicamos la regla marginalista (prescindiendo del subíndice de la empresa):

$$p = C_m \quad C_m = 2x \quad p = 2x \quad x = \frac{p}{2}$$

$$x_c = 18 \left(\frac{p}{2} \right) = 9p$$

(b) La función de demanda del líder es, ya que es la total menos la de las competitivas:

$$x_c = 9p$$

$$x_L = x - x_c = 50 - p - 9p = 50 - 10p$$

(c) La cantidad lanzada en equilibrio por el líder se obtiene de igualar ingreso marginal al coste marginal (también prescindiendo del subíndice):

$$I_{mL} = C_{mL}$$

El coste marginal es:

$$C_{mL} = 1 + \frac{2x}{5}$$

y para hallar el ingreso marginal al modo habitual necesitamos:

$$x_L = 50 - 10p$$

de donde:

$$p = 5 - 0,1x_L$$

El ingreso total es:

$$I_L = [(5 - 0,1)x_L]x_L$$

y el marginal:

$$I_{mL} = 5 - \frac{2x_L}{10}$$

Igualando ahora al coste marginal:

$$I_{mL} = C_{mL}$$

$$5 - \frac{x_L}{5} = 1 + \frac{2x_L}{5}$$

$$x_L = 6,6$$

de donde:

$$p = 4,34$$

Para las empresas precio aceptantes:

$$x_c = 9p = 9 \cdot 4,34 = 39,6$$

total ofrecido por las 18 empresas competitivas, por lo que cada una ofrecerá:

$$x_i = \frac{x_c}{18} = 2,2$$

Los beneficios serían:

$$B_L = I_L - C_L = x \cdot p - C = 28,6 - 15,3 = 13,3 \text{ uu.cc.}$$

$$B_c = I_i - C_i = x \cdot p - C = 9,5 - 4,84 = 4,66 \text{ uu.cc.}$$

luego los de las 18, son 83,88 uu.cc.

PROBLEMA 6.5

Sea un mercado en el que la función de demanda es $x = 50 - 0,25p$ que es atendido por un grupo de empresas pequeñas cuya función de oferta es $x_c = 0,15p$ junto a una empresa líder cuyo coste total es $CT_L = 0,5x_L^2 + 10x_L + 200$. Hallar la cantidad lanzada al mercado por el líder y el precio de mercado.

La demanda del líder es la diferencia entre la demanda total y la oferta de las pequeñas:

$$x_L = 50 - 0,25p - 0,15p = 50 - 0,40p$$

actuando sobre la misma como monopolista, es decir igualando el ingreso marginal al coste marginal.

$$p_L = \frac{50}{0,4} - \frac{x_L}{0,4} = 125 - 2,5x_L$$

$$IT_L = (125 - 2,5x_L)x_L$$

$$I_{mL} = 125 - 5x_L \quad Cm_L = x_L + 10$$

de donde:

$$I_{mL} = Cm_L = 125 - 5x_L = x_L + 10 \quad 6x_L = 115$$

$$x_L = 19,17 \quad p_L = 125 - 2,5(19,17) = 77,07$$

El output total la industria que abastece el mercado $x = 50 - 0,25(77,07) = 30,73$ del que las empresas pequeñas ofrecen $x_c = 0,15 \cdot 77,07 = 11,56$.

Oligopolios con curva de demanda quebrada

PROBLEMA 6.6

Una empresa oligopolista se enfrenta a una curva de demanda decreciente y quebrada en dos tramos cuyas elasticidades son respectivamente 4 y 2 en valor absoluto; si su curva de costes a largo plazo es $C = 0,2x^2 + 24x$ calcular el margen de variación de los costes marginales si el precio y la cantidad producida inicialmente son de 50 y 10 unidades respectivamente, la posibilidad de alterar en la demanda sin cambio en las elasticidades, así como sus implicaciones para la cantidad producida.

Como debe cumplirse en cada tramo de la demanda que:

$$I_m = p \left(1 - \frac{1}{E} \right)$$

está claro que:

$$I_{m_1} = 50 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 37,5$$

$$I_{m_2} = 50 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 25$$

Los costes marginales son:

$$C_m = 0,4x + 24$$

que para un output de 10 unidades es 28. Luego el tramo de discontinuidad de los ingresos marginales es de 12,5, y el margen de variación de los costes marginales será potencialmente de 3 unidades a la baja y 9,5 al alza. Es evidente, por otro lado, que la demanda puede variar sin alteración de las elasticidades en los dos tramos; en este caso lo que sí variará es el volumen de output. El límite del mismo será cuando:

$$C_m = 37,5$$

que es el límite superior de los mismos, o lo que es igual, igualando los costes marginales a dicho límite:

$$C_m = 0,4x + 24 = 37,5$$

de donde:

$$x = 33,75 \text{ unidades}$$

Competencia monopolística

PROBLEMA 6.7

Suponga un grupo de empresas en un mercado de competencia monopolística, en el que el grupo tiende al equilibrio y las empresas se ajustan proporcionalmente; la empresa típica tiene una función de costes como $C = 0,15x^2 + 35x$, y hace frente a una curva inversa de demanda, $p = 100 - 0,5x$. Hallar el equilibrio a largo plazo y la elasticidad de la demanda en dicho equilibrio.

El equilibrio, solución de tangencia, se da en la intersección de las curvas de demanda y de costes medios a largo plazo. De modo que, sin más que calcular los costes medios e igualar:

$$CML = \frac{C}{x} = \frac{0,15x^2 + 35x}{x} = 0,15x + 35$$

$$CML = p = 0,15x + 35 = 100 - 0,5x$$

de donde:

$$x = 100 \quad p = 50$$

Sabemos que se debe cumplir que:

$$I_m L = C_m L$$

PROBLEMA 6.8

por lo que:

$$C_m L(100) = 0,30x + 35 = 0,30 \cdot 100 + 35 = 65$$

$$C_m L = I_m L = p \left(1 - \frac{1}{E} \right) = 50 \left(1 - \frac{1}{-3,33} \right) = 65$$

de donde, la elasticidad es $E = -3,33$.

Una empresa perteneciente a un mercado de competencia monopolística cuya función de costes es $C = 0,06x^3 - x^2 + 25x$, se enfrenta a una función inversa de demanda lineal como $p = a - 0,15x$; obtener el equilibrio a largo plazo de la empresa y el parámetro a que depende del número de empresas del mercado.

La solución de tangencia implica la igualación de las pendientes de la curva de demanda y de los costes medios a largo; la de la demanda es:

$$\frac{dp}{dx} = -0,15$$

Calculando primero los CML , al modo habitual:

$$CML = 0,06x^2 - x + 25$$

y derivando respecto de x , para obtener la pendiente:

$$\frac{dCML}{dx} = 0,12x - 1$$

Iguando:

$$-0,15 = 0,12x - 1 \quad 0,85 = 0,12x \quad x = 7,08$$

El precio de equilibrio se obtiene estableciendo los CML para un output igual a 7. En este caso:

$$CML(7) = 0,06 \cdot 49 - 7 + 25 = 20,94 = p$$

El parámetro a ligado al tamaño del mercado, que no ha intervenido hasta ahora, es obvio que está implícito en la ecuación de demanda:

$$p = a - 0,15x = a - 0,15 \cdot 7 = 20,94$$

de donde:

$$a = 21,99 \approx 22$$

Teoría de juegos y equilibrio de nash

PROBLEMA 6.9

Suponga dos empresas oligopolísticas con costes marginales nulos que se enfrentan a una curva de demanda de mercado como $x = a - bp$. Obtenga un equilibrio de Nash.

Si la curva, es decir digamos una recta, de demanda es la habitual función lineal, utilizada en otros ejemplos, $x = a - bp$, ya sabemos que se representa gráficamente con puntos extremos que implican:

$$\begin{aligned} \text{Si } p &= 0 & x &= a \\ \text{Si } x &= 0 & a &= bp & p &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Sabemos también que los oligopolistas maximizan el beneficio cuando el ingreso marginal es igual al coste marginal; o lo que es lo mismo, cuando el ingreso total es máximo, o el marginal igual a cero. O lo que es igual, cuando E , la elasticidad de la demanda es igual a 1 en valor absoluto. Aquí:

$$\begin{aligned} I &= px = p(a - bp) \\ E &= -\frac{\partial x}{\partial p} \frac{p}{x} = -(-b) \frac{p}{a - bp} = 1 \\ bp &= a - bp \\ 2bp &= a & p &= \frac{a}{2b} \\ x &= a - bp = a - b \left(\frac{a}{2b} \right) = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Pero supongamos que la segunda empresa supone que la primera mantendrá su producción en $x_1 = \frac{a}{2}$, y que reaccionará cualquier bajada de precio de la segunda. La segunda empresa maximiza su beneficio para $x = \frac{a}{4}$, al precio p_1 . La primera rebaja el precio a p_1 y mantiene el output en $x_1 = \frac{a}{2}$, si supone que la segunda va a mantener su output. Está claro que las ecuaciones de reacción de las dos empresas, en este caso son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(a - x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(a - x_1) \end{aligned}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2} a - \frac{a}{4} = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{4a - 2a}{8} = \frac{2a}{8} = \frac{1}{4} a$$

$$x_1^1 = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{4} a \right) = \frac{a}{2} - \frac{a}{8} = \frac{8a - 2a}{16} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2} a = \frac{3}{8} a$$

El equilibrio de maximización del beneficio es tal, que simultáneamente se establezca un vector de outputs (x_1, x_2) , que haga cumplir simultáneamente el sistema anterior.

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[a - \frac{1}{2} (a - x_1) \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} x_1 \right)$$

$$\frac{3}{4} x_1 = \frac{1}{4} a \quad x_1 = \left(\frac{a}{3} \right)$$

Por analogía, $x_2 = \left(\frac{a}{3} \right)$. Por lo que:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 2 \frac{a}{3}$$

$$p = a - bx = a - b \frac{2a}{3} = \frac{a}{3} (3 - 2b)$$

y ninguna de las dos empresas tiene incentivo a cambiar su volumen de output.

Precios que previenen la entrada

PROBLEMA 6.10

Comente la siguiente proposición: «Si los costes medios de todas las empresas, tanto las instaladas como las potenciales entrantes fuesen iguales y constantes, ¿aún así pueden los oligopolistas instalados establecer barreras a la entrada?»

Si los precios fueran superiores a los costes medios ($p > CM$) ello implicaría beneficios extraordinarios positivos y cualquier empresa podrá entrar en el sector para cualquier volumen de output, si todas las empresas son iguales en costes como en la hipótesis del enunciado. Luego de aquí se infiere que el precio límite que previene la entrada, p_L , que deberían imponer las instaladas sería el que fuera igual a los costes medios, aun a costa de que los beneficios fueran nulos incluso para ellas.

Teoría de juegos

PROBLEMA 6.11

En una situación de dilema del prisionero dada por la siguiente tabla:

Prisionero I	Prisionero II		
	C	NC	
	C	4,4	1,8
	NC	8,1	2,2

la solución consistente en que los dos confiesen es la casilla:

- (a) (8,8)
- (b) (4,4)
- (c) (16,2) o (2,16)
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) Queda claro que si confiesan el prisionero I y el prisionero II, la casilla correspondiente viene dada por (C, C) o sea, (4, 4).

PROBLEMA 6.12

En la situación de tabla de la tabla siguiente, si ambos jugadores hubieran llegado al acuerdo de no confesar y uno sólo violase el acuerdo obtendría una pena suponiendo que los números indican pena en años de:

Prisionero I	Prisionero II		
	C	NC	
	C	4,4	1,8
	NC	8,1	2,2

- (a) 4 años
- (b) 2 años
- (c) 1 año
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c).

PROBLEMA 6.13

Si en un modelo de Cournot hay n empresas iguales la elasticidad de la demanda será:

- (a) Mayor que $1/n$.

- (b) Menor que $1/n$.
 (c) No depende de n .
 (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a):

$$I_m = p \left(1 - \frac{1}{nE} \right) \text{ como } C_m > 0$$

(y también lo es por definición):

$$\left(1 - \frac{1}{nE} \right) > 0$$

lo que implica que

$$1 > \frac{1}{nE}$$

por lo que

$$nE > 1 \text{ y } E > \frac{1}{n}$$

PROBLEMA 6.14

En un juego de suma constante, dada la matriz:

		D/II	
		1	2
D/I	1	100	110
	2	80	90

- (a) El maximin es 100.
 (b) El minimax es 80.
 (c) El maximin es 80.
 (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Los mínimos de la filas son 100 y 80, los máximos de las columnas son 100 y 110. Por lo tanto el maximin es 100 y el minimax es 100.

PROBLEMA 6.15

En un juego de suma constante dada la matriz:

		D/II	
		1	2
D/I	1	100	110
	2	80	90

PROBLEMA 6.16

el término 100 se interpreta:

- (a) Como que el duopolista tiene el 100% de la cuota de mercado
 (b) La estrategia del oligopolista II dada la estrategia del I
 (c) La estrategia 1 del duopolista I, dada la estrategia del II
 (d) Ninguna de las anteriores

RESPUESTA: (c) Es por hipótesis.

Si tenemos una matriz de juego como:

		IBM PCs	
		Precio alto	Precio bajo
HP PCs	Precio alto	50	30
	Precio bajo	20	-10

Con información perfecta por parte de todos los participantes en el juego y una posición inicial en la casilla superior derecha ¿sería creíble una amenaza por parte de HP de bajar los precios?:

- (a) Sí, porque los fabricantes de IBM pierden más que HP.
 (b) Sí, porque la estrategia dominante de HP es mantener precios bajos.
 (c) No, porque la estrategia dominante de los fabricantes de IBM es mantener bajo el precio, y la de HP es un precio alto.
 (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) Las estrategias dominantes determinan la conducta racional para los jugadores. Los fabricantes de IBM mantendrán los precios bajos y HP uno alto porque son sus estrategias dominantes.

PROBLEMA 6.17

Si tenemos una matriz de juego como:

		Empresa 1	
		Entrar	No entrar
Empresa 2	Entrar	0	0
	No entrar	5	0

Con información perfecta por parte de todos las dos empresas y decisiones simultáneas ¿Cuántos equilibrios de Nash hay en el juego?:

PROBLEMA 6.18

- (a) Uno, que las dos empresas no entren.
- (b) Uno que las dos empresas entren.
- (c) Dos que la empresa 1 entre y la 2 no lo haga o que entre la 2 y la 1 no lo haga.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) Un equilibrio de Nash es una situación tal que, a la vista de lo que ha hecho la otra empresa, ambas están satisfechas con la decisión tomada. Lo peor que puede ocurrir en el juego es que entren las dos: ambas se arrepentirían. Si no entra ninguna ambas se arrepentirán de no haberlo hecho. Pero si entra sólo una las dos estarán satisfechas con la decisión tomada porque, dado lo que ha hecho la otra, ha resultado ser la mejor decisión que podían tomar.

Si se dispone de una matriz de juego como:

		Empresa 1	
		Entrar	No entrar
Empresa 2	Entrar	20 -50	500 0
	No entrar	0 350	0 0

Con información perfecta por parte de todos las dos empresas y decisiones simultáneas ¿qué empresa entrará?:

- (a) Ninguna de las dos, porque es estrategia dominante de ambas no hacerlo.
- (b) Las dos, porque es estrategia dominante de ambas hacerlo.
- (c) La empresa 2, porque es su estrategia dominante hacerlo, mientras que la empresa 1 no tiene estrategia dominante.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) La empresa 2 elige entrar porque eso le garantiza no arrepentirse, haga lo que haga la otra; a la empresa 1 en cambio le interesa entrar sólo si la 2 no lo hace. La empresa 1 sabe que entrar es estrategia dominante de la empresa 2 y prevé que entrará; así pues la empresa 1 decide no entrar.

PROBLEMA 6.19

Ante una matriz de juego como:

		Empresa 1	
		Entrar	No entrar
Empresa 2	Entrar	20 -50	500 0
	No entrar	0 350	0 0

¿existe un equilibrio de Nash?:

PROBLEMA 6.20

- (a) Sí, cuando la empresa 2 entra y la 1 decide no hacerlo.
- (b) Sí, cuando ambas empresas deciden entrar.
- (c) Sí, cuando ambas empresas deciden no entrar.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Como puede apreciarse el resultado es un equilibrio de Nash porque ninguna se arrepiente de la decisión que ha tomado, una vez observa lo que ha hecho la otra.

Suponga una matriz de juego como:

		Empresa 1	
		Cereal sin azúcar	Cereal con azúcar
Empresa 2	Cereal sin azúcar	50 50	100 500
	Cereal con azúcar	500 100	50 50

Con información perfecta por parte de todos las dos empresas ¿qué diferencia hay en el resultado con decisiones secuenciales y decisiones simultáneas?:

- (a) Ninguna, ya que se llega al mismo resultado: ambas producen el cereal con azúcar.
- (b) Con decisiones simultáneas ambas producirían el cereal con azúcar, y con decisiones secuenciales la primera en mover producirá cereal con azúcar y la otra sin azúcar.
- (c) Con decisiones simultáneas ambas producirían el cereal sin azúcar, y con decisiones secuenciales ambas con azúcar.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) Con decisiones simultáneas no hay estrategias dominantes, y todo depende de lo que cada empresa piense que hará la otra. La opción más rentable es producir cereal con azúcar pero si la otra ha hecho lo mismo habrá menores beneficios. La decisión conservadora de producir cereal sin azúcar no elimina la posibilidad de las pérdidas porque ambas pueden hacer lo mismo. Sólo las casillas superior derecha e inferior izquierda son equilibrios de Nash. Con movimientos secuenciales la primera en mover elige el cereal con azúcar y la otra se conforma produciendo cereal sin azúcar. Sería un equilibrio de Nash.

PROBLEMA 6.21

Si en un juego simultáneo uno de los jugadores se siente satisfecho con la decisión tomada una vez observado lo que ha hecho el contrincante y viceversa, estamos ante:

- (a) Un equilibrio de Nash.
- (b) Unas estrategias dominantes.

- (c) Una estrategia del ojo por ojo.
(d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Es simplemente la definición del equilibrio de Nash.

PROBLEMA 6.22

Si en un juego simultáneo un jugador tiene una estrategia dominante el otro:

- (a) Tiene también, necesariamente, otra estrategia dominante.
(b) Puede tener o no una estrategia dominante.
(c) No puede tener en modo alguno otra estrategia dominante, o no habría equilibrio.
(d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) El que uno tenga una estrategia dominante no excluye que la tenga el otro.

PROBLEMA 6.23

Si en un juego simultáneo los dos jugadores tienen una estrategia dominante:

- (a) La solución del juego será necesariamente un equilibrio de Nash.
(b) La solución del juego no puede ser en ningún caso un equilibrio de Nash.
(c) La solución del juego puede ser o no un equilibrio de Nash.
(d) El juego no tiene solución.

RESPUESTA: (a) Las estrategias dominantes conducen a la mejor solución para cada jugador independientemente de lo que haga el otro y por tanto éstos no se arrepienten a posteriori de la decisión tomada, por lo que conducen a un equilibrio de Nash.

El modelo de empresa que maximiza las ventas

PROBLEMA 6.24

Suponga una empresa que maximiza sus ingresos por ventas, cuya función de costes es $CT = 2x^2 + 10x + 100$, donde se incluyen los gastos en publicidad. Si la función de demanda a la que hace frente es $p = 1.998 - 3x$. Hállese el equilibrio del mismo, si la restricción de beneficio es 10.000 uu.cc.

Partiendo del planteamiento teórico conocido, los ingresos son ahora:

$$IV = px = (1.998 - 3x)x = 1.998x - 3x^2$$

y los marginales:

$$\frac{\partial IV}{\partial x} = 1.998 - 6x = 0$$

por lo que:

$$1.998 = 6x \quad x = 333$$

y sustituyendo en la función de demanda:

$$p = 999$$

por que los beneficios son para ese volumen de output:

$$B = I - C = 332.667 - 225.208 = 107.459$$

Si la empresa fuera una tradicional maximizadora del beneficio:

$$B = (1.998 - 3x)x - (2x^2 + 10x + 100) = 1.998x - 3x^2 - 10x - 100 = 1.998x - 5x^2 - 10x - 100$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 1.998 - 10x - 10 = 0$$

$$x = 198,8 \quad p = 1.401,6$$

$$B = 278.638,08 - 81.130,88 = 197.507,2$$

La empresa que maximiza conjuntamente producción-beneficios

PROBLEMA 6.25

Una empresa tiene un objetivo mixto producción-beneficios, $M = 0,2B + 0,8x$. Su función de costes es $C = x^2 + 100x + 5$ y la función de demanda de mercado a la que se enfrenta es $x = 200 - p$. Hallar el equilibrio de la empresa.

Aplicando la teoría ya conocida:

$$B = px - C = (200 - x)x - (x^2 + 100x + 5) = 200x - x^2 - x^2 - 100x - 5 = -2x^2 + 100x - 5$$

Operando:

$$M = 0,2(-2x^2 + 100x - 5) + 0,8x$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0,2(-4x + 100) + 0,8 = 0$$

$$x = \left(\frac{20,8}{0,8} \right) = 26$$

Sustituyendo en:

$$p = 200 - x = 200 - 26 = 174$$

$$I = px = 4.524 \quad C = 3.281 \quad B = 1.243$$

Fijación de precios por full-cost

PROBLEMA 6.26

Comente la siguiente proposición: si la elasticidad de la demanda a la que se enfrenta una empresa es 5, en valor absoluto, podrá fijar un 25% como margen de beneficio, sobre los costes medios variables.

De las fórmulas del texto teórico es fácil apreciar que:

$$(1 + h) = 1 + \frac{25}{100} = 1 + 0,25 = \left(\frac{E}{E - 1} \right) = \left(\frac{5}{5 - 1} \right) = \left(\frac{5}{4} \right) = 1,25$$

de donde $E = 5$. Luego la proposición es cierta, en algún sentido.

Localización espacial: modelo circular

PROBLEMA 6.27

Suponga que queremos localizar (construir) un hotel en la isla de Stromboli (en cuyo centro existe un volcán) y en la que la única forma operativa de pasar de un punto de la costa a otro es a través de la playa o por barco. Como se trata de una isla turística donde –suponemos– que los turistas están distribuidos uniformemente en la costa, pero hay pocas atracciones, equidistantes entre ellas, si el perímetro de la isla es de 20 kilómetros, hay cuatro amenidades, el coste del transporte (una lancha) es de 4 unidades monetarias (euros) por kilómetro, hay 200 turistas que quieren divertirse en una de ellas al día, el coste fijo de las mismas es de 100 euros por temporada, y el coste de cada entrada es de 5 euros ¿Cuál es el coste medio total de una sesión de diversión para cada turista?:

Lo primero es calcular el coste medio por diversión, lo que nos permite determinar el precio de la misma en cada amenidad. Los costes por sesión (costes medios) son $CM = \left(\frac{100}{50} \right) + 5 = 7$ unidades monetarias, dado que cada amenidad servirá a una cuarta parte de los turistas. Pero éstos deberán afrontar además los costes de desplazamiento. El turista que se aloje allí donde hay una amenidad no tiene que afrontar ningún coste adicional, pero el peor de los casos posibles es aquel en que el turista está justo entre dos amenidades, eso es, a 2,5 kilómetros de cualquiera de ellos. La distancia media será por tanto de $\frac{2,5}{2} = 1,25$ kilómetros. Dado un precio de 4 unidades mo-

netarias por kilómetro el coste medio de un desplazamiento será de 5 unidades monetarias para la ida, y 5 para la vuelta, lo que hace un total de 10, que unidas a las 7 del coste de la sesión hacen que cada visita a la amenidad salga por 17 euros.

PROBLEMA 6.28

Con los datos del ejercicio anterior ¿Cuál es el número óptimo de amenidades?:

El número óptimo de amenidades dependerá de los costes de transporte: si éstos son cero el número óptimo es una sola de ellas, pero si los costes son positivos, en nuestro caso 4, un mayor número de establecimientos ayudará a reducir los costes totales (incluido transporte) de cada visita a las mismas. Una posibilidad es repetir los cálculos para un número superior o inferior de establecimientos, y ver qué ocurre con los costes totales de una opción. Otra posibilidad, más directa es aplicar la fórmula:

$$N^* = \sqrt{\frac{zL}{2C}}$$

donde z es el coste por kilómetro de los desplazamientos (4), L es el número de clientes uniformemente distribuidos (200) y C es el coste fijo que debe afrontar cada restaurante para poder operar a cualquier nivel de actividad (100). Introduciendo los datos del problema obtenemos que $N^* = 2$ lo que obviamente quiere decir que reduciéndose el número de amenidades el coste total de la amenidad se reducirá.

PROBLEMA 6.29

DENU Airlines se pregunta por el número de aviones que deben cubrir el trayecto Madrid-Tenerife. Suponemos que hay 24 personas ($= L$) que desean viajar cada día a la isla afortunada, y cada una de ellas prefiere salir a una hora distinta. El coste que para cada una de ellas supone esperar una hora es igual a 10 euros ($= z$) y el coste fijo de poner en marcha al avión es de 30 euros ($= CF$). ¿Cuántos vuelos deben salir al día?:

Aplicando la fórmula $N^* = \sqrt{\frac{zL}{2C}}$ (véase introducción teórica) obtenemos $N^* = 2$, es decir, la cantidad óptima de vuelos es de dos al día equidistantes, es decir, uno a las 12 de la noche y otro a las 12 del mediodía, o uno a las 6 de la mañana y otro a las 6 de la tarde, etc.

PROBLEMA 6.30

Si la compañía DENU Airlines explota en solitario un trayecto fleta cuatro aviones al día, cada avión le cuesta 32 euros, llenando en los cuatro las 128 plazas que tienen, y sabe que los pasajeros tienen preferencias distintas pero equidistribuidas ¿cómo valoran éstos el tiempo que pierden esperando en el aeropuerto?:

Aplicando la fórmula $N^* = \sqrt{\frac{zL}{2C}}$ obtenemos $z = 2$, es decir, cada pasajero valora cada hora perdida (si medimos los horarios con esa unidad) esperando, en 2 euros. Te-

nemos que $L = 512 (= 128 \cdot 4)$, $CF = 32$ y $N^* = 4$, pues suponemos que la compañía está programando el número de vuelos óptimo.

Proliferación de marcas

PROBLEMA 6.31

Si una determinada empresa que vende en solitario galletas integrales para el desayuno tiene cuatro tipos distintos *equidistantes* (equivalentes en preferencias) que vende a consumidores de preferencias equidistribuidas a lo largo de una circunferencia de posibilidades ¿Cuántas y qué tipo de variedades tendría que introducir una competidora para disputarle la mitad del mercado?:

La diferenciación de productos es una forma de barrera a la entrada (Schmalensee, 1978). Si se introducen las mismas variedades se iría a una guerra de precios. Sólo si se introducen el mismo número de variedades, pero intermedias, se puede disputar la mitad de ese mercado fragmentado por la diferenciación.

Publicidad

PROBLEMA 6.32

Una empresa sabe que, hasta cierto punto, los gastos en publicidad le reportan mayores ventas. La función que las relaciona es $x = 100 + 50A - 0,75A^2$, donde x son las ventas y A el gasto en publicidad. El gasto en publicidad es de 30 unidades monetarias y el producto se vende a 2 unidades monetarias la unidad. Los costes variables (CV) por unidad de producto son constantes e iguales a 0,75 unidades monetarias. Los costes fijos (CF) suponen 150 unidades monetarias, a los que se suman los gastos en publicidad ya mencionados ¿cuáles serán los beneficios?:

Los beneficios dependerán de la diferencia entre ingresos y costes, variables y fijos.

$$B = px - (A + CF) - xCV$$

$$B = 1.850 - (30 + 150) - 925 \cdot 0,75 = 976,25 \text{ u.m.}$$

PROBLEMA 6.33

Una empresa tiene una función de demanda tal que $x = 125 - 5p$, y una función de costes (excluida la publicidad) tal que $C = 75 + 5x + 0,01x^2$, la elasticidad de la demanda respecto de la publicidad es de 2, y el presupuesto publicitario (A) es de 250 unidades monetarias. ¿El precio será?

La función de ingresos será:

$$px = 25x - \frac{x^2}{5}$$

El ingreso marginal es por tanto:

$$I_m = 25 - \frac{2x}{5}$$

El coste marginal será:

$$C_m = 5 + 0,02x$$

El beneficio se hace máximo igualando ambos, de manera que:

$$25 - \frac{2x}{5} = 5 + 0,02x$$

de donde:

$$x = 47,6$$

y dada la función de demanda:

$$p = 25 - \frac{47,6}{5} = 15,4 \text{ u.m.}$$

PROBLEMA 6.34

Con los datos del problema anterior ¿cuál es el beneficio?

Si el beneficio se hace máximo igualando ingreso marginal a coste marginal:

$$25 - \frac{2x}{5} = 5 + 0,02x$$

entonces:

$$x = 47,6$$

y dada la función de demanda

$$p = 25 - \frac{47,6}{5} = 15,4 \text{ u.m.}$$

El beneficio sería:

$$B = px - C - A$$

$$B = 733,0 - 335,6 - 250 = 147,3 \text{ u.m.}$$

PROBLEMA 6.35

Con los datos del Problema anterior ¿cuáles serían los efectos en los beneficios de un incremento del 5% en el presupuesto de publicidad?:

Dada la elasticidad de la demanda respecto del gasto en publicidad:

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial x}{x} \right)}{\left(\frac{\partial A}{A} \right)} \right] = 2$$

un aumento del 5% de dicho gasto elevará el número de unidades vendidas en un 10%, esto es, de aproximadamente 47,6 a 52,36 unidades. El impacto en la función de beneficios será:

$$B = 52,36(15,4) - [75 + 5(52,36) + 0,01(52,36)^2] - 262,5 = 806,34 - (75 + 261,8 + 27,41) - 262,5 = 179,63$$

Fijación de precios bajo con producción conjunta

PROBLEMA 6.36

Una determinada empresa extrae pirita de la que se obtienen como metales secundarios oro y plata en proporciones fijas (tres partes de plata por una de oro). Las demandas de estos dos metales son distintas y responden a las funciones $p_{AU} = 200 - 0,05x_{AU}$ y $p_{AG} = 120 - 0,1x_{AG}$ para el oro y la plata respectivamente. El coste de extracción y separación de los metales es conjunto y responde a la función de costes totales $C = 350 + 5x + 0,05x^2$. El precio por unidad de masa de cada producto que hace máximo el beneficio es:

(a) $p_{AU} = 190,2$; $p_{AG} = 60,9$

(b) $p_{AU} = 200$; $p_{AG} = 120,9$

(c) $p_{AU} = 200$; $p_{AG} = 600,5$

(d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Obtenemos las curvas de ingreso marginal derivando las de ingreso de cada producto:

$$I_{AU} = p_{AU}x_{AU} = 200x_{AU} - 0,05x_{AU}^2$$

$$I_{mAU} = 200 - 0,1x_{AU}$$

y

$$I_{AG} = p_{AG}x_{AG} = 120x_{AG} - 0,1x_{AG}^2$$

$$I_{mAG} = 120 - 0,2x_{AG}$$

Sumadas verticalmente:

$$I_m = (200 - 0,1x_{AU}) + (120 - 0,2x_{AG}) = 320 - 0,3x$$

La curva de costes marginales se obtiene derivando de la expresión de costes totales, de manera que se obtiene:

$$C_m = 5 + 0,1x$$

Para maximizar el beneficio tendremos que igualar coste e ingreso marginal:

$$320 - 0,3x = 5 + 0,1x$$

$$x = 787,5$$

Dado que tres cuartas partes serán de plata:

$$x_{AG} = 590,6 \quad x_{AU} = 196,9$$

los precios son:

$$p_{AU} = 200 - 0,05 \cdot 196,9 = 190,2$$

$$p_{AG} = 120 - 0,1 \cdot 590,6 = 60,9$$

PROBLEMA 6.37

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0,01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0,01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0,005x^2$. ¿Cuál es el precio de transferencia y la producción que hacen máximo el beneficio de la empresa en su conjunto?:

(a) $p_T = 52,5$; $x = 4.750$

(b) $p_T = 52,5$; $x = 200$

(c) $p_T = 0$; $x = 4.750$

(d) $p_T = 0$; $x = 200$

RESPUESTA: (a) El ingreso marginal neto de la división distribuidora (el ingreso marginal de la empresa menos el coste marginal de la división) debe igualar el coste marginal de la división productora:

$$ImN_B = Im_G - Cm_B$$

$$Cm_A = Cm_G - Cm_B$$

Despejando en la segunda Cm_B y sustituyendo en la primera:

$$ImN_B = Im_G - Cm_G + Cm_A$$

Dado que $Ima_G = Cma_G$ para la producción que hace máximo el beneficio, tendremos:

$$ImN_B = Cma_A$$

Que determina el precio de transferencia y la cantidad óptima que se produce.

Tenemos:

$$ING_G = px = 200x - 0,01x^2$$

$$Im_G = 200 - 0,02x$$

$$Cm_G = 10 + 0,02x$$

$$Cm_B = 5 + 0,01x$$

$$Cma_A = Cm_G - Cm_B = 10 + 0,02x - (5 + 0,01x) = 5 + 0,01x$$

$$ImN_B = Im_G - Cm_B = 200 - 0,02x - (5 + 0,01x) = 195 - 0,03x$$

$$ImN_B = Cma_A \text{ implica que:}$$

$$195 - 0,03x = 5 + 0,01x$$

$$190 = 0,04x$$

$$x = 4.750$$

Que es la misma solución que habríamos obtenido haciendo $Im_G = Cm_G$.

El precio de transferencia (p_T) se igualará al coste marginal de la división A (ya que p_T será su curva de ingreso marginal) y será el coste marginal de la división B. En efecto:

$$Cma_A = Cm_G - Cm_B = 5 + 0,01 \cdot 4.750 = 52,5 \text{ u.m.}$$

PROBLEMA 6.38

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0,01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0,01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0,005x^2$. El beneficio total es:

(a) 190.000

(b) 4.750

(c) 30.000

(d) 450.750

RESPUESTA: (d) Las dos divisiones hacen máximo su beneficio. La división A iguala $Cma_A = p_T = Ima_A$, lo que asegura la maximización del beneficio de esta división. La división B hace máximo su beneficio con $ImN_B (= Cm_A) = Cm_B (= Cm_G - Cm_A)$:

$$195 - 0,03x = 10 + 0,02x - (5 + 0,01x)$$

$$190 = 0,04x$$

lo que se verifica para $x = 4.750$ u.m.:

$$B = px - C$$

$$p = 200 - 0,01x = 152,5 \text{ uu.cc}$$

$$px = 724.375$$

$$C = 500 + 10x + 0,01x^2 = 273.625$$

$$B = 724.375 - 273.625 = 450.750$$

PROBLEMA 6.39

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0,01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0,01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0,005x^2$. Considerando la posibilidad de comprar el producto en cuestión en un mercado externo, perfectamente competitivo, al precio de 25 u.m. ¿Cuál será la producción?:

(a) 250

(b) 1.500

(c) 2.000

(d) 30

RESPUESTA: (c) El precio de 25 u.m. será ahora la curva de ingreso marginal de la división A, de manera que ésta hará máximo su beneficio para:

$$Cma_A = 5 + 0,01x = 25$$

$$x = 2.000$$

PROBLEMA 6.40

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0,01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0,01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0,005x^2$. Considerando la posibilidad de comprar el producto en cuestión en un mercado externo, perfectamente competitivo, al precio de 25 u.m. ¿Cuál será el beneficio conjunto?:

(a) 190.000

(b) 4.700

(c) 30.000

(d) 450.750

PROBLEMA 6.41

RESPUESTA: (d) El precio de 25 u.m. será ahora la curva de ingreso marginal de la división A, de manera que ésta hará máximo su beneficio para:

$$Cm_A = 5 + 0,01x = 25$$

$$x = 2.000$$

La compañía deseará distribuir la misma cantidad que antes, deducida a partir de la igualación $Im_G (= 200 - 0,02x) = Cm_G (= 10 + 0,02x)$. La división B deseará pues comprar y distribuir ese número de unidades, de manera que la diferencia (2.750 unidades) la obtendrá del mercado al precio de 25 unidades monetarias. El beneficio permanecerá igual porque lo que una división (B) ahorra la otra (A) deja de ingresarle. En efecto B ahorra:

$$xp - xp_T = 4.750 \cdot 52,5 - 4.725 \cdot 25 = 130.625 \text{ uu.cc}$$

y A deja de ingresar precisamente lo mismo.

Una determinada empresa extrae pirita de la que se obtienen como metales secundarios oro y plata en proporciones fijas (tres partes de plata por una de oro). Las demandas de estos dos metales son distintas y responden a las funciones $p_{AU} = 200 - 0,05x_{AU}$ y $p_{AG} = 120 - 0,1x_{AG}$ para el oro y la plata respectivamente. El coste de extracción y separación de los metales es conjunto y responde a la función de costes totales $C = 350 + 5x + 0,05x^2$. La producción por unidad de tiempo que hace máximo el beneficio es:

- (a) 787,5
- (b) 3.200
- (c) 150
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Obtenemos las curvas de ingreso marginal derivando las de ingreso de cada producto:

$$I_{AU} = p_{AU}x_{AU} = 200x_{AU} - 0,05x_{AU}^2$$

$$I_{mAU} = 200 - 0,1x_{AU}$$

y

$$I_{AG} = p_{AG}x_{AG} = 120x_{AG} - 0,1x_{AG}^2$$

$$I_{mAG} = 120 - 0,2x_{AG}$$

Sumadas verticalmente:

$$I_m = (200 - 0,1x_{AU}) + (120 - 0,2x_{AG}) = 320 - 0,3x$$

La curva de costes marginales se obtiene derivando de la expresión de costes totales, de manera que se obtiene:

$$C_m = 5 + 0,1x$$

Para maximizar el beneficio tendremos que igualar coste e ingreso marginal.

$$x = 787,5$$

Repaso

PROBLEMA 6.42

En el modelo de empresa que maximiza el volumen de producción-beneficios si $h = 1$ entonces:

- (a) $p > C_m$
- (b) $p = C_m$
- (c) $p < C_m$
- (d) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la (d). En efecto, en ese caso queda indeterminado el equilibrio.

PROBLEMA 6.43

Los economistas neoclásicos afirman que establecer un margen de beneficio sobre el coste (fijar los precios por *mark-up*) es equivalente a estimar la elasticidad de la demanda, y luego aplicar el análisis marginalista:

- (a) Verdadero.
- (b) Falso.
- (c) Ello no se puede afirmar.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Para las funciones de costes de *mark-up* los costes marginales y medios coinciden por lo que aplicando la conocida fórmula del ingreso marginal, e igualándola a los costes:

$$I_m = p \left(1 - \frac{1}{|E|} \right) = C_m = CMV$$

operando ahora en el paréntesis:

$$CMV = p \left(1 - \frac{1}{|E|} \right) = p \left(\frac{|E| - 1}{|E|} \right)$$

y despejando p , se obtiene:

$$p = CMV \left(\frac{|E|}{|E| - 1} \right)$$

PROBLEMA 6.44

Pero como E debe ser $|E| > 1$, el paréntesis es mayor que la unidad. Ahora bien llamando $(1 + h)$ al paréntesis anterior:

$$\left(\frac{|E|}{|E| - 1}\right) = 1 + h$$

$h > 0$ puede ser el margen bruto de beneficio (el *MBB* de *mark-up*); por lo que:

$$p = CMV(1 + h) = CMV\left(\frac{|E|}{|E| - 1}\right)$$

y en efecto se cumple la proposición (a).

Bajo *mark-up* los márgenes (márgenes brutos de beneficio) para determinados volúmenes de producción:

- (a) Pueden dar lugar a pérdidas.
- (b) No pueden dar lugar a pérdidas.
- (c) Siempre dan pérdidas.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Si *MNB* es menor que $\frac{CF}{x_{mu}}$:

$$B = I - C = px_{mu} - CT \quad \text{como} \quad p = (CMV + MBB) \quad \text{se tendrá} \\ [CMV + MBB] x_{mu} - CT = B \quad \text{y como} \quad CT = CV + CF = CMVx_{mu} + CF$$

se tendrá:

$$CMVx_{mu} + MNBx_{mu} - CMVx_{mu} - CF = MNBx_{mu} - CF$$

y $B > 0$, si y sólo si *MNB* es mayor que $\frac{CF}{x_{mu}}$, es decir, si el margen de beneficios es superior a los costes medios fijos para el volumen de producción o ventas.

PROBLEMA 6.45

En el modelo de empresa que maximiza el volumen de ingresos por ventas, en el equilibrio, se cumple que:

- (a) $I_m = C_m$
- (b) $I_m > C_m$
- (c) $I_m < C_m$
- (d) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMA 6.46

RESPUESTA: (c) Porque es:

$$\frac{dIV}{dx} = C_m \left(\frac{\mu}{\mu - 1} \right)$$

y el paréntesis es mayor que la unidad.

Si $E = 6$ entonces el *mark-up* es:

- (a) Un 60%.
- (b) Un 20%.
- (c) 1/4.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) $\left(\frac{|E|}{|E| - 1} = 1 + h\right); h = \frac{(6 - 5)}{5} = \frac{1}{5}$, es decir, el 20%.

PROBLEMA 6.47

Si un monopolista trabaja con una demanda de elasticidad constante igual $|2|$ y sus $C_m = 10$, el precio de *mark-up* será:

- (a) 20
- (b) 10
- (c) 2
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Como:

$$p \left(1 - \frac{1}{E} \right) = C_m \\ p = \frac{C_m}{\left(1 - \frac{1}{E} \right)} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

PROBLEMA 6.48

Si el *mark-up* es de un 20% la elasticidad de la demanda es:

- (a) 5
- (b) 6
- (c) -1 en valor absoluto.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (b) Como $\frac{E}{(E - 1)} = h + 1$ y $h = 0,2$, entonces $E = 6$.

Regulación e intervención del Estado en la economía: políticas microeconómicas públicas

Notas teóricas

El teorema de Dalton

El teorema establece una relación entre las elasticidades de las curvas de oferta y demanda de mercado y la parte del impuesto soportada por consumidores y empresas respectivamente:

Si la parte soportada por el consumidor es BF (t^d) y la soportada por la empresa es FC (t^s) siendo el impuesto total t , se cumple que:

$$t = t^d + t^s \Rightarrow BC = BF + FC$$

$$p = GA$$

$$x = OA$$

$$dx = KA$$

$$dp = BF$$

Pero como en términos de elasticidades:

$$\frac{E^s}{E^d} = \frac{BF}{FC} = \frac{t^d}{t^s} \text{ y } t = t^d + t^s = t^d + \left(\frac{E^d \cdot t^d}{E^s} \right) = t^d \left(1 + \frac{E^d}{E^s} \right)$$

De modo que si, por ejemplo, se conocen las elasticidades citadas y la cuantía total del impuesto es sencillo calcular el reparto de la carga respectiva del impuesto entre los diversos tipos de agentes.

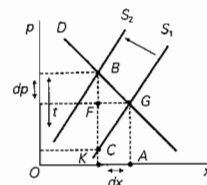


Figura 7.1

Bienes públicos: estimación y provisión

PROBLEMA 7.1

Supongamos dos consumidores de un bien público cuyas funciones de demanda sean $x_1 = 100 - 2p$ y $x_2 = 200 - 4p$ respectivamente. Si el Sector Público desea que los consumidores revelen sus preferencias por el bien público ¿cuál será la estimación de la demanda global de dicho bien?

La suma de las demandas es ahora vertical (los dos precios para las diversas cantidades) como se sabe por la teoría²⁰. En este caso las funciones inversas de demanda son:

$$2p = 100 - x_1 \quad p = \frac{100 - x_1}{2} = 50 - \frac{x}{2}$$

$$4p = 200 - x_2 \quad p = \frac{200 - x_2}{4} = 50 - \frac{x}{4}$$

$$p = p_1 + p_2 = 100 - \frac{3}{4}x$$

Al ser un bien público se puede prescindir de los subíndices (es el mismo bien) y como es una línea recta tomando los valores extremos:

$$\text{Si } x = 0 \quad p = 100$$

$$\text{Si } p = 0 \quad x = 133,3$$

²⁰ Un bien público es uno en el que el disfrute por parte de un agente no disminuye el de los demás agentes, a diferencia de los privados tradicionales.

PROBLEMA 7.2

Con los datos del Problema anterior, si los costes correspondientes a la producción del bien público son $CT = x^2 + 10$, hállese la provisión óptima de dicho bien.

Sabemos que ello implica hacer $p = C_m$, por lo que:

$$C_m = 2x = p = 100 - \frac{3}{4}x$$

De donde:

$$x = x_1 = x_2 = \frac{400}{11} = 36,36 \text{ unidades}$$

Traslación de impuestos

PROBLEMA 7.3

Si la elasticidad de la función de oferta de mercado es $|1,5|$, la de la demanda es $|1|$ y el volumen de un impuesto es de 20 unidades. ¿Cuál será la parte de dicho impuesto soportada por los consumidores?

Por el teorema de Dalton se cumple que:

$$\frac{E^s}{E^d} = \frac{t^d}{t^s} = \frac{1,5}{1} = 1,5$$

$$t^d = 1,5t^s$$

y sabemos que:

$$t = t^d + t^s = 20 = 1,5t^s + t^s = 2,5t^s \quad t^s = 8$$

por lo que:

$$t^d = 1,5 \cdot 8 = 12$$

PROBLEMA 7.4

En un mercado cuya función de demanda es $x^d = 32 - \frac{4}{3}p$ y la de oferta $x^s = -3 + p$ si el gobierno establece un impuesto por unidad vendida de 7 unidades de cuenta ¿qué parte del mismo soportan el consumidor y las empresas respectivamente?

Antes del impuesto el equilibrio era:

$$x^d = 32 - \frac{4}{3}p = -3 + p = x^s \quad 105 = 7p \quad p = 15 \quad x = 12$$

La función de oferta, $x^s = -3 + p$ implica que $p = x + 3$, que con el impuesto será:

$$p = x + 3 + 7$$

$$x^s = -10 + p \quad \text{y ahora} \quad x^s = x^d$$

$$x^s = -10 + p = 32 - \frac{4}{3}p = x^d$$

$$p = 18 \quad x = 8$$

Luego el consumidor soporta $18 - 15 = 3$ unidades y el productor el resto, es decir, 4 unidades.

Para $x = 8$, la oferta inicial implicaría $p = 11$ luego $15 - 11 = 4$.

PROBLEMA 7.5

Si se cumple que $\sum C_m^s = C_m^M$ y la curva de oferta C_m tiene pendiente positiva, con un impuesto t :

- El aumento de precio ($t > 0$) será menor que t , al modo de la competencia perfecta.
- El aumento de precio ($t > 0$) será mayor que t , al modo de la competencia perfecta.
- El aumento de precio respecto a la situación de competencia dependerá de la elasticidad de la curva de demanda.
- Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la (a) por mera inspección visual y los supuestos habituales.

PROBLEMA 7.6

Si se grava con un impuesto global de 1.000 euros a una empresa perfectamente competitiva cualquiera:

- El volumen de producción correspondiente al mínimo de los costes medios variables disminuirá.
- El volumen de producción correspondiente al mínimo de los costes medios totales variará.
- El volumen de producción óptimo disminuirá.
- Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es (d) al ser un impuesto de una vez por todas, producirá un desplazamiento paralelo de la función de costes totales pero el volumen de producción no se alterará al no haber variado la condición $p = C_m$.

PROBLEMA 7.7

En monopolio, si la elasticidad de la curva *oferta* es infinita y se impone un impuesto de t :

- (a) t es menor que la diferencia de precios.
- (b) t es mayor que la diferencia de precios.
- (c) t es igual a la diferencia de precios.
- (d) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la (b) por simple inspección visual.

PROBLEMA 7.8

Un monopolista trabaja con una demanda lineal $p = a - bx$ y el gobierno establece un impuesto t (10 unidades de cuenta) por unidad producida: ¿en cuanto aumenta el precio y como se lo reparten en su caso los agentes, consumidores y empresas?

$$p = a - bx \quad IT = (a - bx)x = ax - bx^2 \quad I_m = a - 2bx$$

$$I_m = C_m + t \quad x = \frac{(a - C_m - t)}{2b}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{1}{2b}\right) \quad \frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = (-b)\left(-\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{2}$$

Es decir, la mitad del aumento del impuesto. Luego los dos tipos de agentes se lo reparten por mitad.

PROBLEMA 7.9

El Ministerio de Hacienda grava a un mercado de competencia perfecta cuya función de demanda de mercado es, $x^d = 300 - 6p$ y que está formado por 100 empresas idénticas con funciones de costes del tipo $CT = 25x^2 + 18x + 20$, con un impuesto de 6 unidades de cuenta (euros) por unidad vendida. ¿Cuál es el porcentaje (si alguno) que trasladan las empresas a los consumidores?

Los costes marginales de las empresas son:

$$Cm_i = 50x_i + 18$$

Por lo que igualándolos al precio (genérico ahora por lo que se añade sin más):

$$50x_i + 18 = p$$

se obtiene la función de oferta de la empresa representativa, es decir, una relación única entre precio y cantidad lanzada al mercado:

$$p - 18 = 50x_i$$

por lo que lo que lanza una es:

$$x_i = \frac{p - 18}{50}$$

La fórmula anterior, es lo que lanza una empresa al mercado, por lo que lo que ofrecen el conjunto de ellas es:

$$x^s = \sum_{i=1}^{100} x_i = 100 \left(\frac{p - 18}{50} \right) = 2p - 36$$

Como la demanda de mercado es:

$$x^d = 300 - 6p$$

el precio de equilibrio se obtiene de la condición de equilibrio:

$$x^d = x^s = 300 - 6p = 2p - 36$$

$$336 = 8p$$

$$p = 42$$

y la cantidad, sin más que sustituir:

$$x = 48$$

Al recoger el impuesto, la función de costes modificada es:

$$CT = 25x^2 + 18x + 20 + 6x = 25x^2 + 24x + 20$$

(donde debe notarse que se han añadido seis unidades de cuenta por unidad vendida, es decir, $6x$) de donde, por el mismo procedimiento:

$$x^s = \sum_{i=1}^{100} x_i = 100 \left(\frac{p - 24}{50} \right) = 2p - 48$$

$$x^d = x^s = x = 300 - 6p = 2p - 48$$

$$8p = 348 \quad p = 43,5$$

El consumidor paga por tanto 43,5 unidades de cuenta y antes pagaba 42. El consumidor paga 1,5 más que antes, y el productor recibe 37,5, es decir, 4,5 es su contribución al impuesto. Las dos contribuciones suman 6, es decir, la recaudación unitaria. Por tanto, la aportación del consumidor supone un 25% del impuesto, y ella es la parte trasladada.

PROBLEMA 7.10

En competencia perfecta con una curva de demanda normal y una oferta hipotética de pendiente negativa (ambas lineales), pero suponiendo que la pendiente de la curva de oferta sea mayor que la de demanda en valor absoluto, una variación en la demanda como consecuencia de un impuesto t hace que:

- (a) $\Delta p > t$
- (b) $\Delta p < t$
- (c) $\Delta p = t$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Por mera inspección y al tener la curva de oferta pendiente negativa y mayor que la de demanda.

PROBLEMA 7.11

Un monopolista trabaja con una demanda con elasticidad constante igual $|5|$ y el gobierno establece un impuesto de t euros por unidad producida ¿el precio aumentará en?

$$p = \frac{C_m + t}{1 - \frac{1}{E}} = \frac{C_m + t}{\frac{4}{5}} = 5 \frac{C_m + t}{4}$$

$$\frac{dp}{dt} = 1,25$$

$$dp = 1,25 dt$$

Luego lo hará 1,25 veces el aumento del impuesto.

PROBLEMA 7.12

Con curvas de demanda de mercado decrecientes, y curvas de costes marginales de elasticidad infinita en monopolio, si se establece un impuesto de cuantía fija sobre las ventas:

- (a) t es siempre mayor Δp .
- (b) t es a veces mayor Δp .
- (c) t es igual a Δp .
- (d) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es (a) porque el Δp es menor que t que se calcula sobre la curva de demanda y ésta es decreciente.

El método coste-beneficio y la evaluación de proyectos sociales

PROBLEMA 7.13

Suponga un proyecto de inversión pública cuyos costes acumulados a lo largo de todo el proyecto sean de 1.000 millones de unidades de cuenta. Y suponga que los rendimientos durante dos años son 100 y 400 millones de las mismas unidades de cuenta respectivamente. Si el tipo de interés de mercado es del 10%. ¿Deberá llevarse a cabo el proyecto, según la regla del *VPDN* (valor presente neto descontado) del análisis coste-beneficio?

La respuesta es no. En efecto:

$$VPND = \left[\frac{100}{1+r} + \frac{400}{(1+r)^2} \right] - 1.000 = \left[\frac{100}{1,1} + \frac{400}{1,21} \right] - 1.000 = 99 + 330 - 1.000 = -429 \text{ millones de uu.cc.}$$

el *VPND* es negativo, luego no se llevará a cabo el proyecto.

PROBLEMA 7.14

Evalúe el mismo proyecto del problema anterior según la regla de la *TIR*.

Aplicando las fórmulas relevantes:

$$\left[\frac{100}{1+r} + \frac{400}{(1+r)^2} \right] - 1.000 = 0$$

Obviamente se obtendría un *TIR* negativo (-50%) que sería inferior al del mercado.

Medio ambiente, polución e impuestos

PROBLEMA 7.15

Una industria química competitiva afronta una función de demanda $p = 450 - 2x$ con una función de costes $C = 30x + x^2$. La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Qué impuesto fijo por unidad de producto habría que establecer para que el resultado fuera equivalente al de internalizar los costes de la contaminación?:

- (a) 67 euros por unidad de producto.
- (b) 84 euros por unidad de producto.
- (c) 76 euros por unidad de producto.
- (d) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMA 7.16

La respuesta correcta es la (b) porque el resultado si se internalizan los costes de la contaminación es un precio de 282 euros por unidad de producto y una producción de 84 unidades y si no se internalizan un precio de 240 euros por unidad de producto y una producción de 105 unidades. Igualamos la función de coste marginal con el impuesto incluido a la demanda y sustituimos la producción óptima $x = 84$, de donde obtenemos el resultado.

La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Qué impuesto variable por unidad de producto habría que establecer para que el resultado fuera equivalente al de internalizar los costes de la contaminación?:

Se trataría de establecer un impuesto tal que la curva de costes marginales de la empresa se convierta en la curva de coste marginal social. Ésta es:

$$\begin{aligned} Cms &= 30 + 3x \quad \text{mientras la de la empresa es} \\ Cm &= 30 + 2x \quad \text{por lo que hay que sumar un impuesto} \\ t(x) &= x \end{aligned}$$

Curva de Laffer

PROBLEMA 7.17

Formalice algebraicamente el efecto Laffer y establezca bajo qué condiciones opera dicho efecto. Suponga que el tipo impositivo es del 30%.

Obviamente el efecto depende de las elasticidad de la oferta; el salario w si existe un impuesto t , que el trabajador recibe realmente después de impuestos es:

$$w^* = w - tw = w(1 - t)$$

por lo que el consumidor oferente de trabajo reducirá su oferta ante el establecimiento del impuesto a partir de un punto, y para una demanda dada; con ello el volumen de trabajo intercambiado, y con ello los ingresos públicos derivados del impuesto sobre las rentas del trabajo disminuirán. La función de ingresos públicos (fiscales, IF), se puede reformular como:

$$IF = F[w, w^*, t, s(L(w^*))] = t w^* s(w^*)$$

donde $s(w^*)$, es la oferta de trabajo, y el resto de las variables retienen sus significados habituales. Diferenciando respecto al impuesto, para analizar las variaciones que este produce en los ingresos públicos:

$$\frac{dIF}{dt} = \left[-t \frac{\partial s(w^*)}{\partial w^*} w + s(w^*) \right] w$$

ya que $\frac{\delta w^*}{\delta t} = -w^*$, es decir, para que se de el efecto Laffer, cuando crece t debe caer IF (el efecto se da en el tramo decreciente de la curva), o lo que es lo mismo, IF debe ser negativa. Pero para que sea negativa, se debe cumplir:

$$-t \frac{\partial s}{\partial w^*} w + s(w^*) < 0$$

o lo que es lo mismo:

$$t \frac{\partial s}{\partial w^*} w > s(w^*)$$

Dividiendo ahora por $ts(w^*)$:

$$\frac{t}{t} \frac{\partial s}{\partial w^*} \frac{w}{s(w^*)} > \frac{s(w^*)}{s(w^*)} \frac{1}{t}$$

y multiplicando por $(1 - t)$ y dado que $w^* = (1 - t)$:

$$\frac{\partial s}{\partial w^*} \frac{w}{s} > \frac{1 - t}{t}$$

que es elasticidad de la oferta de trabajo. Es decir, solo se da el efecto Laffer si dicha elasticidad es mayor que:

$$\left(\frac{1 - t}{t} \right)$$

2. Si t es del 30%, tal como hemos supuesto en el enunciado:

$$\frac{1 - 0,3}{0,3} = 2,3$$

Es decir, que un aumento del 1 por ciento en el tipo impositivo sobre las rentas del trabajo, llevaría a una reducción de la oferta de trabajo del 2,3%. Suponiendo que pueda ser reducido, que no lo es por razones institucionales. Como mucho podría entenderse que el efecto giraría para aquellos casos de trabajos extra no reglados.

Repaso

PROBLEMA 7.18

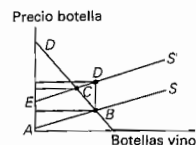


Figura 7.2

Suponga que el mercado de vino «Toro Primero» viene representado por el gráfico al margen, si en dicho mercado se ha introducido un impuesto por unidad sobre las ventas, dicho impuesto viene dado por:

- (a) BC
- (b) BD
- (c) DC
- (d) EC

RESPUESTA: (b) El impuesto por unidad viene dado por el aumento en el precio por cada unidad ofrecida, es decir, la distancia medida en vertical entre las dos curvas de oferta.

PROBLEMA 7.19

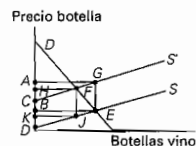


Figura 7.3

En la figura 7.19, la recaudación impositiva es:

- (a) CDGF
- (b) HKJF
- (c) ABEG
- (d) BGE

RESPUESTA: (b) La recaudación será la cantidad vendida HF o KJ por el impuesto por unidad HK o FJ, por lo tanto el área del rectángulo HKJF.

PROBLEMA 7.20

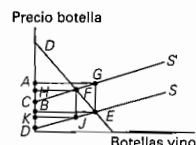


Figura 7.4

En la figura 7.20, el impuesto es soportado:

- (a) Por entero por el consumidor.
- (b) Por entero por la empresa.
- (c) La mayor parte por la empresa.
- (d) La mayor parte por el consumidor.

RESPUESTA: (d) La parte del impuesto que soporta el consumidor es HB, mientras que la parte que soporta la empresa es BK, por lo tanto, según el gráfico, la mayor parte la soporta el consumidor.

PROBLEMA 7.21

¿Qué subsidio tendría que poner el gobierno para que un monopolio que establece un precio de mark-up igual a 20 y con $C_m = 10$, produzca el output socialmente conveniente (E y C_m constantes)?

- (a) 10
- (b) 20
- (c) No tenemos información suficiente.

(d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (d) Para hacer $p = C_m$ deberá incentivar son un subsidio de 5 unidades. En efecto:

$$p = \frac{C_m}{(1 - \frac{1}{E})} = C_m \frac{E}{E - 1}$$

de donde:

$$20 = 10 \frac{E}{E - 1}$$

que implica:

$$\frac{E}{E - 1} = 2 \text{ y } E = 2$$

Con E y C_m constantes, llamando s al subsidio:

$$p = 2C_m$$

Entonces y como queda que socialmente interesa $p = C_m = 10$, se tendrá:

$$10 = 2(10 - s)$$

de donde:

$$s = 5$$

Externalidades: contaminación y reciclado

PROBLEMA 7.22

Una industria petrolífera que actúa en un mercado de competencia perfecta se enfrenta una función de demanda de mercado $p = 450 - 2x$, con una función de costes $C = 30x + x^2$. La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Cuál es la producción de la empresa y el precio del producto si se tienen en cuenta los efectos de la contaminación?

De la función de costes de contaminación derivamos los costes marginales de la empresa $C_m = x$. El coste marginal social será por tanto $C_mS = 30 + 3x (= p)$ que igualado a la función de demanda nos da el resultado.

$$I = 450x - 2x^2 \quad I_m = 450 - 4x = 30 + 3x = C_m \quad 7x = 420 \quad x = 60$$

PROBLEMA 7.23

Una industria química competitiva hace frente a una función de demanda como $p = 450 - 2x$ con una función de costes $C = 30x + x^2$. La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Cuál es la producción de la empresa y el precio del producto si no se tienen en cuenta los efectos de la contaminación?:

$$I_m = 450 - 4x = 30 + 2x = C_m \quad 6x = 420 \quad x = 70$$

PROBLEMA 7.24

La función de costes de los vertidos de latas de aluminio es $C = \frac{1}{8}v^2 + 50$ si los costes de reciclar son $CR = 1.200 \ln v - 20v$ y la función de costes sociales de los vertidos es $CS = v^2 + 350$ si se deja en manos del mercado la decisión de cuanto sea el reciclado ¿cuál sería el volumen de vertidos socialmente deseable?:

Obteniendo los costes marginales correspondientes e igualando:

$$\begin{aligned} CS &= v^2 + 350 & C_mS &= 2v \\ CR &= 1.200 \ln v - 20v & C_mR &= \frac{1.200}{v} - 20 \\ C_mS &= C_mR & \frac{1.200}{v} - 20 &= 2v \\ 2v^2 + 20v - 1.200 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática cuya solución es:

$$v = 20$$

PROBLEMA 7.25

Con los datos del ejercicio anterior si se deja en manos del mercado la decisión de cuanto sea el reciclado ¿cuál sería el precio a pagar por el envase (E_{nv}) para que la cantidad de vertidos privada fuese igual que la cantidad de vertidos socialmente deseable?

En el ejercicio anterior obtuvimos un resultado para $v = 20$ por lo que:

$$\frac{1.200}{v} - 20 = 40 \quad C_m = \frac{1}{4}v = 5 \quad C_m + E = 40 \quad E_{nv} = 35$$

PROBLEMA 7.26

Dada una función de oferta de aluminio reciclado $S^r = -8 + p$ y una función de oferta de aluminio $S^a = -2 + p$ si la función de demanda es

$x = 20 - p$. ¿Cuál sería el precio de equilibrio si el mercado se suministra indistintamente con aluminio reciclado o no?:

$$\begin{aligned} S &= S^r + S^a = (-8 + p) + (-2 + p) = -10 + 2p \\ S &= D & -10 + 2p &= 20 - p & p &= 10 \end{aligned}$$

2. ¿Cuáles serían las respectivas cantidades de oferta de aluminio y de aluminio reciclado?:

Una vez conocido el precio se pueden calcular los valores numéricos de las ofertas:

$$S^r = -8 + 10 = 2 \quad S^a = -2 + 10 = 8$$

PROBLEMA 7.27

Un mercado de competencia está formado por 15 empresas, cada una de las cuales opera con una función de oferta de abonos $x = (-3 + p)/5$. La contaminación es tal que su coste marginal es $C_mC = \frac{x}{6}$. Si la función de demanda de mercado es $x = 27 - p$, ¿cuál es la cantidad intercambiada en el mercado si las empresas no tienen en cuenta los costes de la contaminación que producen?:

La oferta conjunta es:

$$15 \left[\frac{(-3 + p)}{5} \right] = \left[\frac{(-45 + 15p)}{5} \right] = -9 + 3p$$

Igualando la oferta a la demanda:

$$\begin{aligned} x^s &= x^d & -9 + 3p &= 27 - p & 4p &= 36 \\ p &= 9 & x &= 18 \end{aligned}$$

PROBLEMA 7.28

Con los datos del ejercicio anterior ¿cuáles son el precio y la cantidad si los empresarios tienen en cuenta el coste de contaminar?:

Con oferta total: $x = -9 + 3p$:

$$p = \frac{x + 9}{3} + C_mC = \frac{x + 9}{3} + \frac{x}{6} = -6 + 2p = 27 - p \quad 3p = 33 \quad p = 11$$

De donde:

$$p = \frac{x + 6}{2} \quad x = -6 + 2p = 16$$

Capítulo 8

De la microeconomía a la macroeconomía: equilibrio general de todos los mercados y bienestar social

Notas teóricas

Generalización matemática del modelo de intercambio puro

Un modelo de equilibrio general, por ejemplo de intercambio puro, puede formalizar algebraicamente, con sencillez. El problema que se plantea consiste en determinar los precios que vacían los n mercados, uno para cada bien, servicio o mercancía, y las cantidades finales demandadas u ofrecidas por cada consumidor. Al *vector de precios* que vacía los mercados, es decir, el que iguala las demandas totales a las ofertas totales para cada mercado, lo llamaremos *equilibrio general competitivo*. Y al *vector de cantidades* finales demandadas correspondientes a estos precios, para cada consumidor, *asignaciones*; una *asignación factible* será una asignación posible dadas las restricciones. El modelo es en este caso simplemente un sistema de ecuaciones una para cada bien por el lado de la demanda y otra para dichos bienes por el lado de la oferta. Las condiciones de igualdad de las ofertas y demandas de mercado hacen que coincida en principio el número de ecuaciones (dichas igualdades) y de incógnitas.

La cuestión es saber de donde surgen en dicho modelo las demandas y ofertas individuales que permiten lograr las agregadas de mercado. Pero ello también en principio es bien sencillo: (a) por el lado de la oferta y dado que es de intercambio puro se trata tan sólo de las ofertas (dotaciones) individuales que se consideran dadas en esta especificación del modelo; (b) las demandas individuales por su lado, provienen (al igual que lo hacían en el Capítulo 3 del libro teórico y el 2 de este libro) de los procesos de maximización de las funciones de utilidad de los agentes que componen el mercado.

Por tanto, al final y desde un punto de vista matemático se trata tan sólo de resolver un sistema de ecuaciones. Aunque surgen una serie de cuestiones de interés: 1.º tan pronto dispongamos de las demandas finales, como las ofertas son conocidas, tendremos los excesos de demanda de la economía; 2.º la condición de equilibrio conjunto para toda la economía, es decir, para los n mercados, o vaciado de los mismos, es $z_i(p)$ $i = 1, \dots, n$, es decir, n ecuaciones con $n - 1$ incógnitas, una ecuación de exceso de demanda para cada

bien, y $n - 1$ precios relativos-incógnitas; 3.º pero, realmente una de las ecuaciones no es linealmente independiente, porque se puede obtener de las restantes, por la *ley de Walras*²¹; 4.º que sea igual el número de ecuaciones y de incógnitas $-n - 1$ en ambos casos— no quiere decir que este garantizada la solución del problema, ya que lo sería en el caso de tan sólo ecuaciones lineales (puede no tener una solución real, si imaginaria o teniendo una solución real, puede no ser válida económicamente (por ejemplo, puede contener precios negativos).

La distribución de la renta en equilibrio general

Podemos manejar ahora un pequeño sistema de ecuaciones simultáneas para mostrar cómo se determina la distribución de la renta en un modelo de equilibrio general. Bajo el supuesto de dos individuos, dos factores y dos bienes sabemos que en equilibrio deben cumplirse las siguientes ecuaciones:

$$RMS_1^1(a) = RMS_1^1(b) = \frac{p_1}{p_2}$$

con la que los consumidores se garantizan la maximización de su bienestar;

$$RMS_L^K(x_1) = RMS_L^K(x_2) = \frac{w}{r}$$

donde w y r son el salario y el tipo de beneficio, es decir, la remuneración de los factores, en una condición necesaria para que las empresas puedan conseguir el máximo beneficio;

$$p_1 P_{mL}(x_1) = p_2 P_{mL}(x_2) = w$$

$$p_1 P_{mK}(x_1) = p_2 P_{mK}(x_2) = r$$

²¹ En efecto si sumamos todas las restricciones presupuestarias de los m consumidores, se cumple que:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_i z_{ij} = \sum_{i=1}^n p_i z_i = 0 = \sum_{i=1}^{n-1} p_i z_i + p_n z_n$$

y, si las individuales eran iguales a cero, por definición, la suma también lo será. Si suponemos que, $p_i z_i(p) = 0$, es decir, la ecuación se cumple para los $n - 1$ primeros bienes (los $n - 1$ primeros están en equilibrio, $z_i = 0$):

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i z_i = 0$$

entonces, se cumple también para el n :

$$p_n z_n = 0$$

Pero, entonces la ecuación n -ésima es redundante. Es decir, que si $n - 1$ mercados están en equilibrio, el n también lo estará.

donde se muestra que las empresas remuneran a los factores en función de su valor del producto marginal, lo que es una segunda condición necesaria para la maximización del beneficio. Tenemos en total cuatro ecuaciones, si bien una es redundante: si dividimos entre sí las dos últimas tenemos la segunda. Nos quedan tres ecuaciones independientes y cuatro incógnitas (los precios de los productos y los precios de los factores) por lo que nos vemos obligados —pero ello es conveniente además— a calcular precios relativos (p_1/p_2), tratando de calcular también las dotaciones de factores. Como hemos visto el modelo da por supuesto que las empresas tienen unas dotaciones iniciales de trabajo y capital. Si queremos que el modelo las calcule tendremos que añadir algunas ecuaciones adicionales. Para introducir las ecuaciones necesitaremos añadir *teorema de Euler* (Capítulo 6 del libro teórico) podemos decir que el producto se reparte íntegramente entre salarios y beneficios:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = wL + rK$$

donde:

$$x_1 = x_{11} + x_{21}$$

$$x_2 = x_{12} + x_{22}$$

siendo x_{ij} la cantidad del bien j que consume el individuo i . De hecho podemos plantear las restricciones presupuestarias de los dos consumidores de nuestro modelo:

$$wL_1 + rK_1 = p_1 x_{11} + p_2 x_{12}$$

$$wL_2 + rK_2 = p_1 x_{21} + p_2 x_{22}$$

Quedan añadir por último las condiciones de pleno empleo de los recursos disponibles, que son:

$$L_1 + L_2 = L$$

$$K_1 + K_2 = K$$

Pero sumando las restricciones presupuestarias tenemos el teorema de agotamiento del producto de Euler por lo que sólo hay tres ecuaciones independientes, y cuatro incógnitas (L_1, L_2, K_1, K_2). Sólo podremos determinar cantidades relativas²².

²² El lector o lectora se preguntará por qué no se introduce el dinero en el modelo. El problema es que el dinero no es un bien como los demás, pues su oferta y su demanda está sometida a leyes distintas. Aunque se añada el dinero al modelo su tratamiento dentro de él es especial, y se produce una dicotomía o separación entre el mercado del dinero y el resto.

Equilibrio general y dinero

Formalmente, puede introducirse el dinero en este tipo de modelos microeconómicos, pero con elevados costes teóricos; el mayor consiste en que se producen asimetrías en el grado de homogeneidad de las funciones de demanda de bienes y de dinero²³. Al introducir el dinero aparecerá en el modelo un mercado más, el *mercado de dinero* caracterizado por la oferta y la demanda de mercado de dinero al modo anterior.

Si llamamos al dinero x_{n+1} , del que suponemos que los consumidores (llamémosles j , $j = 1, \dots, m$) poseen *stocks* iniciales, $\bar{x}_{j,n+1}$ serán las *ofertas* de cada uno de los agentes individuales, y la *oferta de mercado de dinero*, será al modo habitual, la suma de las ofertas individuales. Necesitaremos también derivar una función de demanda de dinero a partir de las individuales; sin embargo, hemos ignorado el proceso de *creación de dinero*, o determinación de la oferta monetaria, que es obviamente importante, y tiene que ver con el proceso de producción y *generación de rentas* en los mercados de factores; por ello no se puede suponer que cae como *maná del cielo*, o lanzarse gratis desde un helicóptero²⁴ (o incluso venir en los paquetes de la Cruz Roja, en el símil anterior). Pero en todo caso debe tenerse en cuenta que:

- 1.º No puede introducirse adecuadamente *dinero-papel* en la función de utilidad (y por tanto en la de demanda) porque el dinero *per se* no produce utilidad; facilita las transacciones, pero no produce utilidad directamente como lo hacen el resto de los bienes considerados; el dinero produce utilidad —en general—, pero no su mera posesión (salvo que uno sea el *Tío Gilito*, o un avaro) a diferencia del resto de los bienes. Pero, si no puede introducirse en la función de utilidad, el proceso de optimización de la conducta del consumidor es asimétrico como ya sabemos; la función de demanda y la de exceso de demanda del dinero no puede obtenerse del proceso optimizador, a diferencia de los demás bienes, algo que sería deseable, por simetría.
- 2.º Sí que lo podemos introducir en la ecuación de balance, o recta de balance, aunque este es un procedimiento institucional *ad hoc* para este problema, y por tanto no elegante desde el punto de vista teórico, en el sentido de que sólo lo hacemos para este bien (*se suele suponer para simplificar*²⁵, *que el consumidor mantiene en forma de dinero papel una proporción constante del valor nominal de sus tenencias, stocks, o dotaciones iniciales* de todos los bienes reales).

Todo ello no es otra cosa que una demostración de la *dicotomía* existente entre el sector real y el sector monetario de la economía (y del modelo de economía que aquí tratamos). Es decir, el equilibrio real lo determinan las fuerzas reales —las no monetarias—, y las *funciones de demanda y de exceso de demanda de los bienes y servicios son homogéneas de grado cero en los precios relativos*, es decir, dependen de los *precios relativos reales sólo*; o lo que es lo mismo, son invariantes ante variaciones proporcionales en el stock de dinero y en los precios.

Se observará, por tanto, que el sistema de equilibrio general posee una peculiaridad matemática. Su parte real —la oferta y la demanda de bienes—, permite determinar los precios y las cantidades, en términos del *numeraire*. En cambio, la parte monetaria, la ecuación cuantitativa, por ejemplo, sirve para determinar el factor multiplicativo, h . Esta *descomponibilidad* del sistema se llama *dicotomía*. El dinero no aparece en la

²³ Debe recordarse la propiedad de homogeneidad suscitada en el Capítulo 2.

²⁴ Sin embargo, para simplificar, lo daremos por bueno aquí, entre otras cosas porque la teoría descrita ya tiene suficientes dificultades aún sin considerar esta. La expresión del texto, y el supuesto que representa, ha sido utilizada por uno de los autores monetaristas modernos más conspicuos (Milton Friedman).

²⁵ Véase Henderson y Quandt (1962).

parte real del sistema, que es invariante a las alteraciones en la cantidad de dinero. En este sentido el dinero es *neutral* —sus variaciones no producen variaciones de los precios reales— respecto de las cantidades relativas y precios relativos. El dinero —según esta versión— es un *velo* a remover para estudiar la parte real del sistema, o, dicho de otro modo, para conocer los valores nominales de los precios. Que ello sea así, no quiere decir que sea una insuficiencia del sistema económico; incluso puede ser una ventaja, por ejemplo, para la computación numérica del equilibrio. La idea de que todo depende de todo, no sólo no es cierta siempre, sino que es inmanejable desde el punto de vista teórico.

Se entiende por tanto, por *dicotomía* que: (a) las relaciones de cambio o precios relativos, vienen determinadas por las funciones de utilidad y las dotaciones iniciales, y; (b) los precios en dinero se determinan por la cantidad existente del mismo. Pero esa dicotomía plantea la siguiente disyuntiva. El sistema ha de ser *ce-rrado*, es decir, es necesario determinar no sólo los precios relativos, sino también, el nivel general de precios o precios absolutos, es decir, se debe eliminar el grado de libertad —una ecuación menos que incógnitas— ya que existen $n + 1$ precios absolutos o monetarios, y tan sólo n ecuaciones independientes.

Ello se puede hacer —es decir, se puede determinar el nivel absoluto de precios— en principio, suponiendo que se cumple la llamada *ley de Say*. Si esto es así, es decir, si tenemos una ecuación más independiente o si se cumple la ley de Say —la oferta genera su propia demanda, no hay atesoramiento y la renta es igual al gasto— por definición: si el dinero no se incluye en las ecuaciones de balance, el *exceso de demanda de dinero agregada* será siempre nulo, y $\sum_{i=1}^n p_i z_i$ es la *identidad de Walras*, de nuevo, por lo que la cantidad de dinero no sirve para determinar el nivel absoluto de los precios.

$$\sum_{i=1}^n p_i z_i = 0$$

Efectivamente, no habrá exceso de demanda, porque la oferta genera su propia demanda. La cantidad de dinero determinará el nivel absoluto de precios, si la fórmula anterior es una condición de equilibrio, *pero no si es una identidad*. Pero el problema es, precisamente, que la ley de Say es una identidad, es decir, se cumple siempre por definición, y no una igualdad, con lo que no proporciona información alguna adicional a la que ya teníamos; no nos proporciona la ecuación independiente que nos falta, que permita determinar el nivel absoluto de los precios. Al ser una identidad, lo que indica es —pero ya lo sabemos— que si existe equilibrio en los n mercados de bienes, también lo habrá en el $n + 1$, el de dinero.

Los sistemas de ecuaciones descritos en párrafos anteriores reflejan la *parte real* del sistema económico; de ella se obtienen precios de equilibrio en términos de numerario, es decir, *precios monetarios relativos*, que se establecen hasta un factor multiplicativo. Para determinar los *precios monetarios absolutos*, necesitamos, como ya hemos señalado, por ejemplo, una ecuación adicional. Esta —se dice— es la tarea de la *teoría monetaria*, que a la vez se reserva usualmente para los cursos de Macroeconomía.

En la tradición neoclásica fue, y es bastante habitual, que esta sea la *ecuación cuantitativa*, es decir, utilizar esta como ecuación de cierre. En la versión de Irving Fisher, por ejemplo, esta se puede expresarse como:

$$M \cdot V = \sum_{i=1}^n p_i x_i + \sum_{h=n+1}^m q_h y_h = P \cdot T$$

donde P es el *nivel general de precios*, y T las *transacciones totales*, y, donde, dados M —oferta monetaria o cantidad total de dinero en circulación— y V , la *velocidad de circulación del dinero* (el número de veces que una unidad monetaria cambia de manos en un período; esta última está determinada por un conjunto de fac-

tores institucionales, como el grado de integración vertical de la industria, y el grado de desarrollo del sistema financiero entre otros) y; p_i, q_i, x_i, y_i de la parte real del sistema con sus significados habituales para bienes finales e inputs, permiten determinar p_i . Esta es una posibilidad pero no la única. Pero p_i no es otra cosa que la *constante multiplicativa* hasta donde está definido el sistema en los precios relativos, que aludimos en el texto principal y en la nota teórica anterior. En efecto, si p_1/p_i es el precio relativo del bien 1 en términos del bien i , es decir, en términos del numerario, el cociente que forman será igual a un valor digamos —véase también problemas—; por lo que se cumplirá que, $p_1 = \alpha p_i$, y análogamente para el resto, $p_2 = \beta p_i$, etc.

Una *ecuación de normalización* no es otra cosa que igualar a alguna magnitud constante arbitraria. Pero, es obvio ahora que, dados M y V , desde el lado financiero del sistema, y conocidos los precios relativos, $p_i/p_j = \mu$, $q_i/q_j = \varphi$, por el lado real, se puede calcular p_i , y con él los precios monetarios absolutos del sistema, además de cerrar este último. Es decir, dados los precios en términos del numerario o precios relativos, se pueden calcular todos los precios monetarios, y con ellos el nivel de precios²⁶.

Sin embargo, los precios relativos permanecerían invariables, porque serían determinados por las ecuaciones de oferta y demanda reales, es decir, el resto de las ecuaciones del sistema, las del lado real. Pero, si este es el procedimiento de determinación de los precios absolutos —o *introducción del dinero*— está claro que se introduce una *dicotomía* obvia: de una parte el lado real del sistema, los factores reales o ecuaciones reales, determinan los precios relativos, y de los factores monetarios determinan el nivel absoluto de los mismos. Sin embargo, esta dicotomía es insatisfactoria, y poco elegante desde el punto de vista teórico, porque las ecuaciones reales son *ecuaciones de comportamiento* de la conducta de los agentes, mientras que la ecuación cuantitativa es una *identidad contable*, y por ello, cierta por definición.

La *versión de Cambridge* de la ecuación cuantitativa, en la que la velocidad de circulación *no* es una constante, resuelve el problema de la identidad, porque ahora la convierte también en una ecuación de comportamiento (generalizando otra vez para x_i , sin distinguir entre bienes finales e inputs, por simplificación):

$$M = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{V} \right) p x_i \quad K = \left(\frac{1}{V} \right)$$

y si expresamos la *ecuación de Cambridge* en términos de exceso de demanda, $\left(\frac{1}{V} \right) \sum p x_i - M$ entonces:

$$z_{n+1} = K(\sum p x_i - M)$$

dada V , y por tanto K , la función de exceso de demanda de dinero es *homogénea de grado uno* en los precios absolutos y en la cantidad de dinero; porque si multiplicamos todos los precios y la cantidad de dinero por una misma cantidad, es decir, aumentan en la misma proporción, el *exceso de demanda de dinero* aumentará también en esa misma proporción. Pero, entonces, el modelo de equilibrio general con dinero —de intercambio puro por simplificación— contiene $n + 1$ ecuaciones de exceso de demanda, de las cuales las n primeras son *homogéneas de grado cero en los precios monetarios*, y una *ecuación de exceso demanda de dinero homogénea de grado uno en los precios monetarios y en la cantidad de dinero*. Pero ello, obviamente,

te, implica incurrir en una suerte de contradicción de comportamiento de los agentes de consumo; porque, si los agentes demandan dinero como una forma de mantener dinero ahora, es en aras a realizar transacciones más tarde, por lo que *un exceso de demanda de dinero (positivo), es equivalente a un exceso de oferta de bienes*. Pero, mientras que los excesos de demanda de dinero son homogéneos de grado uno en los precios monetarios y en la cantidad de dinero, las funciones de exceso de oferta de bienes, tan sólo lo son en los precios monetarios.

Luego, y para resumir, el pasar de una economía de trueque a una economía monetaria plantea muchos problemas, y anomalías teóricas: el proceso de obtención de las demandas y con ellas de los precios se hace asimétrico, y hay que acudir a reglas institucionales *ad hoc*; existe una dicotomía, por la que la parte real determina los precios relativos y las funciones son homogéneas de grado cero en los precios, mientras que la monetaria es de grado uno en precios y rentas; el equilibrio real es indeterminado hasta una constante multiplicativa; no se explica el proceso de generación de la oferta monetaria, y; no se puede cerrar correctamente el modelo, es decir, eliminar el grado de libertad, al no ser la ley de Say sino una identidad y no una nueva ecuación independiente.

²⁶ En efecto, sin más que sustituir: $MV = \sum_{i=1}^n p_i x_i + \sum_{h=2}^n q_h y_h = p_1 \left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i + \sum_{h=2}^n \varphi_h y_h \right) = PT$ se obtiene p_1 , ya que el resto son datos conocidos, y a partir de él, sin más que sustituir en los precios relativos, $p_i/p_1 = \alpha_i$, etc, se obtienen los nominales. Pero, a partir de la ecuación anterior, es evidente que si se dobla la cantidad de dinero, dadas V y T , y las cantidades de los n bienes, se doblará también el nivel de precios: $2MV = T2P$.

Número de ecuaciones e incógnitas

PROBLEMA 8.1

Enumere las ecuaciones de un modelo de equilibrio general competitivo de intercambio puro (sin producción), genérico del tipo $2 \cdot 2$, y cuente las ecuaciones e incógnitas. Discuta la posibilidad de equilibrio y sus condiciones.

- | | |
|---|------------------|
| (1) Ofertas o dotaciones (una de cada agente y cada bien). | 4($2 \cdot 2$) |
| (2) Demanda de bienes (una por cada consumidor y cada bien). | 4($2 \cdot 2$) |
| (3) Condiciones de equilibrio (vacío de mercado) | 2 |
| (4) Cantidades de bienes demandadas por los consumidores (dos bienes por cada consumidor) | 4($2 \cdot 2$) |
| (5) Precios de los bienes o servicios finales | 2 |

Dos mercados, dos ecuaciones de oferta total igual a demanda total, una para cada bien; ecuaciones en sentido estricto. Dos precios, las incógnitas buscadas. Las cantidades demandadas se desglosan en cuatro, dos para cada consumidor y bien. Luego, si el modelo es lineal, queda garantizado el equilibrio. Las dotaciones de bienes no son realmente incógnitas, sino datos, y las ecuaciones implican ofertas rígidas.

PROBLEMA 8.2

Enumere las ecuaciones de un modelo de equilibrio general competitivo completo (con producción) y genérico del tipo $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, y cuente las ecuaciones e incógnitas. Discuta la posibilidad de equilibrio y bajo que circunstancias se logra.

Un modelo $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ implica la existencia de dos consumidores, dos empresas, dos bienes y dos factores. Supondremos que las empresas sólo producen un bien cada una y que los consumidores demandan ambos bienes.

(1) Ofertas de factores (una de cada agente y factor)	4(2 · 2)
(2) Demanda de factores (una por cada empresa y factor)	4(2 · 2)
(3) Condiciones de equilibrio (vaciado de mercado) (bienes)	2
(4) Funciones de demanda de los consumidores (una por cada consumidor y bien)	4(2 · 2)
(5) Funciones de oferta de las empresas (una por cada empresa, una por bien)	2(2 · 1)
(6) Condiciones de equilibrio (factores)	2
(7) Precios de los factores	2
(8) Precios de los bienes o servicios finales	2
(9) Cantidades de factores demandadas por las empresas	4(2 · 2)
(10) Cantidades de factores ofrecidas por los consumidores	4(2 · 2)
(11) Cantidades de bienes demandadas por los consumidores	4(2 · 2)
(12) Cantidades de bienes ofrecidas por las empresas	2

Cuatro mercados y cuatro precios, incógnitas primarias. Luego, si el modelo es lineal, queda garantizado el equilibrio. Conocidos los precios se conocen las ofertas y las demandas.

Óptimos de Pareto y curva de contrato

PROBLEMA 8.3

Considere un campo de prisioneros de guerra con dos individuos, y funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas como, $u(1) = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$, $u(2) = x_2^{1/2} x_1^{1/3}$. Establezca la curva de contrato del intercambio.

Sabemos que deberá cumplirse:

$$RMS_1^2(1) = RMS_1^2(2)$$

y que:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2}$$

u_i denota la primera derivada respecto a los dos bienes ($i = 1, 2$) en esta fórmula²⁷ y en este caso:

$$\frac{u_{11}}{u_{12}} = \frac{u_{21}}{u_{22}}$$

²⁷ Debe apreciarse que en este capítulo u_i , por ejemplo, no significa la primera derivada de la función de utilidad, al modo del texto teórico (capítulo de demanda) sino la utilidad del primer agente. Y análogamente para el resto. El contexto será clarificador.

PROBLEMA 8.4

Por lo que:

$$u_{11} = \frac{1}{3} x_{11}^{-2/3} x_{12}^{1/2} \quad u_{12} = \frac{1}{2} x_{12}^{-1/2} x_{11}^{1/3} \quad u_{21} = \frac{1}{2} x_{21}^{-1/2} x_{22}^{1/3} \quad u_{22} = \frac{1}{3} x_{22}^{-2/3} x_{21}^{1/2}$$

Dividiendo la primera por la segunda y la tercera por la cuarta:

$$\frac{\frac{1}{3} x_{11}^{-2/3} x_{12}^{1/2}}{\frac{1}{2} x_{12}^{-1/2} x_{11}^{1/3}} = \frac{\frac{1}{2} x_{21}^{-1/2} x_{22}^{1/3}}{\frac{1}{3} x_{22}^{-2/3} x_{21}^{1/2}}$$

$$\frac{2x_{12}}{3x_{11}} = \frac{3x_{22}}{2x_{21}}$$

$$4x_{21}x_{12} = 9x_{11}x_{22}$$

Que es la ecuación de la curva de contrato en este caso.

Sea un campo de prisioneros de guerra con dos prisioneros que disponen de funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas como $u(1) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, $u(2) = x_2^{1/2} x_1^{1/2}$, establezca la curva de contrato en términos de los paquetes de la Cruz Roja (las dotaciones iniciales de recursos).

Sabemos que debe cumplirse:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_{11}}{u_{12}} = \frac{u_{21}}{u_{22}}$$

por lo que, obteniendo las derivadas correspondientes:

$$u_{11} = \left(\frac{1}{2}\right) x_{11}^{-1/2} x_{12}^{1/2} \quad u_{12} = \left(\frac{1}{2}\right) x_{12}^{-1/2} x_{11}^{1/2} \quad u_{21} = \left(\frac{1}{2}\right) x_{21}^{-1/2} x_{22}^{1/2} \quad u_{22} = \left(\frac{1}{2}\right) x_{22}^{-1/2} x_{21}^{1/2}$$

De donde:

$$\frac{x_{12}^{1/2} x_{12}^{1/2}}{x_{11}^{1/2} x_{11}^{1/2}} = \frac{x_{22}^{1/2} x_{22}^{1/2}}{x_{21}^{1/2} x_{21}^{1/2}}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

Ecuación que es la curva de contrato. En términos de las dotaciones debe cumplirse que:

$$x_{11} + x_{21} = \bar{x}_1$$

$$x_{12} + x_{22} = \bar{x}_2$$

por lo que:

$$x_{12} = \bar{x}_2 - x_{22}$$

$$x_{11} = \bar{x}_1 - x_{21}$$

que sustituidas en la curva de contrato anterior:

$$\frac{(\bar{x}_2 - x_{22})}{(\bar{x}_1 - x_{21})} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

de donde:

$$x_{21}(\bar{x}_2 - x_{22}) = x_{22}(\bar{x}_1 - x_{21})$$

$$x_{21}\bar{x}_2 - x_{21}x_{22} = x_{22}\bar{x}_1 - x_{22}x_{21}$$

$$x_{21}\bar{x}_2 = x_{22}\bar{x}_1 - x_{22}x_{21} + x_{21}x_{22}$$

$$x_{21}\bar{x}_2 = (\bar{x}_1 - x_{21} + x_{21})x_{22} = x_{22}\bar{x}_1$$

$$x_{22} = \left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}\right)x_{21}$$

Que es la curva de contrato, en términos de las dotaciones.

Eficiencia en el intercambio

PROBLEMA 8.5

Dada una economía cuyas preferencias aproximamos por una función de utilidad (social), $u = x_1^{1/2}x_2^{3/2}$ y cuyas funciones de producción son $x_2 = 10L_2 + 3$, $x_1 = 20L_1 + 5$, halle las condiciones de eficiencia del equilibrio general competitivo.

Tenemos que hallar la igualdad:

$$RMS_1^2 = RMT_1^2 = \frac{p_1}{p_2}$$

La relación marginal de sustitución es:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{3/2}}{\frac{3}{2}x_1^{1/2}x_2^{1/2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

PROBLEMA 8.6

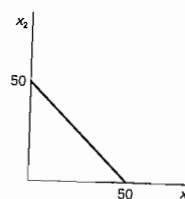


Figura 8.1

Por su parte, la relación marginal de transformación es:

$$RMT_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{10}{20} = -\frac{1}{2}$$

Por lo que tomando el bien 1 como numerario:

$$p_1 = 1 \quad p_2 = 2 \quad y \quad 2x_2 = x_1$$

Si en una economía la frontera de posibilidades de producción es $x_1 + x_2 = 50$ y la función de utilidad es $u = x_1^2x_2^2$ ¿cuál será el precio relativo $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ de equilibrio general competitivo suponiendo que los bienes son sustitutivos perfectos?

Representémosla gráficamente (figura 8.1).

Operando:

$$1dx_1 + 1dx_2 = 0 \quad -dx_2 = dx_1 \quad RMT_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = 1$$

Por otro lado:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} \quad RMS_1^2 = RMT_1^2 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} = 1 \quad \frac{p_1}{p_2} = 1$$

Equilibrio general y distribución de la renta

PROBLEMA 8.7

Suponga una economía perfectamente competitiva de las llamadas 2 · 2 es decir, dos bienes dos factores, en la que las funciones de producción respectivas para los dos bienes son, $x_1 = K_1^{0.6}L_1^{0.4}$, $x_2 = K_2^{0.3}L_2^{0.7}$ y donde la función de utilidad de los dos agentes de consumo es, $u = x_1^{0.5}x_2^{0.5}$, ambas del tipo Cobb-Douglas; si la dotación total de capital de la economía es 1.200 unidades, y la de trabajo 2.200 trabajadores, y el precio del bien 1 es 100, determinar: el precio del bien 2, el salario y la remuneración del capital.

Es bien conocido ya, que en los mercados de factores se deben cumplir las condiciones de valor del producto marginal igual al precio de los inputs:

$$\begin{aligned} VPM_{L1} &= p_1 Pm_{L1} = w & VPM_{K1} &= p_1 Pm_{K1} = r \\ VPM_{L2} &= p_2 Pm_{L2} = w & VPM_{K2} &= p_2 Pm_{K2} = r \end{aligned}$$

Al aplicar estas fórmulas a los datos del problema:

$$p_1 P_{m_{L1}} = p_1 0,4 L_1^{-0,6} K_1^{0,6} = w$$

$$p_2 P_{m_{L2}} = p_2 0,7 L_2^{-0,3} K_2^{0,3} = w$$

de donde:

$$\frac{0,4x_1 p_1}{L_1} = \frac{0,7x_2 p_2}{L_2}$$

$$0,4x_1 L_2 p_1 = 0,7x_2 L_1 p_2$$

Debe cumplirse también la igualdad de la relación marginal de sustitución en el consumo, al cociente invertido de los precios:

$$RMS_1^? = \frac{p_1}{p_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{0,5x_1^{-0,5}x_2^{0,5}}{0,5x_1^{0,5}x_1^{-0,5}}$$

que, este caso, implica:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

donde, operando:

$$p_1 x_1 = p_2 x_2$$

$$0,4p_2 x_2 L_2 = 0,7p_2 x_2 L_1$$

$$0,4L_2 = 0,7L_1$$

Todas ellas son condiciones de eficiencia. Pero, como deben satisfacerse las condiciones de balance de la producción (dotaciones totales igual a usos totales):

$$L_1 + L_2 = L$$

$$K_1 + K_2 = K$$

entonces, sustituyendo:

$$L_1 + \frac{0,7}{0,4} L_1 = 2.200$$

$$L_1 = \frac{0,4L_2}{0,7} = 2.200 - L_2 = \frac{0,4L_2}{0,7} \quad L_2 = 1.400 \quad L_1 = 800$$

De igual modo para K :

$$VPM_{K1} = p_1 P_{m_{K1}} = r = 0,6K_1^{-0,4}L_1^{0,4}p_1$$

$$VPM_{K2} = p_2 P_{m_{K2}} = r = 0,6K_1^{-0,7}L_1^{0,7}p_1$$

o bien:

$$0,6K_2 = 0,3K_1$$

$$K_1 + K_2 = 1.200 \quad K_1 = 1.200 - K_2$$

$$0,6K_2 = 0,3(1.200 - K_2) \quad K_2 = 400 \quad K_1 = 800$$

luego:

$$r = \frac{0,6L_1^{0,4}100}{K_1^{0,4}} = \frac{0,6L_1^{0,4}}{K_1^{0,4}} = \frac{60(800^{0,4})}{800^{0,4}} = 60$$

$$w = 0,4(100)L_1^{-0,6}K_1^{0,6} \quad w = \frac{40K_1^{0,6}}{L_1^{0,6}} = 40$$

$$40 = 0,7p_2 L_2^{-0,3}K_2^{0,3}$$

$$40 = \frac{0,7K_2 p_2}{L_1^{0,6}}$$

$$p_2 = 83,21$$

o bien:

$$r = 0,3K_2^{-0,7}L_2^{0,7}p_2$$

$$60 = \frac{0,3L_2^{0,7}p_2}{K_2^{0,7}}$$

$$60K_2^{0,7} = 0,3L_2^{0,7}p_2$$

$$p_2 = \frac{60K_2^{0,7}}{0,3L_2^{0,7}} = \frac{60(400)^{0,7}}{0,3(1.400)^{0,7}} = 83,21$$

Primer teorema de la economía del bienestar: equilibrio competitivo

PROBLEMA 8.8

Dado un modelo de intercambio puro con dos bienes y dos agentes, cuyas funciones de utilidad vienen representadas por funciones de utilidad Cobb-Douglas del tipo $u(1) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$, $u(2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ y cuyas dotaciones de recursos son: $x_{11} = a$, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = b$. Obtenga las funciones de demanda y los precios relativos de equilibrio, y demuestre el cumplimiento de las restricciones presupuestarias y la ley de Walras.

Formando la función auxiliar de Lagrange para el segundo agente:

$$S = x_{21}^{1/2} x_{22}^{1/2} - \lambda(p_1 x_{21} + p_2 x_{22} - p_2 b)$$

las condiciones de primer orden son, como ya sabemos por Problemas anteriores y en este caso de funciones de utilidad Cobb-Douglas:

$$\frac{x_{22}}{x_{21}} = \frac{p_1}{p_2}$$

de donde:

$$x_{22} = \frac{p_1}{p_2} x_{21}$$

$$x_{21} = \frac{p_2}{p_1} x_{22}$$

y como su recta de balance es:

$$p_2 b = p_1 x_{21} + p_2 x_{22}$$

sustituyendo:

$$p_2 b = p_1 \frac{p_2}{p_1} x_{22} + p_2 x_{22} = 2p_2 x_{22}$$

$$x_{22} = \frac{p_2 b}{2p_2} = \frac{b}{2}$$

Y por el mismo procedimiento, para el primer bien y todavía el segundo agente:

$$p_2 b = \frac{p_1}{p_2} x_{21} p_2 + p_1 x_{21}$$

$$p_2 b = 2p_1 x_{21}$$

$$x_{21} = \frac{p_2 b}{2p_1} = \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1}$$

Los excesos de demanda son:

$$z_{21} = x_{21} - \bar{x}_{21} = \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1} - 0 = \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1}$$

$$z_{22} = x_{22} - \bar{x}_{22} = \frac{b}{2} - b = -\frac{b}{2}$$

Su restricción presupuestaria es:

$$p_1 z_{21} + p_2 z_{22} = \frac{b}{2} p_1 \frac{p_2}{p_1} - \frac{b}{2} p_2$$

$$\frac{b}{2} p_2 - \frac{b}{2} p_2 = 0$$

Para el primer agente, por otro lado, se cumple, por el mismo procedimiento:

$$p_2 x_{12} = p_1 x_{11}$$

$$x_{12} = \frac{p_1 x_{11}}{p_2} \quad x_{11} = \frac{p_2 x_{12}}{p_1}$$

$$p_1 a = p_1 x_{11} + p_2 x_{12}$$

$$p_1 a = p_1 x_{11} + p_2 \frac{p_1 x_{11}}{p_2} = 2p_1 x_{11}$$

$$x_{11} = \frac{p_1 a}{2p_1} = \frac{a}{2}$$

$$p_1 a = p_1 x_{11} + p_2 x_{12}$$

$$p_1 a = p_1 \frac{p_2 x_{12}}{p_1} + p_2 x_{12} = 2p_2 x_{12}$$

$$x_{12} = \frac{p_1 a}{2p_2}$$

$$z_{11} = x_{11} - \bar{x}_{11} = \frac{a}{2} - a = \frac{a - 2a}{2} = -\frac{a}{2}$$

$$z_{12} = x_{12} - \bar{x}_{12} = \frac{p_1 a}{2p_2} - 0 = \frac{p_1 a}{2p_2} = \frac{a}{2} \frac{p_1}{p_2}$$

Estableciendo la restricción presupuestaria de este agente:

$$p_1 z_{11} + p_2 z_{12} = 0$$

$$p_1 \left(-\frac{a}{2} \right) + p_2 \frac{a}{2} \frac{p_1}{p_2} = 0$$

$$-\frac{a}{2} p_1 + \frac{ap_1}{2} = 0$$

El equilibrio del mercado viene dado por la igualdad a cero de las sumas de los excesos de demanda de los dos agentes para cada bien:

$$z_{11} + z_{21} = 0$$

o

$$z_{12} + z_{22} = 0$$

Por lo que sin más que aplicar los resultados anteriores:

$$-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1} = 0$$

$$\frac{a}{2} - \frac{p_1}{p_2} - \frac{b}{2} = 0$$

Por lo que precio relativo, en términos del bien uno, es:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{a}{2} \frac{2}{b} = \frac{a}{b}$$

o, alternatively, con la segunda ecuación:

$$\frac{a}{2} \frac{p_1}{p_2} - \frac{b}{2} = 0$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{b}{2} \frac{2}{a} = \frac{b}{a}$$

que, como sabemos, obtiene el mismo resultado. Por la ley de Walras, debe cumplirse:

$$p_1 \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1} \right) + p_2 \left(\frac{a}{2} \frac{p_1}{p_2} - \frac{b}{2} \right) = 0$$

$$-\frac{a}{2} p_1 + \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1} p_1 + p_2 \frac{a}{2} \frac{p_1}{p_2} - p_2 \frac{b}{2} = 0$$

$$\frac{b}{2} p_2 - p_2 \frac{b}{2} + \frac{a}{2} p_1 - \frac{a}{2} p_1 = 0$$

Las cantidades de equilibrio resultan:

$$x_{11} = \frac{a}{2}$$

$$x_{12} = \frac{p_1}{p_2} \frac{a}{2} = \frac{b}{a} \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

$$x_{22} = \frac{b}{2}$$

$$x_{21} = \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1} = \frac{b}{2} \frac{a}{b} = \frac{a}{2}$$

El dinero en modelos de equilibrio general

PROBLEMA 8.9

Suponga una economía con dos agentes descritos por sus funciones de utilidad, $u(1) = x_{11}^{0.5} x_{12}^{0.5}$, $u(2) = x_{21}^{0.5} x_{22}^{0.5}$ y sus dotaciones de recursos $\bar{x}_{11} = 30$, $\bar{x}_{12} = 9$, $\bar{x}_{13} = 54$, $\bar{x}_{21} = 18$, $\bar{x}_{22} = 12$, $\bar{x}_{23} = 24$, donde \bar{x}_{13} es dinero. Suponiendo que los consumidores demandan 1/3 de sus dotaciones de bienes como «dinero»: verificar la homogeneidad de las demandas de bienes y obtener el equilibrio general competitivo.

Analicemos el comportamiento del primer consumidor y el del otro se establecerá por analogía. Su problema, al modo habitual, se puede plantear como:

$$\text{máx } u(1) = x_{11}^{1/2} x_{12}^{1/2}$$

$$\text{s.a. } \frac{2}{3} (p_1 \bar{x}_{11} + p_2 \bar{x}_{12} + \bar{x}_{13}) = p_1 x_{11} + p_2 x_{12}$$

al tomar el tercer bien como numerario. Formulando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = x_{11}^{1/2} x_{12}^{1/2} - \lambda (p_1 x_{11} + p_2 x_{12} - p_1 \bar{x}_{11} - p_2 \bar{x}_{12} - \bar{x}_{13})$$

las condiciones de primer orden son:

$$\left(\frac{1}{2} \right) x_{11}^{-1/2} x_{12}^{1/2} - \lambda p_1 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \right) x_{12}^{-1/2} x_{11}^{1/2} - \lambda p_2 = 0$$

$$p_1 x_{11} + p_2 x_{12} - p_1 \bar{x}_{11} - p_2 \bar{x}_{12} - \bar{x}_{13} = 0$$

sistema que permite obtener las funciones de demanda al modo ya conocido por problemas anteriores:

$$\frac{x_{12}^{-1/2} x_{11}^{1/2}}{x_{11}^{-1/2} x_{12}^{1/2}} = \frac{x_{12}^{1/2} x_{11}^{1/2}}{x_{11}^{1/2} x_{12}^{1/2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_{12}p_2 = x_{11}p_1$$

$$x_{11} = \frac{x_{12}p_2}{p_1}$$

$$x_{12} = \frac{x_{11}p_1}{p_2}$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria, primero el gasto:

$$p_1x_{11} + p_2x_{12} = p_1\left(\frac{x_{12}p_2}{p_1}\right) + p_2x_{12} = 2p_2x_{12}$$

e igual a la renta:

$$\frac{2}{3}(p_1 \cdot 30 + p_2 \cdot 9 + 54)$$

por lo que:

$$2p_2x_{12} = 20p_1 + 6p_2 + 36$$

de donde:

$$x_{12} = \frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_2}$$

que obviamente no es homogénea de grado cero (basta multiplicar todos los precios por una constante, y la demanda sí se altera).

Para el segundo bien y todavía el primer agente:

$$2p_1x_{11} = 20p_1 + 6p_2 + 36$$

$$x_{11} = \frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_1}$$

Nótese que —lógicamente— son análogas a las típicas funciones de demanda Cobb-Douglas, que dependen de los precios (p_1 y p_2 , respectivamente), y de la renta ($20p_1 + 6p_2 + 36$).

Obtengamos ahora los excesos de demanda y la restricción presupuestaria:

$$z_{11} = x_{11} - \bar{x}_{11} = \frac{20p_1}{2p_1} + \frac{6p_2}{2p_1} + \frac{36}{2p_1} - 30 = -20 + \frac{3p_2}{p_1} + \frac{18}{p_1}$$

$$z_{12} = x_{12} - \bar{x}_{12} = \frac{20p_1}{2p_2} + \frac{6p_2}{2p_2} + \frac{36}{2p_2} - 9 = \frac{10p_1}{p_2} - 6 + \frac{18}{p_2}$$

$$z_{13} = x_{13} - \bar{x}_{13} = \frac{1}{3}(30p_1 + 9p_2 + 54) - 54 = 10p_1 + 3p_2 - 36$$

$$p_1\left(-20 + 3\frac{p_2}{p_1} + \frac{18}{p_1}\right) + p_2\left(10\frac{p_1}{p_2} + \frac{18}{p_2} - 6\right) + 10p_1 + 3p_2 - 36 = -20p_1 + 3p_2 + 18 + 10p_1 + 18 - 6p_2 + 10p_1 + 3p_2 - 36$$

que obviamente se anulan entre sí, lo que implica el cumplimiento de la restricción presupuestaria.

Para el segundo consumidor, formando la función auxiliar de Lagrange y por analogía con el primero:

$$u(2) = x_{21}^{\frac{1}{2}}x_{22}^{\frac{1}{2}} - \lambda[(p_1x_{21} + p_2x_{22} - \frac{2}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24)]$$

$$x_{21} = \frac{p_2}{p_1}x_{22}$$

$$x_{22} = \frac{p_1}{p_2}x_{21}$$

Siendo su restricción presupuestaria:

$$\frac{2}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24) = p_1\frac{p_2}{p_1}x_{22} + p_2x_{22} = 2p_2x_{22}$$

De donde:

$$x_{21} = \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_1}$$

$$x_{22} = \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_2}$$

$$x_{23} = \frac{1}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24)$$

Sus excesos de demanda son:

$$z_{21} = x_{21} - \bar{x}_{21} = 6 + 4\frac{p_2}{p_1} + \frac{8}{p_1} - 18$$

$$z_{22} = x_{22} - \bar{x}_{22} = 6\frac{p_1}{p_2} + 4 + \frac{8}{p_2} - 12$$

$$z_{23} = \frac{1}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24) - 24 = 6p_1 + 4p_2 - 16 = 0$$

$$p_1 \left(6 + 4 \frac{p_2}{p_1} + \frac{8}{p_1} - 18 \right) + p_2 \left(6 \frac{p_1}{p_2} + 4 + \frac{8}{p_2} - 12 \right) + 6p_1 + 4p_2 - 16 = 0$$

$$(6p_1 + 4p_2 + 8 - 18p_1 + 6p_1 + 4p_2 + 8 - 12p_2 + 6p_1 + 4p_2 - 16 = 0$$

Que también se anula. El equilibrio de mercado implica la igualdad de las ofertas y demandas globales. La demanda global del bien 1 es:

$$x_{11} + x_{21} = \frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_1} + \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_1}$$

y las ofertas globales $30 + 18 = 48$. Operando:

$$32p_1 + 14p_2 + 52 = 96p_1$$

Y las del bien 2 respectivamente:

$$\frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_2} + \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_2} = \frac{32p_1 + 14p_2 + 52}{2p_2} = 21$$

$$x_{12} + x_{22} = 21$$

Es decir:

$$32p_1 + 52 = 28p_2$$

Ecuación que, junto con la del primer bien, permite obtener los dos precios (dos ecuaciones con dos incógnitas).

Frontera de utilidad

PROBLEMA 8.10

Si una economía en intercambio puro viene caracterizada por las siguientes funciones de utilidad, $u(j) = 100x_{j1}^{0.7}x_{j2}^{0.3}$, $j = 1, 2$, y unas dotaciones para cada agente de $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 20$. Obtener las asignaciones Pareto óptimas si las hay y establecer la frontera de utilidad.

Planteando el problema de óptimo ya conocido por la teoría:

$$\text{Máx } u(1) = 100x_{11}^{0.7}x_{12}^{0.3}$$

$$\text{s.a } \bar{u}(2) = 100x_{21}^{0.7}x_{22}^{0.3}$$

y dado que se cumple que:

$$x_{11} + x_{21} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} = 20$$

entonces, el lagrangeano adopta la forma:

$$S = 100x_{11}^{0.7}x_{12}^{0.3} + \lambda[100x_{21}^{0.7}x_{22}^{0.3} - \bar{u}(2)] + \beta[20 - x_{11} - x_{21}] + \mu[20 - x_{12} - x_{22}]$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial S}{\partial x_{11}} = 100(0,7)x_{11}^{-0.3}x_{12}^{0.3} - \beta = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{12}} = 100(0,3)x_{12}^{-0.7}x_{11}^{0.7} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{21}} = 100(0,7)x_{21}^{-0.3}x_{22}^{0.3} - \beta = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{22}} = 100(0,3)x_{22}^{-0.7}x_{21}^{0.7} - \mu = 0$$

Dividiendo la primera por la segunda y la tercera por la cuarta:

$$\frac{100(0,7)x_{11}^{-0.3}x_{12}^{0.3}}{100(0,3)x_{12}^{-0.7}x_{11}^{0.7}} = \frac{\beta}{\mu}$$

$$\frac{100(0,7)x_{21}^{-0.3}x_{22}^{0.3}}{100(0,3)x_{22}^{-0.7}x_{21}^{0.7}} = \frac{\beta}{\mu}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

$$x_{12} = \bar{x}_1 - x_{22} = 20 - x_{22}$$

$$x_{11} = \bar{x}_1 - x_{21} = 20 - x_{21}$$

obtenemos:

$$\frac{x_{22}}{x_{21}} = \frac{20 - x_{22}}{20 - x_{21}}$$

$$20x_{21} - x_{22}x_{21} = x_{22}20 - x_{21}x_{22}$$

$$x_{21} = x_{22}$$

Sustituyendo en $u(2)$:

$$\bar{u}(2) = x_{21}^{0.7}x_{22}^{0.3} = x_{22}^{0.7}x_{22}^{0.3} = x_{22} = x_{21}$$

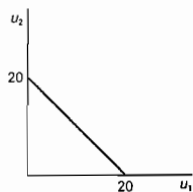


Figura 8.2

y en la restricción de recursos:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &= 20 \\x_{11} + \bar{u}(2) &= 20 \\x_{11} &= 20 - \bar{u}(2)\end{aligned}$$

Sustituyendo en $u(1)$:

$$\begin{aligned}u(1) &= [20 - \bar{u}(2)]^{0.7} [20 - \bar{u}(2)]^{0.3} = 20 - \bar{u}(2) \\u_1 &= f(u_2) \text{ en el intervalo } [0, 20]\end{aligned}$$

que es la frontera de posibilidades de utilidad o frontera de utilidad, que no es otra cosa que la frontera superior del conjunto de valores de índices de utilidad posibles y factibles. Debe notarse que: 1) es decreciente; 2) no existe una única asignación factible eficiente sino infinitas.

La curva de transformación revisitada

PROBLEMA 8.11

Suponga una economía con dos funciones de producción como $x_1 = 10L_1 + 3$, $x_2 = 20L_2 + 5$, cuya dotación de trabajo es, $L = 60$. Obtenga la curva de transformación.

Despejando en las funciones de producción:

$$L_1 = \frac{x_1 - 3}{10} \quad L_2 = \frac{x_2 - 5}{20}$$

como debe cumplirse que:

$$L = L_1 + L_2 = 60 = \frac{x_1 - 3}{10} + \frac{x_2 - 5}{20}$$

de donde se obtiene:

$$x_1 = \frac{23}{2} - \frac{1}{2}x_2$$

que obviamente es una línea recta, lo que indica que la curva de transformación o frontera de posibilidades de producción, presenta un *trade-off* o grado de sustitución constante entre los dos bienes; de hecho la relación es $1/2$, como señala la relación marginal de transformación técnica:

PROBLEMA 8.12

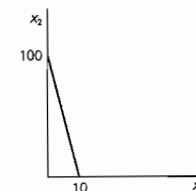


Figura 8.3

El signo menos señala el decrecimiento de la relación, derivado de la fijeza en la cantidad total del factor.

Si, por otro lado:

$$\begin{aligned}L_1 &= L = 60 & L_2 &= 0 \\L_2 &= L = 60 & L_1 &= 0\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\text{Para } L_2 &= 0; x_1 = 10 \cdot 60 + 3 = 603 \\ \text{Para } L_1 &= 0; x_2 = 20 \cdot 60 + 5 = 1.205\end{aligned}$$

luego es una línea recta con estos dos puntos como extremos.

Para una economía cuyas funciones de producción son, $x_1 = \sqrt{L_1}$, $x_2 = L_2$, si $L = 100$, hallar la curva de transformación.

Despejando en las funciones de producción:

$$L_1 = x_1^2$$

y sustituyendo en la ecuación de balance de la producción:

$$L_1 + L_2 = L = 100 = x_1^2 + x_2$$

permite obtener:

$$x_2 = 100 - x_1^2$$

si:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 & x_2 &= 100 \\x_2 &= 0 & x_1 &= 10\end{aligned}$$

es decir una línea recta decreciente:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2x_1 < 0$$

PROBLEMA 8.13

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -2$$

Discuta la veracidad de la siguiente proposición: «La relación marginal de transformación es igual al cociente de los costes marginales de los dos outputs».

Los costes totales respectivos a largo plazo son:

$$CT(1) = rK_1 + wL_1$$

$$CT(2) = rK_2 + wL_2$$

por lo que los marginales son:

$$dCT(1) = rdK_1 + wdL_1$$

$$dCT(2) = rdK_2 + wdL_2$$

Dividiendo una por otra:

$$\frac{dCT(1)}{dCT(2)} = \frac{rdK_1 + wdL_1}{rdK_2 + wdL_2}$$

Pero, como dadas las dotaciones de factores se debe cumplir:

$$K = K_1 + K_2 \quad L = L_1 + L_2$$

entonces:

$$dK = 0 = dK_1 + dK_2 \quad dK_1 = -dK_2$$

$$dL = 0 = dL_1 + dL_2 \quad dL_1 = -dL_2$$

y sustituyendo:

$$\frac{dCT(1)}{dCT(2)} = \frac{rdK_2 + wdL_2}{rdK_2 + wdL_2} = -1$$

La relación marginal de transformación es:

$$RMT_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2}$$

Pero, por definición, los costes marginales son:

$$C_m(1) = \frac{dCT(1)}{dx_1} \quad C_m(2) = \frac{dCT(2)}{dx_2}$$

por lo que, estableciendo el ratio del primero respecto al segundo:

$$\frac{C_m(1)}{C_m(2)} = \frac{dCT(1)}{dCT(2)} \frac{dx_2}{dx_1} = RMT_1^2$$

pero como el segundo término del segundo miembro hemos apreciado es igual a -1 , y el segundo del segundo es la relación marginal de transformación, se cumple la proposición discutida.

Debe apreciarse que, dado que la relación marginal es también igual al cociente invertido de los precios de los productos, se cumple la igualdad de dichos precios y de los costes marginales respectivos a largo plazo —todos los factores variables—. En equilibrio general competitivo se obtiene en el punto en el que la relación marginal de transformación es igual al cociente de los precios de los outputs.

Condiciones de equilibrio y ley de Walras

PROBLEMA 8.14

Establezca matemáticamente las condiciones de equilibrio general competitivo, en el caso de un modelo de intercambio puro con dos bienes y dos agentes.

El equilibrio viene determinado por un vector de precios (p_1, p_2), tal que se igualen las ofertas a las demandas (e denota equilibrio). Es decir, que hagan cumplir las ecuaciones:

$$x_1 = x_{11}(p_1, p_2) + x_{21}(p_1, p_2) = \bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} = \bar{x}_1$$

$$x_2 = x_{12}(p_1, p_2) + x_{22}(p_1, p_2) = \bar{x}_{12} + \bar{x}_{22} = \bar{x}_2$$

el primer subíndice indica agentes y el segundo bienes, sin pérdida de generalidad. Igualando de la oferta y la demanda, o lo que es lo mismo haciendo:

$$[x_{11}(p) - \bar{x}_{11}] + [x_{21}(p) - \bar{x}_{21}] = 0$$

$$[x_{12}(p) - \bar{x}_{12}] + [x_{22}(p) - \bar{x}_{22}] = 0$$

la suma de las demandas netas de cada agente, para cada bien, deben sumar 0. Las funciones de exceso de demanda son (p es el vector de precios de dos componentes p_1 y p_2) de los dos agentes para el primer bien:

$$z_{11}(p) = x_{11}(p) - \bar{x}_{11}$$

$$z_{21}(p) = x_{21}(p) - \bar{x}_{21}$$

Y sumando para los dos agentes y para los dos bienes:

$$z_1(p) = z_{11} + z_{21}$$

$$z_2(p) = z_{12} + z_{22}$$

PROBLEMA 8.15

Por lo que el equilibrio, implica, para el primer bien (mercado):

$$z_1(p^*) = 0$$

Y análogamente para el dos:

$$z_2(p^*) = 0$$

Equilibrio que queda garantizado, al menos, si las ecuaciones son lineales.

Establezca la Ley de Walras para una economía de intercambio puro de dos bienes dos agentes.

La ley de Walras puede expresarse como:

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0$$

es decir, la suma de los valores de los excesos de demanda es igual a cero. Sumando las restricciones presupuestarias de los dos agentes, primero para el uno, se obtiene:

$$\begin{aligned} p_1 x_{11}(p) + p_2 x_{12}(p) &= p_1 \bar{x}_{11} + p_2 \bar{x}_{12} \\ p_1 [x_{11}(p) - \bar{x}_{11}] + p_2 [x_{12}(p) - \bar{x}_{12}] &= 0 \end{aligned}$$

por lo que:

$$p_1 z_{11} + p_2 z_{12} = 0$$

valor del exceso de demanda del agente 1. Y análogamente para el dos:

$$p_1 z_{21} + p_2 z_{22} = 0$$

Como el valor de la demanda neta de cada uno de los dos agentes es cero, la suma de los dos tiene que sumar 0:

$$\begin{aligned} p_1 (z_{11} + z_{21}) + p_2 (z_{12} + z_{22}) \\ p_1 z_1 + p_2 z_2 = 0 \end{aligned}$$

Si z_1 es cero, es decir, el exceso de demanda es cero, es lo mismo que decir que se iguala la oferta y la demanda. Pero si:

$$p_1 z_1 = 0$$

ello implica que:

$$p_2 z_2 = 0$$

y como $p_2 > 0$ entonces tiene que ser cero z_2 .

Precios y cantidades de equilibrio

PROBLEMA 8.16

Todo ello se puede generalizar fácilmente para 3 o n bienes (mercados). Si $n - 1$ mercados están en equilibrio el n tiene que estarlo también. Nótese que se da para todos los precios, porque los agentes deben cumplir (ajustarse), a su restricción presupuestaria exactamente, es decir, no existe posibilidad de ahorro o atesoramiento.

Supongamos un modelo de equilibrio general de intercambio puro caracterizado por las dos funciones de utilidad siguientes correspondientes a los dos consumidores $u(1) = x_{11}x_{12}$, $u(2) = x_{21}x_{22}$, cuyas dotaciones iniciales sean como: $\bar{x}_{11} = 15$, $\bar{x}_{12} = 38$, $\bar{x}_{21} = 45$, $\bar{x}_{22} = 22$. Obtener: (1) la ecuación de la curva de contrato; (2) los índices de utilidad; (3) dibujar la caja de Edgeworth y los puntos singulares derivados de los puntos anteriores; (4) los precios y las cantidades de equilibrio con sus nuevos índices de utilidad.

Los datos implicados en el problema junto con la teoría conocida implican que se deberán cumplir que:

$$\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} = \bar{x}_1 = 60 = x_{11} + x_{21}$$

$$\bar{x}_{12} + \bar{x}_{22} = \bar{x}_2 = 60 = x_{12} + x_{22}$$

Hallando las relaciones marginales de sustitución en el equilibrio:

$$RMS_1^1(1) = RMS_2^2(2) = \frac{x_{12}}{x_{21}} = \frac{x_{22}}{x_{21}} \quad \frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{(60 - x_{12})}{(60 - x_{11})} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

Por lo que se cumple que:

$$x_{12}(60 - x_{11}) = x_{11}(60 - x_{12})$$

$$60x_{12} - x_{12}x_{11} = 60x_{11} - x_{11}x_{12}$$

Pero el segundo término del primer miembro y el último del segundo se cancelan entre sí, así como los dos términos numéricos quedando la curva de contrato, como:

$$x_{11} = x_{12}$$

Como es un caso sencillo la caja de Edgeworth es cuadrada y la curva de contrato es la diagonal principal de aquella. Las curvas de indiferencia que corresponden a funciones de utilidad Cobb-Douglas son estrictamente convexas, y las de los dos agentes que pasan por la dotación inicial dibujan una especie de lente al modo habitual (asintóti-

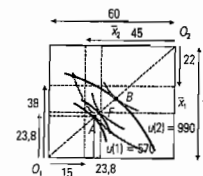


Figura 8.4

cas). Todos los puntos de la curva de contrato son óptimos de Pareto, pero algunos son singulares. Por ejemplo el punto de corte de las curvas de indiferencia que pasa por la dotación (de los dos agentes) con la curva de contrato.

Es evidente que se cumple que:

$$u(1)(\bar{x}) = 15 \cdot 38 = 570$$

pero teniendo en cuenta la función de utilidad del sujeto 1 se da que $x_{11}x_{12} = 570$, pero como las x son iguales en este caso, ello es lo mismo que $(x_{11} = x_{12})^2 = 570$, de donde:

$$x_{11} = x_{12} = \sqrt{570} = 23,87$$

por lo que como el total es 60 el sujeto 2 consumirá $(60 - 23,8 = 36,2)$. Del mismo modo para el consumidor 2.

$$u(2)(\bar{x}) = 22 \cdot 45 = 990$$

$$x_{21} = x_{22} = \sqrt{990}$$

Las cantidades finales intercambiadas estarán entre los puntos A y B.

El vector de precios de equilibrio se puede hallar igualando las demandas globales a las ofertas (dotaciones en este caso) globales, pero para obtener las primeras es preciso resolver los problemas de óptimo de los dos consumidores; primero la del 1:

$$\text{máx } u(1) = x_{11}x_{12}$$

$$\text{s.a } p_1x_{11} + p_2x_{12} = px_{11} + x_{12}$$

(la restricción presupuestaria se ha reescrito tomando el bien 2 como numerario y haciéndolo igual a la unidad, es decir $\left[\frac{p_1}{p_2}\right] = p$. Sabemos que en su equilibrio la RMS será igual al cociente invertido de los precios:

$$RMS(1) = p \quad \left(\frac{x_{12}}{x_{11}}\right) = p \quad x_{12} = px_{11}$$

Ecuación esta última que junto a la restricción presupuestaria conforman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$p\bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} = p \cdot 15 + 38 = px_{11} + x_{12}$$

$$2x_{12} = p \cdot 15 + 38$$

De donde se obtienen las funciones de demanda del primer agente:

$$x_{12} = \frac{p \cdot 15}{2} + \frac{38}{2}$$

$$x_{11} = \frac{x_{12}}{p} = \frac{p \cdot 15}{2p} + \frac{38}{2p}$$

De manera simétrica para al segundo consumidor:

$$\text{máx } u(2) = x_{21}x_{22}$$

$$\text{s.a } p_1x_{21} + p_2x_{22} = px_{21} + x_{22}$$

$$RMS_2^2(2) = p \quad \left(\frac{x_{22}}{x_{21}}\right) = p \quad x_{22} = px_{21}$$

$$2x_{22} = p \cdot 45 + 22$$

$$x_{22} = \frac{p \cdot 45}{2} + \frac{22}{2} \quad x_{21} = \frac{x_{22}}{p}$$

Ahora bastaría sumar las demandas de ambos agentes para cada bien e igualarlas a las ofertas globales (es decir las dotaciones globales o iniciales de ambos bienes):

$$x_{11} + x_{21} = x_1 = \bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} = \bar{x}_1$$

$$x_{12} + x_{22} = x_2 = \bar{x}_{12} + \bar{x}_{22} = \bar{x}_2$$

Lo que daría un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el caso general; de una en este caso.

$$\frac{15p}{2} + \frac{38}{2} + \frac{45p}{2} + \frac{22}{2} = \frac{60p}{2} + \frac{60}{2} = 60 \Rightarrow p = 1$$

Si calculamos ahora el valor de las demandas a ese (esos) precio(s):

$$x_{12} = \frac{p \cdot 15}{2} + \frac{38}{2} = 26,5$$

$$x_{11} = \frac{x_{12}}{p} = \frac{p \cdot 15}{2p} + \frac{38}{2p} = 26,5$$

$$x_{22} = \frac{p \cdot 45}{2} + \frac{22}{2} = 33,5$$

$$x_{21} = \frac{x_{22}}{p} = 33,5$$

Las demandas netas individuales serán:

$$\begin{aligned}x_{11} - \bar{x}_{11} &= 26,5 - 15 = 11,50 \\x_{12} - \bar{x}_{12} &= 26,5 - 38 = -11,50 \\x_{21} - \bar{x}_{21} &= 33,5 - 45 = -11,50 \\x_{22} - \bar{x}_{22} &= 33,5 - 22 = 11,50\end{aligned}$$

Y los índices de utilidad para la posición de intercambio final:

$$\begin{aligned}u^{\text{final}}(1) &= 26,5 \cdot 26,5 = 702,25 \\u^{\text{final}}(2) &= 33,5 \cdot 33,5 = 1.122,25\end{aligned}$$

que son obviamente superiores a los iniciales para los dos agentes, como cabía esperar por la teoría.

Repaso

PROBLEMA 8.17

La ley de Walras en un modelo de equilibrio general de intercambio puro afirma que:

- (a) La suma de las demandas debe ser nula.
- (b) $x_1 = x_2$; $x_1 - x_2 = 0$
- (c) $x_1 = x_2 > x_1 - x_2$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (d) Afirma que la suma de los valores de los excesos de demanda debe ser igual a cero.

PROBLEMA 8.18

En un modelo de equilibrio general de intercambio puro, la restricción presupuestaria de un agente típico j se escribe como:

- (a) $y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i x_{ij}$
- (b) $y_j = \sum_{i=1}^n p_i x_{ij}$
- (c) $\sum_{i=1}^n p_i (x_{ij} - x_{ij}) = 0$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c). Por definición.

PROBLEMA 8.19

Si existen tres individuos (1, 2, 3) y tres alternativas (a, b, c) y la ordenación de las preferencias de los individuos es (en orden descendiente):

1	2	3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

si dichas alternativas se votan por pares, ¿cuál sería el orden adecuado para que la alternativa (b) salga elegida finalmente?:

- (a) Primero entre a y c y luego entre la ganadora y la b.
- (b) Primero entre a y b y luego entre la ganadora y la c.
- (c) Primero entre b y c y luego entre la ganadora y la a.
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Se eligen por pares. (a) entre a y c, se elige c, ya que la prefieren el 2 y el 3. Luego con b, y sale elegida b por la misma razón. (b) sale primero a y queda eliminada b, luego no es buena la respuesta: (c) ganaría primero b, pero luego a en segunda vuelta, luego tampoco sirve.

PROBLEMA 8.20

Conocida la formulación de Rawls de función de bienestar social, la formulación de Nietzsche se formularía como:

- (a) $W = W[u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)]$
- (b) $W = \min(u_1, u_2, \dots, u_m)$
- (c) $W = \max(u_1, u_2, \dots, u_m)$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) (a) es de tipo Samuelson. Nietzsche (*superhombre*) se toma aquí como lo contrario de Rawls (mínimo), luego la respuesta es (c).

PROBLEMA 8.21

En un modelo de equilibrio general de intercambio puro con dos consumidores cuyas funciones de utilidad son (el primer subíndice denota ahora bienes):

$$\begin{aligned}u_1 &= x_{11}x_{21} \\u_2 &= x_{12}x_{22}\end{aligned}$$

y si sus dotaciones iniciales son:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= (x_{11}, x_{21}) = (12, 5) \\ \bar{x}_2 &= (x_{21}, x_{22}) = (8, 15)\end{aligned}$$

¿cuál de las siguientes será la curva de contrato del intercambio?:

- (a) $x_{22} = x_{11}$
- (b) $x_{12}x_{11} = 20$
- (c) $x_{22} = x_{12}$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c):

$$RMS_1^2(1) = RMS_1^2(2)$$

$$\frac{um_1^1}{um_2^1} = \frac{um_1^2}{um_2^2}$$

$$\frac{x_{21}}{x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{12}}$$

Dado que:

$$\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} = 12 + 8 = 20 = x_{11} + x_{21}$$

$$\bar{x}_{12} + \bar{x}_{22} = 5 + 15 = 20 = x_{12} + x_{22}$$

Ello implica que $x_{11} + x_{21} = x_{12} + x_{22}$ y sustituyendo en la tercera ecuación:

$$x_{21} = 20 - x_{11}$$

$$x_{11} = 20 - x_{21}$$

$x_{12} = x_{22}$ y análogamente $x_{11} = x_{21}$

En este caso, la diagonal de la Caja de Edgeworth.

PROBLEMA 8.22

En un modelo de equilibrio general de intercambio puro con dos consumidores cuyas funciones de utilidad son:

$$u_1 = x_{11}x_{21}$$

$$u_2 = x_{12}x_{22}$$

y si sus dotaciones iniciales son:

$$\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{21}) = (12, 5)$$

$$\bar{x}_2 = (x_{21}, x_{22}) = (8, 15)$$

PROBLEMA 8.23

la utilidad total del sujeto 1 es:

- (a) 60
- (b) 20
- (c) 120
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) $u_1 = \bar{x}_{11}\bar{x}_{21} = 12 \cdot 5 = 60$.

En un modelo de equilibrio general de intercambio puro con dos consumidores cuyas funciones de utilidad son

$$u_1 = x_{11}x_{21}$$

$$u_2 = x_{12}x_{22}$$

y si sus dotaciones iniciales son:

$$\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{21}) = (12, 5)$$

$$\bar{x}_2 = (x_{21}, x_{22}) = (8, 15)$$

la utilidad total del sujeto 2 es:

- (a) 60
- (b) 20
- (c) 120
- (d) Ninguna de las anteriores

RESPUESTA: (c) $u_1 = \bar{x}_{12}\bar{x}_{22} = 8 \cdot 15 = 120$.

PROBLEMA 8.24

En un modelo de equilibrio general de intercambio puro con dos consumidores cuyas funciones de utilidad son $u_1 = x_{11}x_{21}$, $u_2 = x_{12}x_{22}$, y si sus dotaciones iniciales son $\bar{x}_1 = (x_{11}^1, x_{21}^1) = (12, 5)$, $\bar{x}_2 = (x_{12}^2, x_{22}^2) = (8, 15)$, si $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$, la utilidad será máxima para.

- (a) $3x_1 = 2x_2$
- (b) $4x_1 = 3x_2$
- (c) $2x_1 = 3x_2$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (c) En el equilibrio, el consumidor maximiza la utilidad cuando:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3}$$

$$3x_2 = 2x_1$$

PROBLEMA 8.25

Dada la función de utilidad:

$$u = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

si los precios de los bienes son $p_1 = 5$ y $p_2 = 3$ y si $x_1 = 30$, la utilidad será máxima para:

- (a) $x_2 = 19$
- (b) $x_2 = 15$
- (c) $x_2 = 30$
- (d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Ayuda: en el equilibrio el consumidor maximiza la utilidad cuando:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

que implica:

$$\frac{x_1}{2x_2} = \frac{5}{3}$$

$$3x_1 = 10x_2$$

$$90 = 10x_2$$

$$x_2 = 9$$

Bibliografía

- Ahijado, M. (1994): *Microeconomía. Ejercicios*, CERA.
- Ahijado, M.; Ferrer, J. M.; Grau, P.; Fernández Comejo, J. A., y Barrio, D. (1997): *Introducción a la Microeconomía para Administración y Dirección de empresas Ejercicios y cuestiones de test*, CERA.
- Bernier, B., y Ferrandier, R. (1995): *Microéconomie. Application et révision de cours*, Dunod.
- Birchenhall, Ch., y Grout, P. (1984): *Mathematics for Modern Economics*, Phillip Allan.
- BPP (1997): *Economics. Business Basics A Study guide for degree students*, BPP Publishing, 2.ª ed.
- Bressler, B. (1995): *A unified introduction to mathematical economics*, Harper Row.
- Brewster, D. (1997): *Business Economics. Decision Making and the Firm*, The Dryden Press.
- Case, K. E., y Fair, R. C. (1997): *Principios de Microeconomía*, Prentice Hall.
- Chapasur, P., y Milleron, J. C. (1990): *Exercices de Microéconomie*, Dunod.
- Chiang (1974): *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, McGraw Hill. Existe traducción castellana en McGraw Hill.
- Coyle, B. (1989): *Multiple Choice questions*, BPP Publishing.
- Davies, H. (1991): *Managerial Economics for business, management and accounting*, Pitman.
- Diéguez, H., y Porto, A. (1971): *Problemas de Microeconomía*, Amorrortu.
- Fandel, G.; Heuft, B.; Paff, A., y Pitz, Th. (1999): *Kostenrechnung*, Springer.
- Fehl, U., y Oberender, P. (1994): *Grundlagen der Mikroökonomie*, 6. Auflage, Verlag Vahlen.
- Ferguson, P. R.; Ferguson, G. J., y Rothschild, R. (1993): *Business Economics*, Macmillan, 2.ª ed.
- Henderson, M., y Quandt, R. E. (1962): *Microeconomic theory*, McGraw-Hill.
- Mansfield, E. (1993): *Managerial Economics. Theory, Applications, and Cases*, Norton, 2.ª ed.
- Meza, D., y Osborne, M. (1980): *Problems in price theory*, Phillip Allan.
- Nicholson, W. (1992): *Microeconomic Theory. Basic Principles and Extensions*, The Dryden Press, 5.ª ed.
- Piller, A. (1995): *Microéconomie. Manuel d'exercices corrigés*, Maxima.
- Powell (1993): *Economics. For Professional and Business Studies*, DP Publications, 2.ª ed.
- Pyndyck, R. S., y Rubinfeld, D. L. (1995): *Microeconomics*, Prentice-Hall International, 3.ª ed.
- Quirk, P. (1976): *Intermediate Microeconomics*, SRA.
- Robinson, J., y Eatwell, J. (1973): *An Introduction to Modern Economics*, McGraw-Hill.
- Smith, P., y Begg, D. (1994): *Workbook. Economics*, McGraw-Hill International, 4.ª ed.
- Smith, P.; Begg, D., y Symes, S. (1985): *Workbook. Economics*, McGraw-Hill International, 4.ª ed.
- Stapleton, D. C. (1992): *Workbook. Walter Nicholson Microeconomic Theory. Basic Principles and Extensions*, The Dryden Press.
- Thomas, R. (1987): *Applied Demand Analysis*, Longman.
- Varian, H. (1990): *Intermediate Microeconomics. A modern Approach*, Norton, 2.ª ed. Existe edición castellana.
- Vázquez, A. (1968): *Problemas de Teoría Económica. Consumo, Producción y Precios*, Litoprint.
- Winch, D. (1984): *Microeconomics. Problems and solutions*, Oxford University Press.
- Yohe, W. (1993): *Exercises and Applications*, Norton.



00001572434

