
**APUNTES
DE
METEOROLOGÍA DINÁMICA**

JOSÉ AGUSTÍN GARCÍA
Departamento de Física
marzo, 2007

Índice general

1. Introducción a la Mecánica de Fluidos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Noción del continuo	1
1.3. Concepto de flujo	2
1.4. Imágenes euleriana y lagrangiana	3
1.5. Derivada másica	4
1.6. Líneas de corriente, trayectorias y líneas de emisión	11
1.6.1. Líneas de corriente	11
1.6.2. Trayectorias	12
1.6.3. Líneas de emisión	13
1.7. Estudio de la deformabilidad del continuo	15
1.7.1. Deformación del vector desplazamiento, vector superficie y volumen	16
1.8. Velocidad de deformación de los elementos de longitud, superficie y volumen	18
1.9. Teorema de conservación de la masa	22
1.10. Tensor velocidad de deformación	23
1.10.1. Tensor de Cauchy y Green–Venant	33
1.11. Teorema de Reynolds	35
1.12. Teorema de Helmholtz	38
1.13. Dinámica de fluidos	40
1.14. Tensor de esfuerzos	42
1.14.1. Condición de la situación de equilibrio	49
1.15. Fluidos newtonianos	52
1.16. Principio de conservación de la energía	55
1.16.1. Condiciones frontera	60
1.16.2. Ecuación de Bernoulli	63
1.16.3. Teorema de Crocco	65
2. Ecuaciones meteorológicas del movimiento	69
2.1. Ecuaciones del movimiento en una Tierra en rotación	69
2.1.1. Efecto de la fuerza de Coriolis	70
2.1.2. Efecto de la fuerza centrífuga	70

2.2. Ecuaciones del movimiento en coordenadas esféricas	71
2.3. Ecuación de conservación del momento angular	80
2.4. Coordenadas verticales alternativas	82
2.4.1. La presión como coordenada vertical	87
2.4.2. La temperatura potencial como coordenada vertical	93
2.5. El sistema de coordenadas naturales	94
2.5.1. El viento geostrófico	96
2.5.2. Viento del gradiente	99
2.5.3. Otros tipos de vientos	101
2.6. Efecto del rozamiento	103
2.6.1. El bombeo Ekman	108
2.7. El viento térmico	109
2.7.1. El teorema de Taylor–Proudman	109
2.7.2. Efecto de la baroclinicidad:El viento térmico	112
2.7.3. Algunas consecuencias del concepto del viento térmico	114
2.7.4. Advección de temperatura y estabilidad	114
2.8. Determinación de la velocidad vertical	123
2.8.1. El método cinemático	124
2.8.2. El método adiabático	124
2.9. La ecuación de tendencia barométrica	125
2.10. Fuerzas de marea	126
2.10.1. Mareas en equilibrio	133
3. Vorticidad y Circulación	135
3.1. Introducción	135
3.2. Expresión de la vorticidad en otros sistemas de coordenadas	137
3.2.1. Coordenadas naturales	137
3.2.2. Coordenadas esféricas	139
3.3. Circulación	139
3.3.1. Efecto de la baroclinicidad	144
3.4. Ecuación de conservación de la vorticidad	148
3.5. Vorticidad y circulación en sistemas de referencia no inerciales	150
3.5.1. Ecuaciones aproximadas para flujo a gran escala	154
3.5.2. La ecuación de conservación de vorticidad en coordenadas isobaricas	157
3.5.3. Coordenadas isentrópicas	158
3.6. Ondas largas (teoría de Rossby)	164
4. Ondas en la atmósfera	169
4.1. Importancia	169
4.2. Concepto de onda	170
4.3. La ecuación de ondas: soluciones	171
4.3.1. El problema de Cauchy	172

4.3.2. Algunas características de las ondas	173
4.4. Ondas dispersivas: Velocidad de grupo	176
4.4.1. El método de la fase estacionaria	178
4.5. Ondas en medios no homogéneos	183
4.6. Ondas sonoras	185
4.7. Ondas gravitatorias externas	188
4.7.1. Energías cinética y potencial	194
4.8. Ondas inercia-gravedad	200
4.8.1. Ajuste Geostrófico	202
4.8.2. Transitorios	205
4.9. Ondas de Kelvin	207
4.10. Ondas Planetarias de Rossby	209
4.10.1. Ondas Rossby topográficas	214
4.11. Efectos de la estratificación. Ondas gravitacionales internas	216
4.11.1. Importancia de la estratificación. El número de Froude	217
4.11.2. Ondas gravitatorias internas	218
4.11.3. Ondas de montaña	224
4.11.4. Obstaculo Aislado	228

Capítulo 1

Introducción a la Mecánica de Fluidos

1.1. Introducción

Aunque la mecánica de medios continuos no tiene porque ceñirse a la mecánica de fluidos, si que podemos considerar a la mecánica de fluidos como un ejemplo típico de mecánica de medios continuos. Por esta razón vamos a utilizar la mecánica de fluidos como un medio para estudiar la mecánica de medios continuos.

1.2. Noción del continuo

Esta hoy en día perfectamente asumido que la materia es discreta, esto es, está formada por átomos los cuales a su vez están compuestos por núcleos y electrones "girando" entorno a sus núcleos. Estos a su vez están compuesto por otras partículas los cuales a su vez están compuesto por otras partículas, etc. No obstante podemos todavía en ciertos problemas considerar a la materia como continua esto es con propiedades macroscópicas que son función continua de la posición en el seno de la materia. Para analizar en que condiciones podemos considerar a la materia como un continuo, considerar el concepto de densidad ρ . Para definir la densidad en un punto, debemos de tomar un volumen muy pequeño en torno a dicho punto y calcular la densidad como la suma de las masas de las partículas contenidas en dicho volumen y lo dividiremos por el volumen

$$\rho(\delta \mathcal{V}_x) = \frac{\sum_i m(i)}{\delta \mathcal{V}_x}$$

Si el volumen es muy pequeño, el anterior valor fluctuará fuertemente cuando vayamos de un punto a otro, aunque sea próximo, pues el valor de la densidad dependerá de si hemos cogido alguna partícula

o no dentro de nuestro volumen elemental, con lo que, la idea de un valor de la densidad función continua de la posición no es posible. Así mismo si cambiamos el tamaño de nuestro volumen la densidad cambiará fuertemente, pues como antes, es posible que el número de partículas contenidas en el interior del volumen varíe fuertemente y por tanto nuestra definición de densidad dependerá enormemente del volumen elegido para definirla. Si vamos aumentando nuestro volumen, poco a poco se irá estabilizando el valor de la densidad hasta que este apenas varíe, pues la inclusión de nuevas partículas va a alterar muy poco el valor de la densidad. Sea \mathcal{V}_0 el valor para el cual esto ocurre. Si dicho valor es muy pequeño frente al tamaño macroscópico del problema que nos ocupa, podemos considerar a la densidad definida en ese volumen como un valor local, en realidad la vamos a tomar como la densidad en el punto origen de dicho volumen, esto es

$$\rho(x) = \rho(\delta \mathcal{V}_0)$$

El problema surge cuando dicho volumen es grande comparado con el tamaño del problema de tal forma que no lo podemos considerar como local. En estas condiciones debemos acudir a otra teoría como puede ser la teoría cinética de gases. Lo mismo que hemos hecho para la densidad se puede hacer para otras propiedades microscópicas como son la velocidad, la temperatura, la presión etc. En cualquier caso vamos a suponer que todas estas propiedades son función continua de la posición, salvo en un conjunto de medida nula.

1.3. Concepto de flujo

En los problemas de sistemas de partículas, se supone que tenemos resuelto nuestro problema cuando conocemos la trayectoria de cada una de las partículas, esto es, cuando tenemos funciones de la forma $x_i = x_i(x_{i0}, t)$ que nos permiten conocer la posición de la partícula en cada instante como función de la posición inicial. En el caso de mecánica de medios continuos vamos a tener una infinidad no numerable de partículas y en vez de tener un índice que nos las cuente tendremos un número (o números) real (reales). Sea ξ el parámetro que nos designa las partículas del medio continuo, Este parámetro puede ser por ejemplo la posición en un instante inicial. Como antes, supondremos que existe un mapa o aplicación que nos lleva a cada partícula ξ en un instante dado a su posición en un instante posterior. Esto es supondremos que existe una función ψ tal que

$$\mathbf{x} = \psi_t(\xi) = \mathbf{x}(\xi, t)$$

Vamos a suponer que se verifican las siguientes propiedades

1. La aplicación $\psi_t(\xi)$ es una aplicación uno a uno y la inversa es también uno a uno. Esto significa que una partícula no se puede dividir en dos y que dos partículas no se pueden juntar y dar lugar a una nueva partícula.
2. La aplicación $\psi_t(\xi)$ es una función continua y con derivada continua de la posición ξ , de tal forma que el fluido se puede deformar todo cuanto queramos sin llegar a romperse. La aplicación inversa verifica también estas propiedades. En estas condiciones diremos que la aplicación ψ es un difeomorfismo.
3. La aplicación ψ_t tiene las propiedades de un grupo, de tal forma que $\psi_{t+s} = \psi_t \psi_s$, ψ_0 es la identidad y ψ_{-t} es el elemento inverso de ψ_t . Este grupo recibe el nombre de grupo uniparamétrico.

1.4. Imágenes euleriana y lagrangiana

El estudio de los fluidos se puede abordar desde dos imágenes o visiones diferentes. En primer lugar podemos fijarnos en cada una de las partículas que componen el fluido¹ y analizar que ocurre con cada una de ellas en el curso del tiempo. Esto constituye lo que se ha venido en llamar la imagen *lagrangiana* del fluido. O bien, en vez de ver que le ocurre a cada partícula podemos ver que pasa en cada punto del espacio en cada instante de tiempo, en este caso hablaremos de imagen *euleriana*. La imagen euleriana equivale a una teoría de campos. >Que relación existe entre una y la otra ?. Para ello imaginemos una propiedad de una partícula ξ que en el instante t se encuentra en el punto \mathbf{x} . Obviamente dicha propiedad coincidirá con la propiedad del punto \mathbf{x} en dicho instante. Así pues

$$\mathcal{P}(\xi, t) = \mathcal{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t) \quad (1.1)$$

La anterior ecuación nos dice, que la propiedad \mathcal{P} que tiene la partícula ξ en el instante t , coincide con el valor de la propiedad \mathcal{P} en el punto \mathbf{x} en el cual está la partícula ξ en el instante t . Así mismo la propiedad \mathcal{P} en el punto \mathbf{x} en el instante t coincidirá con la propiedad de la partícula que este en ese instante en dicho punto

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{P}(\xi(\mathbf{x}, t), t) \quad (1.2)$$

¹La idea de partícula aquí no significa lo mismo que en la mecánica de sistemas, pues estamos suponiendo que el medio es continuo. Una partícula aquí es un pequeño volumen en torno a un punto dado.

1.5. Derivada másica

Es interesante poder relacionar las variaciones temporales que tiene una propiedad \mathcal{P} en las dos imágenes de Lagrange y Euler. Esta cuestión es fundamental pues las leyes de la mecánica y la termodinámica son leyes que se aplican a un sistema mecánico o térmico fijado de antemano. Cuando aplicamos la leyes de Newton, lo primero que hacemos es fijar el sistema mecánico y luego analizamos cual es su evolución en el tiempo. Esto significa que cuando apliquemos estas mismas leyes en mecánica de fluidos debemos fijar a que partículas se las vamos aplicar, esto es, debemos utilizar la imagen lagrangiana para poder aplicar las leyes de Newton. Lo mismo sucede con las leyes termodinámicas. Ahora bien es normal que conozcamos las propiedades espaciales y por tanto tengamos un conocimiento euleriano del sistema. >Cómo relacionar las variaciones temporales en una imagen y otra ?. La respuesta está en las ecuaciones dadas en la sección anterior. Partiendo de la expresión (1.2) y derivando respecto del tiempo, manteniendo ξ constante,

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}(\xi, t)}{\partial t} \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t} \right|_{\xi}$$

Ahora bien

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t} \right|_{\xi}$$

no es otra cosa que la velocidad de la partícula ξ en el instante t , que por la misma ecuación (1.2) es la velocidad en el punto \mathbf{x} ocupado en ese instante por la partícula ξ , por lo tanto tenemos

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.3)$$

La cantidad

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$$

recibe el nombre de variación local de la propiedad \mathcal{P} y

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \mathcal{P}$$

recibe el nombre de **advección** de la propiedad \mathcal{P} . Podemos poner por tanto

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \mathcal{P}. \quad (1.4)$$

Podemos aplicar la anterior ecuación para calcular la aceleración de una partícula del fluido a partir

del campo de velocidades. En este caso $\mathcal{P} = \mathbf{v}$ y por tanto

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} \quad (1.5)$$

Respecto de la anterior ecuación debemos de decir que mientras $D\mathbf{v}/Dt$ es una verdadera aceleración la cantidad $\partial \mathbf{v}/\partial t$ no es una aceleración si no la variación local de la velocidad. Mientras que $D\mathbf{v}/Dt$ es la propiedad de una burbuja determinada, $\partial \mathbf{v}/\partial t$ afecta a burbujas diferentes y por tanto no se puede considerar como propiedad de una partícula determinada. Vamos a ver un ejemplo que nos permita ver la diferencia entre ambos términos. Para ello considerar que estáis en una plácida tarde de verano bajo la sombra de una magnífica encina observando la marcha de un río en la cercanía de unos rápidos del mismo. Supuesto que el flujo es estacionario, observáis que los pequeños troncos y ramas que transporta el río, al pasar por delante de vosotros, mantienen la misma velocidad, pero que, según se acercan a los rápidos, estos van aumentando de velocidad. >Qué sucede ? Pues que, cuando nosotros observamos que todos los troncos que pasan delante de nuestros ojos tienen la misma velocidad, estamos evaluando la variación local de velocidad, como todos los troncos tienen la misma, este término es nulo. Ahora bien, cuando nos fijamos en uno de ellos, vemos que se acelera cuando se acerca a los rápidos. >Cual es la aceleración de uno de estos troncos? Pues obviamente la diferencia de velocidades dividido por la diferencia de tiempos

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ahora bien $\Delta t = \Delta x / \bar{v}$, por lo que la aceleración vale

$$\bar{v} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

en el límite cuando Δx tiende a cero obtenemos

$$v \frac{\partial v}{\partial x}$$

La cantidad $\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v}$ recibe el nombre de *advección* de velocidad. Desde un punto de vista puramente matemático esta cantidad constituye la derivada de Lie del campo vectorial \mathbf{v} a lo largo del campo integral del propio campo \mathbf{v} . En el caso que tengamos una propiedad \mathcal{P} que es un escalar, por ejemplo la temperatura, el operador GRAD, es el gradiente usual del campo $\mathcal{P}(x, y, z)$. Si la propiedad \mathcal{P} es un vector, como sucede si estudiamos el campo de velocidades, el operador GRAD es la derivada

covariante. Donde, como es sabido, la derivada covariante del campo \mathbf{v} viene dada por la expresión

$$v_{,j}^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{j,k}^i v^k$$

siendo $\Gamma_{j,k}^i$ los coeficientes de la conexión afín o símbolos de Christoffel de segunda especie, de tal forma que la derivada másica resulta,

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right)^i &= \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v_{,j}^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{j,k}^i v^k \right) = \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{j,k}^i v^j v^k \end{aligned}$$

Empleando el símbolo ∇ en vez del GRAD para designar al gradiente del campo de velocidades, el término adventivo lo podemos poner como

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

En un lenguaje de diadas podemos considerar al gradiente de velocidades como la diada $\nabla \mathbf{v}$ y la anterior expresión como la aplicación a la izquierda de la diada $\nabla \mathbf{v}$, por tanto tenemos

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

término que, en coordenadas cartesianas eulerianas, toma la forma

$$[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]_i = \left(v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) v_i$$

donde con el subíndice α repetido queremos indicar una suma en α . Podemos evaluar a partir de las anteriores expresiones la variación local de la propiedad \mathcal{P} . Supongamos que nos estamos refiriendo a la temperatura de la burbuja, $\mathcal{P} = T$, de la expresión 1.4, tenemos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T + \frac{DT}{Dt}$$

Supongamos que la temperatura de la burbuja no ha variado en el curso del tiempo. Esto significa que $DT/dt = 0$, por lo que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla T$$

esto significa que la variación local de la temperatura es igual a la advección de temperatura, esto es, el viento advecta las isotermas con él, a una velocidad $v \cos \alpha$ siendo α el ángulo formado por

el vector gradiente de temperatura y el vector velocidad. Para ver esto fijémonos en la figura 1.1 en

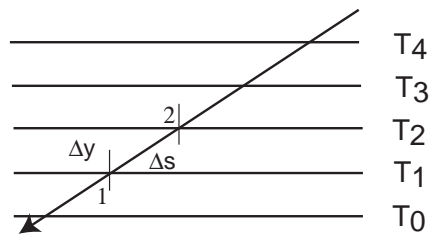


Figura 1.1:

donde una cierta masa de aire se mueve en la dirección de la flecha. Al moverse en esa dirección, y no cambiar la temperatura de la burbuja, arrastra consigo las isotermas, esto es si la burbuja en un cierto instante se localiza en el punto 2, tiene la temperatura T_2 cuando se haya desplazado a la posición 1 tendrá en ese punto la temperatura T_2 (hemos supuesto que el desplazamiento es isoterma). Así pues la temperatura en la posición 1 habrá cambiado de T_1 a T_2 en el tiempo transcurrido durante el viaje de la partícula del punto 2 al punto 1, así pues la velocidad de la variación local de la temperatura será

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_2 - T_1}{\Delta t} = \frac{T_2 - T_1}{\Delta s / v} = v \frac{T_2 - T_1}{\Delta s} = v \frac{T_2 - T_1}{\Delta y / \cos \alpha} = v \cos \alpha \frac{T_2 - T_1}{\Delta y} = -v_y \frac{T_2 - T_1}{\Delta y}$$

en el límite

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v_y \frac{\partial T}{\partial y} = -\mathbf{v} \cdot \text{GRAD } T$$

La figura 1.2 nos ilustra como actúa la advección. A la izquierda tenemos un campo de temperaturas

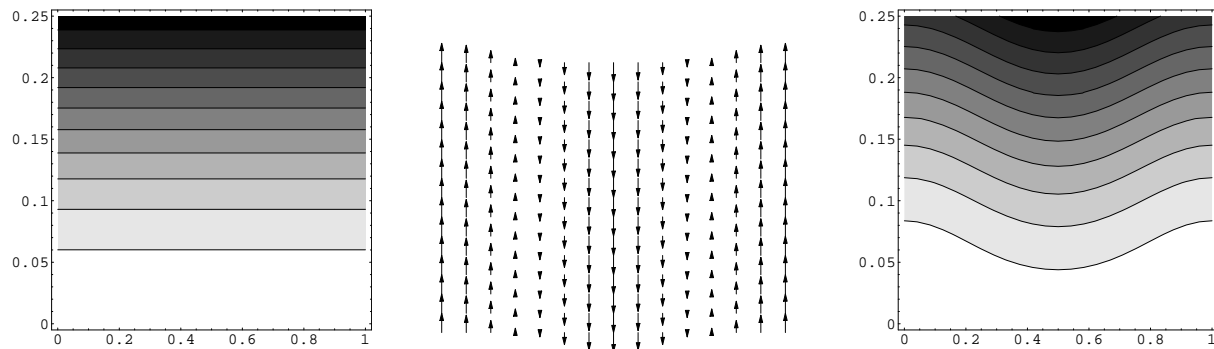


Figura 1.2:

que cuyas isotermas son paralelas al eje x y que van creciendo a lo largo del y . En el centro tenemos

un hipotético campo de viento, soplando de arriba para abajo en la parte central y de abajo para arriba en los extremos. La figura de la derecha nos muestra el campo de temperatura al cabo de un cierto tiempo, donde se puede observar como se deforman las isotermas a cuenta de la advección.

Ejemplo 1.1 Considerar el flujo definido por el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= \xi t \\y &= \eta(1 + t^2) \\z &= \zeta(1 + t)^2\end{aligned}$$

Calcular la velocidad y aceleración del anterior flujo tanto en la imagen lagrangiana como en la imagen euleriana.

SOLUCCION

De acuerdo con la definición, la velocidad lagrangiana viene dada por la expresión $\mathbf{v} = (\partial \mathbf{x} / \partial t)_\xi$, por lo que derivando las anteriores ecuaciones respecto a t manteniendo constantes ξ, η, ζ , tenemos

$$\begin{aligned}v_x(\xi, \eta, \zeta, t) &= \xi \\v_y(\xi, \eta, \zeta, t) &= 2\eta t \\v_z(\xi, \eta, \zeta, t) &= 2\zeta(1 + t)\end{aligned}$$

Para calcular la imagen euleriana debemos de utilizar las ecuaciones del flujo para eliminar ξ, η, ζ , resultando

$$\begin{aligned}v_x(x, y, z, t) &= \frac{x}{t} \\v_y(x, y, z, t) &= 2y \frac{t}{1 + t^2} \\v_z(x, y, z, t) &= 2z \frac{1}{(1 + t)}\end{aligned}$$

Para calcular la aceleración partiendo de la expresión de la velocidad en la imagen lagrangiana, solo

debemos de derivar respecto del tiempo, por lo que

$$\begin{aligned}a_x(\xi, \eta, \zeta, t) &= 0 \\a_y(\xi, \eta, \zeta, t) &= 2\eta \\a_z(\xi, \eta, \zeta, t) &= 2\zeta\end{aligned}$$

que utilizando las ecuaciones del flujo podemos escribir en la imagen euleriana

$$\begin{aligned}a_x(x, y, z, t) &= 0 \\a_y(x, y, z, t) &= 2y \frac{1}{1+t^2} \\a_z(x, y, z, t) &= 2z \frac{1}{(1+t)^2}\end{aligned}$$

Ahora bien si partimos de la expresión euleriana de la velocidad para calcular la aceleración debemos de emplear la expresión $D\mathbf{v}/Dt$,

$$\begin{aligned}a_x(x, y, z, t) &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}) v_x = 0 \\a_y(x, y, z, t) &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}) v_y = 2y \frac{1}{1+t^2} \\a_z(x, y, z, t) &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + (v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}) v_z = 2z \frac{1}{(1+t)^2}\end{aligned}$$

siendo

$$\left(v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

obteniendo los mismos resultados que a través de la imagen lagrangiana. Obsérvese que cuando calculamos la aceleración a partir de la imagen euleriana obtenemos la aceleración también en la imagen euleriana.

Ejemplo 1.2 Calcular la expresión de la diada $(\nabla \mathbf{v})$ en coordenadas cilíndricas.

SOLUCIÓN

El operador ∇ en cilíndricas vale

$$\nabla = \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

y

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{r} + v_\theta \boldsymbol{\theta} + v_z \mathbf{k}$$

siendo (v_r, v_θ, v_z) las componentes físicas de la velocidad en cilíndricas ($v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$, $v_z = \dot{z}$). Aplicando el operador ∇ a la velocidad \mathbf{v} , obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \mathbf{r} \mathbf{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \mathbf{r} \boldsymbol{\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \mathbf{r} \mathbf{k} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \\ & \boldsymbol{\theta} \mathbf{r} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \boldsymbol{\theta} \mathbf{k} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \\ & \mathbf{k} \mathbf{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \mathbf{k} \boldsymbol{\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \mathbf{k} \mathbf{k} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\ & \frac{v_r}{r} \boldsymbol{\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \mathbf{r} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que la derivada de los vectores base respecto de r y z vale cero. Dado que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \boldsymbol{\theta}$$

y que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta} = -\mathbf{r}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \mathbf{r} \mathbf{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \mathbf{r} \boldsymbol{\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \mathbf{r} \mathbf{k} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \\ & \boldsymbol{\theta} \mathbf{r} \left(-\frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \boldsymbol{\theta} \mathbf{k} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \\ & \mathbf{k} \mathbf{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \mathbf{k} \boldsymbol{\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \mathbf{k} \mathbf{k} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Si aplicamos el anterior operador al vector \mathbf{v} por la izquierda, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = & v_r \left(\mathbf{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \mathbf{k} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \\ & v_\theta \left(\mathbf{r} \left(-\frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \boldsymbol{\theta} \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \mathbf{k} \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + \\ & v_z \left(\mathbf{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \boldsymbol{\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

que reordenando

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = & \mathbf{r} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) + \\ & \theta \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \\ & \mathbf{k} \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

La traza del tensor $\nabla \mathbf{v} = \partial v_\alpha / \partial x_\alpha$ constituye la divergencia del campo, por lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}$$

1.6. Líneas de corriente, trayectorias y líneas de emisión

1.6.1. Líneas de corriente

Se define una línea de corriente como aquella curva en el espacio que en un instante determinado t es tangente al campo de velocidades en cada punto del espacio. Es una imagen instantánea del campo de velocidades del fluido. La ecuación de la línea de corriente vendrá dada por una expresión del tipo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ siendo s un cierto parámetro. En coordenadas cartesianas eulerianas, el vector tangente a la curva tiene por componentes $(dx/ds, dy/ds, dz/ds)$. Puesto que este campo es tangente al campo de velocidades, sus componentes han de ser proporcionales, por lo que

$$\frac{dx/ds}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy/ds}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz/ds}{v_z(x, y, z, t)}$$

que podemos poner de diferentes formas. Eliminando ds

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (1.6)$$

que nos permite obtener un par de superficies cuya intersección nos da la línea buscada. Podemos también utilizar como ecuación de las líneas de corriente las expresiones

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= v_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{ds} &= v_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{ds} &= v_z(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{1.7}$$

que nos permite obtener las ecuaciones paramétricas. En todas las expresiones anteriores el tiempo juega el papel de parámetro y denota el instante en el que estamos calculando la línea de corriente. Las ecuaciones y por tanto las líneas de corriente cambian de un instante a otro excepto si el tiempo no está presente en la expresión del campo de velocidades. En esta situación diremos que el flujo es *estacionario*. La figura 1.3 nos muestra un ejemplo de las líneas de corriente en torno a una esfera

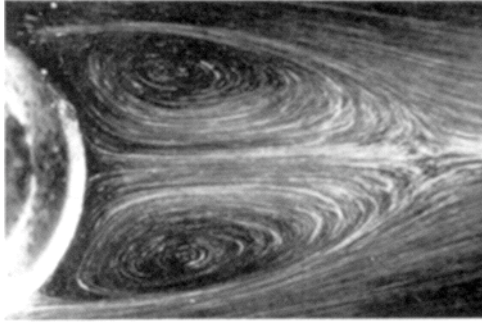


Figura 1.3: Líneas de corriente en la estela formada por una esfera. (Fuente: G.K. Batchelor. *An introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge)

1.6.2. Trayectorias

Como en la mecánica de sistemas, la trayectoria es la curva integral del campo de velocidades, esto es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} &= v_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} &= v_z(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{1.8}$$

En este caso el tiempo juega el papel de variable independiente y no de simple parámetro como sucedía en el caso de las líneas de corriente. En el caso en que flujo sea estacionario el tiempo no está presente en la expresión de campo de velocidades por lo que formalmente las expresiones para las líneas de corriente y las trayectorias son idénticas por lo que ambas curvas coinciden.

1.6.3. Líneas de emisión

Son las curvas más fácilmente obtenibles de forma experimental, basta inyectar un colorante, por ejemplo mediante una aguja hipodérmica, en un punto del seno del fluido. Todos los puntos de la curva cumplen la condición de haber pasado en un instante determinado por el punto de emisión del colorante. Así pues llamaremos curva de emisión a la curva que une aquellos puntos materiales que han pasado en un cierto instante por una posición dada en el seno del fluido. Para ver las ecuaciones de las curvas de emisión consideremos la definición de flujo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$$

Vamos a evaluar a partir de la anterior expresión que partículas han pasado por un cierto punto \mathbf{y} en el instante s tal que $0 \leq s \leq t$. Puesto que la anterior expresión es invertible, estas partículas vendrán dadas por la expresión

$$\xi = \xi(\mathbf{y}, s)$$

una vez que conocemos las partículas, vamos a ver que posición ocupan en un cierto instante t , sustituyendo la anterior expresión en la ecuación del flujo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi(\mathbf{y}, s), t) \tag{1.9}$$

En la anterior expresión, s juega el papel de parámetro que nos describe la curva y t el instante en el que consideramos la curva. La línea de emisión al igual que la línea de corriente está formada por diferentes partículas, mientras que la trayectoria se refiere a la curva descrita por una única partícula.

La figura 1.4 nos muestra a unas líneas de emisión que surgen de los bordes de una pequeña esfera situada en una corriente de aceite. En el caso de flujo estacionario, la línea de emisión coincide con la líneas de corriente y la trayectoria.

Ejemplo 1.3 Considerar el campo de velocidades $v_x = x/(1+t)$, $v_y = y$, $v_z = 0$. Calcular las expresiones

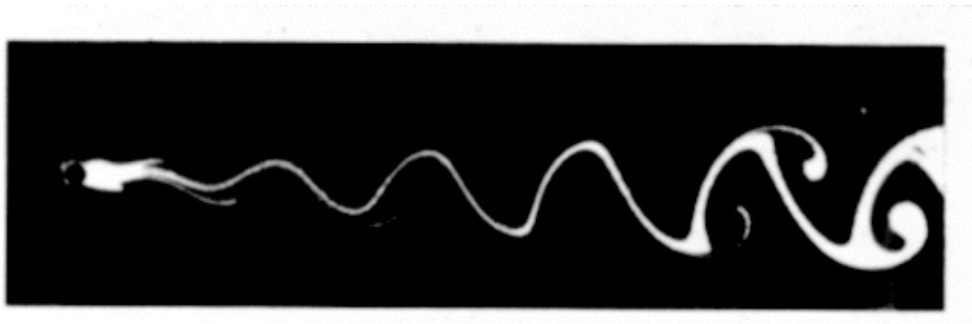


Figura 1.4: Líneas de emisión (streak lines) en torno a una esfera. (Fuente: G.K. Batchelor. *An introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge).

de las líneas de corriente, trayectorias y líneas de emisión.

SOLUCIÓN

Para el cálculo de las líneas de corriente emplearemos la expresión

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

que en nuestro caso particular toma la forma

$$\frac{dx}{x/(1+t)} = \frac{dy}{y} = \frac{0}{dz}$$

Está claro que las líneas de corriente deben de obtenerse a lo largo de los planos $z = \text{constante}$. Integrando la primera igualdad

$$(1+t) \log\left(\frac{x}{x_0}\right) = \log\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

de donde

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{1+t}$$

siendo t un parámetro. Por ejemplo para $t = 0$ serán rectas, mientras que para $t = 1$ serán parábolas.

Para el cálculo de la trayectoria, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{1+t} \\ \frac{dy}{dt} &= y \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

integrando,

$$\begin{aligned}\frac{x}{x_0} &= 1 + t \\ \frac{y}{y_0} &= \exp(t) \\ z &= \text{constante}\end{aligned}$$

eliminando t , obtenemos

$$y = y_0 \exp\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$$

Para el cálculo de las líneas de emisión, transformamos la ecuación de la trayectoria en una ecuación para el flujo, llamando $\xi = x_0$ y $\eta = y_0$, obtenemos

$$\begin{aligned}y &= \eta e^t \\ x &= \xi(1 + t)\end{aligned}$$

>Que partículas han pasado por el punto (a, b) en un cierto instante s ? Basta eliminar de las expresiones del flujo (ξ, η) ,

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a}{1 + s} \\ \eta &= be^{-s}\end{aligned}$$

sustituyendo en la expresión del flujo para evaluar en que posición se encuentran las partículas en el instante t obtenemos

$$\begin{aligned}y &= be^{(t-s)} \\ x &= \frac{a}{1 + s}(1 + t)\end{aligned}$$

1.7. Estudio de la deformabilidad del continuo

Una de las propiedades del continuo es su capacidad de sufrir deformaciones sin romperse, pues según nuestras hipótesis le fluido no se rompe, salvo en un conjunto de medida nula.

1.7.1. Deformación del vector desplazamiento, vector superficie y volumen

Vector desplazamiento

Vamos a considerar que tenemos dos partículas próximas cuya posición relativa en un instante inicial viene dada por el vector $\delta\xi$. En el curso del tiempo las partículas cambian de posición de tal forma que en un cierto instante t la posición relativa viene dada por el vector $\delta\mathbf{x}$. Supuesto que no haya transcurrido un intervalo de tiempo muy grande y dada nuestra hipótesis de que dos partículas muy próximas van a permanecer próximas, podemos suponer que existe una relación lineal entre ambos vectores, esto es supondremos que

$$\delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \xi^j$$

Expresada en forma vectorial la anterior relación, tenemos

$$\delta\mathbf{x} = \text{GRAD}_{\xi}\mathbf{x} \cdot \delta\xi \quad (1.10)$$

Esta ecuación nos dice como se deforman los vectores desplazamiento.

Vector superficie

Vamos a ver como se deforman los elementos de superficie. Como sabemos la ecuación paramétrica de una superficie viene dada por una expresión de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$$

estando los parámetros (u, v) definidos en un cierto dominio de \mathbb{R}^2 . El elemento de superficie se puede expresar como

$$\delta\sigma = \delta\mathbf{x} \times \delta\mathbf{y}$$

siendo $\delta\mathbf{x}$ y $\delta\mathbf{y}$ sendos vectores a lo largo de las líneas coordenadas $v = \text{cte}$ y $u = \text{cte}$ respectivamente. En coordenadas cartesianas eulerianas las componentes las podemos poner como

$$\delta\sigma_i = \epsilon_{ijk} \delta x^j \delta y^k$$

ahora bien, de acuerdo a las expresiones para la deformación de los desplazamientos (1.10), $\delta x^i = \partial x^i / \partial \xi^j \delta \xi^j$, podemos poner

$$\delta \sigma_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^q} \delta \xi^p \delta \eta^q$$

multiplicando por $\partial x^i / \partial \xi^r$, tenemos

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \delta \sigma_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^q} \delta \xi^p \delta \eta^q$$

de la definición de Jacobiano,

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \delta \sigma_i = \epsilon_{pqr} J \delta \xi^p \delta \eta^q.$$

Ahora bien, puesto que

$$\epsilon_{pqr} \delta \xi^p \delta \eta^q = \delta \Sigma_r,$$

siendo $\delta \Sigma_r$ el elemento de superficie en el instante inicial, tenemos

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \delta \sigma_i = J \delta \Sigma_r$$

que en forma vectorial podemos poner

$$\text{GRAD}_\xi \mathbf{x} \cdot \delta \sigma(\mathbf{x}) = J \delta \sigma(\xi) \quad (1.11)$$

que no dice como se deforman los elementos de superficie.

Volumen

Multiplicando la anterior expresión a la izquierda y a la derecha por $\delta \xi^r$, obtenemos

$$\delta \xi^r \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \delta \sigma_i = J \delta \Sigma_r \delta \xi^r$$

ahora bien, la cantidad

$$\delta \Sigma_r \delta \xi^r = \delta \mathcal{V}(\xi)$$

representa el elemento de volumen en el instante inicial, mientras que

$$\delta \xi^r \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \delta \sigma_i = \delta x^i \delta \sigma_i = \delta \mathcal{V}(\mathbf{x})$$

representa el elemento de volumen en el instante t , por lo que podemos escribir,

$$\delta \mathcal{V}(\mathbf{x}) = J \delta \mathcal{V}(\xi)$$

que nos dice como se deforman los elementos de volumen. Podemos invertir las ecuaciones que nos dan las deformaciones y escribir

$$\begin{aligned} \delta \xi &= \text{GRAD}_x \xi \cdot \delta \mathbf{x} \\ \text{GRAD}_x \xi \cdot \delta \sigma(\xi) &= j \delta \sigma(\mathbf{x}) \\ \delta \mathcal{V}(\xi) &= j \delta \mathcal{V}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

siendo j el inverso del jacobiano J .

Nos interesa ahora analizar como se deforman no las componentes de los vectores si no sus valores absolutos, para ello consideremos que

$$ds^2 = dx^i dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \delta \xi^j \delta \xi^k$$

Llamemos \mathbb{C} al tensor

$$\mathbb{C}|_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}$$

tendremos

$$ds = \sqrt{\frac{\delta \xi}{|\delta \xi|} \mathbb{C} \frac{\delta \xi}{|\delta \xi|}} |\delta \xi|$$

puesto que $\delta \xi / |\delta \xi| = \mathbf{M}$ es un vector unitario, la cantidad

$$\lambda = \frac{ds_x}{ds_\xi} = \sqrt{\mathbf{M} \mathbb{C} \mathbf{M}}$$

nos da la tasa de extensión o estiramiento.

1.8. Velocidad de deformación de los elementos de longitud, superficie y volumen

En la sección anterior nos hemos preocupado de estudiar como se deforman los elementos de longitud, superficie y volumen, vamos a analizar en esta sección a que velocidad lo hacen. Para ello vamos a considerar en primer lugar la velocidad de deformación del vector desplazamiento elemen-

tal,

$$\frac{D}{Dt}(\delta x^i) = \frac{\partial}{\partial t_\xi}(\delta x^i) =$$

pasando a coordenadas lagrangianas

$$= \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \xi^j \right) = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) \delta \xi^j = \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \delta \xi^j = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \delta \xi^j$$

volviendo otra vez a las coordenadas eulerianas,

$$\frac{D}{Dt}(\delta x^i) = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \delta \xi^j = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} \delta \xi^j = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \delta x^k = \delta v^i.$$

En forma vectorial podemos escribir la anterior expresión como

$$\frac{D}{Dt}(\delta \mathbf{x}) = \delta \mathbf{v} = \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x}$$

Multiplicando por $\delta \mathbf{x}$,

$$\delta \mathbf{x} \cdot \frac{D}{Dt}(\delta \mathbf{x}) = \delta \mathbf{x} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x}$$

Teniendo en cuenta que $\delta s^2 = \delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x}$ es por lo que

$$\delta s \frac{D \delta s}{Dt} = \delta \mathbf{x} \cdot \frac{D}{Dt}(\delta \mathbf{x})$$

y por tanto

$$\delta s \frac{D \delta s}{Dt} = \delta \mathbf{x} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x}$$

dividiendo por δs^2

$$\frac{1}{\delta s} \frac{D \delta s}{Dt} = \mathbf{M} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{M} \quad (1.12)$$

siendo \mathbf{M} el vector unitario

$$\mathbf{M} = \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta s}.$$

En cuanto a la variación temporal del elemento de superficie tenemos,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma_i \right) = \frac{\partial}{\partial t_\xi} (J \delta \Sigma_j) = \frac{\partial J}{\partial t_\xi} \delta \Sigma_j$$

puesto que el jacobiano J tiene por expresión

$$J = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqr} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^r}$$

derivando parcialmente respecto del tiempo a ξ constante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t_\xi} &= 3 \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqr} \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} \right) \frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^r} = \\ &= 3 \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqr} \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^p} \right) \frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^r} = 3 \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqr} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^p} \right) \frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^r} = \\ &= 3 \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqr} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^p} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^q} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^r} = 3 \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk} J \end{aligned}$$

Ahora bien, puesto que

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk} = 2\delta_i^l$$

tenemos

$$\frac{\partial J}{\partial t_\xi} = 6 \frac{1}{3!} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \delta_i^l J = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} J = \text{DIV} \mathbf{v} J.$$

Así pues hemos obtenido el importante resultado que

$$\frac{DJ}{Dt} = J \text{DIV} \mathbf{v} \quad (1.13)$$

sustituyendo,

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma^i \right) = J \text{DIV} \mathbf{v} \delta \Sigma_j$$

desarrollando el miembro de la izquierda

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma^i \right) = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) \delta \sigma^i + \frac{\partial}{\partial t_\xi} (\delta \sigma^i) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$$

puesto que

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j}$$

tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma^i \right) = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma^i + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial t_\xi} (\delta \sigma^i) = \text{DIV} \mathbf{v} J \delta \Sigma_j$$

despejando,

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial t_\xi} (\delta \sigma_i) = \text{DIV} \mathbf{v} J \delta \Sigma_j - \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma^i = \text{DIV} \mathbf{v} J \delta \Sigma_j - \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} \delta \sigma^i$$

intercambiando los índices i y k en el último término del segundo miembro, se obtiene

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial t_\xi} (\delta \sigma_i) = \text{DIV} \mathbf{v} J \delta \Sigma_j - \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma^k$$

teniendo en cuenta que de la ecuación 1.11,

$$J \delta \Sigma_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma_i$$

obtenemos

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial t_\xi} (\delta \sigma_i) = \text{DIV} \mathbf{v} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma_i - \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \delta \sigma_k$$

sacando factor común a $(\partial x^i / \partial \xi^j)$ y anulando, resulta

$$\frac{D}{Dt} \delta \sigma_i = \text{DIV} \mathbf{v} \delta \sigma_i - \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \delta \sigma_k$$

que en forma vectorial se expresa como

$$\frac{D}{Dt} \delta \sigma = \text{DIV} \mathbf{v} \delta \sigma - \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \delta \sigma \quad (1.14)$$

multiplicando por $\delta \sigma$

$$\delta \sigma \frac{D}{Dt} \delta \sigma = \text{DIV} \mathbf{v} \delta \sigma \cdot \delta \sigma - \delta \sigma \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \delta \sigma$$

teniendo en cuenta que

$$\delta \sigma \frac{D}{Dt} \delta \sigma = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} |\delta \sigma|^2$$

obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{D}{Dt} |\delta \sigma|^2 = \text{DIV} \mathbf{v} |\delta \sigma|^2 - \mathbf{N} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} |\delta \sigma|^2$$

siendo \mathbf{N} el vector unitario

$$\mathbf{N} = \frac{\delta \sigma}{|\delta \sigma|}$$

dividiendo por $|\delta \sigma|^2$ tenemos

$$\frac{1}{|\delta \sigma|} \frac{D}{Dt} |\delta \sigma| = \text{DIV} \mathbf{v} - \mathbf{N} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \quad (1.15)$$

que nos da la tasa de expansión del valor absoluto del elemento de superficie.

En cuanto a la tasa de expansión del elemento de volumen, tenemos

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{V}_x = \frac{\partial}{\partial t_\xi} (J \mathcal{V}_\xi) = \frac{\partial J}{\partial t_\xi} \mathcal{V}_\xi = \text{DIV} \mathbf{v} J \mathcal{V}_\xi = \text{DIV} \mathbf{v} \mathcal{V}_x$$

donde hemos tenido en cuenta que $\mathcal{V}_x = J \mathcal{V}_\xi$ y que $DJ/Dt = \text{DIV} \mathbf{v} J$, así pues

$$\frac{1}{\mathcal{V}_x} \frac{D}{Dt} \mathcal{V}_x = \text{DIV} \mathbf{v} \quad (1.16)$$

que nos da la tasa de expansión relativa del elemento de volumen.

1.9. Teorema de conservación de la masa

Consideremos una porción de materia que no pierde su individualidad en el curso del tiempo, o sea, está compuesto siempre por las mismas partículas. En el curso del tiempo esta porción de materia se deformará cuanto quiera pero siempre tendrá la misma masa pues esta compuesto siempre de las mismas partículas, así pues $\delta M_\xi = \delta M_x$ y por tanto $\rho_\xi \delta \mathcal{V}_\xi = \rho_x \delta \mathcal{V}_x$. Vimos antes que

$$\mathcal{V}_x = J \mathcal{V}_\xi$$

y por tanto

$$\rho_\xi = J \rho_x \quad (1.17)$$

de donde se deduce que la densidad no es una magnitud escalar si no una densidad tensorial de peso uno (el exponente del Jacobiano). Tomando la derivada másica (las partículas que componen la porción del fluido son siempre las mismas)

$$\frac{DJ \rho_x}{Dt} = \frac{D \rho_\xi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \rho_\xi = 0$$

ahora bien

$$\frac{DJ \rho_x}{Dt} = J \frac{D \rho_x}{Dt} + \rho_x \frac{DJ}{Dt}$$

y puesto que

$$\frac{DJ}{Dt} = J \text{DIV} \mathbf{v}$$

tenemos

$$J \frac{D\rho_x}{Dt} + \rho_x J \text{DIV} \mathbf{v} = 0$$

y puesto que el jacobiano es distinto de cero, resulta

$$\frac{D\rho_x}{Dt} + \rho_x \text{DIV} \mathbf{v} = 0 \quad (1.18)$$

que es la ecuación de *continuidad*. Teniendo en cuenta que

$$\frac{D\rho_x}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_x + \text{GRAD} \rho_x$$

la ecuación de continuidad la podemos escribir en coordenadas eulerianas como

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_x + \text{DIV}(\rho_x \mathbf{v}) = 0 \quad (1.19)$$

La cantidad $(\rho_x \mathbf{v})$ expresa el flujo de masa a través de una superficie y la divergencia de esta cantidad expresa cuanta masa se ha ganado o perdido a través de una superficie cerrada fija en el espacio y por tanto expresa la variación de la densidad, pues el volumen encerrado por la superficie es el mismo.

1.10. Tensor velocidad de deformación

Tanto en el estudio de la velocidad de deformación de los elementos de línea y superficie aparece el tensor $\text{GRAD} \mathbf{v}$, vamos a analizar con mayor profundidad este tensor. En coordenadas cartesianas eulerianas este tensor tiene por expresión

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^j}$$

que podemos descomponer en su parte simétrica y antisimétrica de la siguiente manera

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)$$

Designemos por

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)$$

a la parte simétrica y

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)$$

a la parte antisimétrica. Utilizando estos nuevos tensores, la tasa de deformación del elemento de longitud resulta ser

$$\frac{1}{\delta s} \frac{D}{Dt} \delta s = \frac{\delta x^i}{\delta s} (e_{ij} + \Omega_{ij}) \frac{\delta x^j}{\delta s}$$

Se tiene por otra parte que el producto contraído de un tensor simétrico y otro antisimétrico es nulo, por lo que en la anterior expresión resulta que

$$\frac{\delta x^i}{\delta s} \Omega_{ij} \frac{\delta x^j}{\delta s} = \Omega_{ij} \frac{\delta x^i}{\delta s} \frac{\delta x^j}{\delta s} = 0$$

pues Ω_{ij} es antisimétrico por construcción y

$$\frac{\delta x^i}{\delta s} \frac{\delta x^j}{\delta s}$$

es simétrico. Así pues

$$\frac{1}{\delta s} \frac{D}{Dt} \delta s = \mathbf{M} \cdot \mathbb{E} \cdot \mathbf{M}$$

siendo \mathbb{E} la parte simétrica del tensor $\text{GRAD}\mathbf{v}$. Este tensor recibe el nombre de *tensor velocidad de deformación*. Vamos a ver el significado de sus elementos. Para ello consideremos un vector desplazamiento elemental que tiene como componentes $(\delta x^1, 0, 0)$, esto es un vector de longitud $\delta s = \delta x^1$ situado a lo largo del eje 1, la tasa de deformación de este vector vale

$$\frac{1}{\delta s} \frac{D}{Dt} \delta s = \frac{1}{\delta x^1} \frac{D}{Dt} \delta x^1 = M_i e_{ij} M_j = \delta_1^i e_{ij} \delta_1^j = e_{11} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1}$$

Así pues e_{11} representa la tasa de extensión relativa de un vector situado a lo largo del eje 1, lo mismo sucederá con el eje 2 y eje 3. Podemos concluir por tanto que los elementos de la diagonal del tensor velocidad de deformación representan la tasa de extensión de sendos vectores situados a lo largo de cada eje. La traza del tensor viene dada por

$$\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}$$

que es la divergencia del campo de velocidades y como vimos antes representa la velocidad de cambio del elemento de volumen. Para ver que representan los elementos fuera de la diagonal, considerar dos vectores desplazamiento que forman un cierto ángulo entre ellos. El coseno del ángulo formado por ambos segmentos lo podemos calcular como el producto escalar entre los dos vectores

$$\delta \mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{y} = \delta s \delta s' \cos \Theta = \delta x^i \delta y^i$$

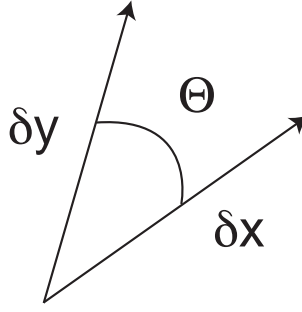


Figura 1.5:

siendo δs y $\delta s'$ la longitud de los vectores. Derivando en ambos miembros tenemos

$$\frac{D}{Dt}(\delta s \delta s' \cos \Theta) = \frac{D}{Dt}(\delta x^i \delta y^i)$$

expandiendo las derivadas,

$$\frac{D}{Dt}(\delta s) \delta s' \cos \Theta + \delta s \frac{D}{Dt}(\delta s') - \delta s \delta s' \sin \Theta \frac{D}{Dt} \Theta = \delta v_x^i \delta y^i + \delta v_y^i \delta x^i$$

tomando $\Theta = \pi/2$,

$$-\delta s \delta s' \frac{D}{Dt} \Theta|_{90^\circ} = \delta v_x^i \delta y^i + \delta v_y^i \delta x^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \delta x^k \delta y^i + \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \delta x^i \delta y^k$$

cambiando los índices repetidos del último término del segundo miembro,

$$-\delta s \delta s' \frac{D}{Dt} \Theta|_{90^\circ} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \delta x^k \delta y^i + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \delta x^k \delta y^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right) \delta x^k \delta y^i = 2e_{ik} \delta x^k \delta y^i$$

dividiendo por $\delta s \delta s'$, tenemos

$$\frac{D}{Dt} \Theta|_{90^\circ} = -2M^i e_{ik} M'^k$$

siendo M^i, M'^i sendos vectores unitarios en la dirección de los vectores $\delta x, \delta y$. Suponer ahora que tomamos los vectores anteriores a lo largo de dos vectores base de una base ortogonal, por ejemplo uno a lo largo del eje x y el otro el eje y , en este caso $M^i = \delta_1^i$ y $M'^i = \delta_2^i$ por tanto

$$\frac{D}{Dt} \Theta|_{90^\circ} = -2\delta_1^i e_{ij} \delta_2^j = -2e_{12}$$

Así pues e_{12} representa la velocidad a la que dos vectores situados a lo largo del los ejes 1,2 se están acercando o alejando. Para ilustrar de forma gráfica lo que acabamos de demostrar, considerar un punto en un fluido cuyas coordenadas son $(0,0)$ respecto de un sistema de referencia ortogonal. Considerar otros dos puntos con coordenadas $(\delta x, 0)$ y $(0, \delta y)$. La velocidad relativa de estos dos pun-

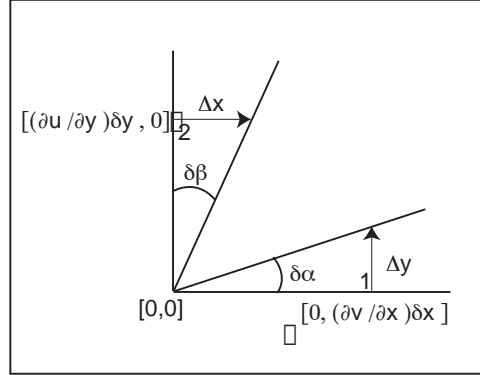


Figura 1.6:

tos respecto del origen será, para el punto 1

$$\begin{aligned}\delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x\end{aligned}$$

y para el punto 2

$$\begin{aligned}\delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y = \frac{\partial u}{\partial y} \delta y \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y = \frac{\partial v}{\partial y} \delta y\end{aligned}$$

Consideremos únicamente el efecto transversal sobre cada punto, pues los efectos longitudinales (δu para el punto 1 y δv para el punto 2) lo que hacen es separar a ambos puntos respecto del origen. Debido a estos efectos transversales, la recta unida al punto 1 barre un ángulo $\delta \alpha$ y la recta unida al punto 2 barre un ángulo $\delta \beta$. Considerando ángulos muy pequeños en los que podamos aproximar el arco por su seno o su tangente, tenemos

$$\delta \alpha = \frac{\Delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta t \right) = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t$$

y

$$\delta\beta = \frac{\Delta x}{\delta y} = \frac{1}{\delta y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta y \delta t \right) = \frac{\partial u}{\partial y} \delta t$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

La velocidad con la que el ángulo de 90 grados va disminuyendo será

$$\frac{D}{Dt}(\Theta) = - \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) = - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -2e_{xy}$$

que es el resultado que obtuvimos antes de forma más rigurosa.

Según hemos visto en las secciones anteriores, e_{11} , e_{22} y e_{33} representan la tasa de extensión de sendos vectores situados a lo largo de los ejes (1,2,3). Obviamente estas tasas de extensión dependerán de como hayamos elegido el sistema de referencia. La pregunta que nos hacemos es >Cual es el sistema de referencia, si existe, para el cual e_{11} , e_{22} y e_{33} representen las máximas tasas de extensión ?. Para contestar a esta pregunta recordemos que la tasa de extensión relativa viene dada por

$$\frac{1}{\delta s} \frac{D}{Dt} \delta s = m_i e_{ij} m_j$$

siendo m_i las componentes del vector unitario que nos marcan la dirección del vector cuya tasa de extensión estamos analizando. Para calcular el máximo debemos derivar respecto de m_i , teniendo en cuenta que los vectores son unitarios y por tanto $m_i m_i - 1 = 0$. Utilizando un multiplicador de Lagrange μ , la ecuación que nos da el máximo toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial m_k} (m_i e_{ij} m_j + \mu(1 - m_i m_i)) = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

Derivando

$$\delta_{ik} e_{ij} m_j + m_i e_{ik} - 2\mu \delta_{ik} m_i = 0$$

de donde

$$e_{kj} m_j + m_i e_{ik} - 2\mu m_k = 0$$

llamando i al índice mudo j en el primer término y dada la simetría de e_{ij} tenemos

$$m_i e_{ik} - \mu m_k = 0$$

que en forma de matriz

$$[E][M] = \mu[M]$$

que es una ecuación en valores propios, cuyos autovalores son los multiplicadores de lagrange y los vectores propios son la direcciones que estamos buscando. Como el tensor \mathbb{E} es simétrico esta ecuación siempre tiene soluciones, así pues la base donde el tensor \mathbb{E} es diagonal nos marca las direcciones en las que las tasas de expansión son máximas y sus autovalores nos marcan cuales son las tasas de expansión, pues en esta nueva base

$$[E] = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Como en esta nueva base los elementos fuera de la diagonal son ceros, sólo se están produciendo estiramientos o contracciones a lo largo de los vectores base.

Volvamos a nuestro tensor gradiente de velocidades y analicemos su parte antisimétrica

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right)$$

Este tensor tiene únicamente tres elementos distintos y le podemos asociar un vector de tres componentes² de la siguiente manera. De la definición de Ω_{ij}

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right)$$

teniendo en cuenta que

$$\delta_{pq}^{ij} A^{pq} = A^{ij} - A^{ji}$$

tenemos que

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}^{pq} \frac{\partial v^p}{\partial x^q} = \frac{1}{2} \epsilon^{kpq} \epsilon_{kij} \frac{\partial v^p}{\partial x^q} = -\frac{1}{2} \epsilon^{kqp} \epsilon_{kij} \frac{\partial v^p}{\partial x^q}$$

²Este proceso de asociar un vector a un tensor antisimétrico de segundo orden solo es posible en \mathbb{R}^3

expresión en la que hemos intercambiado los índices p y q . Ahora bien

$$\epsilon^{kqp} \frac{\partial v^p}{\partial x^q} = (\nabla \times \mathbf{v})_k = \xi_k$$

y por tanto

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{kij} \xi_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{kij} (\nabla \times \mathbf{v})_k$$

Multiplicando en ambos miembros por ϵ_{lij} tenemos

$$\epsilon_{lij} \Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \epsilon_{lij} \epsilon_{kij} \xi_k = -\delta_l^k \xi_k = -\xi_l = -(\nabla \times \mathbf{v})_l$$

Así pues vemos que la parte antisimétrica del tensor gradiente de velocidades coincide con el rotacional de dicho campo. >Que significado físico podemos asociar al tensor Ω_{ij} ?. Para ello fijémonos en la figura 1.6. La velocidad rotacional media vendrá dada por

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right)$$

pues las variaciones de los ángulos α y β son de signo contrario, pero según vimos antes

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

de donde

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_z$$

así pues, un medio del rotor nos da la velocidad angular de rotación media. Hay que tener en cuenta que el fluido no es un sólido rígido y por tanto sólo podemos hablar de una velocidad angular media. Resumiendo, hemos visto que la deformación relativa en el entorno de un punto viene dada por la diferencia de velocidades entre dicho punto, que tomamos como origen, y un punto cualquiera de su entorno, esto es por

$$\delta v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \delta x^j$$

separando en las partes simétrica y antisimétrica tenemos

$$\delta v^i = e_{ij} \delta x^j + \Omega_{ij} \delta x^j = e_{ij} \delta x^j - \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \xi_k \delta x^j = e_{ij} \delta x^j + \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \xi_k \delta x^j = e_{ij} \delta x^j + (\bar{\omega} \times \delta \mathbf{x})_i$$

la primera parte mide la deformación mientras que la segunda parte mide la rotación.

Ejemplo 1.4 Analizar el flujo bidimensional cuyo campo de velocidades viene dado por la expresión

$$\mathbf{v} = u(y)\mathbf{i}$$

Este tipo de flujo recibe el nombre de cizalla.

SOLUCIÓN

El tensor gradiente de velocidades viene dada por la expresión

$$\text{GRAD}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $2\beta = \partial u / \partial y$. Puesto que la traza del tensor es cero, la divergencia es cero y por tanto el flujo es isócoro. La partes simétrica y antisimétrica valen

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que los elementos de la diagonal del tensor \mathbb{E} valen cero, no existen estiramientos ni contracciones en las direcciones $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Así mismo los ejes (x, y) se están acercando con una velocidad dada por β . Para ver en que dirección se producen los máximos estiramientos diagonalizamos la matriz anterior. Como en el eje z no existe flujo, vamos a preocuparnos únicamente de lo que pasa en el plano (x, y) . La diagonalización de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

conduce a un par de autovalores, $\mu = \pm\beta$ y dos autovectores

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \end{aligned}$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente el flujo produce un estiramiento en las direcciones dadas por los dos vectores anteriores. Supongamos que $\beta > 0$, como $\mu = \pm\beta$ una de las direcciones marcará un estiramiento y la otra una contracción. Supongamos que el estiramiento se produce en la dirección \mathbf{v}_1 y la contracción en la dirección \mathbf{v}_2 . >Cómo son las líneas de corriente en torno a un punto dado que tomamos como origen y con velocidad cero, supuesto que el flujo únicamente tenga en cuenta al tensor \mathbb{E} ?. El campo de velocidades en torno a dicho punto será

$$\delta \mathbf{v} = \mathbb{E} \delta \mathbf{x}$$

En la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \delta \mathbf{x}$$

Un punto situado en el eje 1 tendrá como velocidad relativa

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto se estará alejando del origen tanto para puntos tomados en el semieje positivo $\delta x_1 > 0$ como el semieje negativo. Lo contrario sucede para un punto situado a lo largo del eje 2

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \delta x_2 \end{pmatrix}$$

Ahora los puntos situados en la parte positiva del eje se están acercando al origen y los de la parte negativa también. >Que pasa para puntos situados en los antiguos ejes coordenados (x, y)

El punto de coordenadas $\delta x(\sqrt{2}, 0)$ en la base antigua, tiene como coordenadas $\delta x(1, -1)$ en la base nueva y por tanto su velocidad será

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ -\delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \delta x \\ \beta \delta x \end{pmatrix}$$

que es un vector dirigido en la dirección del eje $+y$ original. Si consideramos que el punto esta en $\delta x(-1, 1)$, esto es en la parte negativa del eje x de la base antigua, ahora

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta x \\ \delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \delta x \\ -\beta \delta x \end{pmatrix}$$

que es un vector dirigido hacia el eje $-y$ de la base original. Si tomamos nuestro punto en el eje $+y$ de la base original, en la base nueva tiene por coordenadas $\delta y(1, 1)$ y por tanto

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \delta y \\ -\beta \delta y \end{pmatrix}$$

que es un vector dirigido a lo largo del eje $+x$ de la base original. Por el contrario si el punto esta en el eje $-y$, en la base nueva tiene por coordenadas $-\delta y(1, 1)$ y su velocidad relativa será

$$\delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta y \\ -\delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \delta y \\ +\beta \delta y \end{pmatrix}$$

que es un vector dirigido a lo largo del eje $-x$ de la base original. Podemos expresar mediante la figura 1.7 todo lo dicho anteriormente. que constituye un movimiento de deformación pura sin cambio de

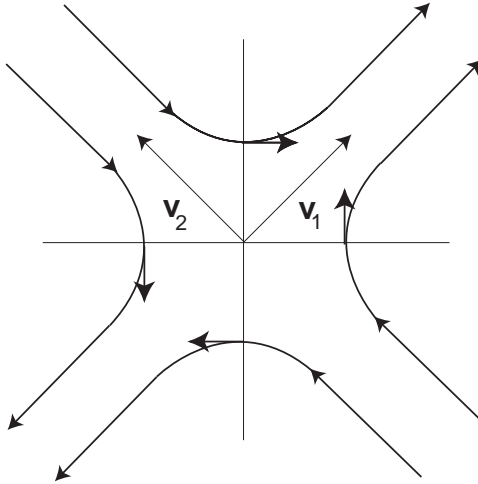


Figura 1.7:

volumen, pues su divergencia es cero.

>Que pasa con la parte antisimétrica ?. En este caso según vimos antes

$$\delta \mathbf{v} = \bar{\omega} \times \delta \mathbf{x}$$

siendo $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$. Teniendo en cuenta que en el caso que nos ocupa $\nabla \times \mathbf{v} = -\partial u / \partial y \mathbf{k} = -2\beta \mathbf{k}$, tene-

mos, $\bar{\omega} = -\beta \mathbf{k}$, por lo que

$$\delta \mathbf{v} = -\beta \mathbf{k} \times \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta \delta y \\ -\beta \delta x \end{pmatrix}$$

Si representamos este movimiento obtendremos una rotación en torno al origen, ver figura 1.8. Si

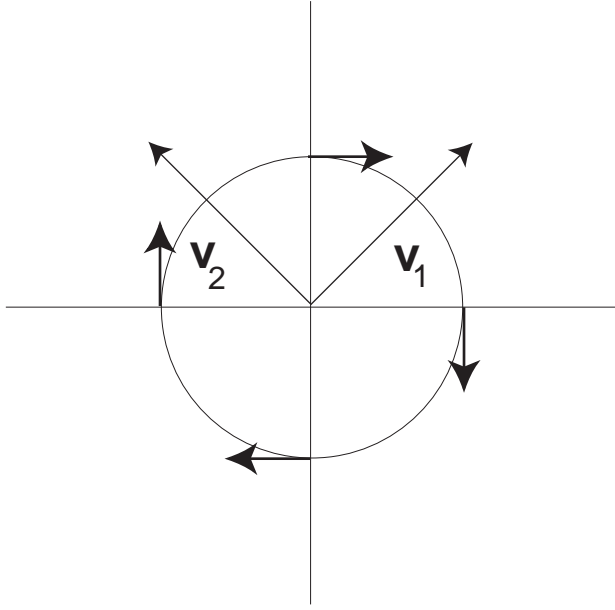


Figura 1.8:

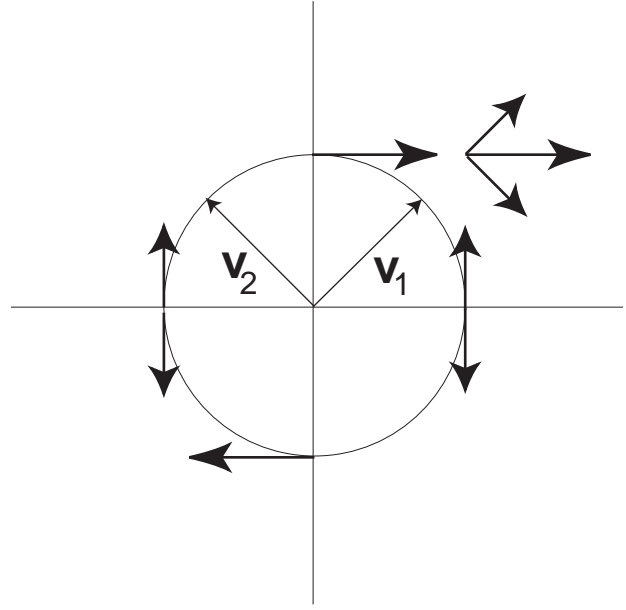


Figura 1.9:

superponemos los dos movimientos, vemos que en los puntos a lo largo del eje x se anulan ambos flujos resultando una cizalla a lo largo del eje y , ver la figura 1.9. Vemos pues que una cizalla es en realidad suma de una rotación y una deformación pura sin cambio de volumen. Este resultado es importante pues cerca de superficies sólidas donde se producen las cizallas más importantes el flujo va a ser rotacional. Que una cizalla da lugar a un flujo rotacional lo podemos visualizar poniendo en el seno de la cizalla un molinete y ver que efectivamente este molinete gira. Otro punto a destacar es el hecho que no tenemos que tener un giro para que el rotor del campo sea distinto de cero.

1.10.1. Tensor de Cauchy y Green-Venant

En la teoría de la elasticidad no importa tanto la velocidad con la que se deforma el continuo si no cuanto lo hace. Suponer que tenemos un par de puntos (A, B) separados por un vector $\delta \xi$. Suponer que a cuenta de la deformación el punto A ha pasado a ocupar la posición A' y el B la posición B'

formando con los puntos originales dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{u}' . El segmento original AB tiene una longitud al cuadrado dada por la cantidad

$$\delta s_0^2 = \delta_{jk} \delta \xi^j \delta \xi^k$$

y el segmento $A'B'$ resultante de la deformación tiene como cuadrado de la longitud la cantidad

$$\delta s^2 = \delta x^i \delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \delta \xi^j \delta \xi^k$$

la variación sufrida vendrá dada por

$$\delta s^2 - \delta s_0^2 = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} - \delta_{jk} \right) \delta \xi^j \delta \xi^k$$

La cantidad entre corchetes recibe el nombre de *tensor de Green–Venant*. En imagen euleriana la anterior expresión toma la forma

$$\delta s^2 - \delta s_0^2 = \left(\delta_{jk} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \right) \delta x^j \delta x^k$$

La cantidad entre corchetes recibe el nombre de *tensor de Cauchy*

Nos interesa poner los anteriores tensores en términos del desplazamiento \mathbf{u} sufrido por cada partícula. Llamando $u^i = x^i - \xi^i$, tenemos

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$$

Calculando a partir de esta expresión el tensor de Cauchy, tenemos

$$\delta s^2 - \delta s_0^2 = \left[\delta_{jk} - \left(\delta_j^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \left(\delta_k^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) \right] \delta x^j \delta x^k = \left[\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right] \delta x^j \delta x^k.$$

Despreciando términos de segundo orden,

$$\delta s^2 - \delta s_0^2 = (\delta s - \delta s_0)(\delta s + \delta s_0) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) \delta x^j \delta x^k$$

supuesto que $\delta s \approx \delta s_0$, tenemos $\delta s + \delta s_0 \approx 2\delta s$, por lo que

$$\frac{1}{\delta s} (\delta s - \delta s_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) \frac{\delta x^j}{\delta s} \frac{\delta x^k}{\delta s}$$

expresión análoga a la encontrada para fluidos en las que se ha sustituido el vector velocidad por el vector desplazamiento en la definición del tensor de deformación.

1.11. Teorema de Reynolds

Diremos que un volumen del fluido es un volumen del sistema, si este volumen esta siempre compuesto por las mismas partículas. Considerar un volumen del sistema $\mathcal{V}(t)$, se verifica que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{D\phi}{Dt} + \phi(\text{DIV}\mathbf{v}) \right] \delta \mathcal{V} \quad (1.20)$$

Para su demostración, pasemos a hacer la integral en términos de la imagen lagrangiana ξ ,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \int_{\mathcal{V}_\xi} \phi J \delta \mathcal{V}_\xi$$

puesto que las partículas son siempre las mismas, podemos introducir el tiempo dentro de la integral por lo que

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \int_{\mathcal{V}_\xi} \phi J \delta \mathcal{V}_\xi = \int_{\mathcal{V}_\xi} \frac{\partial}{\partial t_\xi} (\phi J) \delta \mathcal{V}_\xi = \int_{\mathcal{V}_\xi} \left(J \frac{\partial}{\partial t_\xi} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial t_\xi} J \right) \delta \mathcal{V}_\xi$$

teniendo en cuenta la expresión obtenida previamente para la variación del jacobiano con el tiempo tenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \int_{\mathcal{V}_\xi} \phi J \delta \mathcal{V}_\xi = \int_{\mathcal{V}_\xi} \left(\frac{\partial}{\partial t_\xi} \phi + \phi \text{DIV}\mathbf{v} \right) J \delta \mathcal{V}_\xi$$

volviendo otra vez a la imagen euleriana

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{D}{Dt} \phi + \phi \text{DIV}\mathbf{v} \right) \delta \mathcal{V}$$

como queríamos demostrar.

Resulta especialmente interesante el caso en el que ϕ se puede poner como ρf siendo ρ la densidad y f una propiedad cualquiera del fluido. En este caso

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho f \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{D(\rho f)}{Dt} + \rho f \text{DIV}\mathbf{v} \right] \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left\{ \rho \frac{Df}{Dt} + f \left[\rho \text{DIV}\mathbf{v} + \frac{D\rho}{Dt} \right] \right\} \delta \mathcal{V}$$

Ahora bien habida cuenta de la ecuación de continuidad el término entre corchetes se anula, por lo que resulta

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho f \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \frac{Df}{Dt} \delta \mathcal{V}$$

Se puede reformular la forma del teorema de Reynolds en términos del llamado volumen de control. Contrariamente al volumen del sistema que se mueve con el fluido de tal forma que siempre está compuesto de las mismas partículas, el volumen de control está fijo en el espacio y las partículas de fluido entran y salen de él. Para deducir esta nueva forma del teorema de Reynolds volvamos a la expresión general

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{D\phi}{dt} + \phi(\text{DIV} \mathbf{v}) \right] \delta \mathcal{V}$$

desarrollando la derivada másica del interior de la integral, tenemos

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t_x} + \mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \phi + \phi(\text{DIV} \mathbf{v}) \right] \delta \mathcal{V}$$

ahora bien

$$\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \phi + \phi(\text{DIV} \mathbf{v}) = \text{DIV}(\phi \mathbf{v})$$

por lo que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t_x} \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}(t)} \text{DIV}(\phi \mathbf{v}) \delta \mathcal{V}$$

y empleando el teorema de Ostrogradsky–Gauss

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t_x} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \phi \mathbf{v} \cdot \delta \Sigma$$

siendo $\partial \mathcal{V}$ la superficie cerrada que rodea al volumen. Como en la integral de volumen del término de la derecha aparece la derivada local, podemos considerar a dicho volumen como un volumen fijo que en un instante dado coincide con el volumen del sistema que en ese instante ocupa dicha posición, así pues

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \phi(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(x)} \frac{\partial \phi}{\partial t_x} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}(x)} \phi \mathbf{v} \cdot \delta \Sigma \quad (1.21)$$

Podemos analizar varios ejemplos. Suponiendo que ϕ sea la densidad ρ ,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x, y, z, t) \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(x)} \frac{\partial \rho}{\partial t_x} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}(x)} \rho \mathbf{v} \cdot \delta \Sigma$$

ahora bien el término de la izquierda es cero, pues representa la derivada másica de la masa del volumen del sistema, por lo que

$$\int_{\mathcal{V}(x)} \frac{\partial \rho}{\partial t_x} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}(x)} \rho \mathbf{v} \cdot \delta \Sigma = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial}{\partial t_x} \int_{\mathcal{V}(x)} \rho \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}(x)} \rho \mathbf{v} \cdot \delta \Sigma = 0$$

que es otra expresión de la ecuación de continuidad. La cantidad

$$\int_{\partial \mathcal{V}(x)} \rho \mathbf{v} \cdot \delta \Sigma = \int_{\partial \mathcal{V}(x)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \delta \Sigma$$

donde hemos puesto que el elemento de superficie $\delta \Sigma = \mathbf{n} \delta \Sigma$, representa el flujo de masa a través de la superficie, mientras que

$$\frac{\partial}{\partial t_x} \int_{\mathcal{V}(x)} \rho \delta \mathcal{V}$$

representa la variación local de la masa. Podemos por tanto decir, a la luz de las anteriores expresiones, que la variación de masa en un volumen de control es igual al flujo de masa a través de su superficie.

Otro caso interesante es aquel en el que $\phi = \rho \mathbf{v}$, por lo que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(x)} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t_x} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \delta \Sigma = \int_{\mathcal{V}(x)} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t_x} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho (\mathbf{v} \mathbf{v}) \mathbf{n} \delta \Sigma$$

Como antes, la integral de superficie representa el flujo de momento mientras que la variación temporal de la integral extendida al volumen de control representa la variación local del momento. Al igual que el flujo local de masa lo podemos poner como el vector $\rho \mathbf{v}$, el flujo local de momento lo podemos expresar como el tensor $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$.

Ejercicio 1.1 Calcular cuanto vale la variación temporal de la integral de línea

$$\int_{C(t)} \phi \delta \mathbf{r}$$

siendo $C(t)$ un circuito compuesto siempre por las mismas partículas.

SOLUCIÓN

Debemos de evaluarla expresión

$$\frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \phi \delta \mathbf{r}$$

Para poder introducir dentro del signo integral la derivada temporal, al igual que en el caso del teorema de Reynolds, vamos a pasar a la imagen lagrangiana

$$\frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \phi \delta \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \int_{C(\xi)} \phi(\xi, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \delta \xi$$

donde con

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}$$

queremos denotar al tensor $\partial x^i / \partial \xi^j$. Introduciendo ahora la derivada temporal dentro de la integral tenemos

$$\frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \phi \delta \mathbf{r} = \int_{C(\xi)} \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t_\xi} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \delta \xi + \int_{C(\xi)} \phi(\xi, t) \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) \delta \xi$$

puesto que la derivada respecto de t y ξ conmutan

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi}$$

sustituyendo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \phi \delta \mathbf{r} &= \int_{C(\xi)} \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t_\xi} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \delta \xi + \int_{C(\xi)} \phi(\xi, t) \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \right) \delta \xi = \\ &= \int_{C(\xi)} \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t_\xi} \delta \mathbf{r} + \int_{C(\xi)} \phi(\xi, t) \delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

pasando de nuevo a la imagen euleriana

$$\frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \phi \delta \mathbf{r} = \int_{C(t)} \frac{D\phi(x, t)}{Dt} \delta \mathbf{r} + \int_{C(t)} \phi(x, t) \text{GRAD} \mathbf{v} \delta \mathbf{r}$$

que es la expresión que andábamos buscando. Se propone al lector que calcule cual es la variación temporal de la integral de superficie cuando ésta está compuesta siempre por las mismas partículas.

1.12. Teorema de Helmholtz

Teorema 1.12.1 (Helmholtz) Dado un campo vectorial \mathbf{v} suficientemente liso (derivable y con derivada continua hasta el grado que sea necesario), es posible expresarlo como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_R$$

siendo \mathbf{v}_D un campo vectorial irrotacional y \mathbf{v}_R un campo vectorial solenoidal puro. Estos campos se pueden expresar como, $\mathbf{v}_D = \nabla \phi$ y $\mathbf{v}_R = \nabla \times \psi$ siendo ϕ el potencial escalar y ψ el potencial vector

definidos por la expresiones

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}}{r} d\mathcal{V}(x') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{r} d\sigma(x') \quad (1.22)$$

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\xi(x')}{r} d\mathcal{V}(x') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{r} d\sigma(x') \quad (1.23)$$

siendo ξ la vorticidad del campo \mathbf{v} .

Sea $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ el vector

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}}{r} d\mathcal{V}(x')$$

siendo $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ la distancia entre el punto donde está definido el campo \mathbf{P} y un punto cualquiera del volumen al cual se extiende la integral. Supongamos que \mathbf{v} tiende a cero con la suficiente velocidad de tal forma que exista la anterior integral. Es posible demostrar que el campo \mathbf{P} es diferenciable y que verifica la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \mathbf{P} = -\mathbf{v}$$

Dada la expresión vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{P} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{P})$$

definiendo $-\nabla \cdot \mathbf{P} = \phi$ y $\nabla \times \mathbf{P} = \psi$, tenemos

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \nabla \times \psi = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_R$$

De la definición de ϕ ,

$$\phi = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla_x \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}}{r} d\mathcal{V}(x') \right) = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{v}(x') \cdot \nabla_x \frac{1}{r} d\mathcal{V}(x')$$

Ahora bien, $\nabla_x = -\nabla_{x'}$ por lo que

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{v}(x') \cdot \nabla_x \frac{1}{r} d\mathcal{V}(x') = +\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{v}(x') \cdot \nabla_{x'} \frac{1}{r} d\mathcal{V}(x') = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \nabla_{x'} \left(\mathbf{v}(x') \frac{1}{r} \right) d\mathcal{V}(x') - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla_{x'} \cdot \mathbf{v}(x') d\mathcal{V}(x') \end{aligned}$$

aplicando el teorema de la divergencia,

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \nabla_{x'} \cdot \mathbf{v}(x') d\mathcal{V}(x') + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{r} d\sigma(x')$$

De la misma manera es posible demostrar que

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\xi(x')}{r} dV(x') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}}{r} d\sigma(x')$$

Este teorema tiene bastante importancia en la atmosfera pues veremos que el campo de velocidades se puede separar en un campo irrotacional (muy pequeño a gran escala) y un campo solenoidal.

1.13. Dinámica de fluidos

En las anteriores secciones hemos hablado del movimiento del fluido sin tener en cuenta las causas que lo producen, vamos a introducir en esta sección el tipo de fuerzas a las que esta sometido el fluido para acabar con las ecuaciones del movimiento que nos permite estudiar de forma completa el movimiento del fluido.

Consideremos una porción del fluido que tomaremos como nuestro sistema mecánico, las fuerzas que afectan a esta porción del fluido las podemos dividir en dos clases

Fuerzas de Volumen Son aquellas que afectan a todas las partículas que forman el sistema por igual.

Ejemplo de este tipo de fuerzas son el campo gravitatorio, el campo electromagnético, fuerzas inerciales, etc.

Fuerzas de Superficie Son fuerzas de corto alcance afectando únicamente a la superficie que separa a nuestro sistema del resto del fluido. Obviamente las fuerzas no afectan a superficies si no a volúmenes, ahora bien el espesor de la capa afectada por las fuerzas superficiales es mucho menor que la extensión de la superficie y desde luego mucho menor que el tamaño típico del sistema mecánico que estamos considerando. El origen de estas fuerzas es molecular. Un ejemplo clásico para comprender este tipo de fuerzas es el siguiente. Considerad una superficie imaginaria que separa nuestro sistema mecánico del resto del fluido. Suponed que las velocidades de las moléculas son diferentes a un lado y otro de la superficie. Al atravesar la superficie las moléculas llevan consigo el momento de la región origen, este momento es entregado a la región destino haciendo que las regiones se aceleren o se frenen apareciendo por tanto una fuerza. Podemos imaginar este proceso como un par de trenes que viajan por dos vía paralelas con velocidades diferentes que representan el estado del fluido a un lado y otro de la superficie que los separa. Imaginar que unos obreros lanzan sacos terreros de un tren a otro (las moléculas que atraviesan la superficie). Los sacos terreros que salen del tren rápido cuando lleguen al tren lento le comunicaran su momento y este tenderá a acelerarse, por el contrario, los sacos que salgan del tren lento cuando lleguen al tren rápido adquirirán momento en la dirección de

marcha del tren tendiendo este a frenarse. Como resultado de este intercambio un tren se acelera y otro se frena, se produce por tanto una fuerza. Este fuerza tiene un alcance muy limitado, el del recorrido libre medio. Como en mecánica del continuo no sabemos nada de moléculas ni de sacos terreros, vamos a parametrizar estas fuerzas superficiales mediante un vector $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ que depende de la posición \mathbf{x} y de la orientación de la superficie \mathbf{n} de tal forma que $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\delta\Sigma$ representa la fuerza que ejerce la región hacia donde apunta \mathbf{n} sobre la región desde donde emerge \mathbf{n}

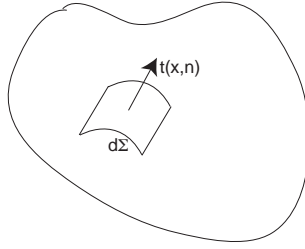


Figura 1.10:

Considerando por tanto ambos tipos de fuerzas la fuerza total ejercida sobre nuestro sistema mecánico vale,

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \delta \Sigma \quad (1.24)$$

siendo \mathbf{f} la fuerza volúmica por unidad de masa.

Teorema 1.13.1 Las fuerzas de superficie están localmente en equilibrio.

Consideremos un sistema mecánico que consiste en una porción del fluido, de acuerdo con las leyes de Newton se debe de verificar que la variación temporal de la cantidad de momento ha de ser igual a la suma de las fuerzas exteriores ejercidas sobre el sistema,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \delta \Sigma$$

siendo \mathcal{V} un volumen del sistema. De acuerdo con el teorema de Reynolds resulta que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{a} \delta \mathcal{V}$$

por lo que

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{a} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \delta \Sigma$$

Si hacemos tender el volumen a cero, la anterior expresión toma la forma

$$\rho \mathbf{a} \delta \mathcal{V} = \rho \mathbf{f} \delta \mathcal{V} + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \delta \Sigma$$

Si nos fijamos en esta expresión vemos que el término de la izquierda tiende a cero como r^3 , siendo r el radio del pequeño elemento de volumen. De los dos términos que aparecen a la derecha de la igualdad, el primero tiende a cero también como r^3 , mientras que el segundo tiende a cero como r^2 , por lo que, para que se mantenga la igualdad hemos de anular idénticamente este término, esto es cuando $\delta \mathcal{V}$ tiende a cero necesariamente

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \delta \Sigma$$

ha de hacerse cero. Esto significa que las fuerzas superficiales han de estar localmente en equilibrio mecánico.

1.14. Tensor de esfuerzos

Vamos a aprovechar el teorema anterior para poner de forma explícita la dependencia del vector de fuerzas superficiales $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ respecto de la normal \mathbf{n} . Para ello considerad el tetraedro que se muestra en la figura 1.11. De acuerdo con el teorema anterior se debe de verificar que

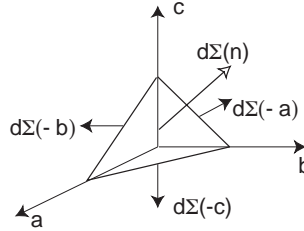


Figura 1.11:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \delta \Sigma(\mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{a}) \delta \Sigma(-\mathbf{a}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{b}) \delta \Sigma(-\mathbf{b}) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{c}) \delta \Sigma(-\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

cuando el volumen del sistema tiende a cero. Según el principio de acción y reacción

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{c}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$$

por lo que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\delta\Sigma(\mathbf{n}) - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{a})\delta\Sigma(-\mathbf{a}) - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{b})\delta\Sigma(-\mathbf{b}) - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{c})\delta\Sigma(-\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

Ahora bien resulta que las áreas laterales son la proyección del area transversal esto es

$$\delta\Sigma(-\mathbf{a}) = \delta\Sigma(\mathbf{n})\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$$

sustituyendo, tenemos

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\delta\Sigma(\mathbf{n}) - (\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a} - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{b})\mathbf{b} - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{c})\mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}\delta\Sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$$

por lo que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = (\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a} - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{b})\mathbf{b} - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{c})\mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}$$

La cantidad entre paréntesis no depende de \mathbf{n} , lo llamaremos *tensor de esfuerzos* y lo representaremos por \mathbb{T} por lo que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbb{T}\mathbf{n} \quad (1.25)$$

donde vemos que hemos separado la dependencia de \mathbf{n} . Dado que hemos empleado una base genérica la anterior ecuación es una ecuación tensorial, esto es, es válida cualquiera que sea la base elegida. En términos de componentes, la ecuación anterior se escribe

$$t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = T_{ij}(\mathbf{x})n_j$$

Para ver el significado de cada elemento del tensor T_{ij} , consideremos un paralelepípedo. Sea $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ un vector unitario en la dirección del eje 1 (eje x), o sea es un vector unitario normal a la superficie (zy). La fuerza superficial aplicada a esta cara tendrá como componentes (T_{11}, T_{21}, T_{31}) . Por tanto vemos que T_{11} es la componente normal a la cara 1, T_{21} representa la componente a lo largo del eje 2 (y) de la fuerza ejercida sobre la cara 1 y T_{31} representa la componente 3(z) de la fuerza ejercida sobre la cara 1. Idéntico significado tendrán para el resto de las caras. Así pues el primer índice representa la componente y el segundo la cara sobre la que se ejerce la fuerza.

Ejercicio 1.2 Demostrar basándose en el hecho que las fuerzas superficiales están localmente en equilibrio el principio de acción y reacción

SOLUCIÓN

Considerar una esfera de volumen tan pequeño como queramos, de acuerdo con el teorema anterior, los esfuerzos superficiales aplicados a la esfera se anulan idénticamente cuando hacemos tender el volumen a cero. Suponer ahora que dividimos mentalmente a la esfera en dos semiesferas, de acuerdo con el anterior teorema la distribución de esfuerzos sobre cada semiesfera es nula,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c11) + \mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c12) = 0$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c21) + \mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c22) = 0$$

siendo $c11, c12$ la cara externa e interna de la semiesfera uno y $c21, c22$ la cara externa e interna de la semiesfera dos. Sumando ambas ecuaciones

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c11) + \mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c21) + \mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c12) + \mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c22) = 0$$

Ahora bien las caras $c11, c21$ reproducen la superficie exterior de la esfera y por tanto según dijimos al principio están en equilibrio por lo que

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c12) + \mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c22) = 0$$

ahora bien las normales a las dos caras son iguales salvo el signo, de donde resulta que,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})d\Sigma(c12) - \mathbf{t}(-\mathbf{n})d\Sigma(c12) = 0$$

y por tanto

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n})$$

como queríamos demostrar. Podíamos haber pensado el teorema de forma inversa, esto es para que se siga verificando el principio de acción y reacción es necesario que se verifique que las fuerzas superficiales estén localmente en equilibrio.

Teorema 1.14.1 El tensor de esfuerzos es simétrico

DEMOSTRACIÓN

Para la demostración del anterior teorema vamos a partir del teorema de conservación del momento angular

$$\frac{D\mathbf{L}}{Dt} = \mathbf{N}$$

siendo \mathbf{L} el momento angular y \mathbf{N} el momento de las fuerza exteriores. Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta \mathcal{V}$$

tenemos

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta \mathcal{V} = \mathbf{N}$$

aplicando el teorema del transporte de Reynolds

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta \mathcal{V} = \mathbf{N}$$

ahora bien

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$$

por lo que

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{N}$$

El momento de las fuerzas exteriores procede tanto de las fuerzas de volumen como de superficie, tendremos

$$\mathbf{N} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} [\mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})] \delta \Sigma$$

sustituyendo tenemos

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} [\mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})] \delta \Sigma$$

utilizando el teorema de la divergencia podemos pasar de la integral de superficie a una de volumen resultando que la anterior expresión la podemos poner como

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}(t)} \text{DIV}[\mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})] \delta \mathcal{V}.$$

En forma de componentes, teniendo en cuenta que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbb{T} \mathbf{n},$$

obtenemos

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \epsilon_{ijk} r_j a_k \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \epsilon_{ijk} r_j f_k \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial x^l} (\epsilon_{ijk} r_j T_{kl}) \delta \mathcal{V}$$

Derivando en el segundo término del miembro de la derecha,

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(\epsilon_{ijk} r_j T_{kl}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial r_j}{\partial x^l} T_{kl} + \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} = \epsilon_{ijk} \delta_{jl} T_{kl} + \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} = \epsilon_{ijk} T_{kj} + \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l}$$

sustituyendo

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \epsilon_{ijk} r_j a_k \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \epsilon_{ijk} r_j f_k \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}(t)} \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}(t)} \epsilon_{ijk} T_{kj} \delta \mathcal{V}$$

Haciendo ahora que el volumen del sistema tienda a cero, vemos que los tres primeros términos tienden a cero como r^4 mientras que el último término tiende a cero como r^3 por lo tanto para que la igualdad se mantenga es necesario que

$$\epsilon_{ijk} T_{kj} = 0$$

y por tanto, dado que

$$\epsilon_{123} T_{32} + \epsilon_{132} T_{23} = 0$$

$$\epsilon_{312} T_{21} + \epsilon_{321} T_{12} = 0$$

$$\epsilon_{231} T_{13} + \epsilon_{213} T_{31} = 0$$

teniendo en cuenta que ϵ_{ijk} vale uno si (ijk) es una permutación par de (123) y menos uno si es impar tendremos

$$T_{32} - T_{23} = 0$$

$$T_{21} - T_{12} = 0$$

$$T_{13} - T_{31} = 0$$

y por tanto el tensor \mathbb{T} es simétrico³. Debido a esta simetría siempre es posible encontrar una base en la que el tensor es diagonal. En esta base dado un paralelepípedo con aristas paralelas a los ejes coordenados, los esfuerzos ejercidos sobre sus caras son ortogonales a ellas, esto es solo tenemos esfuerzos normales no tangenciales. Es fácil ver que la componente normal del esfuerzo vale

$$t_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} = n_i T_{ij} n_j$$

³Aunque no lo hemos dicho explícitamente se ha supuesto que el fluido no es polar y por tanto no existe momentos intrínsecos internos

si el tensor es diagonal

$$t_n = T_{11}n_1^2 + T_{12}n_2^2 + T_{13}n_3^2$$

sobre la cara 1 del paralelepípedo ($n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$) por lo que

$$t_n(1) = T_{11}$$

y lo mismo sucede con el resto de las caras. La componente tangencial viene dada por la expresión (teorema de Pitágoras)

$$t_t = \sqrt{t_i t_i - t_n^2} = \sqrt{(T_{ij}n_j)^2 - (n_i T_{ij}n_j)^2}$$

El tensor de esfuerzos lo vamos a separar en dos partes, una de ellas isótropa y el resto, que llamaremos desviatoria

$$T_{ij} = \frac{1}{3} T_{ii} \delta_{ij} + D_{ij}$$

siendo $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ y por tanto

$$\frac{1}{3} T_{ii}$$

representa el valor medio de los esfuerzos normales. En forma matricial la anterior separación la podemos representar mediante la ecuación

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} T_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & T_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & T_{ii} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{11} - \frac{1}{3} T_{ii} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \frac{1}{3} T_{ii} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \frac{1}{3} T_{ii} \end{pmatrix}$$

Teorema 1.14.2 La parte desviatoria del tensor de esfuerzos es nula cuando el fluido está en reposo

DEMOSTRACIÓN

Por hipótesis un fluido es incapaz de soportar aquellos esfuerzos que tiendan a deformarlo sin cambiar de volumen. Llamemos presión p a la cantidad $-(1/3)T_{ii}$ de tal forma que p en general es una cantidad positiva. La fuerza ejercida por la parte isótropa vale,

$$t_i = -p \delta_{ij} n_j = -p n_i$$

esto es

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n}$$

la fuerza solo tiene componente normal y puesto que $p > 0$ esta fuerza representa una compresión

isótropa. Supuesto que nuestro pequeño volumen es una esfera, la fuerza va a ser igual en todas las direcciones y la esfera va a tender a disminuir de tamaño, y por definición, por tanto, el fluido se va a oponer a nuestra tensión exterior, esto es, si queremos seguir deformando la esfera debemos de continuar aumentando nuestra fuerza. En cuanto a la fuerza ejercida por la parte desviatoria, será

$$t_i = T_{ij} n_j$$

tal que la suma de las fuerzas (en términos escalares) a lo largo de los ejes coordenados es cero. Esto significa que habrá compresiones y expansiones, estas compresiones y expansiones deforman a la esfera sin que esta tenga que cambiar necesariamente de volumen, como el fluido es incapaz de soportar esfuerzos externos que no cambien el volumen, la esfera se deformará continuamente y por tanto su estado de movimiento se hace incompatible con el reposo. Se tiene por tanto que en situación de equilibrio mecánico, únicamente es distinto de cero la parte isótropa y por tanto,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n} \quad (1.26)$$

Puesto que estamos en equilibrio la suma de las fuerzas exteriores será nula y por tanto

$$0 = \int_V \rho \mathbf{f} \delta V - \int_{\partial V} p \mathbf{n} \delta \Sigma$$

aplicando el teorema de la divergencia

$$0 = \int_V (\rho \mathbf{f} - \text{GRAD } p) \delta V$$

y como la anterior ecuación es válida para cualquier volumen

$$0 = \rho \mathbf{f} - \text{GRAD } p \quad (1.27)$$

que es la ecuación general de la hidrostática. Si las fuerzas de volumen dependen de un potencial $\mathbf{f} = -\text{GRAD } \Omega$ y por tanto

$$\text{GRAD } p = -\rho \text{GRAD } \Omega$$

que es otra forma de la ecuación general de la hidrostática para el caso de fuerzas de volumen que dependan de un potencial. La anterior expresión nos muestra que los vectores gradientes de p y Ω son paralelos y por tanto las superficies de p constante coinciden con las superficies de Ω constante.

Tomando el rotacional en la anterior expresión nos lleva a la ecuación

$$0 = \text{GRAD} \rho \times \text{GRAD} \Omega$$

y por tanto, vemos que las superficies equipotenciales son paralelas a las superficies de densidad constante y por tanto que las superficies de densidad constante son también superficies de presión constante. Si tenemos en cuenta la ecuación de estado, vemos también que estas superficies coinciden con las superficies de temperatura constante.

Teorema 1.14.3 Un sólido sumergido en un fluido sufre un empuje igual al volumen del fluido que desaloja (Arquímedes)

Considerar un sólido sumergido en el seno de un fluido en equilibrio hidrostático. La fuerza de presión ejercida por el fluido sobre el sólido será

$$\int_{\partial \mathcal{V}} -p \mathbf{n} \delta \Sigma$$

siendo n la normal exterior al sólido. Nuestra idea es sustituir la anterior expresión por una integral de volumen. Para ello suponer que se sustituye nuestro sólido por una porción de fluido con tal que esta porción de fluido esté en equilibrio hidrostático con el fluido que rodea al sólido. Como el área que rodea al sólido no varía cuando lo sustituimos por el fluido, la anterior integral no cambia. Ahora bien, como estamos suponiendo que el fluido que introduzco está en equilibrio con el fluido exterior podemos aplicar la ecuación hidrostática y por tanto

$$\int_{\partial \mathcal{V}} -p \mathbf{n} \delta \Sigma = - \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \delta \mathcal{V}.$$

Suponiendo que la fuerza exterior sea el campo gravitatorio, tenemos que $\mathbf{f} = -\mathbf{g}$ y por tanto las fuerzas de superficie valen

$$\int_{\partial \mathcal{V}} -p \mathbf{n} \delta \Sigma = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g} \delta \mathcal{V}$$

esto es, coinciden con el peso del volumen del fluido desalojado, como queríamos demostrar.

1.14.1. Condición de la situación de equilibrio

Según hemos visto, para que se de la condición de equilibrio mecánico, las fuerzas de presión se deben de equilibrar con las fuerzas de volumen, que si estamos en un campo gravitatorio se reducen

al peso,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

la pregunta es, >bajo qué condiciones es esta condición de equilibrio estable ?. Para ello pensemos en el siguiente experimento. Suponer que tenemos una pequeña burbuja del fluido que está en un cierto nivel z y que llevamos a esta burbuja a otra posición en un nivel $z + \delta z$. Supondremos que este proceso se hace de forma *isentrópica* y que durante el proceso el entorno de la burbuja no se modifica, esto es, no se modifica la condición equilibrio hidrostático, y que la presión de la burbuja cuando ésta llega al final se iguala rápidamente a la de su entorno. El equilibrio mecánico será estable si la burbuja tiende a volver a su localización original y será inestable si por el contrario ésta burbuja tiende a seguir separándose de su situación de equilibrio. Para que suceda lo primero basta con que la burbuja pese más que su entorno y para que suceda lo segundo esta debe de pesar menos, así pues lo que debemos de comparar son las densidades de la burbuja y la de su entorno una vez que la hemos separado de su posición de equilibrio. Sea $\rho(p(z + \delta z), s(z + \delta z))$ la densidad del ambiente en el nivel $z + \delta z$ y $\rho(p(z + \delta z), s(z))$ la densidad de la burbuja cuando llega a ese nivel, siendo $s(z)$ la entropía del nivel z que será la que tenga la burbuja cuando llegue al nivel $z + \delta z$ pues estamos suponiendo que el movimiento es isentrópico. El equilibrio será estable si

$$\rho(p(z + \delta z), s(z + \delta z)) - \rho(p(z + \delta z), s(z)) < 0$$

esto es si

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) < 0$$

De las relaciones que nos proporciona la termodinámica, tenemos por un lado que

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_p = -\rho^2 \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s$$

y por otro

$$\rho \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T\beta}{c_p}$$

siendo β el coeficiente de expansión térmico del fluido. Sustituyendo

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = -\rho \frac{T\beta}{c_p} \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) < 0$$

Puesto que β es positivo en la mayoría de los fluidos, se debe de cumplir para que el equilibrio sea estable que

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) > 0$$

para que sea neutro,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = 0$$

y para que sea inestable

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) < 0$$

Teniendo en cuenta que

$$\rho c_p T ds = \rho c_p dT - T \beta dp$$

tenemos

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = \frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) - \frac{\beta}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

teniendo en cuenta la ecuación hidrostática,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) = \frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \beta g$$

por lo que la condición de estabilidad del equilibrio se traduce en ver si

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \beta g$$

es mayor, menor o igual a cero. Llamando $\gamma = -\partial T/\partial z$ al gradiente vertical de temperatura, obtenemos

$$\frac{\beta g}{c_p} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{1}{T} \gamma$$

para el caso de un gas $\beta = 1/T$ por lo que la condición de equilibrio se escribe como

$$\frac{g}{c_p} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \gamma$$

1.15. Fluidos newtonianos

Volvamos a nuestro problema general de la dinámica y planteemos las ecuaciones del movimiento. Del teorema de conservación del momento, tenemos

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{f} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbb{T} \mathbf{n} \delta \Sigma$$

aplicando el teorema de la divergencia al último término

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v} \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{f} \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \text{DIV} \mathbb{T} \delta \mathcal{V}$$

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds y llevando todas las integrales a un mismo miembro, obtenemos

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \text{DIV} \mathbb{T} \right) \delta \mathcal{V} = 0.$$

Puesto que la anterior integral se anula para cualquier volumen, el argumento debe de ser idénticamente cero y por tanto

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \text{DIV} \mathbb{T}$$

que es la ecuación del movimiento. Separando el tensor de esfuerzos en la parte isótropa y desviatoria y manteniendo el nombre de presión p para $-(1/3)T_{ii}$ ⁴ tenemos

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \text{GRAD} p + \text{DIV} \mathbb{D} \quad (1.28)$$

Esta ecuación no la podemos resolver hasta que tengamos una expresión para la parte desviatoria del tensor de esfuerzos. Siguiendo la ley de Hook de que los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones vamos a suponer que

$$\mathbb{D} = f(\mathbb{V})$$

siendo \mathbb{V} el tensor gradiente de velocidad

$$\mathbb{V}|_{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$$

⁴Hemos de hacer constar que esta definición de la presión es la misma que para el caso estático aunque su valor no coincida con el de la presión hidrostática cuando estemos fuera del equilibrio

y f una función lineal (fluido newtoniano). Bajo la hipótesis que el fluido es isótropo, la anterior expresión toma la forma

$$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}$$

siendo \mathbb{A} un tensor isótropo de cuarto orden. Se sabe del álgebra que un tensor de cuarto orden isótropo se puede poner como

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk}$$

siendo λ, μ, μ' constantes. Sustituyendo

$$D_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk}) v_{kl}$$

puesto que D_{ij} es simétrico tenemos

$$D_{ij} = D_{ji} = (\lambda \delta_{ji} \delta_{kl} + \mu \delta_{jk} \delta_{il} + \mu' \delta_{jl} \delta_{ik}) v_{kl}$$

de donde

$$(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk}) v_{kl} = (\lambda \delta_{ji} \delta_{kl} + \mu \delta_{jk} \delta_{il} + \mu' \delta_{jl} \delta_{ik}) v_{kl}$$

operando llegamos a

$$\lambda v_{ii} \delta_{ij} + \mu v_{ij} + \mu' v_{ji} = \lambda v_{ii} \delta_{ij} + \mu v_{ji} + \mu' v_{ij}$$

de donde

$$(\mu - \mu') v_{ij} = (\mu - \mu') v_{ji}$$

Puesto que en general $v_{ij} \neq v_{ji}$ se debe de verificar que $\mu = \mu'$. Por lo que

$$D_{ij} = \lambda \delta_{ij} v_{ii} + \mu (v_{ij} + v_{ji})$$

ahora bien, $v_{ii} = e_{ii}$ y $v_{ij} + v_{ji} = 2e_{ij}$ siendo e_{ij} el tensor velocidad de deformación, resultando por tanto

$$D_{ij} = \lambda e_{ii} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

puesto que $e_{ii} = \text{DIV} \mathbf{v}$, resulta que

$$D_{ij} = \lambda \text{DIV} \mathbf{v} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

Tal y como hemos definido el tensor desviatorio \mathbb{D} resulta que su traza D_{ii} es nula, por lo que

$$D_{ii} = 3\lambda e_{ii} + 2\mu e_{ii} = 0$$

de donde resulta que

$$3\lambda = -2\mu$$

que constituye la relación de Stokes⁵. Tenemos por tanto

$$D_{ij} = 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}) \quad (1.29)$$

El coeficiente μ recibe el nombre de *coeficiente de viscosidad dinámico*. Llevando la anterior expresión a la ecuación que define el tensor de esfuerzos tenemos

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})$$

Si hubiésemos utilizado la presión termodinámica hubiésemos obtenido la ecuación

$$T_{ij} = -p_T\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{ii}\delta_{ij}$$

Calculando la traza e igualando tenemos

$$p_T - p = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right) e_{ii}$$

llamaremos k al coeficiente

$$k = \frac{2}{3}\mu + \lambda$$

que recibe el nombre de *coeficiente de segunda viscosidad*. Resulta por tanto

$$T_{ij} = -p_T\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}) + ke_{ii}\delta_{ij}$$

⁵ Este resultado se ha obtenido por el hecho de haber definido la presión p como $-(1/3)T_{ii}$, definición que no depende del estado de equilibrio en que se encuentre el fluido. Existen algunos libros que definen a la presión p como la presión termodinámica p_T (presión que solo tiene sentido en equilibrio) en cuyo caso $D_{ii} \neq 0$ y por tanto no se verifica la relación de Stokes y aparecen 2 coeficientes en la definición de D_{ij}

El coeficiente de segunda viscosidad es muy pequeño y solo es importante cuando tenemos ondas sonoras intensas en el seno del fluido. En general se toma como cero (hipótesis de Stokes) y por tanto

$$T_{ij} = -p_T \delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})$$

Llevando esta expresión a la ecuación del movimiento obtenemos

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(-p \delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij}) \right)$$

operando, se obtiene

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x^i} + 2\mu \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial x^j} - \frac{1}{3} \frac{\partial e_{ii}}{\partial x^i} \right)$$

teniendo en cuenta que

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right)$$

se llega a

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \mu \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial v^j}{\partial x^j}$$

que en forma vectorial resulta ser,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \text{GRAD } p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \text{GRAD}(\text{DIV} \mathbf{v}) \quad (1.30)$$

ecuación que recibe el nombre de Navier–Stokes y constituye la expresión de conservación del momento.

1.16. Principio de conservación de la energía

Hasta el momento hemos analizado el principio de conservación de la masa, que dió lugar a la ecuación de continuidad, a continuación hemos analizado el principio de conservación del momento, que ha dado lugar a la ecuación de Navier–Stokes. Si nos fijamos en estas ecuaciones descubrimos que tenemos 5 variables, la densidad, la presión, y las tres componentes de la velocidad, se supone que la viscosidad es una propiedad del fluido y es conocida de antemano. El numero de ecuaciones presentes son 4, la ecuación de continuidad y las 3 ecuaciones a que da lugar la ecuación vectorial de conservación del momento. Así pues tenemos un sistema no resoluble, necesitamos una ecuación

más. Una ecuación que tenemos a mano es la ecuación de estado

$$f(\rho, p, T) = 0$$

que nos da una relación entre la densidad ρ , la presión p y la temperatura T , pero nos introduce en el sistema una nueva variable, la temperatura, necesitamos por tanto una nueva ecuación. Esta nueva ecuación nos la va a proporcionar el primero ó el segundo principio de la termodinámica.

Como es bien conocido el primer principio establece que la variación de la energía interna de un sistema termodinámico es igual al calor dado al sistema menos el trabajo realizado por el mismo. Consideremos una porción finita del fluido como nuestro sistema termodinámico, supuesta válida la ley de Fick, el flujo de calor (cantidad de energía por unidad de tiempo) dado al sistema viene dado por la expresión

$$\int_{\partial \mathcal{V}} k \text{GRAD } T \delta \Sigma$$

siendo k la conductividad. En cuanto al trabajo realizado por el sistema, la velocidad a la realizan trabajo las fuerzas exteriores vale,

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \delta \Sigma$$

siendo \mathbf{v} la velocidad, \mathbf{f} la fuerza por unidad de masa y \mathbf{t} el vector de Cauchy que representa la distribución de esfuerzos superficiales. Teniendo en cuenta que $\mathbf{t} = \mathbb{T} \cdot \mathbf{n}$ y aplicando el teorema de Ostrogradsky–Gauss a la integral de superficie se obtiene para la velocidad a la que se realiza trabajo la expresión

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \text{DIV}(\mathbb{T} \mathbf{v}) \delta \mathcal{V}$$

que en componentes cartesianas eulerianas vale

$$\int_{\mathcal{V}} \rho f_i v^i \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x^j} (T_{ij} v^i) \delta \mathcal{V}$$

operando en el segundo término y reorganizando tenemos

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j} \right) v^i \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} T_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \delta \mathcal{V}$$

Teniendo en cuenta la ecuación del movimiento

$$\rho \frac{Dv^i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j}$$

la primera integral vale

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \frac{Dv^i}{Dt} v^i \delta \mathcal{V} = \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \delta \mathcal{V}$$

esto es representa la variación de energía cinética. En cuanto a la segunda integral

$$\int_{\mathcal{V}} T_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \delta \mathcal{V}$$

teniendo en cuenta que T_{ij} es un tensor simétrico, separando $\partial v^i / \partial x^j$ en su parte simétrica e_{ij} y anti-simétrica Ω_{ij} y considerando que el producto contraído de un tensor simétrico por otro antisimétrico vale cero, tenemos que esta segunda integral vale

$$\int_{\mathcal{V}} T_{ij} e_{ij} \delta \mathcal{V}$$

que representa la variación de energía interna a cuenta del trabajo de las fuerzas exteriores. Así pues teniendo en cuenta la anterior expresión así como la expresión obtenida para el flujo de calor, podemos escribir para el primer principio la expresión

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} T_{ij} e_{ij} \delta \mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}} k \text{GRAD} T \delta \Sigma$$

siendo u la energía interna por unidad de masa. Puesto que $T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - (1/3)e_{ii}\delta_{ij})$ y aplicando el teorema de Ostrogradski–Gauss a la integral de superficie llegamos a

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[-pe_{ii} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})e_{ij} \right] \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) \delta \mathcal{V}$$

Es fácil de demostrar que

$$(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})e_{ij} = (e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})^2$$

por lo que

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u \delta \mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left[-pe_{ii} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})^2 \right] \delta \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) \delta \mathcal{V}$$

aplicando el teorema del transporte al primer miembro, llevando todo a una sola integral, anulando el argumento de ésta y teniendo en cuenta que $e_{ii} = \text{DIV} \mathbf{v}$, se obtiene

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \text{DIV} \mathbf{v} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3} \text{DIV} \mathbf{v} \delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) \quad (1.31)$$

que es la expresión en forma diferencial del primer principio. De los tres términos de la derecha, el primero representa el trabajo de expansión/compresión, puede ser positivo o negativo de acuerdo

con el hecho que sea una compresión ($\text{DIV}\mathbf{v} < 0$) o una expansión ($\text{DIV}\mathbf{v} > 0$) respectivamente. El segundo término que es siempre positivo representa la tasa de disipación viscosa de energía cinética. Puesto que es positivo representa siempre un incremento de energía interna. El tercer término representa el flujo de calor a través de la superficie y puede ser positivo o negativo. La presión que aparece en la expresión anterior es la presión dinámica, teniendo en cuenta que

$$p_T - p = k \text{DIV}\mathbf{v}$$

obtenemos

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p_T \text{DIV}\mathbf{v} + k(\text{DIV}\mathbf{v})^2 + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV}\mathbf{v}\delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) \quad (1.32)$$

Teniendo en cuenta la expresión del segundo principio

$$T \frac{DS}{Dt} = \frac{DU}{Dt} + p \frac{DV}{Dt}$$

poniendo las magnitudes extensivas en términos de la masa y las magnitudes específicas, teniendo en cuenta que la masa se conserva y empleando la expresión de teorema de conservación de la masa, se obtiene para el segundo principio la expresión

$$\rho \frac{Du}{Dt} + p_T \text{DIV}\mathbf{v} = \rho T \frac{Ds}{Dt}$$

siendo s la entropía específica. Sustituyendo la expresión de la energía interna, obtenemos

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = k(\text{DIV}\mathbf{v})^2 + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV}\mathbf{v}\delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) \quad (1.33)$$

que es la expresión del segundo principio. En un sistema adiabático el último término es nulo por lo que

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = k(\text{DIV}\mathbf{v})^2 + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV}\mathbf{v}\delta_{ij})^2$$

puesto que por el segundo principio, en un sistema adiabático la entropía solo puede crecer, es por lo que

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = k(\text{DIV}\mathbf{v})^2 + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV}\mathbf{v}\delta_{ij})^2 > 0$$

la anterior ecuación nos dice que necesariamente los coeficientes de viscosidad μ y segunda viscosidad k han de ser positivos.

Por otra parte, la termodinámica nos dice que

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp_T}{Dt}$$

siendo

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

el coeficiente de expansión térmica del fluido, que en el caso de un gas perfecto vale $1/T$. Sustituyendo en la expresión del segundo principio, obtenemos

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = T \beta \frac{Dp_T}{Dt} + k(\text{DIV}\mathbf{v})^2 + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV}\mathbf{v}\delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right)$$

que constituye la ecuación de evolución de la temperatura. Es la sexta ecuación que andábamos buscando y que cierra el sistema de ecuaciones.

Si el flujo es adiabático y no viscoso, los tres últimos términos del segundo miembro de la ecuación anterior son nulos, por lo que

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt}$$

si el fluido se comporta como un gas perfecto, $\beta = 1/T$, por lo que

$$c_p \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} = R \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt}$$

de donde,

$$c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}$$

integrando,

$$T_f = T_i \left(\frac{p_f}{p_i} \right)^{R/c_p}$$

Si tomamos como presión final p_f la presión de 1000 mb, la temperatura final obtenida es la llamada *temperatura potencial* que denotaremos por θ , así pues tenemos

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p}$$

Tomando logaritmos en la anterior ecuación y derivando, obtenemos

$$c_p d(\log \theta) = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = ds$$

por lo que

$$s - s_0 = c_p \log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$$

así pues la temperatura potencial mide el contenido entrópico del gas. La ecuación (1.33), expresión matemática del segundo principio, la podemos poner en términos de la temperatura potencial, como

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho c_p \frac{T}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} = \Phi$$

donde en Φ hemos englobado todos los flujos de calor. Si estos últimos son cero, la temperatura potencial se mantiene constante.

1.16.1. Condiciones frontera

Según acabamos de ver la evolución temporal de un fluido viene regida por un conjunto de 6 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a partir de las cuales y mediante un proceso de integración podemos encontrar como varían en el espacio y en el tiempo las variables fundamentales que definen el comportamiento del fluido. Ahora bien para poder integrar este conjunto de ecuaciones necesitamos conocer las condiciones iniciales y las condiciones en la frontera del fluido. La frontera de un fluido separa a éste de otro fluido en la misma fase (por ejemplo agua y aceite) u otra fase (por ejemplo agua y aire) o bien separa a el fluido de un sólido.

A lo largo de la superficie que separa ambos medios se produce una serie de intercambios, masa, calor, momento, etc y bajo la hipótesis de que no nos separamos demasiado de las condiciones de equilibrio hemos supuesto que los flujos de estas propiedades son proporcionales a los gradientes de ciertas magnitudes como son la temperatura, la velocidad. Esta hipótesis implica necesariamente que estas magnitudes son continuas. Vamos a suponer que esta hipótesis es válida hasta la frontera y a un lado y otro de la misma de tal forma que supondremos continuidad de estos campos (temperatura y velocidad a un lado y otro de la frontera). Podíamos razonar también que la aparición de discontinuidades a un lado u otro de la frontera de estas magnitudes necesariamente da lugar a la aparición de flujos de momento y calor que tendería a anular estas discontinuidades. Sin embargo pueden darse condiciones en las que los flujos no son lo suficientemente eficaces en anular rápidamente las discontinuidades y estas pueden persistir durante tiempo. En los problemas que nosotros trataremos supondremos continuidad de estos campos.

La continuidad del campo de velocidades nos lleva a que la componente tangencial y normal a un lado y otro de la frontera son iguales. Independientemente de otras consideraciones, parece lógico suponer la condición de igualdad de las velocidades normales a lo largo de la frontera si no queremos que nos aparezcan el vacío entre ambos medios. La continuidad de la componente tangencial (o

condición de no deslizamiento) es algo más artificial y hemos de suponer, como hemos dicho antes, que los fluidos son lo suficientemente viscosos como para que la aparición de discontinuidades sea anulada rápidamente mediante transporte de momento. En el caso de que la frontera sea sólida y en reposo la condición de no deslizamiento presupone que la velocidad tangencial es nula.

Resulta obvio el suponer que los flujos de calor a un lado y otro de la frontera han de ser iguales. Así tenemos que, si tomamos un cilindro que vaya de un lado a otro de la frontera y con la generatriz paralela al vector normal a la misma y planteamos la ecuación de balance de calor a la vez que hacemos tender a cero la longitud de la generatriz (de tal forma que el flujo de calor a lo largo de la superficie lateral sea idénticamente cero) llegamos a que se debe de verificar:

$$(k_h \mathbf{n} \cdot \nabla T)_1 = (k_h \mathbf{n} \cdot \nabla T)_2$$

Así mismo se debe de verificar que los flujos de momento han de ser iguales por lo que la tensiones han de ser igual a un lado y otro de la superficie (principio de acción y reacción), de donde igualando las componentes tangencial y normal

$$(t_i T_{ij} n_j)_1 = (t_i T_{ij} n_j)_2$$

siendo t_i las componentes del vector unitario tangente a la su superficie, n_i las componentes del vector normal a ella. Así mismo para la componente normal

$$(n_i T_{ij} n_j)_1 = (n_i T_{ij} n_j)_2$$

y si se consideran efectos de la tensión superficial se puede demostrar que

$$(n_i T_{ij} n_j)_2 - (n_i T_{ij} n_j)_1 = -\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

siendo σ el coeficiente de tensión superficial y R_1, R_2 los radios principales de curvatura de la superficie que une los dos medios, que se suponen positivos si los centros de curvatura están en la región del fluido hacia donde apunta \mathbf{n} (que en este caso hemos supuesto que apunta hacia el medio 2). Puesto que

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij})$$

teniendo en cuenta que $t_i \delta_{ij} n_j = t_i n_i = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$, tendremos para la componente tangencial

$$(2\mu t_i e_{ij} n_j)_2 = (2\mu t_i e_{ij} n_j)_1$$

y para la componente normal

$$p_1 - \left(2\mu(e_{ij}n_i n_j - \frac{1}{3}\Delta) \right)_1 = p_2 - \left(2\mu(e_{ij}n_i n_j - \frac{1}{3}\Delta) \right)_2 + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Si el fluido está en reposo, la anterior ecuación se simplifica, resultando

$$p_2 - p_1 = -\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

que es la ecuación de Laplace. Si se pueden considerar despreciables los efectos de tensión superficial (por ejemplo fronteras planas) tendremos

$$p_1 = p_2$$

Existen dos casos extremos y del mayor interés. Uno de ellos se da cuando la frontera se establece entre un sólido y un fluido y el otro en un líquido y un gas. En el primer caso no se conocen los esfuerzos en el seno del sólido con lo que debemos de conformarnos con establecer la continuidad del campo de velocidades y suponer que la velocidad del fluido en la frontera coincide con la velocidad del sólido. En el caso de una frontera líquido–gas dada la diferencia de densidades y viscosidades podemos considerar que esta última es cero en el gas. Así mismo, suponiendo que las velocidades y las variaciones de velocidad son comparables en el líquido y en el gas, la menor densidad y viscosidad en este implica que las variaciones de presión han de ser menores a lo largo del gas y podemos suponer que la presión se mantiene constante (salvo efectos de la gravedad como puede suceder en la atmósfera) a lo largo del seno del gas. Teniendo en cuenta estas condiciones se puede poner como condición frontera líquido–gas

$$(t_i e_{ij} n_j)_l = 0$$

y

$$p_l - \left(2\mu(e_{ij}n_i n_j - \frac{1}{3}\Delta) \right)_l = p_g - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

en la que normalmente se toma $\Delta = 0$ habida cuenta de la incompresibilidad del líquido. En este caso la continuidad del campo de velocidades resulta de poco interés pues el problema suele ser el estudio del movimiento del fluido sin tener interés en lo que suceda en el gas.

1.16.2. Ecuación de Bernoulli

Necesitamos en primer lugar encontrar cual es la ecuación de evolución de la energía cinética. Para ello partiremos de la ecuación de conservación del momento,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{GRAD} p + \rho \mathbf{f} + \text{DIV} \mathbb{D}$$

siendo \mathbb{D} la parte desviatoria del tensor de esfuerzos,

$$\mathbb{D}_{ij} = 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})$$

Multiplicando la ecuación del conservación del momento escalarmente por \mathbf{v} , obtenemos la expresión

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} p + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \text{DIV} \mathbb{D}$$

teniendo en cuenta que

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{2} \frac{Dv^2}{Dt} = \frac{DE_c}{Dt}$$

siendo E_c la energía cinética por unidad de masa, llegamos a

$$\rho \frac{DE_c}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} p + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{v} \cdot \text{DIV} \mathbb{D} \quad (1.34)$$

Combinando la anterior ecuación junto con la ecuación del primer principio (1.31) obtenemos la expresión

$$\rho \frac{DE_c}{Dt} + \rho \frac{Du}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} p + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} - p \text{DIV} \mathbf{v} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV} \mathbf{v} \delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right)$$

Suponer que las fuerzas de volumen procedan de un potencial independiente explícitamente del tiempo, en estas condiciones

$$\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = -\rho \mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \psi = -\rho \frac{D\psi}{Dt}$$

siendo ψ el potencial del cual derivan las fuerza de volumen, en estas condiciones la expresión de conservación de la energía cinética e interna toma la forma

$$\rho \frac{DE_c}{Dt} + \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\psi}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} p - p \text{DIV} \mathbf{v} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV} \mathbf{v} \delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad y que

$$-\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} p = -\frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

y tras algunas manipulaciones se obtiene que

$$-\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} p - p \text{DIV} \mathbf{v} = -\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial p}{\partial t}$$

sustituyendo obtenemos,

$$\rho \frac{DE_c}{Dt} + \rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\psi}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3} \text{DIV} \mathbf{v} \delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right)$$

Vamos a considerar ahora un flujo estacionario, en estas condiciones \mathbf{v} no depende explícitamente del tiempo, podemos considerar también que la presión no depende explícitamente del tiempo, por lo que $\partial p / \partial t = 0$. Supondremos así mismo que el fluido es térmicamente no conductor y no viscoso, o que se puede considerar que no existe disipación viscosa de energía, en estas condiciones

$$\frac{DE_c}{Dt} + \frac{Du}{Dt} + \frac{D\psi}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Esto es la derivada másica de la cantidad

$$E_c + u + \psi + \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

es nula, o lo que es lo mismo, la cantidad

$$B = E_c + u + \psi + \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

se conserva a lo largo de una trayectoria, que por ser el flujo estacionario coincide con la línea de corriente. Este principio de conservación constituye el teorema de Bernoulli. Las condiciones de adiabaticidad y no disipación viscosa son las mismas que hacen que el flujo sea isentrópico, así pues podemos decir que las condiciones necesarias para que se verifique el principio de Bernoulli son que el flujo sea isentrópico y estacionario. La cantidad $u + p/\rho$ no es otra cosa que la entalpía específica h , por lo que el principio de Bernoulli se puede poner como

$$E_c + h + \psi = \text{cte.}$$

En el caso que el fluido sea además incomprensible, $\text{DIV} \mathbf{v} = 0$, resulta que, por el teorema de conservación de la energía interna, u se mantiene constante por lo que el principio de Bernoulli queda

$$E_c + \psi + \frac{p}{\rho} = \text{cte.}$$

si estamos en el campo gravitatorio, $\psi = gz$ por lo que

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cte.}$$

1.16.3. Teorema de Crocco

El teorema de Bernoulli nos dice que B es constante a lo largo de una línea de corriente pero no nos dice nada de la variación de B entre dos puntos cualesquiera del fluido. En el caso de un flujo estacionario y no viscoso, o que podamos ignorar los efectos viscosos, la ecuación del movimiento la podemos poner como

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \text{GRAD}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \text{GRAD} p$$

si las fuerzas proceden de un potencial, $\mathbf{f} = -\text{GRAD} \psi$, por lo que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{GRAD}) \mathbf{v} = -\text{GRAD} \psi - \frac{1}{\rho} \text{GRAD} p$$

Se puede demostrar que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{GRAD}) \mathbf{v} = \text{GRAD} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

de donde

$$\text{GRAD} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\text{GRAD} \psi - \frac{1}{\rho} \text{GRAD} p$$

reordenando, la ecuación del movimiento queda

$$\text{GRAD} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \text{GRAD} \psi + \frac{1}{\rho} \text{GRAD} p = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

Podemos calcular ahora el gradiente de la magnitud B ,

$$\text{GRAD} E_c + \text{GRAD} u + \text{GRAD} \psi + \text{GRAD} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \text{GRAD} B$$

teniendo en cuenta la ecuación del movimiento y que

$$\text{GRAD} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \text{GRAD} p - p \frac{1}{\rho^2} \text{GRAD} \rho$$

obtenemos

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \text{GRAD} u - p \frac{1}{\rho^2} \text{GRAD} \rho = \text{GRAD} B$$

El segundo principio de la termodinámica se escribe como

$$T dS = du - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

que lo podemos expresar como

$$T \text{GRAD} S = \text{GRAD} u - \frac{p}{\rho^2} \text{GRAD} \rho$$

de donde

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + T \text{GRAD} S = \text{GRAD} B \quad (1.35)$$

que constituye la expresión del teorema de Crocco. Si el fluido es homoentrópico⁶ (entropía constante a lo largo del fluido) y no solenoidal $\boldsymbol{\omega} = 0$, la magnitud B es constante a lo largo del fluido, no solo a lo largo de una línea de corriente.

Ejemplo 1.5 Calcular como varía la presión con el radio en los siguientes flujos, $\mathbf{v} = Ar\boldsymbol{\theta}$ y $\mathbf{v} = (A/r)\boldsymbol{\theta}$.

SOLUCIÓN

Calculemos primero la vorticidad para cada uno de los flujos. En el primer caso tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times Ar\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta} \frac{\partial}{\partial r} (Ar) + Ar \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial r} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (Ar) + \frac{1}{r} Ar \boldsymbol{\theta} \times \frac{\partial}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial r} \boldsymbol{\theta} = 0$$

y que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{r}$$

⁶En meteorología recibe el nombre de fluido barotrópico

tenemos

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = 2A\mathbf{k}$$

siendo $k = \mathbf{r} \times \theta$. Puesto que A es un constante, vemos que la vorticidad es constante a lo largo del fluido. Por otra parte, la anterior ecuación nos dice que la constante A representa un medio de la vorticidad. De la ecuación del movimiento para un fluido estacionario

$$\text{GRAD} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \omega = -\frac{1}{\rho} \text{GRAD} p - \text{GRAD} \psi$$

tenemos

$$-A^2 r \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho} \text{GRAD} p - g \mathbf{k}$$

que se descompone en dos ecuaciones, la ecuación hidrostática

$$\frac{\partial}{\partial z} p = -g$$

y la ecuación radial de la presión

$$\frac{\partial}{\partial r} p = A^2 r$$

la cual se integra fácilmente

$$p(r) - p(r_0) = \frac{1}{2} A^2 \rho (r^2 - r_0^2)$$

lo cual nos indica que la presión aumenta con la distancia radial para compensar la fuerza centrífuga. Reordenando la anterior ecuación

$$\frac{1}{\rho} p(r) - \frac{1}{2} A^2 r^2 = \frac{1}{\rho} p(r_0) - \frac{1}{2} A^2 r_0^2$$

la cual teniendo en cuenta que $v = Ar$, se tiene

$$\frac{1}{\rho} p(r) - \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{\rho} p(r_0) - \frac{1}{2} v_0^2$$

lo que significa que el teorema de Bernoulli no se verifica cuando vamos de una línea de corriente a otra. Esto se debe a que el flujo es solenoidal.

Veamos que pasa con el otro caso, en esta situación

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times \frac{A}{r} \theta = \mathbf{r} \times \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{A}{r} + \frac{A}{r} \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial r} \theta + \frac{1}{r} \theta \times \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{A}{r} + \frac{1}{r} \frac{A}{r} \theta \times \frac{\partial}{\partial \theta} \theta =$$

$$= -\frac{A}{r^2} \mathbf{k} + \frac{A}{r^2} \theta \times (-\mathbf{r}) = 0$$

Así pues el flujo es irrotacional. Con este resultado la ecuación del movimiento queda

$$\text{GRAD}\left(\frac{1}{2} \frac{A^2}{r^2}\right) = -\frac{1}{\rho} \text{GRAD} p - \text{GRAD} \psi$$

de donde

$$\text{GRAD}\left(\frac{1}{2} \frac{A^2}{r^2} + \frac{p}{\rho} + \psi\right) = 0$$

suponiendo que $\psi = gz$, la anterior ecuación vectorial da lugar a dos ecuaciones escalares, la ecuación hidrostática

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

y la dependencia radial

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \frac{A^2}{r^2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{2} \frac{A^2}{r^2} + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{A^2}{r_0^2} + \frac{p_0}{\rho}$$

y teniendo en cuenta que $v = A/r$, tenemos

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{p_0}{\rho}$$

que es la ecuación de Bernoulli. Así pues, la ecuación se verifica para cualquier par de puntos del fluido, no solo para dos puntos conectados por una línea de corriente.

Capítulo 2

Ecuaciones meteorológicas del movimiento

2.1. Ecuaciones del movimiento en una Tierra en rotación

Vamos a partir de la ecuación de conservación del momento lineal de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{GRAD } p + \rho \mathbf{f} + \mathbf{f}_r$$

donde con \mathbf{f} y \mathbf{f}_r se representan las fuerzas de volumen (por unidad de masa), que en nuestro caso son la aceleración de la gravedad \mathbf{g} y las fuerzas de rozamiento respectivamente. Las anteriores ecuaciones resultan válidas en un sistema de referencia inercial. Para el caso de un sistema de referencia no inercial como resulta ser un observador unido íntimamente a la Tierra, las anteriores ecuaciones siguen siendo válidas a condición de incluir los términos de la aceleración centrífuga,

$$\Omega \times \Omega \times \mathbf{r}$$

y de aceleración de Coriolis

$$2\Omega \times \mathbf{v}_r$$

siendo \mathbf{v}_r la velocidad relativa, \mathbf{r} el radio vector de la burbuja respecto del observador y Ω la velocidad de rotación de la Tierra que supondremos constante. Así pues teniendo en cuenta estos términos la ecuación del movimiento resulta ser,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} = -\text{GRAD } p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_r - \rho(\Omega \times \Omega \times \mathbf{r}) - \rho 2(\Omega \times \mathbf{v}_r) \quad (2.1)$$

De ahora en adelante, para no arrastar el subíndice r en la velocidad, se entenderá que la velocidad es la velocidad relativa.

2.1.1. Efecto de la fuerza de Coriolis

Vamos a analizar que efecto produce sobre una partícula de aire la fuerza de Coriolis. De las reglas del producto vectorial, el vector resultante es ortogonal a los dos términos que intervienen en el producto. Imaginemos una Tierra plana, dada la pequeña curvatura de ésta, esta hipótesis no es muy descabellada si nos ceñimos a una región no muy grande. Sea Ω_l la proyección sobre la vertical del lugar del vector rotación Ω . En el hemisferio norte el producto vectorial del vector de rotación local por

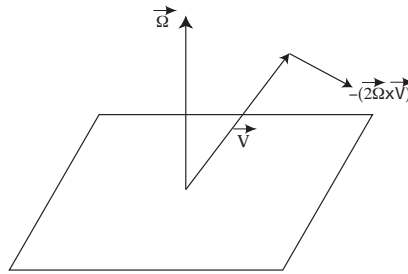


Figura 2.1: Efecto de la fuerza de Coriolis en el hemisferio norte. $\vec{\Omega}$ representa la velocidad local de rotación de la Tierra, que es la proyección sobre la vertical del lugar de la velocidad de rotación de la Tierra, \vec{v} representa la velocidad horizontal de la partícula

la velocidad de la partícula, que supondremos se mueve en el plano horizontal, es un vector que esta en el plano horizontal y que apunta a la izquierda del vector velocidad, pero como en la ecuación 2.1, el término de Coriolis aparece con signo 'menos', el efecto neto es el de giro hacia la derecha. Así pues si hay una partícula que se mueve del ecuador hacia el polo, la aceleración de Coriolis tiende a desplazarla hacia el este. Recíprocamente si va desde el polo hacia el ecuador, la aceleración de Coriolis tiende a desplazarla hacia el oeste. En el hemisferio sur sucede todo lo contrario, pues en este caso la proyección de la velocidad angular sobre la vertical del lugar es del signo contrario a la producida en el hemisferio norte.

2.1.2. Efecto de la fuerza centrífuga

El triple producto vectorial $(\Omega \times \Omega \times \mathbf{r})$ produce un vector que es paralelo al ecuador y va hacia el eje de rotación de la Tierra, como en la ecuación 2.1 aparece como signo -, el efecto de la fuerza centrífuga es tender a separar a la partícula del eje de rotación de la Tierra. Como aparece el producto

vectorial del radio vector con la velocidad de rotación de la Tierra, esta fuerza es proporcional a la distancia de la partícula al eje de rotación.

Este término se suele incluir en la fuerza de gravitación \mathbf{g} de tal manera que a partir de este momento \mathbf{g} va a representar el efecto combinado de la atracción gravitatoria centrípeta y la aceleración centrífuga.

2.2. Ecuaciones del movimiento en coordenadas esféricas

Dada la esfericidad de la Tierra es conveniente escribir las ecuaciones del movimiento en coordenadas esféricas.

Las coordenadas esféricas $\{r, \phi, \lambda\}$ en términos de las coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ vienen definidas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \cos \lambda \\y &= r \cos \phi \sin \lambda \\z &= r \sin \phi\end{aligned}$$

siendo ϕ la latitud y λ la longitud. Los vectores base, vienen definidos por las tangentes a las líneas coordenadas (curvas en las que solo varía una coordenada),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} (r \cos \phi \cos \lambda \mathbf{i} + r \cos \phi \sin \lambda \mathbf{j} + r \sin \phi \mathbf{k})_{\phi, \lambda} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} (r \cos \phi \cos \lambda \mathbf{i} + r \cos \phi \sin \lambda \mathbf{j} + r \sin \phi \mathbf{k})_{r, \lambda} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} (r \cos \phi \cos \lambda \mathbf{i} + r \cos \phi \sin \lambda \mathbf{j} + r \sin \phi \mathbf{k})_{r, \phi}\end{aligned}$$

operando, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \cos \phi \cos \lambda \mathbf{i} + \cos \phi \sin \lambda \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k} \\ \hat{\phi} &= -r \sin \phi \cos \lambda \mathbf{i} - r \sin \phi \sin \lambda \mathbf{j} + r \cos \phi \mathbf{k} \\ \hat{\lambda} &= -r \cos \phi \sin \lambda \mathbf{i} + r \cos \phi \cos \lambda \mathbf{j}\end{aligned}$$

cuyas longitudes son respectivamente ($h_r = 1$, $h_\phi = r$, $h_\lambda = r \cos \phi$). Dividiendo por sus correspon-

dientes longitudes obtenemos los vectores base unitarios,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \cos\phi \cos\lambda \mathbf{i} + \cos\phi \sin\lambda \mathbf{j} + \sin\phi \mathbf{k} \\ \phi &= -\sin\phi \cos\lambda \mathbf{i} - \sin\phi \sin\lambda \mathbf{j} + \cos\phi \mathbf{k} \\ \lambda &= -\sin\lambda \mathbf{i} + \cos\lambda \mathbf{j}\end{aligned}$$

La figura 2.2 nos muestra la disposición de los vectores base.

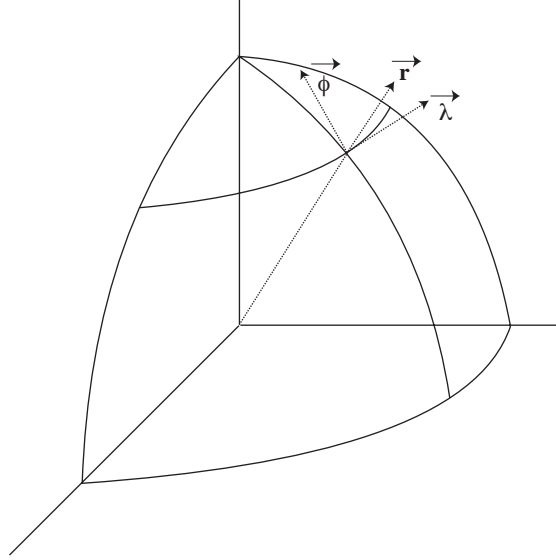


Figura 2.2: Vectores base de las coordenadas esféricas.

El vector velocidad en esféricas viene dado por la expresión

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{X}}{Dt} = \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{X} + \dot{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{X} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{X}$$

que teniendo en cuenta las definiciones de los vectores base resulta,

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{\lambda} \hat{\lambda}$$

donde vemos que las componentes del vector velocidad en esféricas son $(\dot{r} \dot{\phi} \dot{\lambda})$. Estas componentes no tienen dimensiones físicas de velocidad. Para obtener las componentes físicas de velocidad vamos a multiplicar y dividir cada término de la expresión anterior por (h_r, h_ϕ, h_λ) respectivamente. Al dividir los vectores base por sus correspondiente longitudes obtenemos los vectores base unitarios, por

lo que resulta para el vector velocidad la expresión

$$\mathbf{v} = h_r \dot{r} \mathbf{r} + h_\phi \dot{\phi} \boldsymbol{\phi} + h_\lambda \dot{\lambda} \boldsymbol{\lambda} = \dot{r} \mathbf{r} + r \dot{\phi} \boldsymbol{\phi} + r \cos \phi \dot{\lambda} \boldsymbol{\lambda}$$

las componentes $\{\dot{r}, r\dot{\phi}, r \cos \phi \dot{\lambda}\}$ tienen ya dimensiones de velocidad y constituyen las componentes físicas de la velocidad. Las designaremos por $\{v_r, v_\phi, v_\lambda\}$, o también por $\{\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}\}$ siendo z la longitud medida a lo largo de un radio vector, y la longitud medida a lo largo del meridiano y x la medida a lo largo del paralelo.

Las componentes físicas del operador GRAD en esféricas vienen dadas por la expresión

$$\frac{1}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

Pasemos ya a dar las expresiones de conservación del momento lineal en coordenadas esféricas. Nos vamos a centrar en el término inercial

$$\mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v}$$

el cual se puede escribir, teniendo en cuenta las expresiones anteriores, como

$$\left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) (v_r \mathbf{r} + v_\phi \boldsymbol{\phi} + v_\lambda \boldsymbol{\lambda})$$

operando

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} = & v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_r \mathbf{r}) + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\phi \boldsymbol{\phi}) + v_r \frac{\partial}{\partial r} (v_\lambda \boldsymbol{\lambda}) \\ & + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_r \mathbf{r}) + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi \boldsymbol{\phi}) + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\lambda \boldsymbol{\lambda}) \\ & + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (v_r \mathbf{r}) + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (v_\phi \boldsymbol{\phi}) + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (v_\lambda \boldsymbol{\lambda}) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión de los vectores base unitarios,

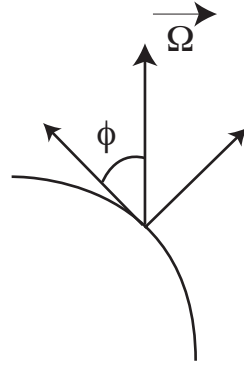
$$\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = 0 & \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r} = \boldsymbol{\phi} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{r} = \cos \phi \boldsymbol{\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial r} \boldsymbol{\phi} = 0 & \frac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{\phi} = -\mathbf{r} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \boldsymbol{\phi} = -\sin \phi \boldsymbol{\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial r} \boldsymbol{\lambda} = 0 & \frac{\partial}{\partial \phi} \boldsymbol{\lambda} = 0 & \frac{\partial}{\partial \lambda} \boldsymbol{\lambda} = \sin \phi \boldsymbol{\phi} - \cos \phi \mathbf{r} \end{array}$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \text{GRAD} \mathbf{v} = & \mathbf{r} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\phi^2}{r} - \frac{v_\lambda^2}{r} \right) + \\ & + \phi \left(v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} + \frac{v_\lambda^2}{r} \tan \phi \right) + \\ & + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda v_r}{r} - \frac{v_\lambda v_\phi}{r} \tan \phi + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) \end{aligned}$$

Una vez visto como expresar en coordenadas esféricas el término no inercial vamos a ver como se expresa el término de Coriolis, para ello fijemonos en la figura 2.3

La proyección sobre el triedro de referencia de la velocidad angular de la Tierra viene dada por la expresión



$$\Omega = \Omega(\sin \phi \mathbf{r} + \cos \phi \phi)$$

de donde

$$2\Omega \times \mathbf{v} = 2\Omega v [-v_\lambda \cos \phi \mathbf{r} + v_\lambda \sin \phi \phi + (v_r \cos \phi - v_\phi \sin \phi) \lambda]$$

Figura 2.3:

Llevando la anterior expresión a las ecuaciones del movimiento obtenemos para estas la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\phi^2}{r} - \frac{v_\lambda^2}{r} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f_{r,r} - g + 2\Omega v_\lambda \cos \phi \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda} + \frac{v_\lambda^2}{r} \tan \phi \right) &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + f_{r,\phi} - 2\Omega v_\lambda \sin \phi \\ \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \phi} + \frac{v_\lambda v_r}{r} - \frac{v_\lambda v_\phi}{r} \tan \phi + \frac{v_\lambda}{r \cos \phi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f_{r,\lambda} - 2\Omega (v_r \cos \phi - v_\phi \sin \phi) \end{aligned}$$

donde con $f_{r,\phi,\lambda}$ queremos indicar las tres componentes de la fuerza de rozamiento. Los términos centrífugos se han incluido en la definición del vector gravedad \mathbf{g} .

Vamos a cambiar de notación, como ya dijimos antes la relación entre las componentes físicas de

la velocidad y las componentes holónomas o tensoriales viene dada por las expresiones

$$\begin{aligned}v_r &= \dot{r} \\v_\phi &= r\dot{\phi} \\v_\lambda &= r\cos\phi\dot{\lambda}\end{aligned}$$

Llamando $w = dz/dt = v_r$, $u = dx/dt = v_\lambda$ y $v = dy/dt = v_\phi$, tenemos

$$\begin{aligned}dz &= dr \\dy &= r d\phi \\dx &= r\cos\phi d\lambda\end{aligned}$$

que define una transformación de coordenadas no holónoma. En esta situación

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial r} \\\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{r\cos\phi} \frac{\partial}{\partial \lambda},\end{aligned}$$

llevando estas definiciones a las ecuaciones del movimiento obtenemos las expresiones que andamos buscando

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} + (w\frac{\partial w}{\partial z} + v\frac{\partial w}{\partial y} + u\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{v^2}{r} - \frac{u^2}{r}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_{r,z} - g + 2\Omega u \cos\phi \\\frac{\partial v}{\partial t} + (w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{vw}{r} + v\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u^2}{r} \tan\phi) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_{r,y} - 2\Omega u \sin\phi \\\frac{\partial u}{\partial t} + (w\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \tan\phi + u\frac{\partial u}{\partial x}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_{r,x} - 2\Omega(w \cos\phi - v \sin\phi)\end{aligned}$$

Reordenando e introduciendo las derivadas másicas

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_{r,x} - 2\Omega(w \cos\phi - v \sin\phi) - \frac{uw}{r} + \frac{uv}{r} \tan\phi \quad (2.2)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_{r,y} - 2\Omega u \sin\phi - \frac{vw}{r} - \frac{u^2}{r} \tan\phi \quad (2.3)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_{r,z} - g + 2\Omega u \cos\phi + \frac{1}{r}(u^2 + v^2) \quad (2.4)$$

El radio vector r lo podemos expresar como $R + z$ siendo R el radio de la Tierra supuesta esférica y z la distancia sobre la misma. Como para todas las aplicaciones practicas $z \ll R$, podemos sustituir por R en los términos donde aparece r , eliminando a la vez los términos que contengan la velocidad vertical explícitamente para que así las ecuaciones resultantes sean compatibles con la conservación del momento angular

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_{r,x} + \left(f + \frac{u \tan \phi}{R} \right) v \quad (2.5)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_{r,y} - \left(f + \frac{u \tan \phi}{R} \right) u \quad (2.6)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_{r,z} - g + 2\Omega u \cos \phi + \frac{1}{R}(u^2 + v^2) \quad (2.7)$$

donde hemos utilizado el simbolo f para designar al llamado *factor de coriolis*, $f = 2\Omega \sin \phi$. Estas ecuaciones constituyen las ecuaciones meteorológicas de conservación del momento lineal.

Las anteriores ecuaciones son muy generales y describen todo tipo de movimiento, desde el sonido que se produce al escribir estas líneas hasta la gran mancha que aparece en la zona ecuatorial de Jupiter donde cabe perfectamente varias veces la Tierra. Por esta razón antes de aplicarla a un problema en particular debemos de analizar el tipo de problema y ‘adaptar’ las ecuaciones a ese problema eliminando aquellos términos de las ecuaciones que resulten inateriales en nuestro problema en particular. Este proceso se realiza mediante un análisis de escala, que consiste en asignar unos valores típicos, que dependen del problema en particular, a las magnitudes que intervienen en las ecuaciones del movimiento. Vamos pues a caracterizar los fenómenos atmosféricos mediante unas escalas espaciales y temporales asociándoles unos valores típicos de longitud y tiempo. Esto es a cada fenómeno le vamos a asignar una longitud que nos da idea de la extensión espacial del fenómeno y un tiempo que nos va a dar idea de su duración temporal. Dado que el campo gravitatorio impone un límite a la extensión vertical de los fenómenos sin que afecte a su extensión horizontal, vamos a analizar por separado las escalas horizontales y verticales. La figura 2.4 nos muestra la escala horizontal y temporal de diversos fenómenos atmosféricos

Nosotros estamos particularmente interesados en analizar la aportación de cada uno de los términos que aparece en las ecuaciones de conservación del momento lineal en el caso de los procesos a escala sinóptica (~ 1000 km) en latitudes medias, que corresponde con la sección remarcada por una línea a trazos en la figura 2.4. A la hora de evaluar cada uno de los términos que aparecen en las ecuaciones, valolaremos cada derivada espacial como el cociente de un valor típico de la magnitud en cuestión para la que estemos calculando la derivada dividido por una longitud de escala típica. Esta longitud de escala es la longitud, valga la redundancia, necesaria para que la magnitud varie signifi-

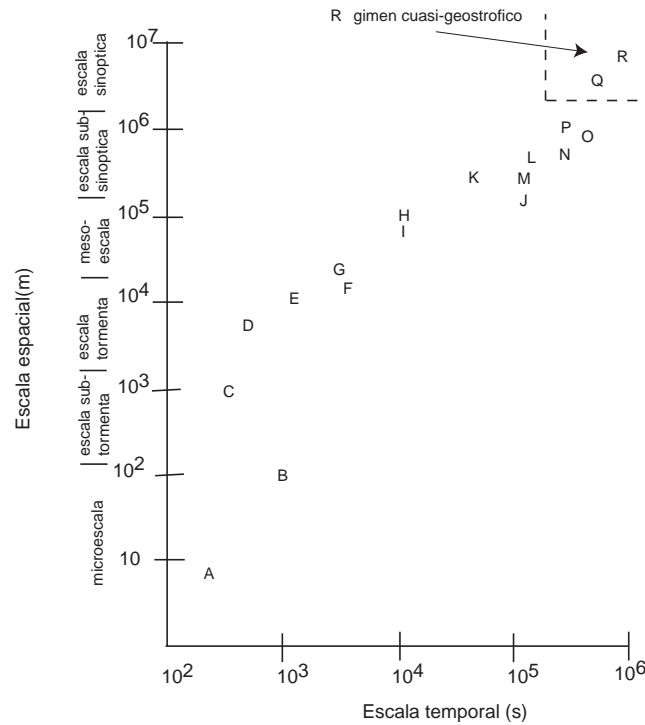


Figura 2.4: Escalas horizontales de diversos fenómenos meteorológicos: A, remolinos; B, tornados; C, cúmulos; D, reventones; E, gust fronts; F, mesociclones; G, tormentas; H, brisas marinas, brisas de valle/montaña, meso altas y meso bajas; I, bandas de precipitación; J, frentes costeros; K, sistemas mesoescalares convectivos; L, corriente en chorro de bajo nivel; M, la línea seca; N, ciclones tropicales; O, corriente en chorro en altura; P, frentes superficiales, Q, ciclones y anticiclones extratropicales; R, vaguadas y dorsales de las ondas planetarias.

cativamente. En el caso que nos ocupa tomaremos como valores típicos para la velocidad horizontal 10 m/s, para la velocidad vertical 5×10^{-2} m/s, como longitud típica para los gradientes horizontales 10^3 m y para los verticales 5×10^3 m. Tomaremos como variación de la presión 10 mb y como valor del factor de coriolis $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Como hemos introducido como escalas las velocidades y longitudes, tomaremos como tiempo típico la relación entre las longitudes típicas y las velocidades típicas. Utilizando los anteriores valores podemos escribir para la componente longitudinal x de la ecuación del movimiento

Du/Dt	$-(1/\rho)(\partial p/\partial x)$	$+fv$	$+uv \tan \phi/R$	$+f_{rx}$	
V^2/L	$-(1/\rho)(\Delta p/L)$	fV	V^2/R	?	
$10^6/10^8$	$10^3 \cdot 10^4/10^8$	$10^{-4} \cdot 10^3$	$10^6/(6 \times 10^8)$?	cm/s ²
10^{-2}	10^{-1}	10^{-1}	$1,6 \times 10^{-3}$?	cm/s ²

Valores similares se obtienen para la componente latitudinal. De los anteriores números vemos que en una primera aproximación (para las escalas del movimiento que estamos considerando) la fuerza debida a la presión es del mismo orden que la fuerza de Coriolis, esto es la fuerza de Coriolis y la fuerza de presión están en cuasi-equilibrio. Esta condición recibe el nombre de equilibrio *cuasi-geostrófico*. La aceleración es un término residual, no nulo, pero si pequeño, de dos fuerzas que son del mismo orden de magnitud. Así tenemos que la relación entre la aceleración, del orden de V^2/L y la fuerza de Coriolis, del orden de fV , nos da un cantidad pequeña (en el caso que nos ocupa de movimiento a escala sinóptica), que recibe el nombre de número de *Rossby*, Ro . Así pues,

$$Ro = \frac{V^2/L}{fV} = \frac{V}{fL} \sim 0,1 (\text{a escala sinoptica}) \quad (2.8)$$

Si consideramos el siguiente orden de magnitud debemos de introducir la aceleración y las fuerzas viscosas, que con los números dados no hemos sido capaz de evaluar. Lo que si podemos observar es que los términos debidos a la esfericidad de la Tierra los podemos ignorar sin cometer un gran error.

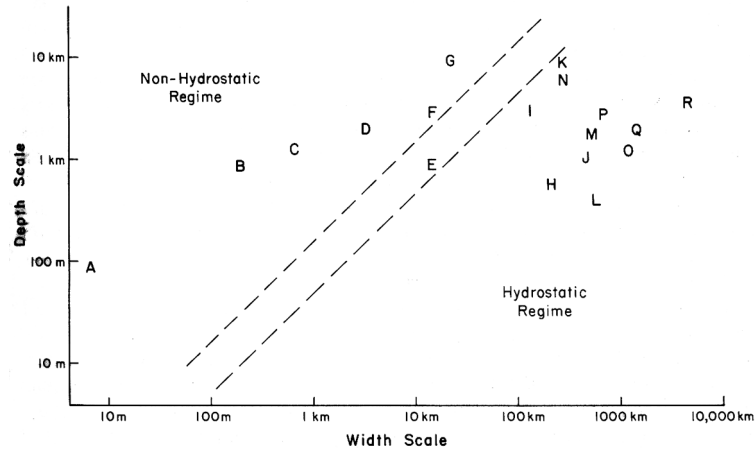


Figura 2.5: Escalas verticales de diversos fenómenos meteorológicos. Las letras corresponden con los fenomenos que aparecen en la figura 2.4

Respecto de la componente vertical, la figura 2.4 nos muestra la escala vertical de los fenómenos analizados en la figura 2.4. Se muestran también un par de líneas a trazos que separan aquellos fenómenos para los que resulta no válida/ válida la aproximación hidrostática en su descripción. Suponiendo que la velocidad vertical podría cambiar de signo en unas 12 horas y que la superficie de

500 mb se encuentra a 6 km de altura, tenemos los siguientes valores

Dw/Dt	$=$	$-(1/\rho)(\partial p/\partial z)$	$-g$	$+f u/\tan\phi$	$+(u^2 + v^2)/R$	$+f_{rz}$	
W^2/L		$-(1/\rho)(\Delta p/H)$	g	fV	$(2 \times V^2)/R$	$?$	
$10/(4,3 \times 10^4)$		$(10^3 \times 5 \times 10^5)/6 \times 10^5$	10^3	$10^{-4} \cdot 10^3$	$(2 \times 10^6)/(6 \times 10^8)$	$?$	cm/s ²
$2,5 \times 10^{-4}$		10^3	10^3	10^{-1}	3×10^{-3}	$?$	cm/s ²

Donde vemos que con muy buena aproximación a escala sinóptica la atmósfera se encuentra en equilibrio hidrostático, así pues para flujo a gran escala podemos poner

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + f_{r,x} \quad (2.9)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - f u + f_{r,x} \quad (2.10)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.11)$$

Las tres ecuaciones del movimiento 2.5–2.7 contienen cinco variables, a saber, las tres componentes de la velocidad (u, v, w), la densidad ρ y la presión p . Tenemos a mano dos ecuaciones más, la ecuación de estado

$$f(\rho, T, p) = 0 \quad (2.12)$$

que en el caso del aire podemos utilizar la ecuación de los gases perfectos

$$p = \rho R_d T_v \quad (2.13)$$

siendo R_d la constante específica del aire seco y T_v la temperatura virtual y la ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{DIV} \mathbf{v} = 0$$

cuya expresión en coordenadas esféricas viene dada por la ecuación

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial(v \cos\phi)}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.14)$$

La ecuación de estado nos ha introducido dos variables mas, la temperatura y la humedad. Por ahora vamos a considerar que tenemos aire seco con lo que el problema se nos reduce a una única variable mas y por tanto a una sola ecuación adicional, la ecuación del calor. Según vimos en el

capítulo primero esta ecuación se expresa de la siguiente forma

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp_T}{Dt} = k(\text{DIV}\mathbf{v})^2 + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{DIV}\mathbf{v}\delta_{ij})^2 + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x^j} \right)$$

El segundo miembro representa la variación de la entropía por disipación viscosa y flujo de calor externo. Vamos a representar estos términos por \dot{Q} , así pues

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp_T}{Dt} = \dot{Q} \quad (2.15)$$

o bien empleando la temperatura potencial

$$\rho c_p \frac{T}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} = \dot{Q}. \quad (2.16)$$

El conjunto de ecuaciones 2.5, 2.6, 2.7, 2.13, 2.14 y 2.16 (ó 2.15) constituyen las ecuaciones que nos describen el movimiento del aire en la atmósfera.

2.3. Ecuación de conservación del momento angular

La ecuación de conservación del momento angular viene dada por la expresión

$$\frac{DL}{Dt} = N$$

siendo L el momento angular respecto de un sistema de referencia inercial y N el momento de las fuerzas exteriores. Multiplicado por un vector unitario ϵ en la dirección del eje de la Tierra y supuesto que este se mantenga constante con el tiempo, obtenemos

$$\frac{D(L \cdot \epsilon)}{Dt} = N \cdot \epsilon$$

Elijamos como punto de referencia para calcular el momento el centro de la Tierra, el momento de las fuerzas exteriores actuando sobre un elemento de masa δm vale

$$N = (-r f_y \mathbf{i} + r f_x \mathbf{j}) \delta m.$$

siendo f_x, f_y las fuerzas por unidad de masa. El vector ϵ tiene como componentes (ver la figura 2.3)

$$\epsilon = \cos \phi \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k}$$

por lo que

$$N \cdot \epsilon = r f_x \cos \phi \delta m$$

El momento angular de dicho elemento de masa vale

$$L = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta m$$

siendo v la velocidad absoluta, que podemos poner como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \Omega \times \mathbf{r}$$

siendo \mathbf{v}_r la velocidad relativa respecto de un sistema de referencia que gira con la Tierra y Ω la velocidad angular de la Tierra. Para no arrastar el subíndice r entenderemos de ahora en adelante que la velocidad \mathbf{v} se refiere a la velocidad relativa. Así pues el momento angular vale

$$L = [\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times (\Omega \times \mathbf{r})] \delta m = [\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \Omega r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \Omega)] \delta m$$

y su proyección sobre el eje de rotación vale

$$L \cdot \epsilon = [\epsilon \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \epsilon \cdot \Omega r^2 - \epsilon \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \Omega)] \delta m$$

poniendo $\epsilon = \Omega / \Omega$ tenemos para los dos últimos términos de la anterior ecuación

$$\epsilon \cdot \Omega r^2 - \epsilon \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \Omega) = \frac{\Omega}{\Omega} \cdot \Omega r^2 - \frac{\Omega}{\Omega} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \Omega) = \frac{1}{\Omega} (\Omega^2 r^2 - \Omega^2 r^2 \sin^2 \phi) = \Omega r^2 \cos^2 \phi$$

mientras que el primero vale

$$\epsilon \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = r u \cos \phi$$

de donde

$$L \cdot \epsilon = [r u \cos \phi + \Omega r^2 \cos^2 \phi] \delta m$$

Esta expresión nos muestra que la proyección del momento angular sobre el eje de la Tierra tiene dos términos, el primero de ellos corresponde al momento angular relativo y el segundo con el momento angular de arrastre debido al movimiento de la Tierra. Un observador situado a una latitud ϕ tiene, debido al movimiento de rotación de la Tierra, una velocidad $\Omega r \cos \phi$ y un momento céntrico respecto del eje de rotación $\Omega r \cos \phi \cdot r \cos \phi = \Omega r^2 \cos^2 \phi$

Teniendo en cuenta que la derivada másica de δm es nula, obtenemos

$$\frac{D}{Dt}[r \cos \phi (u + \Omega r \cos \phi)] = r f_x \cos \phi \quad (2.17)$$

Bajo la aproximación empleada antes de sustituir el radio vector r por el radio de la tierra R , obtenemos

$$\frac{D}{Dt}[\cos \phi (u + \Omega R \cos \phi)] = f_x \cos \phi$$

derivando

$$-\sin \phi \dot{\phi} u + \cos \phi \frac{Du}{Dt} - 2\Omega R \sin \phi \cos \phi \dot{\phi} = f_x \cos \phi$$

teniendo en cuenta, con la aproximación empleada, que

$$\dot{\phi} = \frac{v}{R}$$

obtenemos

$$\frac{Du}{Dt} = f_x + 2\Omega \sin \phi v + \frac{uv}{R} \tan \phi$$

que coincide con la componente x de conservación del momento, una vez despreciado los términos en los que aparece w . He aquí pues la razón de haber eliminado estos términos de la ecuación de conservación del momento.

2.4. Coordenadas verticales alternativas

Además de la coordenada z empleada en las ecuaciones del movimiento analizadas hasta ahora en meteorología se suelen emplear otras coordenadas verticales, entre ellas podemos citar a la presión p , la temperatura potencial θ , las coordenadas ‘sigma’ definida como p/p_0 , siendo p_0 la presión en superficie. El hecho de emplear este tipo de coordenadas en vez de la coordenada z tiene diferentes motivos. Así por ejemplo los radiosondeos, que nos permiten medir las variables meteorológicas, miden como coordenada vertical la presión. Así pues, normalmente, se tiene una fotografía de la atmósfera en la que aparece la presión como coordenada vertical. Desde un punto de vista más teórico, dado que los movimientos de masas de aire tienden a seguir líneas isentrópicas resulta de interés emplear un sistema de coordenadas en el cual el movimiento sea plano.

Vamos a llamar $\zeta(x, y, z, t)$ a esta nueva coordenada. Mantendremos constantes las coordenadas

x, y , así tenemos

$$\begin{aligned}x &= x' \\y &= y' \\z &= z(x', y', \zeta, t)\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \\\zeta &= \zeta(x, y, z, t)\end{aligned}$$

El jacobiano de la anterior transformación, vale

$$J = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

el cual se supone que es distinto de cero, para que la transformación sea reversible.

Sea $A(x, y, z, t)$ una función de las coordenadas, en el nuevo sistema se expresará

$$A(x, y, \zeta, t) = A(x, y, z(x, y, \zeta, t), t)$$

o

$$A(x, y, z, t) = A(x, y, \zeta(x, y, z, t), t).$$

A partir de ésta última ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial x_z} = \frac{\partial A}{\partial x_\zeta} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_z}$$

y lo mismo sucede para y o t . De tal forma que

$$\nabla_z A = \nabla_\zeta A + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \nabla_z(\zeta) \quad (2.18)$$

donde con el operador ∇_z queremos indicar el gradiente a lo largo de z constante y ∇_ζ queremos indicar el gradiente a lo largo de las superficies ζ constantes. Si hacemos $A = z$, se obtiene

$$0 = \nabla_\zeta z + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \nabla_z(\zeta)$$

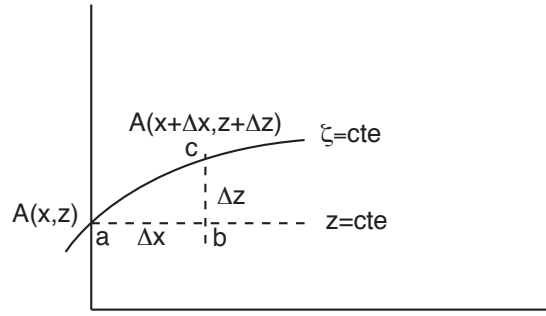


Figura 2.6:

esto es

$$\nabla_{\zeta} z = -\frac{\partial z}{\partial \zeta} \nabla_z(\zeta) \quad (2.19)$$

Así mismo de la expresión

$$A(x, y, \zeta, t) = A(x, y, z(x, y, \zeta, t), t)$$

se puede ver, siguiendo los pasos realizados anteriormente que,

$$\nabla_{\zeta} A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial z} \nabla_{\zeta} z, \quad (2.20)$$

de donde, si $A = \zeta$,

$$0 = \nabla_z \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \nabla_{\zeta} z, \quad (2.21)$$

A partir de la figura, 2.6 podemos observar el significado de las derivadas de la magnitud A a lo largo de z y de ζ constante. La cantidad

$$\frac{\partial A}{\partial x_{\zeta}}$$

representa el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, de la cantidad

$$\frac{A(c) - A(a)}{\Delta x}$$

Así mismo

$$\frac{\partial A}{\partial x_z}$$

representa el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, de la cantidad

$$\frac{A(b) - A(a)}{\Delta x}$$

Dado que

$$\frac{A(c) - A(a)}{\Delta x} = \frac{A(b) - A(a)}{\Delta x} + \frac{A(c) - A(b)}{\Delta x} = \frac{A(b) - A(a)}{\Delta x} + \frac{A(c) - A(b)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

se tiene

$$\frac{\partial A}{\partial x \zeta} = \frac{\partial A}{\partial x_z} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x \zeta}$$

que coincide con la expresión 2.20 obtenida anteriormente

Por otra parte

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

de donde tomando $A = z$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^{-1}$$

Empleando las anteriores ecuaciones podemos evaluar cuanto vale la derivada másica de A en el nuevo sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt_z} &= \frac{\partial A}{\partial t_z} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_z A + w \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial t_\zeta} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot [\nabla_\zeta A + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \nabla_z \zeta] + w \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial t_\zeta} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_\zeta A + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_z \zeta + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right] = \frac{\partial A}{\partial t_\zeta} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_\zeta A + \dot{\zeta} \frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{DA}{Dt_\zeta}, \end{aligned}$$

siendo $\dot{\zeta}$ la velocidad vertical en el sistema ζ .

Se puede demostrar fácilmente, siguiendo los pasos realizados anteriormente que,

$$\nabla_\zeta A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial z} \nabla_\zeta z,$$

de donde

$$0 = \nabla_z \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \nabla_\zeta z,$$

Haciendo $A = p$, el gradiente horizontal de presión se puede expresar.

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = \frac{1}{\rho} \nabla_\zeta p - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_\zeta z$$

supuesta válida la ecuación hidrostática,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

tenemos

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = \frac{1}{\rho} \nabla_\zeta p + g \nabla_\zeta z = \frac{1}{\rho} \nabla_\zeta p + \nabla_\zeta \phi$$

siendo $\phi = gz$ el *geopotencial*. Utilizando las ecuaciones anteriores obtenemos para la ecuación horizontal del movimiento

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\zeta} p - \nabla_{\zeta} \phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h + F$$

y la ecuación hidrostática resulta

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + g = 0$$

o bien, empleando el geopotencial

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = 0$$

La obtención de la ecuación de continuidad es algo más complejo. Despreciando el término de esfericidad, la ecuación de continuidad la podemos poner como

$$\frac{D \log \rho}{Dt} + \nabla_z \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Los dos últimos términos los podemos expresar como

$$\nabla_z \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_{\zeta} \cdot \mathbf{v}_h - \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \zeta} \cdot \nabla_{\zeta} z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

la velocidad vertical en coordenadas ζ la podemos poner como

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_{\zeta} z + \dot{\zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

por lo que

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial \zeta} \cdot \nabla_{\zeta} z + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right).$$

Sustituyendo

$$\nabla_z \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_{\zeta} \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_{\zeta} + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = \nabla_{\zeta} \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{D(\partial z / \partial \zeta)}{Dt} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{-1}$$

tenemos

$$\nabla_z \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_\zeta \cdot \mathbf{v}_h + \frac{D(\log(\partial z / \partial \zeta))}{Dt} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta}$$

llevando esta expresión a la ecuación de continuidad obtenemos

$$\frac{D(\log(\rho \partial z / \partial \zeta))}{Dt} + \nabla_\zeta \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.22)$$

Suponiendo válida la aproximación hidrostática

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = g$$

de donde

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = g$$

por lo que

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = -\rho \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^{-1} g = -\rho \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) g$$

Sustituyendo en la expresión de la ecuación de continuidad, obtenemos la siguiente ecuación como expresión de la ecuación de continuidad

$$\frac{D(\log(\partial p / \partial \zeta))}{Dt} + \nabla_\zeta \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.23)$$

2.4.1. La presión como coordenada vertical

Elijamos a la presión p como coordenada vertical, haciendo $\zeta = p$ en las ecuaciones de conservación del momento y en la ecuación de continuidad, teniendo en cuenta que $\nabla_\zeta p = \nabla_p p = 0$ se obtiene

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -\nabla_p \phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h + F \quad (2.24)$$

como ecuación de conservación del momento horizontal,

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$$

como ecuación hidrostática y

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0,$$

siendo $\omega = \dot{p}$ la velocidad vertical en el sistema p , la ecuación de continuidad. Otra forma de llegar a esta ecuación resulta de aplicar la ley de conservación de la masa,

$$\frac{D\delta m}{Dt} = 0$$

teniendo en cuenta que

$$\delta m = \rho \delta \mathcal{V}_x = \rho J \delta \mathcal{V}_p$$

siendo J el jacobiano de la transformación de coordenadas z en coordenadas p . Este jacobiano vale

$$J = \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g}$$

por lo que

$$\delta m = \rho J \delta \mathcal{V}_p = -\frac{1}{g} \delta \mathcal{V}_p$$

y la ley de conservación de la masa se escribe

$$\frac{D\delta m}{Dt} = \frac{D\delta \mathcal{V}_p}{Dt} = 0$$

Ahora bien, vimos en el primer capítulo que

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{D\delta \mathcal{V}}{Dt} = \text{DIV} \mathbf{v}$$

por lo que

$$\frac{D\delta \mathcal{V}_p}{Dt} = \text{DIV} \mathbf{v}_p = 0$$

esto es

$$\nabla_p \mathbf{v}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

obteniendo de nuevo la ecuación de continuidad.

Nota

Podemos emplear la técnica utilizada para hallar la ecuación de continuidad anterior, en el caso general. Teniendo en cuenta que

$$0 = \frac{D(\log \delta m)}{Dt} = \frac{D(\log(\rho \mathcal{V}_x))}{Dt}$$

y que

$$\delta \mathcal{V}_x = J \delta \mathcal{V}_\zeta$$

se obtiene

$$\frac{D(\log(\rho J))}{Dt} + \frac{1}{\delta \mathcal{V}_\zeta} \frac{D \delta \mathcal{V}_\zeta}{Dt} = 0$$

Ahora bien, como hemos visto

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}_\zeta} \frac{D \delta \mathcal{V}_\zeta}{Dt} = \nabla_\zeta \cdot \mathbf{v}$$

siendo $\nabla_\zeta \cdot \mathbf{v}$ la divergencia en ζ de \mathbf{v} . Por lo que

$$\frac{D(\log(\rho J))}{Dt} + \nabla_\zeta \cdot \mathbf{v} = 0$$

Pero

$$J = \frac{\partial z}{\partial \zeta}$$

por lo que

$$\frac{D(\log(\rho \frac{\partial z}{\partial \zeta}))}{Dt} + \nabla_\zeta \cdot \mathbf{v} = 0$$

obteniendo la ecuación de continuidad, ya deducida anteriormente por una método mucho más laborioso.

Teniendo en cuenta el hecho de que la divergencia es la variación relativa del volumen podemos dar la siguiente interpretación a la divergencia horizontal,

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{D \delta \mathcal{V}}{Dt} = \frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{D \delta A \delta p}{Dt} = \frac{1}{\delta A} \frac{D \delta A}{Dt} + \frac{1}{\delta p} \frac{D \delta p}{Dt}$$

siendo δA el elemento de área. Ahora bien,

$$\frac{D \delta p}{Dt} = \delta \frac{D p}{Dt} = \delta \omega$$

por lo que

$$\frac{1}{\delta \mathcal{V}} \frac{D \delta \mathcal{V}}{Dt} = \frac{1}{\delta A} \frac{D \delta A}{Dt} + \frac{\delta \omega}{\delta p} = \frac{1}{\delta A} \frac{D \delta A}{Dt} + \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

en el límite cuando $\delta \mathcal{V} \rightarrow 0$. Por el hecho que la variación relativa del volumen es la divergencia

$$\frac{1}{\delta A} \frac{D \delta A}{Dt} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = \nabla_p v_h + \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

por lo que

$$\frac{1}{\delta A} \frac{D\delta A}{Dt} = \nabla_p \mathbf{v}_h$$

Así pues podemos interpretar la divergencia horizontal como la variación relativa del área sobre una superficie isobárica.

Si nos fijamos en la ecuación del movimiento, vemos que el termino de fuerzas de presión

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_z p$$

lo hemos sustituido por

$$\nabla_p \phi$$

por lo que, en primer lugar, podemos decir que hemos linearizado dicho término y en segundo lugar se ha sustituido el gradiente de las superficies isobáricas por el gradiente del campo de alturas de una superficie isobárica. Si pensamos en una superficie isobárica como si fuese una superficie topográfica en el que se representan las líneas de igual cota o altura, este término $\nabla_p \phi$ nos da la inclinación de la superficie isobárica.

Vemos por otra parte que el flujo se hace no divergente en este sistema de coordenadas. Integrando esta ecuación entre $p = 0$ donde $\omega = 0$ y la presión en superficie obtenemos

$$\omega_s = - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \mathbf{v}_h dp$$

puesto que en la superficie se supone que $\omega = 0$, se tiene

$$\omega_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla_z p_s$$

por lo que se obtiene como ecuación pronóstico para la presión en superficie

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\mathbf{v}_s \cdot \nabla_z p_s - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \mathbf{v}_h dp$$

supuesto válida la ley de no deslizamiento, esto es, la velocidad horizontal es cero en la superficie, obtenemos

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \mathbf{v}_h dp$$

como ecuación pronóstico para la presión en superficie.

Ejercicio 2.1 La presión en una atmósfera isoterma disminuye exponencialmente con la altura $p = p_0 \exp(-z/H)$, siendo H la escala de altura. Podemos utilizar esta ecuación para definir una nueva coordenada z^* definida por la expresión

$$z^* = -H \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

Expresar las ecuaciones del movimiento en esta nueva coordenada.

La nueva coordenada z^* , aunque tiene dimensiones de longitud, es esencialmente una coordenada de presión, pues siendo H y p_0 constantes, $z^* \sim \log p$. Vimos antes que

$$\frac{DA}{Dt} \frac{1}{z} = \frac{DA}{Dt} \frac{1}{\zeta}$$

por lo que

$$\frac{DA}{Dt} \frac{1}{z} = \frac{DA}{Dt} \frac{1}{z^*}$$

Así mismo $\nabla_p \phi = \nabla_{\log p} \phi = \nabla_{z^*} \phi$ por lo que la ecuación del movimiento en coordenadas isobáricas 2.24, se escribe en el nuevo sistema en la forma

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -\nabla_{z^*} \phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h + F$$

siendo

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial y} + \dot{z}^* \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z^*}$$

De la ecuación de la hidrostática

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \log p} = -RT$$

teniendo en cuenta la definición de z^* , obtenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial z^*} = \frac{RT}{H}$$

que es la ecuación de la hidrostática en la nueva variable z^* .

La ecuación de continuidad en coordenadas isobáricas toma la forma

$$\nabla_p \mathbf{v}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

En el nuevo sistema, puesto los procesos a p constantes lo son a z^* constante, el término $\nabla_p v_h$ es igual a $\nabla_{z^*} v_h$. Respecto del otro término, tenemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial p}$$

puesto que $\omega = \dot{p} = -(p/H)\dot{z}^*$, llamando $\dot{z}^* = w^*$, tenemos

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(-\frac{p}{H} w^* \right) = -\frac{p}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} \frac{\partial p}{\partial z^*}$$

y por tanto

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \frac{\partial \omega}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial p} = \left[-\frac{p}{H} \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - w^* \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{p}{H} \right) \right] \frac{\partial z^*}{\partial p} = \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H}$$

Teniendo en cuenta esta expresión la ecuación de continuidad resulta ser,

$$\nabla_p v_h + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0$$

Introduciendo la densidad $\rho^* = \rho_0 \exp(-z^*/H)$, la anterior ecuación toma la forma

$$\nabla_p v_h + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^* w^*}{\partial z^*} = 0$$

respecto de la ecuación del calor

$$c_p \frac{D(\log \theta)}{Dt} = \frac{1}{T} \dot{q}$$

tenemos

$$c_p \frac{D \log T}{Dt} - R \frac{D \log p}{Dt} = \frac{1}{T} \dot{q}$$

y teniendo en cuenta la definición de z^* ,

$$c_p \frac{D \log T}{Dt} + R \frac{w^*}{H} = \frac{1}{T} \dot{q}$$

y por tanto resulta como ecuación del calor la expresión

$$c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{RT}{H} w^* = \dot{q}$$

con lo que completamos nuestro ejercicio. Se deja al lector que intente calcular cuales son las ecuaciones del movimiento en una nueva z' que corresponde con la altura a la que se alcanza la presión p es una atmósfera adiabática (ahora $z' = (R\theta_0/g\kappa)(1 - (p/p_0)^\kappa)$, $\kappa = R/c_p$).

2.4.2. La temperatura potencial como coordenada vertical

Como dijimos antes la ventaja que presenta este sistema de coordenadas es que en condiciones adiabáticas las superficies isentrópicas se hacen superficies materiales. Haciendo ahora $\zeta = \theta$, la ecuación de conservación del momento resulta ser

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_\theta p - \nabla_\theta \phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h + \mathbf{F}$$

teniendo en cuenta la ecuación de las adiabática

$$\frac{1}{\theta}\nabla_\theta \theta = 0 = \frac{1}{T}\nabla_\theta T - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p}\nabla_\theta p$$

de donde

$$-\frac{1}{\rho}\nabla_\theta p = c_p \nabla_\theta T$$

sustituyendo en la ecuación de conservación del momento

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -\nabla_\theta (c_p T + \phi) - f\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h + \mathbf{F} \quad (2.25)$$

La cantidad $c_p T + \phi$ recibe el nombre de *potencial de Montgomery*. La ecuación hidrostática se expresa como

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

teniendo en cuenta la ecuación de la adiabática

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

despejando el último término y sustituyendo en la ecuación de la hidrostática se obtiene

$$\frac{\partial (c_p T + \phi)}{\partial \theta} = c_p \frac{T}{\theta}$$

Respecto de la ecuación de continuidad, sustituyendo ζ por θ se obtiene

$$\frac{D}{Dt} \left(\log \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_\theta \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta}$$

2.5. El sistema de coordenadas naturales

En este sistema una de las líneas coordenadas es la propia trayectoria de la partícula. El elemento de longitud a lo largo de la trayectoria de una partícula del fluido vale

$$Ds^2 = D\mathbf{x} \cdot D\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} Dt^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} Dt^2 = v^2 Dt^2 \quad (2.26)$$

de donde

$$Ds = vDt$$

Así mismo si dividimos por Ds^2 la ecuación 2.26, vemos que

$$1 = \frac{D\mathbf{x}}{Ds} \cdot \frac{D\mathbf{x}}{Ds}$$

esto es, el vector $D\mathbf{x}/Ds$ es un vector unitario. La velocidad de una partícula vale

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt}$$

utilizando s como parámetro para describir la trayectoria de la partícula tenemos

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{D\mathbf{x}}{Ds} \frac{Ds}{Dt} = v\mathbf{t} \quad (2.27)$$

donde hemos puesto $\mathbf{t} = \frac{D\mathbf{x}}{Ds}$ que de acuerdo a lo visto antes es un vector unitario. Dada esta propiedad del vector \mathbf{t} , tenemos

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$$

derivando respecto de s ,

$$2 \frac{D\mathbf{t}}{Ds} \cdot \mathbf{t} = 0$$

esto es los vectores \mathbf{t} y $D\mathbf{t}/Ds$ son ortogonales. Puesto que Ds tiene dimensiones de longitud y \mathbf{t} no tiene dimensiones pongamos

$$\frac{D\mathbf{t}}{Ds} = \frac{1}{r} \mathbf{n}$$

siendo r el radio de curvatura y \mathbf{n} un vector unitario, que por construcción es normal al vector \mathbf{t} y recibe el nombre de *vector normal*, \mathbf{t} por construcción recibe el nombre de *vector tangente*. El plano formado por ambos vectores es el *plano osculador*. Derivando respecto del tiempo la ecuación de la

velocidad 2.27 obtenemos la aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{d(v\mathbf{t})}{Dt} = \frac{Dv}{Dt}\mathbf{t} + v\frac{D\mathbf{t}}{Dt} = \frac{Dv}{Dt}\mathbf{t} + v^2\frac{D\mathbf{t}}{Ds} = \frac{Dv}{Dt}\mathbf{t} + \frac{v^2}{r}\mathbf{n} \quad (2.28)$$

donde vemos que la aceleración se ha separado en aceleración tangencial Dv/Dt y aceleración normal v^2/r . Empleando la anterior ecuación para expresar la aceleración, la ecuación del movimiento se puede poner como

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - \mathbf{g}\mathbf{k} \cdot \mathbf{t} - f(\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{t} + f_{r,t} \quad (2.29)$$

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - \mathbf{g}\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} - f(\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n} + f_{r,n} \quad (2.30)$$

La derivada másica de la velocidad toma ahora la forma,

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\frac{\partial}{\partial s})v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{2}v^2)$$

Resulta interesante expresar en este sistema de coordenadas la divergencia de la velocidad

$$\begin{aligned} \text{DIV}\mathbf{v} &= \nabla \cdot (v\mathbf{t}) = (\mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{b}\frac{\partial}{\partial b}) \cdot (v\mathbf{t}) = \\ &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}\frac{\partial v}{\partial s} + v\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} + v\mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial b} = \frac{\partial v}{\partial s} + v\left(\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} + \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial b}\right) \end{aligned}$$

El término entre paréntesis se puede interpretar como el cambio en la dirección del viento (dada por \mathbf{t}) a lo largo de las direcciones \mathbf{n} y \mathbf{b} . Así pues la divergencia procede de dos términos uno de ellos asociado a la variación de la velocidad a lo largo del flujo y que recibe el nombre de *divergencia en velocidad* y el otro a un cambio de dirección. Si suponemos que el flujo es horizontal nos queda como términos en la anterior expresión

$$\nabla_z \mathbf{v}_h = \frac{\partial v}{\partial s} + v\mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s} + v\frac{\partial \psi}{\partial n}$$

siendo $\partial\psi/\partial n$ el cambio en la dirección del viento en la dirección ortogonal a este. Este término recibe el nombre de *difluencia o confluencia horizontal*, dependiendo del signo. Así pues la ecuación de continuidad en coordenadas isobáricas, teniendo en cuenta la anterior expresión, toma la forma

$$\frac{\partial v}{\partial s} + v\frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Para comprender el significado físico de los anteriores términos, fijémonos en la figura 2.7. La ilustración de la izquierda nos muestra el efecto de la divergencia en velocidad, las partículas que están

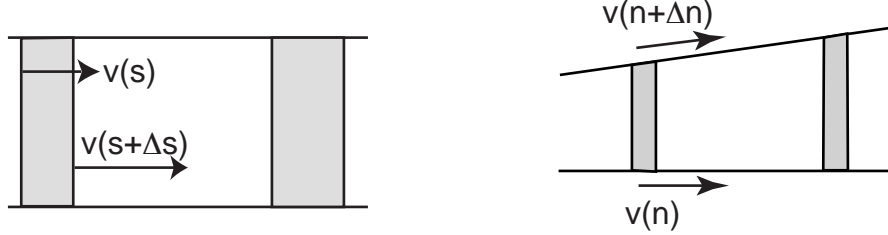


Figura 2.7:

en la parte de adelante del rectángulo tienen una velocidad mayor que las que están en la parte de atrás por lo que el rectángulo aumenta de tamaño, existe divergencia. La ilustración de la derecha nos muestra el efecto de la difluencia (en este caso). Al tener diferente orientación los vectores velocidad en la parte inferior y superior el rectángulo está aumentando de tamaño, por lo que también existe divergencia.

2.5.1. El viento geostrófico

Si consideramos que los movimientos en la atmósfera a gran escala son prácticamente horizontales, podemos poner para este tipo de movimientos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_h = v\mathbf{t}$$

$$g\mathbf{k} \cdot \mathbf{t} = g\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$f(\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{t} = f(\mathbf{k} \times v\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

$$f(\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n} = f(\mathbf{k} \times v\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = f v$$

de donde

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + f_{r,t} \quad (2.31)$$

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v + f_{r,n} \quad (2.32)$$

que constituyen las ecuaciones del movimiento de un flujo horizontal en coordenadas naturales. Si suponemos que el fluido es no viscoso,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (2.33)$$

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v \quad (2.34)$$

Supongamos ahora que el flujo es paralelo a las isobaras, esto es, la trayectoria de la partícula no corta a las isobaras, en estas condiciones

$$\frac{\partial p}{\partial s} = 0$$

por lo que

$$\frac{Dv}{Dt} = 0$$

y por tanto el módulo de la velocidad es constante. Como ecuación de la trayectoria tenemos

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v$$

Supongamos también que las isóbaras sean líneas rectas o con un radio de curvatura muy grande. Como estamos suponiendo que las isóbaras y la trayectoria son paralelas, tendremos que r es muy grande y por tanto

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v_g \quad (2.35)$$

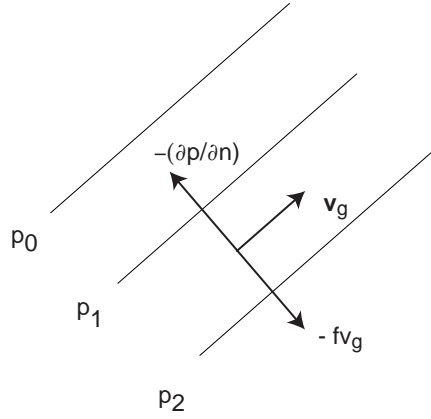
de donde

$$v_g = -\frac{1}{f \rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.36)$$

esta ecuación recibe el nombre de *ecuación geostrófica* y el viento así obtenido *el viento geostrófico*. De la ecuación 2.35 vemos que el viento geostrófico surge como un equilibrio entre la fuerza de presión y la fuerza de Coriolis, bajo las hipótesis adicionales de flujo horizontal, isóbaras rectas y flujo paralelo a las isóbaras.

La fuerza de presión $-\partial p / \partial n$ va desde las altas a las bajas, por otra parte la fuerza de Coriolis actúa hacia la derecha del vector velocidad (en el hemisferio norte). Como ambos términos se compensan, (ecuación 2.35) el vector velocidad deja a la izquierda a las bajas presiones, ver la figura 2.8

Tal y como ha surgido la ecuación del viento geostrófico, equilibrio entre las fuerzas de presión y

**Figura 2.8:**

de Coriolis, en forma vectorial la podemos escribir como

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla_z p - f(\mathbf{k} \times \mathbf{v}_g)$$

multiplicando vectorialmente por \mathbf{k} , obtenemos para el viento geostrófico la ecuación

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\rho f} \mathbf{k} \times \nabla_z p \quad (2.37)$$

ecuación que da lugar a dos ecuaciones escalares

$$u_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.38)$$

$$v_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.39)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que en el sistema de coordenadas isobárico

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = \nabla_p \phi,$$

podemos expresar la ecuación del viento geostrófico como

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times \nabla_p \phi \quad (2.40)$$

en el que vemos que ha desaparecido la densidad, lo que facilitará su uso con posterioridad. Esta

ecuación nos dice que el viento geostrófico es proporcional a la inclinación de las superficies isobáricas.

2.5.2. Viento del gradiente

Para la obtención del viento geostrófico hicimos la aproximación de que el radio de curvatura de las isóbaras se hacia infinito, esto es, las isobaras eran rectas. Si quitamos esta hipótesis manteniendo el resto, obtenemos para el viento la ecuación

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v$$

que podemos poner como

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v - \frac{v^2}{r} = 0$$

lo que nos indica que la fuerza de presión, la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga están en equilibrio. Despejando v obtenemos la ecuación

$$v = -\frac{f r}{2} \pm \left(\frac{f^2 r^2}{4} - r \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

que es la expresión del llamado *viento del gradiente*. No todas las soluciones de la anterior ecuación son válidas. Solamente aquellas que hagan a v real y positiva son aceptables. El criterio de signo es el siguiente. El sistema \mathbf{t}, \mathbf{n} esta orientado de tal forma que se va de \mathbf{t} a \mathbf{n} en dirección contraria a las manecillas del reloj. Si la curva es convexa el radio de curvatura es negativo (casos (B), (C) y (D)) de la figura (2.9) y si la curva es concava el radio de curvatura es positivo (caso (A)) de la figura (2.9). La fuerza de presión $-(1/\rho)\partial p/\partial n$ es positiva en los casos (A), (B), (D), y es negativa en el caso (C). La fuerza de Coriolis $-f v$ es negativa en todos los casos y la fuerza centrífuga $(-v^2/r)$ es positiva en los casos (B), (C), (D) y negativa en el caso (A). Analicemos ya las cuatro soluciones posibles

baja regular, caso (A) de la figura, en este caso el radio de curvatura es positivo y $\partial p/\partial n$ es negativo con lo que el radicando es positivo y la única raíz posible es

$$v = -\frac{f r}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2 r^2}{4} + r \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| \right)}$$

alta regular, caso (B) de la figura, en este caso el radio de curvatura es negativo y $\partial p/\partial n$ es tambien

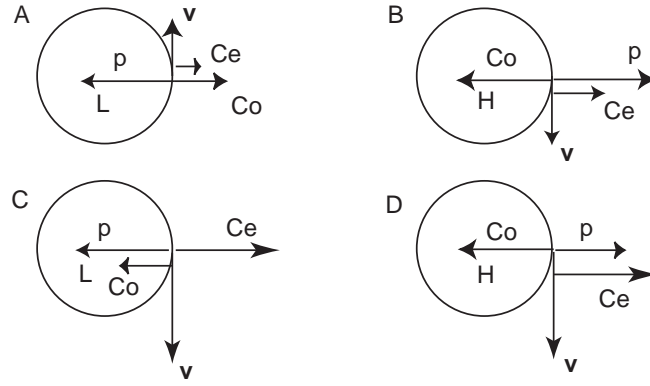


Figura 2.9: Balance de fuerzas en el hemisferio norte para los cuatro tipos de viento de gradiente: (A) baja regular; (B) alta regular; (C) baja anómala; (D) alta anómala. P designa la fuerza de presión $-(1/\rho)\partial p/\partial n$, Ce la fuerza centrífuga $(-v^2/r)$ y Co la fuerza de Coriolis $(-fv)$

negativo por lo que $r\partial p/\partial n$ es positivo y solo tendremos solución si

$$\left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| < \frac{f^2 |r|}{4} \rho$$

Esta ecuación nos dice que según vamos hacia el centro de las altas $|r| \rightarrow 0$ y por tanto el gradiente de presiones tiende también a cero. Esto justifica porque en el centro de las altas el campo de presiones tiende a ser plano y el viento suave comparado con la región cercana al centro de las bajas. De las dos raíces posibles tomamos la negativa por lo que $v < |f r|/2$

baja anómala, caso (C) de la figura. En este caso, el radio de curvatura es negativo y $\partial p/\partial n$ es positivo por lo que al igual que en el caso de la baja regular el radicando es positivo, la única solución posible es

$$v = -\frac{f r}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2 r^2}{4} + r \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| \right)}$$

La diferencia con el caso (A) es que ahora $-f r/2$ es positivo por lo que el viento en este caso es mucho más intenso que en el caso (A)

alta anómala, caso (D) de la figura. En este caso, el radio de curvatura es negativo y $\partial p/\partial n$ es negativo también, como en el caso (B) solo tendremos solución si

$$\left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| < \frac{f^2 |r|}{4} \rho$$

de las dos raíces posibles, tomamos la positiva por lo que $v > |f r|/2$. La diferencia entre el caso

(B) y (D) está en la intensidad de la fuerza centrífuga y el gradiente de presión. En la baja regular, el viento es suave y por tanto la fuerza centrífuga es menor que el gradiente de presiones. En el caso de la alta anómala el viento es mucho mas intenso y por tanto la fuerza centrífuga es mayor que el gradiente de presiones.

En todos los casos, excepto en la baja anómala, la fuerza de Coriolis se opone al gradiente de presiones, se dice entonces que el flujo es *bárico*. El flujo en la baja anómala es *antibárico*. En este caso, el viento geostrófico es negativo (pues la fuerza de presión es negativa) y por tanto una mala representación del viento real. Por otra parte, como nos muestra la figura 2.9, el flujo de gradiente es ciclónico solo cuando la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis tienen el mismo signo ($r \cdot f > 0$) y es anticiclónico cuando ambas fuerzas tienen signo contrarios ($r \cdot f < 0$).

Dada la definición del viento geostrófico, la ecuación que define el viento del gradiente se puede expresar como

$$\frac{v^2}{r} + f v - f v_g = 0$$

de donde

$$\frac{v_g}{v} = 1 + \frac{v}{r f}$$

por lo que para flujo ciclónico ($r f > 0$), v_g es mayor que el viento de gradiente mientras que cuando el flujo es anticiclónico ($r f < 0$), v_g es menor. Por lo tanto el viento geostrofico sobreestima al viento del gradiente (o viento balance) en regiones de curvatura ciclónica y el flujo se dice *subgeostrófico* y lo subestima en regiones de curvatura anticiclónica y el flujo se dice *supergeostrófico*. En latitudes medias para sistemas a escala sinoptica, la diferencia entre el viento del gradiente y el viento geostrófico no excede de un 10 – 20 %. En el caso de la baja anomala en la que el viento geostrofico es negativo, necesariamente $v/(r f) < -1$. Por tanto el flujo antibárico esta asociado con intensos vortices de pequeña escala.

2.5.3. Otros tipos de vientos

Flujo inercial

Suponer un caso en el que existe un equilibrio entre las fuerzas inerciales, esto es entre la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis, en este caso se dice que el flujo es inercial. Se debe de verificar que

$$\frac{v^2}{r} + f v = 0$$

y por tanto

$$r = -v/f$$

por lo que el radio de curvatura es constante. Puesto que $v > 0$, entonces $rf < 0$ por lo que el flujo es anticiclónico. Como el movimiento es periódico, el periodo vale

$$P = \left| \frac{2\pi r}{v} \right| = \left| \frac{2\pi}{f} \right| = \frac{\pi}{|\sin \phi|}$$

El periodo de rotación de un pendulo de Foucalt es de $2\pi/\sin \phi$, que recibe el nombre *día pendulo*, por lo que el periodo del movimiento inercial es un medio de un día pendulo.

En la atmósfera la mayor parte de los movimientos son debidos a gradientes de presiones, la condición de presión uniforme requeridos para la existencia de movimiento inercial puro apenas si se observan. En el océano, sin embargo, existen flujos en lo que la fuerza se debe a un viento externo y no a la existencia de un gradiente de presión interno, resulta entonces que existe una gran cantidad de energía asociada a corrientes que oscilan con periodos cercanos al periodo inercial.

Una de las consecuencias importantes que pueden extraer de este sección es el efecto estabilizador de las fuerzas inerciales. Según acabamos de ver si perturbamos una partícula, dándole una cierta velocidad inicial v , y dejamos que solo actuen la fuerzas inerciales, vemos que la partícula tras recorrer una circunferencia de radio v/f vuelve otra vez a su sitio original (hemos de suponer que no nos separamos mucho del punto original para que f no varíe en exceso y podamos suponer que se mantiene constante)

Flujo ciclostrófico

Suponer ahora que podemos despreciar la fuerza de Coriolis frente a la fuerza centrífuga. Como esta última es inversamente proporcional al radio, esta situación se da cuando el radio de curvatura es pequeño. En esta situación, el balance de fuerzas se alcanza cuando

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{v^2}{r} = 0$$

de donde

$$v = \sqrt{\left(-r \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right)}$$

Tenemos dos casos posibles para que la anterior ecuación tenga solución. (a) que $r > 0$ y $\partial p/\partial n < 0$ y (b) $r < 0$ y $\partial p/\partial n > 0$ (ver la figura 2.10) En el primer caso el flujo es ciclónico mientras que el segundo caso corresponde con flujo anticiclónico. En ambos casos la fuerza de presión va dirigida hacia el

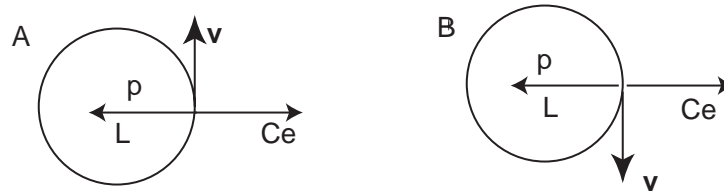


Figura 2.10: Balance de fuerzas en el caso de flujo ciclostrofico. (a) flujo ciclónico, (b) flujo anticiclónico.

centro de curvatura y la fuerza centrífuga se aleja del centro de curvatura. La hipótesis que conduce a la existencia del flujo ciclostrofico es que la fuerza centrífuga es mucho mayor que la de Coriolis, esto es

$$\frac{v^2/r}{fv} = \frac{v}{fr} \gg 1$$

La anterior cantidad, que es por construcción adimensional, recibe el nombre de *número de Rossby*. Así pues se tiene flujo ciclostrofico si el número de Rossby es muy grande. Suponer que tenemos un tornado en el que v es del orden de 30 m/s a una distancia de unos 300 m del centro del vórtice. Suponiendo que $f = 10^{-4} \text{s}^{-1}$, se obtiene para el número de Rossby $Ro \approx 10^3$, lo que significa que podemos despreciar la fuerza de Coriolis en el caso de un tornado típico. En la mayoría de los casos se observa que estos giran en el sentido ciclónico. Esto se debe a que el entorno en el que están embebidos es ciclónico. En el caso de pequeños remolinos estos tienden a girar tanto en el sentido ciclónico como anticiclónico.

2.6. Efecto del rozamiento

En la sección 2.5.1 obtuvimos como ecuaciones del movimiento para flujo horizontal la ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + f_{r,t} \\ \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - fv + f_{r,n} \end{aligned}$$

vamos a suponer ahora que el rozamiento no es nulo. Al igual que se hace usualmente en mecánica clásica, supondremos que la fuerza del rozamiento es de la forma

$$\mathbf{f}_r = -\mu \mathbf{v} = -\mu v \mathbf{t}$$

de donde, $f_{r,t} = -\mu v$ y $f_{r,n} = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \mu v \\ \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v\end{aligned}$$

En condiciones de equilibrio entre las diversas fuerzas que intervienen, se tiene que $\mathbf{v} = \mathbf{cte}$, lo que significa que tanto su módulo como su dirección se mantienen constantes, esto significa que $Dv/Dt = 0$ y que $\mathbf{t} = \mathbf{cte}$ y por tanto el radio de curvatura se hace infinito, de donde

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \mu v \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - f v\end{aligned}$$

Vemos ahora que $(\frac{\partial}{\partial p} / \frac{\partial}{\partial s})$ es diferente de cero lo que implica que el flujo deja de ser paralelo a las isobaras y por tanto las corta. Supongamos que estas últimas sean rectas, nos preguntamos cuanto valdrá el ángulo que forman las isobaras y la trayectoria así como el valor de la fuerza del viento. Para ello fijemonos en la figura 2.11 donde se ilustra las tres fuerzas implicadas, el gradiente de presión,

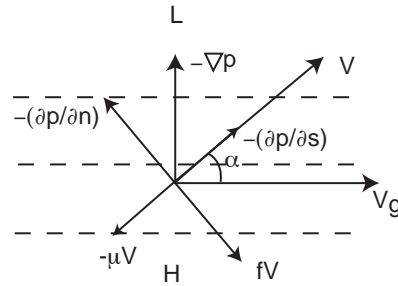


Figura 2.11: Esquema de la influencia del rozamiento sobre el viento.

la fuerza de Coriolis y el rozamiento. Obviamente para que las tres fuerzas estén en equilibrio es necesario que la trayectoria corte a las isobaras.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

y puesto que $(\partial p / \partial x) = 0$, tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Puesto que por definición del viento geostrofico,

$$f v_g = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

y

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sin \alpha$$

siendo α el ángulo formado por las isobaras y las trayectorias. Sustituyendo

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = f v_g \sin \alpha$$

Una ecuación análoga se obtiene para $(\partial p / \partial n)$ cambiando el seno por el coseno. Llevando estas expresiones a las ecuaciones del movimiento se obtiene

$$0 = f v_g \sin \alpha - \mu v$$

$$0 = f v_g \cos \alpha - f v$$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene

$$\tan \alpha = \frac{\mu}{f} \quad (2.42)$$

lo que significa que al aumentar el rozamiento aumenta el ángulo. En la atmósfera el mayor rozamiento se obtiene cerca de la superficie del suelo, según nos vamos alejando de la superficie de la Tierra el rozamiento va disminuyendo. Esto significa que el mayor giro del viento respecto del viento geostrofico se da cerca de la superficie y según subimos en altura el viento va virando hacia el viento geostrofico como si el vector velocidad hiciese una espiral. Esta espiral se denomina espiral de Ekman.

Elevando al cuadrado y sumando llegamos a,

$$v = \frac{f v_g}{\sqrt{\mu^2 + f^2}} \quad (2.43)$$

Donde podemos apreciar que si el rozamiento es cero, $v = v_g$ como debe de suceder y que con rozamiento $v < v_g$ y al aumentar este, disminuye la velocidad.

Una consecuencia importante del rozamiento es que el viento cruza a las isobaras en el sentido de las presiones decrecientes (ver la figura 2.11). Esto tiene como consecuencia que en las bajas el viento gira hacia el interior de la misma haciendo que ésta sea un centro de convergencia lo que tiene

importantes consecuencias dinámicas pues por la ecuación de conservación de la masa, en la zona de convergencia el aire tiende a ascender, por lo tanto a enfriarse y si es posible a condensar formando nubes. Lo contrario sucede si tenemos un centro de altas presiones. En este caso las masas de aire tienden a descender y por tanto a comprimirse y calentarse dando lugar a inversiones llamadas subsidentes.

Una mejora del modelo anterior se obtiene considerando de forma más realista la forma de los rozamientos. Vimos en el capítulo 1 que los esfuerzos cortantes venían parametrizados por un tensor que denominábamos como parte anisotropa del tensor de esfuerzos D_{ij} de tal forma que la ecuación del movimiento se puede escribir como

$$\rho \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\rho g \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$$

Veremos en un capítulo posterior que si las velocidades no son muy grandes la anterior ecuación se puede linealizar, de tal forma que

$$\rho \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}$$

Si nos fijamos únicamente en la componente horizontal tenemos

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{\partial}{\partial x_j} D_{1j}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{\partial}{\partial x_j} D_{2j}$$

Normalmente la capa de la atmósfera o del océano donde tienen importancia los rozamientos se ciñe únicamente a los primeros 1000 metros en el caso de la atmósfera y unos 100 metros en el caso del océano donde las variaciones en la vertical de las diferentes magnitudes meteorológicas son por lo general mucho más importantes que las variaciones horizontales, de tal forma que solo es necesario tener en cuenta la variación vertical de los esfuerzos cortantes, por lo que

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f v + \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{\partial Y}{\partial z}$$

donde hemos llamado X al esfuerzo 1-3 (esto es la componente x sobre la cara 3, la cara normal al eje z) e Y al esfuerzo 2-3. Para analizar con más detalle el efecto del rozamiento se puede dividir el campo de velocidades en dos partes, una parte de ellas debida al efecto de las fuerzas de presión y la

otra debida al efecto del rozamiento, esto es supondremos que $u = u_p + u_r; v = v_p + v_r$ de tal forma que

$$\rho \frac{\partial u_p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f v_p$$

$$\rho \frac{\partial v_p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - f u_p$$

y

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} = +f v_r + \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -f u_r + \frac{\partial Y}{\partial z}$$

En condiciones estacionarias, la parte de la velocidad debida a la presión sería el viento geostrófico, y por tanto u_r representa la componente ageostrófica debida al rozamiento. Integrando las dos ecuaciones anteriores entre la superficie y el límite superior de la capa límite (que es la capa de la atmosfera/océano los rozamientos son importantes) a partir de la cual el rozamiento se puede considerar despreciable, se tiene (para la parte inferior de la atmosfera)

$$\rho \frac{\partial U_r}{\partial t} = +f V_r - X_s$$

$$\rho \frac{\partial V_r}{\partial t} = -f U_r - Y_s$$

o bien para la parte superior del océano

$$\rho \frac{\partial U_r}{\partial t} = +f V_r + X_s$$

$$\rho \frac{\partial V_r}{\partial t} = -f U_r + Y_s$$

siendo en ambos casos

$$(U_r, V_r) = \int (u_r, v_r) dz = \int (u - u_p, v - v_p) dz$$

el flujo de volumen, relativo al flujo debido a la presión, en la capa límite. A dicha cantidad se la denomina transporte de Ekman volúmico. A la cantidad $\rho(U_r, V_r)$ se la denomina transporte de Ekman másico. Como se desprende de las anteriores ecuaciones en el caso de que la atmósfera y el océano esten en contacto los esfuerzos cortantes son iguales, lo único que cambia es el signo (principio de acción reaccion). Por lo que la suma de los flujos másicos es nula (supuesto que en un instante inicial

lo fuese). En condiciones estacionarias, se verifica, para el caso atmosférico que

$$f V_r = X_s$$

$$f U_r = -Y_s$$

ecuaciones similares, pero cambiadas de signo, se verifican para el océano,

$$f V_r = -X_s \quad (2.44)$$

$$f U_r = Y_s \quad (2.45)$$

De estas ecuaciones se deduce que el flujo de Ekman (U_r, V_r) es ortogonal al esfuerzo en superficie. Suponemos que tenemos un flujo bórico (debido al gradiente de presión) que viaja en la dirección negativa del eje x (hacia el oeste), debido al rozamiento el esfuerzo en superficie está dirigido en la dirección negativa del eje x , esto es $X_s < 0$, por lo que, a la vista de las anteriores ecuaciones, en la atmósfera se tiene $U_r = 0$ y $V_r < 0$, esto es tenemos un flujo Ekman hacia el sur. Lo contrario tenemos en el océano, esto es un flujo dirigido hacia el norte. Los vientos alíseos en la zona ecuatorial viajan en la dirección oeste por lo que el flujo Ekman oceánico viaja hacia el norte y el flujo Ekman atmosférico hacia el sur. En latitudes medias, el viento viaja hacia el oeste y por tanto el flujo Ekman oceánico viaja hacia el Sur y el flujo Ekman atmosférico viaja hacia el norte. De tal forma que en el océano se produce una convergencia y en la atmósfera una divergencia. Los flujos alíseos en el trópico y los vientos del oeste en latitudes medias están normalmente asociadas a los centros de altas presiones de latitudes subtropicales (el famoso anticiclón de las Azores). Así pues el Anticiclón de las Azores induce una convergencia de masa en el océano, dando lugar por tanto a una acumulación de agua y por tanto un anticiclón oceánico. En la parte atmosférica se produce una divergencia en las regiones cercanas al suelo que como veremos en la siguiente sección produce un bombeo (en este caso descendente) de aire. Así mismo en el océano se produce un bombeo ascendente.

2.6.1. El bombeo Ekman

Suponiendo que el fluido se pueda considerar no divergente tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

integrando entre 0 y z la altura de la capa límite y suponiendo que la velocidad vertical en la superficie vale cero, tenemos

$$w = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \int u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int v dz\right) = -\left(\frac{\partial U_r}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial y}\right)$$

Suponiendo que estamos en estado estacionario y teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas previamente tenemos

$$\rho w = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Y_s}{f}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{X_s}{f}\right)$$

Ecuación similar se obtiene para el océano. Suponiendo que f no varía mucho se obtiene

$$\rho w = f^{-1} \nabla_z \times \mathbf{F}_s$$

siendo $\mathbf{F}_s = \{X_s, Y_s\}$ el esfuerzo superficial. A la cantidad ρw se la denomina bombeo Ekman. Así, si tenemos una situación ciclónica el bombeo Ekman produce una velocidad vertical ascendente en la parte superior de la capa límite. Este movimiento ascendente puede dar lugar a la formación de nubes. Si el ciclón está situado sobre el océano, la convergencia en la atmósfera se ve compensada por una divergencia en la capa superficial del océano (vimos que los flujos eran de signo opuesto, en el océano y la atmósfera) y por lo tanto tiende a producirse un flujo vertical ascendente en la parte inferior de la termoclina que tiende a rellenar el hueco producido por la divergencia superior.

2.7. El viento térmico

2.7.1. El teorema de Taylor–Proudman

Antes de entrar a considerar el concepto de viento térmico, vamos a considerar el llamado teorema de Taylor–Proudman, que describe una situación contrapuesta a la situación que describe el viento térmico.

Para comenzar vamos a introducir dos conceptos importantes. Diremos que un fluido es *barotrópico* si la densidad es función unívoca de la presión, $\rho = \rho(p)$, esto es las superficies de presión constante son superficies de densidad constante. O dicho de otra manera, ρ depende de la posición \mathbf{x} a través de la dependencia de la presión con la posición. Esto supone de alguna manera que la temperatura es o bien homogénea o bien función de la presión (por ejemplo en un fluido homotrópico, temperatura potencial homogénea). En caso contrario diremos que el fluido es *baroclino*. Vamos a suponer que nuestro fluido es barotrópico, en estas condiciones se puede introducir una

función potencial para la fuerza gradiente de presión,

$$F = \int \frac{\nabla p}{\rho(p)} d\mathbf{r} = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Podemos ver que

$$\nabla F = \frac{\nabla p}{\rho(p)}$$

(En situaciones adiabáticas, esta función coincide con la entalpía) por lo que la ecuación del movimiento, en un sistema en rotación, se puede poner como

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla F - \nabla\psi - 2(\Omega \times \mathbf{v}) + \mathbf{f}_r$$

en donde se ha supuesto que las fuerzas de volumen son conservativas, esto es proceden de un potencial (en este potencial se incluye también la fuerza centrífuga). Vamos a suponer que podemos despreciar las fuerzas de rozamiento \mathbf{f}_r . Así mismo supondremos que estamos en condiciones estacionarias y en régimen cuasi-geostrófico, esto es, el número de Rossby Ro es muy pequeño. Según vimos en la sección xxx, en estas condiciones podemos despreciar el término aceleración, por lo que

$$0 = -\nabla F - \nabla\psi - 2(\Omega \times \mathbf{v})$$

Tomando el rotacional de la anterior expresión, teniendo en cuenta que el rotacional del gradiente es cero, se tiene

$$\nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) = 0$$

Teniendo en cuenta la expresión del rotacional de un producto vectorial y que Ω es constante se obtiene que

$$\Omega \nabla \cdot \mathbf{v} - \Omega \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$$

Si suponemos que el fluido es no divergente ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), llegamos a que

$$\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$$

Elijamos como eje z el eje en la dirección del vector rotación. En estas condiciones es fácil de ver que

$$\Omega \cdot \nabla \mathbf{v} = \Omega_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$

por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0 \quad (2.46)$$

La expresión 2.46, que es la expresión matemática del teorema de Taylor-Proudman, nos dice que en condiciones barótropicas y cuasi-geostróficas, el campo de velocidades no varía en la dirección de rotación. La condición de cuasi-geostrofia presupone que para las escalas espaciales del fenómeno, la velocidad de rotación es lo suficientemente elevada como para que la fuerza de Coriolis sea mucho más elevada que la aceleración, que aparece como un resto del cuasiequilibrio entre la fuerza de presión y la fuerza de Coriolis. Así pues hemos de esperar que se cumpla el teorema de Taylor-Proudman en fluidos barotropicos que rotan lo suficientemente rápidos.

La columna de Taylor

Según nos dice el anterior teorema, el flujo se hace esencialmente bidimensional. Supongamos que tenemos un fluido en rotación, por ejemplo un vaso de agua puesto en una mesa rotante. El fluido comienza a rotar junto con el vaso y en estado estacionario rota con el. Suponed que ahora se introduce un pequeño disco en el fondo del vaso (figura 2.12). Obviamente el agua tiende a rodear al

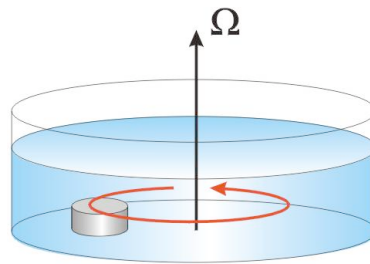
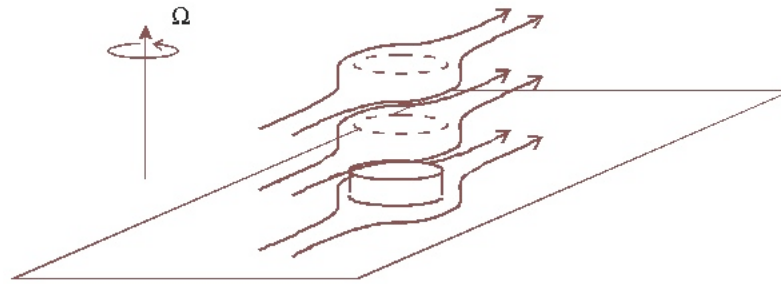


Figura 2.12:

pequeño disco, apareciendo un bucle en las líneas de corriente que tienden a rodear al disco. Pues bien de acuerdo con el teorema de Taylor, este rodeo debe aparecer tambien en altura, aunque allí no tenemos disco, dando lugar a una especie de columna, llamadas columnas de Taylor. (figura 2.13) En la dirección web (<http://www-paoc.mit.edu/labweb/>) podeis ver una película muy instructiva de la formación en un fluido en rotación de la columna de Taylor. Se ha aducido tambien la formación de las columnas de Taylor en la formación de vortices de von-Karman a sotavento de ciertas islas. Ver la figura 2.14, en la presencia de la isla es sentida a alturas mucho más elevada que la propia isla.

**Figura 2.13:****Figura 2.14:**

2.7.2. Efecto de la baroclinicidad: El viento térmico

Considerad una situación en la que en superficie la presión es homogénea pero que la temperatura no lo es. Suponed también que es válida la aproximación hidrostática, en estas condiciones, dado que se verifica

$$\frac{\partial \log p}{\partial z} = -\frac{g}{R_a T}$$

en la región más fría (T menor) la presión disminuye más rápidamente con la altura que en la región más cálida (T mayor). Ver la figura 2.15. Debido a este gradiente la presión en la región más cálida disminuye menos rápidamente. Eso significa que a una cierta altura se ha establecido un gradiente de presión que va desde la zona más fría a la más cálida y este gradiente de presión provoca un viento, que era nulo en superficie puesto que allí por hipótesis el viento es cero. Si suponemos válida la

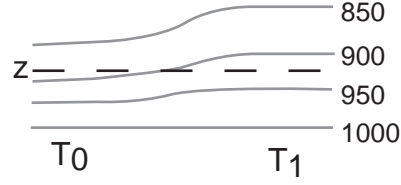


Figura 2.15: Ilustración que nos muestra el gradiente del viento geostrófico

aproximación geostrófica, el viento en altura vale

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\rho f} \mathbf{k} \times \nabla_z p$$

por lo que es ortogonal al vector gradiente de presión dejando a su izquierda la región más fría. Así pues la inhomogeneidad térmica ha inducido un gradiente en el viento geostrófico, este era cero en superficie y es distinto de cero en altura. Vamos a calcular de forma rigurosa la relación entre el gradiente del viento geostrófico y el gradiente térmico. Puesto que la expresión en coordenadas isobáricas no contiene la densidad, la demostración se hace más fácil si partimos de la expresión del viento geostrófico en este sistema de coordenadas,

$$\mathbf{v}_g = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p z.$$

Derivando parcialmente respecto de p

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \frac{\partial z}{\partial p},$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial z}{\partial p} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{-1} = -\frac{R_a T}{p g}$$

es por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} = -\frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \left(\frac{R_a T}{p g} \right)$$

de donde

$$p \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} = -\frac{R_a}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p T$$

o

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial \log p} = -\frac{R_a}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p T \quad (2.47)$$

que es la llamada *ecuación del viento térmico*. Aunque esta ecuación recibe el nombre de ecuación del viento térmico, estrictamente hablando, se define el viento térmico como la diferencia de velocidades entre dos niveles, así pues integrando entre dos niveles ($p_1 > p_2$)

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_g(2) - \mathbf{v}_g(1) = -\frac{R_a}{f} \int_{p_1}^{p_2} (\mathbf{k} \times \nabla_p T) d \log p = \frac{R_a}{f} \int_{p_2}^{p_1} (\mathbf{k} \times \nabla_p T) d \log p = \frac{R_a}{f} (\mathbf{k} \times \nabla_p \bar{T}) \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

Puesto que el vector $\nabla_p(R_a T)$ va desde la zona más fría a la más cálida, el vector $\mathbf{k} \times (\nabla_p(R_a T))$ es ortogonal al anterior dejando a la región fría a la izquierda. Así pues el viento térmico ‘sopla’ paralelo a las isotermas dejando a la izquierda las más frías. El vector $\nabla_p T$, recibe el nombre de vector de baroclinicidad. Si este vector es nulo las superficies de presión y temperatura coinciden, se dice que la atmósfera es barotrópica. En estas condiciones el viento térmico es nulo, por lo tanto el viento geostrófico no cambia con la altura (teorema de Taylor).

Para expresar la ecuación del viento térmico se suele emplear también el espesor entre dos superficies isobáricas. Teniendo en cuenta que la diferencia de altura geopotencial entre dos superficies isobáricas vale

$$\Delta \Phi = -R_a \bar{T} \Delta \log p = R_a \bar{T} \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

siendo \bar{T} el valor medio de la temperatura entre las dos superficies isobáricas. Está claro, a partir de esta ecuación, que las isolíneas de igual espesor entre dos superficies isobáricas representan isolíneas de igual temperatura media. Sustituyendo la anterior expresión en la integral, tenemos

$$\mathbf{v}_T = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \Delta \Phi \quad (2.48)$$

De acuerdo con esta ecuación el viento térmico ‘sopla’ paralelo a las isolíneas de igual espesor, dejando a la izquierda las de menor espesor.

2.7.3. Algunas consecuencias del concepto del viento térmico

2.7.4. Advección de temperatura y estabilidad

Una de las aplicaciones que tiene el concepto de viento térmico es que nos permite analizar el tipo de advección térmica que tenemos en un lugar, esto es analizando como varia en altura el viento podemos tener una idea si vamos a tener advección cálida o fría. Hoy día este análisis se hace a través de los modelos de predicción pero no hace demasiados años era una herramienta muy útil a la hora

de predecir el tiempo. Se define la advección horizontal de temperatura mediante el escalar

$$A = -\mathbf{v} \cdot \nabla T$$

de tal forma que si hay advección cálida, $A > 0$. Puesto que a gran escala $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_g$ podemos aproximar A por la advección geostrófica de temperatura,

$$A_g = -\mathbf{v}_g \cdot \nabla T$$

Teniendo en cuenta la expresión del viento térmico en coordenadas de presión, ecuación (2.47), tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial p} = \frac{g}{fT} (\mathbf{k} \times \nabla_p T)$$

multiplicando vectorialmente por \mathbf{k} , tenemos

$$\nabla_p T = \frac{fT}{g} \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} \times \mathbf{k}.$$

Sustituyendo

$$A_g = -\frac{fT}{g} \left[\mathbf{v}_g \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} \times \mathbf{k} \right) \right] = \frac{fT}{g} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} \times \mathbf{v}_g \right) \cdot \mathbf{k}$$

Donde vemos que si el viento térmico es paralelo al viento geostrófico, la advección térmica es nula, lógico pues según acabamos de ver el viento térmico 'sopla' paralelo a las isotermas, si el viento geostrófico, que se supone es cercano al viento real, es paralelo al viento térmico, también será paralelo a las isotermas y no habrá advección térmica. Si el viento térmico gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, el viento térmico está a la izquierda del viento geostrófico y se produce advección fría (ver la figura 2.16, izquierda) pues el producto vectorial de la anterior expresión es positivo. Si el viento térmico gira en sentido de las agujas del reloj se produce advección cálida (ver la figura 2.16, derecha)

La corriente en chorro

Debido a que las temperaturas medias en la troposfera disminuyen desde las zonas tropicales hacia los polos, es de esperar de acuerdo con la expresión del viento térmico, que en el hemisferio norte los vientos tengan una componente hacia el este que aumente con la altura. Si el gradiente de temperatura entre el ecuador y el polo se mantuviese a lo largo de toda la atmósfera la componente este del viento aumentaría a lo largo de todo el espesor de la atmósfera. Pero el gradiente de tempe-

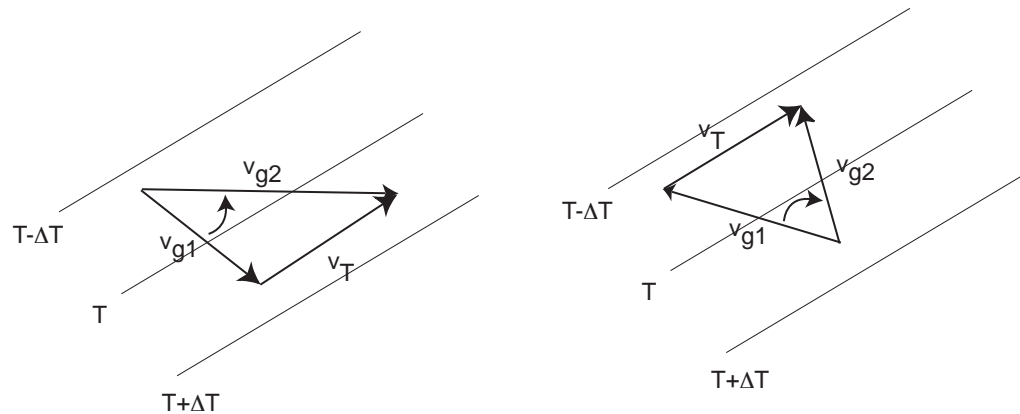


Figura 2.16: Relación entre el viento geostrófico, el viento térmico y la advección de temperatura. El viento gira en sentido contrario a las agujas del reloj, se produce advección fría (izquierda). El viento gira en el sentido de las agujas del reloj, se produce advección cálida (derecha)

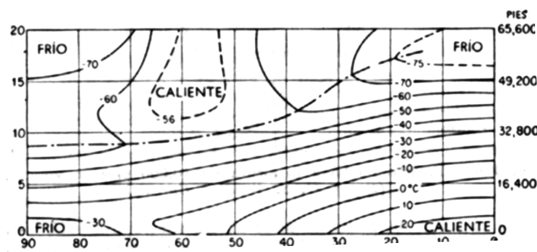


Figura 2.17: Temperaturas medias en invierno

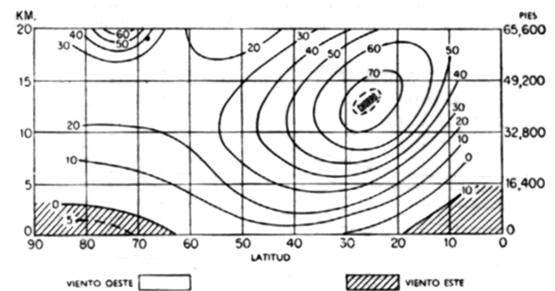


Figura 2.18: Velocidad (millas/hora) en invierno

ratura cambia de signo al cruzar la tropopausa de tal forma que en la estratosfera el aire es más cálido en la región polar. En la estratosfera el viento térmico cambia de signo. Así pues la componente este del viento alcanza su valor máximo en una región cercana a la tropopausa.

La figura 2.17 nos muestra la media zonal (media a lo largo de un cinturón latitudinal) del campo de temperaturas atmosférico en el hemisferio norte en invierno. Como podemos observar, el campo de temperaturas atmosférico alcanza su máximo gradiente horizontal en una región situada en latitudes medias en torno a los 40–50° de latitud. Es pues en esta región donde se ha de esperar el máximo valor del viento térmico y por tanto los vientos hacia el este alcancen su máxima intensidad como podemos observar en la figura 2.18. Es la región de la famosa corriente en chorro subtropical. Es también en esta región de máximo gradiente térmico la región de formación de los frentes.

Suavizado de patrones con la altura

Una comparación de los mapas meteorológicos realizados a diferentes niveles atmosféricos muestra que los patrones superficiales (altas cerradas, bajas cerradas, dorsales, vaguadas) se van suavizando con la altura.

Cualquiera que sea la forma del patrón de vientos en superficie, la suma del viento en superficie y el viento térmico dará lugar en general a un vector con una mayor componente hacia el este, produciendo por tanto un patrón con una mayor componente hacia el este.

Suponer que en superficie se tiene una línea de corriente cuya pendiente en un punto x, y vale

$$S_0 = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Bajo la hipótesis de que el viento térmico representa el gradiente real del viento, la pendiente de la línea de corriente en altura será

$$S_z = \frac{v + v_T}{u + u_T}$$

por tanto si $u_T > 0$ y $u_T \gg v_T$, como es lo usual, la pendiente en altura S_z será más pequeña que la pendiente en superficie S_0

Alineamiento vertical de las perturbaciones

Otra influencia notoria de los gradientes horizontales de temperatura tiene lugar en la alineación vertical de los centros de altas y bajas. Fijemonos en la figura 2.19, donde podemos observar un esquema de un centro de bajas presiones, en el que a un lado del mismo se tiene una zona de aire relativamente más frío y al otro se tiene una zona de aire más cálido.

Debido a que el espesor entre dos superficies isobáricas es menor en la zona más fría el eje de la baja tenderá a inclinarse en altura hacia la zona más fría.

Vamos a evaluar numéricamente cuanto vale el ángulo de inclinación del eje, para ello debemos de considerar que en el centro de una baja la pendiente de las superficies isobáricas se anula, por lo tanto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

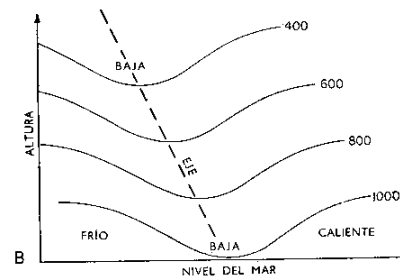


Figura 2.19:

así mismo como es un centro de bajas,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$$

Por conveniencia tomaremos como eje x la dirección a lo largo de la cual se inclina el eje de la baja. Como en todos los puntos del eje estamos en condiciones de 'centro de bajas' se verificará que a lo largo del eje

$$\delta \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$$

desarrollando la anterior expresión,

$$\delta \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \delta x + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \delta p = 0 \quad (2.49)$$

El ángulo que forma el eje de la baja vendrá dado por

$$\tan \theta = \frac{\delta x}{\delta z} = -g\rho \frac{\delta x}{\delta p}$$

que, teniendo en cuenta la expresión 2.49, podemos escribir

$$\tan \theta = g\rho \frac{(\partial/\partial x)(\partial z/\partial p)}{(\partial^2 z/\partial x^2)}$$

Teniendo en cuenta la ecuación hidrostática se obtiene

$$\tan \theta = g\rho \frac{(\partial/\partial x)(-1/g\rho)}{(\partial^2 z/\partial x^2)} = \frac{1}{\rho} \frac{(\partial\rho/\partial x)}{(\partial^2 z/\partial x^2)}$$

Derivando en la ecuación de estado respecto a x manteniendo p constante

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x}$$

sustituyendo,

$$\tan \theta = -\frac{1}{T} \frac{(\partial T/\partial x)}{(\partial^2 z/\partial x^2)}$$

Puesto que en el centro de la baja el denominador de esta expresión es positivo, el ángulo será positivo o negativo dependiendo del signo de $(\partial T/\partial x)$. Si el numerador es positivo, la zona fría queda en la parte negativa del eje y la cálida en la positiva, así pues el eje se inclina hacia el lado negativo y por tanto en la dirección de las temperaturas frías. Ver la figura 2.20 . La misma situación se da si con-

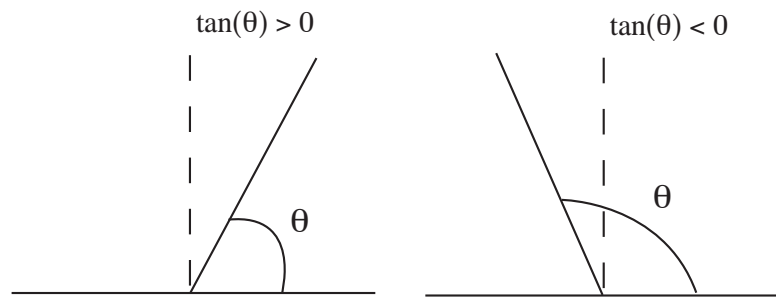


Figura 2.20: Esquema de la inclinación del eje de bajas.

sideramos vaguadas. La misma expresión se puede aplicar a los centros de altas y dorsales, solo que ahora la inclinación será al revés pues ahora $(\partial^2 z / \partial x^2) < 0$. Normalmente el aire está mas frío hacia el norte y si se trata de una baja hacia el oeste por lo que el eje se inclinará en la dirección noroeste. Lo contrario sucederá en las zonas de altas presiones.

Que sucede si la situación en torno a la baja o alta es simétrica ?. La figura 2.21 nos muestra un esquema de esta situación. Analizando esta figura podemos ver que se cumplen las siguientes reglas.

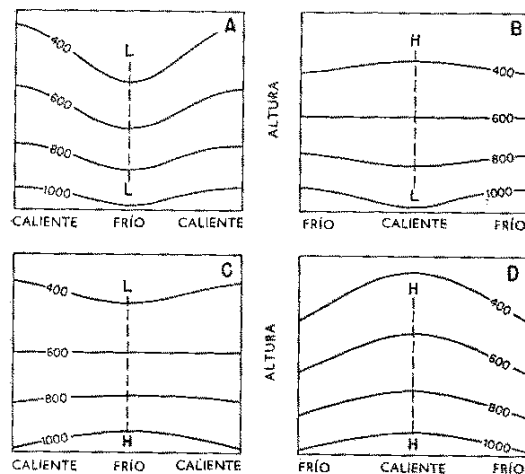


Figura 2.21: Esquema que muestra el reforzamiento o debilitamiento de los centros de altas y bajas presiones habida cuenta del gradiente horizontal de temperaturas

- Una baja a nivel del mar con un núcleo frío se intensificará en altura.
- Una baja a nivel del mar con un núcleo cálido se debilitará en altura.

- Una alta a nivel del mar con un núcleo frío se debilitará en altura.
- Una alta a nivel del mar con un núcleo cálido se intensificará en altura.

Cambio de dirección del viento en los frentes

Como aplicación final del efecto del gradiente horizontal de temperaturas en la ecuación hidrostática, consideremos el caso de un frente. Un frente, frío o cálido, es una idealización de una situación en la que dos masas de aire, cada una de ellas con propiedades más o menos homogéneas, están en presencia una de otra. En la zona fronteriza las propiedades termodinámicas varían fuertemente según pasamos de una masa a la otra. Entre ellas variará fuertemente la temperatura. Podemos suponer que esta zona frontera se reduce a una superficie matemática. Vamos a suponer que a un lado y a otro de la superficie la presión a una cierta altura es la misma y que la temperatura y densidad cambian según pasamos de un lado al otro de la superficie. Puesto que la presión a ambos lados de la superficie frontal es la misma, se debe verificar que la variación de presión cuando nos movemos a lo largo de la superficie frontal debe de ser la misma a un lado y otro

$$\delta p_1 = \delta p_2$$

Para simplificar el análisis supondremos que la superficie frontal es un plano y elijamos el eje y a lo largo de este plano, ver figura 2.22

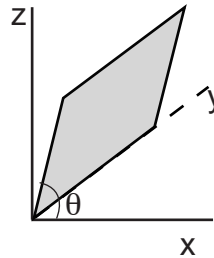


Figura 2.22: Esquema de la inclinación de un frente.

En estas condiciones

$$\delta p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_1 \delta x + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_1 \delta z = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_2 \delta x + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_2 \delta z = \delta p_2$$

Reordenando,

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_1}$$

teniendo en cuenta la ecuación hidrostática, obtenemos para la pendiente del frente

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2}{g(\rho_1 - \rho_2)} \quad (2.50)$$

Supongamos que la zona 1 es la zona cálida y la zona 2 la fría, supongamos que el frente va de norte a sur y que el aire cálido está al oeste (a la izquierda del frente mirando hacia el norte) y el frío al este (derecha del frente). Habida cuenta de que por cuestiones de estabilidad hidrostática el aire cálido se dispone encima del aire frío, el frente se debe de inclinar hacia el aire frío y por tanto la pendiente del frente es positiva de donde se deduce que, puesto que ρ_1 es menor que ρ_2 y por tanto el denominador es negativo,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 < \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2$$

lo que nos indica que existe una discontinuidad en el gradiente de presiones. Estamos frente a una discontinuidad del primer orden en el campo de presiones.

Esta discontinuidad se manifiesta también con una refracción en las isóbaras. La pendiente de las isolíneas (supuestas horizontales) de igual presión viene dada por la ecuación ($\delta p = 0$)

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial y}}$$

puesto que a un lado y otro del frente $\partial p / \partial y$ no varía, tenemos

$$\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_2 - \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_1 = -\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial y}} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_1 \right]$$

teniendo en cuenta la ecuación (2.50), el término entre parentesis es positivo y el signo global depende del signo del denominador. Supongamos que en el sur tenemos una alta y en el norte una baja, en estas condiciones $\partial p / \partial y$ es negativo y por tanto

$$\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_2 < \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_1$$

o sea la pendiente disminuye al pasar de uno al otro lado del frente. Supongamos que $\partial p / \partial x < 0$,

entonces la pendiente de las isobaras es positiva y como aumenta al pasar de un lado al otro del frente quedan de la forma que se esquematiza en la figura 2.23

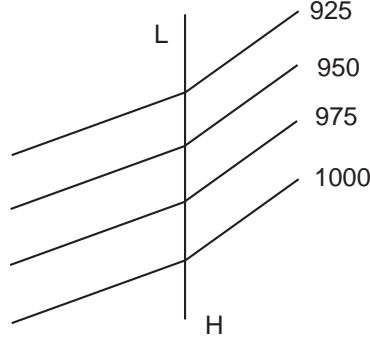


Figura 2.23: Esquema que muestra la refracción de las isobaras al pasar de uno al otro lado del frente.

Teniendo en cuenta la ecuación del viento geostrófico

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\rho f} \mathbf{k} \times \nabla_z p$$

tenemos

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_1 = (\rho f v)_1, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_2 = (\rho f v)_2$$

por lo que la inclinación del frente respecto del plano horizontal vale

$$\tan \theta = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{[(\rho f v)_1 - (\rho f v)_2]}{[(\rho g)_1 - (\rho g)_2]}$$

en la que teniendo en cuenta la ecuación de estado obtenemos

$$\tan \theta = \frac{f(v_1 T_2 - v_2 T_1)}{g(T_2 - T_1)}$$

que es conocida como ecuación de Margules. Teniendo en cuenta las condiciones usuales en los frentes esta ecuación se puede poner como

$$\tan \theta = \frac{f \bar{T}(v_1 - v_2)}{g(T_2 - T_1)}$$

puesto que por hipótesis $T_1 > T_2$ y la pendiente del frente es positiva se tiene que $v_2 > v_1$

2.8. Determinación de la velocidad vertical

Como se comentó anteriormente la velocidad vertical media en movimientos a gran escala son del orden de cm/s, esto significa que con la tecnología disponible hace unos pocos de años era prácticamente imposible medirla con cierta seguridad. Incluso hoy, a partir de los datos proporcionados por los radio sondeos, se mide con cierta dificultad. Se hace por tanto necesario determinar la velocidad vertical a partir de otros campos meteorológicos. Existen diferentes métodos para su cálculo, nosotros vamos a presentar dos de los más empleados, el *método cinemático* y el *método adiabático*. El primer método está basado en la ecuación de continuidad y el segundo en la ecuación del segundo principio. Ambos métodos hacen uso de las ecuaciones en coordenadas de presión por lo que proporcionan normalmente la cantidad $\omega = Dp/Dt$ en vez de w , podemos ver que relación existe entre estas dos magnitudes. Por definición

$$\omega = \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z}$$

En movimientos a escala sinóptica $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_g$, poniendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a$, siendo $v_a \ll v_g$ el viento *ageostrófico*. Puesto que

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\rho f} \mathbf{k} \times \nabla p$$

la advección de presión por el viento geostrófico $\mathbf{v}_g \cdot \nabla p$ es nula, así pues

$$\omega = \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z}$$

Para ver la importancia relativa de los términos que aparecen en la anterior expresión podemos dar ordenes de magnitud

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &\sim 1 \text{ kPa s}^{-1} \\ \mathbf{v}_a \cdot \nabla p &\sim (1 \text{ m/s})(1 \text{ Pa/km}) \sim 0,1 \text{ kPa s}^{-1} \\ \rho g w &\sim 10 \text{ kPa s}^{-1} \end{aligned}$$

así pues vemos que con muy buena aproximación

$$\omega = -\rho g w$$

2.8.1. El método cinemático

Partiendo de la ecuación de continuidad en coordenadas de presión

$$\frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

tenemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p$$

integrando

$$\omega(p) = \omega(p_s) - \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p dp \quad (2.51)$$

La anterior integral nos da el valor de la velocidad vertical en coordenadas p a partir de la cual se puede calcular la velocidad vertical en coordenda z . Como podemos ver para poder evaluar ω mediante este método necesitamos estimar la divergencia horizontal a lo largo de superficies isobáricas. Resulta que la atmósfera a gran escala es cuasi-nodivergente (tengase en cuenta que el viento está en equilibrio cuasi-geostrófico y la divergencia del viento geostrofico, supuesto f constante, es cero), por lo que la divergencia, esto es, el término entre parentesis en la ecuación anterior, es mucho menor que cada uno de los términos que intervienen en él, por lo qué pequeños errores en la determinación del gradiente de u y v da, lugar a grandes errores en la determinación de la velocidad vertical. Por esta razón este método no es muy recomendable para el cálculo de la velocidad vertical.

2.8.2. El método adiabático

Del segundo principio

$$c_p \frac{D \log \theta}{Dt} = \frac{1}{T} \dot{q}$$

supuesto que los procesos a gran escala se puedan suponer adiabáticos y teniendo en cuenta la expresión de la temperatura potencial

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{R_a T}{p} \frac{Dp}{Dt} = 0$$

teniendo en cuanta que $\alpha = 1/\rho = RT/p$ tenemos

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{Dp}{Dt} = 0$$

expandiendo la derivada másica y teniendo en cuenta la definición de ω ,

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_p T + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right) - \alpha \omega = 0$$

sacando factor comun a ω y reordenando

$$\omega \left(\frac{1}{c_p} \alpha - \frac{\partial T}{\partial p} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_p T \right)$$

La cantidad

$$S_p = \left(\frac{1}{c_p} \alpha - \frac{\partial T}{\partial p} \right) = \left(\frac{1}{c_p} \frac{RT}{p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

recibe el nombre de *parámetro de estabilidad estática*. De donde

$$\omega = S_p^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_p T \right) \quad (2.52)$$

Podemos estimar con bastante seguridad la advección horizontal de temperatura a partir de la advección geostrófica de temperatura. La principal dificultad de la anterior expresión es la estimación de la variación local de la temperatura, pues para obtener un valor seguro de $\partial T / \partial t$ es necesario tener medidas frecuentes de la temperatura en regiones amplias. Obviamente este método no es muy preciso en regiones con presencia importante del término diabático \dot{q} .

2.9. La ecuación de tendencia barométrica

La disminución continua de la presión superficial en un cierto lugar es un aviso clásico que una cierta perturbación ciclónica se está aproximando. Una relación sencilla entre la tendencia de la presión superficial y el campo de vientos se obtiene de la expresión 2.51, haciendo $p \rightarrow 0$,

$$\omega(p_s) = - \int_0^{p_s} (\nabla \cdot \mathbf{v})_p dp$$

puesto que en superficie (supuesta horizontal) $w = 0$ y despreciando la advección ageostrófica de presión tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \int_0^{p_s} (\nabla \cdot \mathbf{v})_p dp \quad (2.53)$$

La anterior ecuación nos dice que la variación local de la presión en superficie está determinada por la convergencia o divergencia neta de masa por encima de la superficie. Este resultado es lógico, pues estamos suponiendo que la atmósfera es hidrostática, y la presión hidrostática en un cierto punto

viene determinada por la masa de aire que hay encima. Aunque esta expresión es muy sencilla en la práctica es muy poco útil pues la medida de la divergencia en altura se hace difícil al ser un término muy pequeño, como ya se comentó antes. Además resulta que existe una compensación vertical de divergencia, esto es, existen zonas donde la divergencia es positiva y zonas donde la divergencia es negativa, de tal forma que cuando en la troposfera existe convergencia en las zonas inferiores aparece divergencia en las superiores y viceversa.

Aunque no se pueda estimar muy bien la tendencia de la presión en superficie mediante la expresión 2.53, si nos puede ser muy útil de forma cualitativa para entender como se producen las variaciones de presión en superficie. Como ejemplo, siguiendo a Holton, consideremos el caso del desarrollo de una baja térmica. Suponer que por alguna razón se produce un calentamiento en la troposfera media. Debido al aumento de la temperatura las isóbaras se separan algo más en esta zona lo que provoca que en altura aparezca un gradiente horizontal de presiones y por tanto una divergencia de masas al tender el aire a moverse de la zona de altas a la zona de bajas presiones. El 'vacío' así creado se rellena mediante un ascenso de masas de aire de la zona inferior que a su vez deja un 'vacío' en la baja troposfera lo que induce una convergencia de masas cerca de la superficie que tiende a compensar la divergencia en capas altas. El grado de compensación (de la divergencia–convergencia) determinará si la presión en superficie aumenta, disminuye o se mantiene estacionaria.

2.10. Fuerzas de marea

Hasta el momento actual las únicas fuerza consideradas en el problema han sido la fuerza de la gravedad, las fuerzas de presión y el rozamiento, así como las fuerzas inerciales, sin embargo no hemos considerado unas fuerzas que dan lugar al conocido fenómeno de las mareas, que son observables a simple vista en el océano. El origen último de esta fuerza misteriosa se debe a la no homogeneidad del campo gravitatorio. Como es bien conocido, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza de la gravedad va disminuyendo según nos alejamos del cuerpo que la produce. Así mismo esta fuerza es convergente a un punto, el centro de masas del cuerpo que produce el campo (supuesto este uniforme). Así tenemos que un punto cualquiera sobre la superficie de la Tierra se ve atraído hacia el centro del Sol (o de la Luna) con una fuerza diferente que la fuerza con la que es atraído el centro de la Tierra, esta fuerza diferencial es responsable en última instancia de las mareas. A la hora de analizar el problema matemáticamente, vamos a considerar que únicamente uno de ellos, por ejemplo el Sol, está produciendo el campo gravitatorio. Como sabemos la Tierra está orbitando en torno al Sol en un movimiento de caída libre (nadie que se sepa empuja a la Tierra en su movimiento respecto del Sol), por lo tanto el laboratorio Tierra es una referencia no inercial, (como lo es un ascen-

que cae en caída libre hacia la Tierra) con una aceleración \mathbf{a}_0 debida a la atracción gravitatoria del Sol. Consideraremos en la Tierra un sistema de referencia que es paralelo en todo instante al situado en el centro del Sol, el cual se supone inercial. Utilizando el teorema de Coriolis, en el sistema unido a la Tierra se tiene,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 - \Omega \times \Omega \times \mathbf{r} - 2\Omega \times \mathbf{v}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0$$

siendo $\Omega = 0$ la velocidad de rotación del sistema de referencia situado en el centro de la Tierra respecto del sistema de referencia unido al Sol, \mathbf{a} la aceleración relativa y \mathbf{a}_0 la aceleración del origen de coordenadas. Así pues,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0$$

como estamos considerando el efecto de las fuerzas externas al planeta, la fuerza \mathbf{F} será la correspondiente al efecto gravitatorio del Sol. Fijemonos en la figura 2.24.

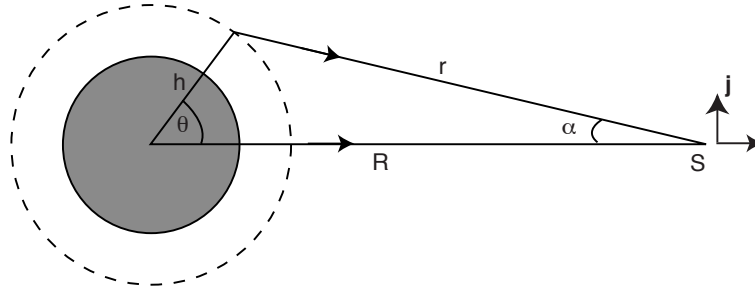


Figura 2.24:

Consideremos una masa m a una altura h desde el centro de la Tierra. La fuerza gravitatoria del Sol será

$$\mathbf{F} = \frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

siendo \hat{r} un vector unitario en la dirección del Sol y M la masa del Sol. La aceleración \mathbf{a}_0 es la atracción gravitatoria del Sol sobre la Tierra

$$\mathbf{a}_0 = \frac{GM}{R^2} \hat{R}$$

siendo $\hat{R} = \mathbf{i}$ un vector unitario dirigido hacia el Sol. Sustituyendo

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m - \frac{GM}{R^2} \mathbf{i}$$

El vector \hat{r} lo podemos poner como

$$\hat{r} = \cos \alpha \mathbf{i} - \sin \alpha \mathbf{j}$$

de tal forma que

$$\mathbf{a} = \left(\frac{GM}{r^2} \cos \alpha - \frac{GM}{R^2} \right) \mathbf{i} - \frac{GM}{r^2} \sin \alpha \mathbf{j}$$

Como el Sol o la Luna están muy lejos, el ángulo α es muy pequeño por lo que podemos hacer las siguientes aproximaciones

$$\cos \alpha \approx 1 \quad \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{h \sin \theta}{R - h \cos \theta} \approx \frac{h \sin \theta}{R}$$

por lo que

$$\mathbf{a} = \left(\frac{GM}{r^2} - \frac{GM}{R^2} \right) \mathbf{i} - \frac{GM}{r^2} \frac{h \sin \theta}{R} \mathbf{j}$$

Teniendo en cuenta que

$$r^2 = R^2 + h^2 - 2hR \cos \theta$$

se tiene

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2 + h^2 - 2hR \cos \theta} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{1 + (h/R)^2 - 2(h/R) \cos \theta} \approx \frac{1}{R^2} (1 + 2(h/R) \cos \theta)$$

sustituyendo en la expresión de la aceleración, resulta

$$\mathbf{a} = \frac{GM}{R^3} 2h \cos \theta \mathbf{i} - \frac{GM}{r^2} \frac{h \sin \theta}{R} \mathbf{j}$$

que se puede aproximar por

$$\mathbf{a} = \frac{GM}{R^3} 2h \cos \theta \mathbf{i} - \frac{GM}{R^3} h \sin \theta \mathbf{j} \quad (2.54)$$

Vemos pues que lo que determina la aceleración de marea no es el campo gravitatorio del Sol si no la variación del campo gravitatorio del Sol. Obviamente, este campo varía más rápidamente cuanto más cerca estemos del Sol (R más pequeño). Como la Luna se encuentra mucho más cerca que el Sol, aunque su masa es mucho más pequeña el efecto de ésta es mayor (un factor 2.2, aproximadamente).

Si en la ecuación 2.54 hacemos $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, la componente \mathbf{j} se anula, por lo que sólo tenemos una componente en la dirección del Sol (o la Luna), apuntando hacia él, en la parte más cercana a éste y apuntando desde él en la parte más lejana (ver la figura 2.25)

$$\mathbf{a}(\theta = 0) = \frac{2GMh}{R^3} \mathbf{i}, \quad \mathbf{a}(\theta = \pi) = -\frac{2GMh}{R^3} \mathbf{i}$$

Para $\theta = \pi/2, -3\pi/2$, la componente \mathbf{i} se anula, por lo que la fuerza de marea apunta hacia Tierra,

$$\mathbf{a}(\theta = 0) = -\frac{GMh}{R^3}\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}(\theta = 3\pi/2) = \frac{GMh}{R^3}\mathbf{j}$$

con una intensidad la mitad de la intensidad con la que es repelida en el eje Sol–Tierra. Podemos cal-

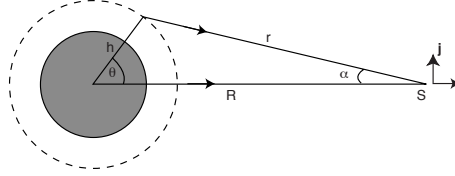


Figura 2.25:

cular cuanto valen las componentes tangencial y radial, para ello tengamos en cuenta que los vectores base radial y tangencial tienen como componentes

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \\ \boldsymbol{\theta} &= -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} \end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente la expresión 2.54 por \mathbf{h} y $\boldsymbol{\theta}$ se obtiene

$$a_h = \frac{GMh}{R^3}(3\cos^2\theta - 1) \quad (2.55)$$

$$a_\theta = -\frac{3GMh}{2R^3}\sin 2\theta \quad (2.56)$$

La figura 2.26 nos muestra la componente horizontal a_θ , cuando el objeto que induce la marea se encuentra en la vertical del punto Z, situado en el Ecuador. A partir de las anteriores expresiones, es fácil deducir el potencial de marea (por unidad de masa) asociado. De la definición de potencial

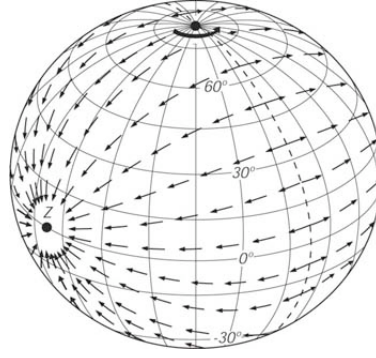
$$a_h = -\frac{\partial V(h, \theta)}{\partial h}$$

de donde se obtiene

$$V(h, \theta) = -\frac{GMh^2}{2R^3}(3\cos^2\theta - 1) + \psi(\theta)$$

y del hecho que

$$a_\theta = -\frac{1}{h} \frac{\partial V(h, \theta)}{\partial \theta}$$

**Figura 2.26:**

se obtiene que el potencial de marea vale

$$V(h, \theta) = -\frac{GMh^2}{2R^3}(3\cos^2\theta - 1) \quad (2.57)$$

Teniendo en cuenta que el polinomio de Legendre de segundo orden vale $(1/2)(3z^2 - 1)$, el potencial de marea se puede escribir también como

$$V(h, \theta) = -\frac{GMh^2}{R^3}P_2(\cos\theta) \quad (2.58)$$

Hasta ahora se ha supuesto que el Sol (la Luna) está fijo, sin embargo este se mueve a lo largo del día, de tal forma que el ángulo θ varía a lo largo del día. Sabemos de las relaciones estudiadas en Astronomía, que el ángulo formado por un punto P sobre la superficie de la Tierra y el Sol viene dada por la expresión

$$\cos\theta = \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H$$

siendo ϕ la latitud del punto P , δ la declinación del Sol y H el ángulo horario del Sol (la Luna). Sustituyendo $\cos\theta$ en la ecuación que define el potencial, obtenemos el potencial como función de la posición del punto P en la superficie de la Tierra (ángulo ϕ), la posición del Sol en el firmamento (ángulo δ) y la hora del día (ángulo H),

$$V(h, \phi, H) = -\frac{3}{4}\frac{GMh^2}{R^3}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\phi\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\delta\right) + \sin 2\phi\sin 2\delta\cos H + \cos^2\phi\cos^2\delta\cos 2H\right] \quad (2.59)$$

Dado que el movimiento orbital se hace a lo largo de una elipse, R varía con el tiempo, es costumbre

utilizar la siguiente expresión para el potencial

$$V(h, \phi, H) = -\frac{3}{4} \frac{GMh^2}{a^3} \left(\frac{a}{R}\right)^3 \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \delta \right) + \sin 2\phi \sin 2\delta \cos H + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2H \right] \quad (2.60)$$

siendo a el semieje mayor de la elipse orbital. La cantidad

$$D = \frac{3}{4} \frac{GMh^2}{a^3}$$

se llama la constante de Doodson. Para la Luna $D_{Luna}/g = 0,2675$ m y para el Sol, $D_{Sol} = 0,4605 D_{Luna}$

Si nos fijamos en el corchete de la expresión 2.60, el primer término nos da la dependencia a largo plazo, el segundo la dependencia diurna y el tercero la dependencia semidiurna. El ángulo H , en el caso del Sol, es función de la velocidad de rotación de la Tierra sobre su eje, y del movimiento que realiza esta en el curso del año. En el caso de la Luna, depende del movimiento de rotación de la Tierra sobre su eje y del movimiento de la Luna en su órbita. El periodo de rotación de la Tierra sobre su eje es de 1 día sidereo, que equivale a 23 h 56 m de tiempo medio, así pues rota con una velocidad¹ de $\omega_0 = 2\pi/23,93447$ radianes/hora media. La Tierra da un vuelta en su órbita en 365,242199 días medios, por lo que su velocidad de rotación es de $\omega_2 = 2\pi/(24 * 365,242199)$ radianes por hora media. La velocidad de rotación de la Tierra respecto del Sol, vale $\omega_0 - \omega_2 = 2\pi/24$ radianes por hora media. El periodo de rotación de la Luna es de 27,321661 días medios con lo que su velocidad de rotación $\omega_1 = 2\pi/(24 * 27,321661)$ radianes por hora media. La velocidad de rotación de la Tierra respecto de la Luna valdrá, $\omega_0 - \omega_1 = 2\pi/24,8412$ radianes por hora media, por lo que el día lunar dura 24,8412 horas medias. Por otra parte la declinación δ del Sol (la Luna) varía a lo largo del año (caso del Sol) o del mes, (caso de la Luna). Dado que las órbitas del Sol y la Luna son elípticas, la distancia R también varía a lo largo del año. En el caso del Sol, en Astronomía de posición se puede ver que

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \lambda \sin \epsilon \\ \alpha &= \lambda - \tan^2(\epsilon/2) \sin \lambda \end{aligned}$$

siendo ϵ, α y λ la inclinación del eje de la Tierra (aproximadamente $23,5^\circ$), la ascensión recta y la longitud celeste del Sol respectivamente. Si llamamos λ_p a la posición del perihelio respecto del eje de equinoccios, y llamando $\lambda_m = \omega_2 t$ a la longitud del Sol medio, esto es la longitud de un Sol imaginario que se mueve de forma uniforme sobre una circunferencia de radio igual al semieje mayor de la elipse,

¹Supondremos por simplicidad que las velocidades de rotación son constantes

se tiene que

$$\lambda = \lambda_m - 2e \sin(\lambda_m - \lambda_p) + \dots$$

siendo e la excentricidad de la órbita.

En el caso de la Luna estas relaciones se ven complicadas pues el plano de rotación de la Luna está inclinado 5 grados respecto de la Eclíptica. Además, las elipses que forman la Tierra en su movimiento en torno al Sol y la Luna en torno a la Tierra no son fijas si no que se están moviendo. En el caso del Sol, el perihelio gira con un periodo de 20940 años, lo que supone una velocidad angular $\omega_5 = 2\pi/20940$ radianes por año y en el caso de la Luna, el perigeo rota con un periodo de 8,847 años lo que supone una velocidad rotacional de $\omega_3 = 2\pi/8,847$ radianes por año. Por otra parte el plano de la órbita de la Luna, que intersecciona con el plano de la eclíptica a lo largo de la línea de nodos, rota respecto de este plano de tal forma que la línea de nodos da una vuelta cada 18,613 años, esto es una velocidad rotacional de $\omega_4 = 2\pi/18,613$ radianes por año. Para tener en cuenta todas estas rotaciones Doodson separa los tres términos, de largo periodo, diurno y semidiurno de la ecuación 2.60 en tres términos definidos mediante la expresión

$$V(\lambda_g, \phi) = V_0(\lambda_g, \phi) + V_1(\lambda_g, \phi) + V_2(\lambda_g, \phi)$$

siendo λ_g la latitud geográfica del punto sobre la Tierra. Donde

$$V_s(\lambda_g, \phi) = DG_s(\phi) \sum_j C_j \cos(\sigma_j^s t + s\lambda_g + \theta_j)$$

siendo D la constante de Doodson, $G_s(\phi)$ los términos que dependen de la latitud en la expresión 2.60, esto es $G_0 = (1 - 3\sin^2\theta)/2$, $G_1 = \sin 2\theta$ y $G_2 = \cos^2\theta$. Los términos dependientes del tiempo se han agrupado en una expansión en serie de Fourier cuya amplitud se ha denominado C_j y cuya frecuencia σ_j^s es una combinación de las frecuencias de rotación de la Luna y la Tierra y que se han etiquetado como $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ y ω_5

$$\sigma_j^s = s\omega + \sum_{k=1}^{k=5} m_j^k \omega_k$$

siendo, $s=0,1,2$ para los términos de largo periodo, diurno y semidiurno respectivamente. $\omega = \omega_0 - \omega_2$ en el caso del Sol y $\omega_0 - \omega_1$ en el caso de la Luna. Los números $m_j^k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ junto con s son los llamados números de Doodson. En general (excepto s , que vale 0,1,2) están comprendidos entre -5 y 5 por lo que se les suma 5 para que aparezcan como positivos. Así por ejemplo el número 055565 indica en realidad que los números valen 000010, por lo que corresponde al nodo lunar ($\sigma_j^s = \omega_4$).

2.10.1. Mareas en equilibrio

Para terminar esta sección vamos a mostrar la llamada teoría de mareas en equilibrio. Según algunos libros, esta teoría se debe a Newton, según otros a Bernoulli. Según esta teoría el océano (y también la atmósfera) reaccionan instantáneamente a la acción de la Luna y el Sol y en cada instante adoptan una forma de equilibrio bajo la acción gravitatoria de la Tierra y de la fuerza de marea. El potencial total, suma del gravitatorio y el de marea, vendrá dado por la expresión

$$V = \frac{-GM_T}{r} - \frac{GM_L r^2}{2R^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Supongamos que sin la fuerza de marea, la superficie del océano fuese una esfera de radio R_T de tal forma que en la anterior expresión el término de segundo orden $r^2 = (R_T + \zeta)^2 \approx R_T^2$ y el término $1/r$ lo desarrollamos en primer orden, de tal forma que

$$V = V_0 + g\zeta - \frac{GM_L R_T^2}{2R^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

siendo $g = GM_T/R_T^2$, por lo que, eliminado G , se obtiene

$$V = V_0 + g\zeta - g \frac{1}{2} \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R} \right)^3 R_T (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Las isolineas de igual potencial nos darán las isóbaras, en particular nos interesa la correspondiente a $p = 0$ que nos da la superficie del océano. Así pues, la superficie superior vendrá dada por la expresión

$$g\zeta - g \frac{1}{2} \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R} \right)^3 R_T (3 \cos^2 \theta - 1) = C$$

Como la masa oceánica no cambia, en los sitios donde el agua asciende se debe de compensar con los sitios donde el agua desciende, de tal forma que el ascenso medio debe de ser cero. Esto se traduce en que la constante C debe de anularse. Así pues

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R} \right)^3 R_T (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (2.61)$$

El valor máximo se alcanza para $\theta = 0, \pi$, y el valor mínimo para $\theta = \pi/2, 3\pi/2$. La forma se puede ver en la figura.

Obviamente se ha supuesto que el agua sigue instantáneamente el movimiento de la Luna y el Sol, de tal forma que la marea alta debe de aparecer con la luna sobre nuestras cabezas o sobre la

de los antipodas. Lo que se observa es que la marea alta aparece varias horas despues de que haya culminado la Luna o el Sol, obviamente hay que mejorar la teoría. Sin embargo justifica el origen de las mareas y explica muy bien, el ritmo con el que se suceden y porque aparecen las mareas vivas cuando las mareas solar y lunar se combinan. No proseguiremos con esta teoría en este momento. Hablaremos de ella cuando nos refiramos a la teoría de ondas en fluidos.

Capítulo 3

Vorticidad y Circulación

3.1. Introducción

Se define la vorticidad como el rotor del campo de velocidades

$$\zeta = \nabla \times v$$

En meteorología se acostumbra a llamar vorticidad a la componente vertical del anterior vector. Cuando haya confusión llamaremos vector vorticidad al vector y vorticidad a la componente vertical. Vimos en el capítulo primero que podemos interpretar a la vorticidad como el doble de la velocidad angular local del fluido.

Al igual que se hace con el campo de velocidades podemos definir para el campo de vorticidad la línea de corriente como aquella línea tal que la tangente en cada punto a la línea es paralela al vector vorticidad en dicho punto. Se define así mismo el tubo de vorticidad como el conjunto de líneas de corriente de vorticidad que pasa por una curva cerrada en el espacio. En cada punto del tubo el vector vorticidad es tangente a la superficie del tubo en dicho punto.

Se define la intensidad del tubo como la integral de superficie del vector vorticidad extendida a una sección transversal del tubo,

$$\int_{\Sigma} \zeta \cdot d\sigma$$

Dada la definición de vorticidad la divergencia de dicho vector es nula

$$\nabla \cdot \zeta = 0$$

por lo que el campo ζ es a priori más sencillo de manejar que el propio campo v pues es no divergente

mientras que este último no tiene porque serlo.

Consideremos un volumen comprendido entre dos secciones cualesquiera del tubo de corriente, calculemos la integral de volumen del vector vorticidad extendido a este volumen y apliquemos el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\int_{\mathcal{V}} \text{DIV} \zeta \, d\mathcal{V} = \int_{\partial \mathcal{V}} \zeta \cdot d\sigma$$

puesto que por definición $\text{DIV} \zeta = 0$, se tiene

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \zeta \cdot d\sigma$$

La integral está extendida a toda la superficie que rodea al volumen. Separemos esta integral en tres partes, dos extendidas a las secciones transversales y la tercera a la superficie externa del tubo.

$$\int_{\partial \mathcal{V}_1} \zeta \cdot d\sigma + \int_{\partial \mathcal{V}_2} \zeta \cdot d\sigma + \int_{\partial \mathcal{V}_3} \zeta \cdot d\sigma = 0$$

Ahora bien, la tercer integral es idénticamente cero pues el elemento de área $d\sigma$ es normal a la superficie del tubo y por tanto al vector ζ , por lo que su producto escalar es nulo. En cuanto a las otras dos integrales, debemos de tener en cuenta que los elementos de área, son vectores dirigidos hacia afuera de la superficie y por tanto tienen direcciones opuestas, cambiando el signo de uno de ellos podemos ver que

$$\int_{\partial \mathcal{V}_1} \zeta \cdot d\sigma = \int_{\partial \mathcal{V}_2} \zeta \cdot d\sigma$$

y por tanto la intensidad del tubo vortice es constante a lo largo del tubo. La primera consecuencia de este teorema es que el tubo vortice no puede reducirse a un punto en el interior del fluido, pues la vorticidad se haría infinita, debe de extenderse necesariamente a la frontera del mismo.

Suponer que tenemos un tubo de vorticidad y que adelgazamos este tubo hasta convertirlo en una línea a la vez que la intensidad del tubo de vorticidad permanezca constante, obviamente para que esto sea posible es necesario que la vorticidad tienda a infinito. Este proceso es similar al que se hace con un dipolo, en el que la distancia entre las cargas se hace muy pequeña y la carga tiende a infinito con tal que el momento dipolar se mantenga finito. A esta línea así construida se la denomina línea singular de vorticidad. Esta línea singular de vorticidad es una idealización de alguna concentración de vorticidad como por ejemplo un tornado.

3.2. Expresión de la vorticidad en otros sistemas de coordenadas

3.2.1. Coordenadas naturales

En primer lugar vamos a ver cual es la expresión de la vorticidad en el sistema de coordenadas naturales. De acuerdo con lo visto en el capítulo primero, la vorticidad se puede poner como

$$\zeta = (\mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial b}) \times (\nu \mathbf{t})$$

aplicando el operador, tenemos

$$\zeta = \frac{\partial \nu}{\partial s} \mathbf{t} \times \mathbf{t} + \nu \mathbf{t} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} + \frac{\partial \nu}{\partial n} \mathbf{n} \times \mathbf{t} + \nu \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} + \frac{\partial \nu}{\partial b} \mathbf{b} \times \mathbf{t} + \nu \mathbf{b} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial b}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$ y que $(\partial \mathbf{t} / \partial s) = k \mathbf{n}$ siendo k la curvatura, tenemos

$$\zeta = \left(\nu k - \frac{\partial \nu}{\partial n} \right) \mathbf{b} + \frac{\partial \nu}{\partial b} \mathbf{n} + \nu \left(\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} + \mathbf{b} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial b} \right) \quad (3.1)$$

El último término del segundo miembro, no es otra cosa que

$$\Psi = (\mathbf{t} \cdot \text{ROT } \mathbf{t}) \mathbf{t}$$

siendo Ψ lo que Truesdell llama *abnormalidad*¹ del campo de velocidades. Si consideramos que el flujo se desarrolla en un plano solo nos queda el término

$$\zeta = \nu k - \frac{\partial \nu}{\partial n} = \frac{\nu}{\rho} - \frac{\partial \nu}{\partial n}$$

El primer término representa la aportación a la vorticidad de la curvatura de las líneas de flujo y el segundo representa la aportación de la cizalla. Si las líneas de flujo fuesen rectas solo nos quedaría el segundo término, que representa la aportación de la cizalla. Si el flujo fuese circular, tal que $\nu = \rho \Omega$ (llamado vórtice rotacional), tenemos dos posibilidades que la curvatura sea ciclónica o anticiclónica. Fijémonos en la figura 3.1 El diagrama de la izquierda nos muestra el caso de curvatura anticiclónica, en este caso el radio de curvatura es negativo por lo que, para que ν sea positiva, necesariamente debe de verificarse que Ω es negativo. Además se verifica que

$$\frac{\partial \nu}{\partial n} = - \frac{\partial \nu}{\partial \rho}$$

¹Ver el libro *The kinematics of vorticity*, C. Truesdell, Indiana University Press, 1964

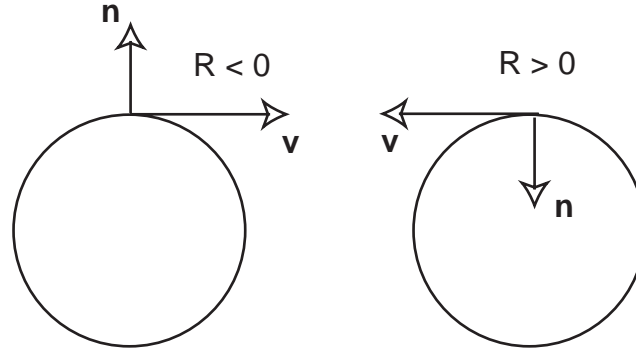


Figura 3.1:

pues al alejarse del centro de curvatura, n aumenta y ρ disminuye pues se hace mas negativo. Así pues tenemos

$$\zeta = \frac{v}{\rho} - \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\rho\Omega}{\rho} + \frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial\rho} = 2\Omega = -2|\Omega|$$

por lo que la vorticidad es negativa. Lo contrario sucede con el diagrama de la derecha. Ahora la curvatura es ciclónica, el radio de curvatura es positivo y por tanto $\Omega > 0$ como antes se verifica que

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial\rho}$$

por lo que

$$\zeta = \frac{v}{\rho} - \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\rho\Omega}{\rho} + \frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial\rho} = 2\Omega$$

siendo la vorticidad positiva. Como habiamos comentado en el capítulo primero, la vorticidad representa el doble de la velocidad de rotación local.

El segundo término representa la vorticidad generada por cizalla en la dirección \mathbf{b} . Si el flujo es horizontal, el vector \mathbf{b} apunta en la dirección vertical y por tanto este termino corresponde con la cizalla vertical. Basta poner un molinete con el eje horizontal para comprobar que si existe cizalla en la dirección vertical para comprobar que este rota a lo largo del eje \mathbf{n} . Si ponemos un molinete en un vórtice rotacional, como el que se desarrolla si ponemos un vaso de agua en una mesa giratoria una vez alcanzado el régimen estacionario, el molinete gira con una velocidad angular doble de la velocidad angular del vaso. Por un lado gira con la velocidad a la que gira el vaso, pero como el agua en la parte externa del aspa lleva una velocidad mayor ($v = \Omega \rho$) que en la parte interna, el molinete rota también respecto del agua y por tanto su velocidad rotacional es dos veces la velocidad de rotación del agua según acabamos de obtener. Se puede también considerar un vórtice irrotacional. Para ello

considerar un sistema en el que el campo de velocidades es $v = (A/r)\theta$. En este caso, como en el caso del vórtice rotacional, el aspa gira al girar el fluido. Pero ahora las aspas en la parte interna se enfrentan a un fluido que va más deprisa que en la parte externa del mismo por lo que tienen una velocidad angular relativa contraria a la que tiene por moverse en el seno del fluido de tal forma que la velocidad de rotación total es nula. Es un vórtice irrotacional. Un ejemplo meteorológico de este tipo de vórtices se tiene en el caso de un tornado, en el que la vorticidad es muy grande en el interior del mismo y va disminuyendo hacia el exterior. Podemos asimilar este sistema a una línea singular de vorticidad.

3.2.2. Coordenadas esféricas

Haciendo un tratamiento similar al anterior, esto es, 'aplicar' el vector gradiente vectorialmente al vector velocidad, tenemos

$$\zeta = \left(\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r} + \phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \lambda \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \times (u_r \mathbf{r} + u_\phi \phi + u_\lambda \lambda)$$

se llega a la siguiente expresión

$$\zeta = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left\{ \mathbf{r} \left[\frac{\partial(r u_\phi)}{\partial \lambda} - \frac{\partial(r \cos \phi u_\lambda)}{\partial \phi} \right] + \lambda r \cos \phi \left[\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial r} \right] + \phi r \left[\frac{\partial(r \cos \phi u_\lambda)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} \right] \right\}$$

teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}$, $(1/r) \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial y}$, $(1/(r \cos \phi)) \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial x}$ y que en la nomenclatura usual $u_r = w$, $u_\phi = v$ y $u_\lambda = u$, se obtiene

$$\zeta = \mathbf{i} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{r} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{r} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u \tan \phi}{r} \right] \quad (3.2)$$

Si despreciamos los términos de esfericidad, esto es aquellos términos en los que aparece el radio, obtenemos

$$\zeta = \mathbf{i} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \mathbf{j} \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \mathbf{k} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (3.3)$$

que es similar a la que se obtiene en cartesianas, solo que ahora x , y , z no representan las coordenadas cartesianas, si no desplazamientos a lo largo de un paralelo, un meridiano y una dirección vertical.

3.3. Circulación

Una vez visto el concepto de vorticidad vamos a introducir una magnitud relacionada con la anterior y es la circulación Γ . Suponer que tenemos un circuito cerrado, que es reducible a un punto,

esto es que podemos deformar el circuito hasta hacerlo puntual sin salirnos del fluido, se define la circulación en torno a este circuito como

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

que de acuerdo con el teorema de Stokes,

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \text{ROT} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\zeta} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

mide la intensidad del tubo vórtice formado a lo largo del circuito.

Otra interpretación que cabe asignar a la circulación es una medida del momento angular, o más precisamente de la proyección del momento angular respecto del eje de rotación instantáneo. Considerar un movimiento circular plano. El momento angular respecto del origen por unidad de masa vale

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}$$

siendo $\boldsymbol{\rho}$ el radio de giro. Puesto que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}$ se tiene

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \rho^2 \mathbf{k}$$

Por lo que $L_z = \Omega \rho^2$. La circulación vale,

$$\Gamma = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \boldsymbol{\theta} \rho d\theta = 2\pi \Omega \rho^2 = 2\pi L_z$$

así pues la circulación es una medida de la proyección del momento angular respecto del eje de giro. Teniendo en cuenta este último aspecto vamos a dar un teorema que no es otra cosa que una forma de expresar la conservación del momento angular de la mecánica clásica.

Teorema 3.3.1 Considerar un circuito material, esto es un circuito que esta formado siempre por las mismas partículas y por tanto se mueve con el fluido, si el fluido es barotrópico, isentrópico y las fuerzas de volumen depende de un potencial, la circulación a lo largo de este circuito material se conserva. (Teorema de Kelvin)

Vamos a considerar primero las condiciones impuestas en el teorema. En primer lugar se considerar que el fluido es barotrópico esto significa que la densidad es función única de la presión, $\rho = \rho(p)$. Esta situación se da por ejemplo en el caso de un fluido homoeentrópico. En el caso de fluido barotropico las superficies de igual densidad son superficies de igual presión y lo mismo ocurre con las superficies

de igual temperatura. El hecho de que las superficies de igual presión e igual densidad coincidan tiene como consecuencia que los centros de acción de las fuerzas de presión y la gravedad actúan en la misma vertical mientras que si esto no ocurre los centros de presión y de gravedad no caen en la misma vertical generando por tanto un momento que tiende a girar la burbuja y por tanto variar la vorticidad de la misma y por ende su circulación. Para ver esto imaginar una esfera de fluido, ver la figura 3.2, que nos muestra una esfera de fluido barotrópico (izquierda) donde las superficies de

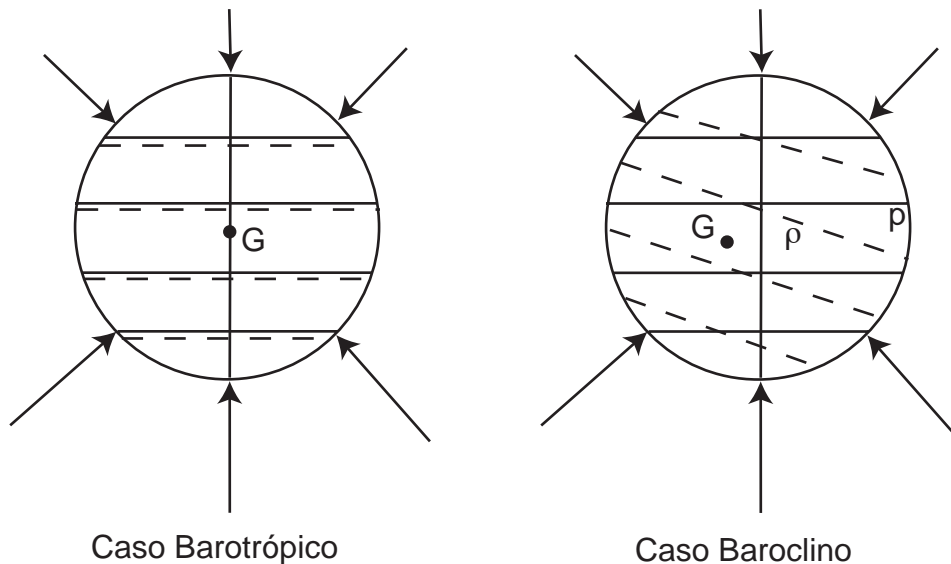


Figura 3.2: Diagrama que nos muestra una esfera de fluido barotrópico (izquierda) donde las superficies de isobáricas coinciden con las superficies de igual densidad y una esfera de fluido baroclino (derecha) en el que las superficies isobáricas no coinciden con las superficies de igual densidad. En la primera el centro de acción de la presión cae en la misma vertical que el centro de masas, mientras que en la segunda no, por lo que en este último caso se induce un momento que tiende a variar la vorticidad

isobáricas coinciden con las superficies de igual densidad y una esfera de fluido baroclino (derecha) en el que las superficies isobáricas no coinciden con las superficies de igual densidad. En la primera el centro de acción de la presión cae en la misma vertical que el centro de masas, mientras que en la segunda no, por lo que en este último caso se induce un momento que tiende a variar la vorticidad.

En segundo lugar hemos supuesto que el fluido es isentropico, como se vió en el capítulo primero, esta condición exige que el fluido no sea conductor y no viscoso. Aunque con esta ultima condición es suficiente, vamos a suponer sin embargo que el fluido es isentrópico. Por último si las fuerzas proceden de un potencial nos asegura que estas no van a generar momento respecto del centro de masas de la burbuja.

Matemáticamente hablando el teorema de Kelvin se expresa de la siguiente manera

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Para su demostración debemos de evaluar cuanto vale la derivada másica de la integral de línea, para ello debemos de tener en cuenta que el circuito siempre esta compuesto por la mismas partículas. Operando de la misma manera que hicimos cuando demostramos el teorema del transporte de Reynolds, vamos a pasar a coordenadas iniciales, esto es vamos a emplear la imagen lagrangiana del fluido. En esta imagen la anterior ecuación toma la forma

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \oint \mathbf{v}(\xi) \cdot d\mathbf{l}(\xi) = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \oint v^i(\xi) dl^i(\xi) = \frac{\partial}{\partial t_\xi} \oint v^i(\xi) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j$$

puesto que la derivada temporal se hace a ξ constante

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(v^i(\xi) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) d\xi^j = \oint \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(v^i(\xi) \right) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j + \oint v^i(\xi) \frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) d\xi^j$$

Puesto que las variables ξ y t son independientes podemos intercambiar en la segunda integral las derivaciones en t y en ξ . Así mismo

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j = dx^i$$

por lo que

$$\frac{\partial}{\partial t_\xi} \left(v^i(\xi) \right) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j = \frac{Dv^i}{Dt} dx^i$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \oint \frac{Dv^i}{Dt} dx^i + \oint v^i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial t_\xi} \right) d\xi^j = \oint \frac{Dv^i}{Dt} dx^i + \oint v^i(\xi) \frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} d\xi^j = \\ &= \oint \frac{Dv^i}{Dt} dx^i + \oint v^i(\xi) dv^i = \oint \frac{Dv^i}{Dt} dx^i + \oint d[(1/2)\mathbf{v}^2] = \oint \frac{Dv^i}{Dt} dx^i = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que la integral a lo largo de un camino cerrado de la diferencial de $(1/2)\mathbf{v}^2$ es cero.

Teniendo en cuenta la ecuación del movimiento para el caso de fluidos no viscosos y fuerzas dependientes de un potencial,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \psi$$

la derivada masica de la circulación vale

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = \oint \left[-\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \psi \right] \cdot d\mathbf{l} = \oint -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} - \oint \nabla \psi \cdot d\mathbf{l}$$

Puesto que

$$\oint \nabla \psi \cdot d\mathbf{l} = \oint d\psi = 0$$

tenemos

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} \quad (3.4)$$

Supongamos ahora que el fluido es barotrópico, en estas condiciones $\rho = \rho(p)$ por lo que podemos escribir

$$\rho^{-1}(p) = \frac{dF(p)}{dp}$$

siendo $F(p)$ una función que solo depende de p^2 . Teniendo en cuenta esta expresión

$$\rho^{-1}(p) \nabla p = \nabla F$$

por lo que

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint -\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = - \oint \nabla F \cdot d\mathbf{l} = - \oint dF = 0$$

por lo que queda demostrado el teorema.

Teorema 3.3.2 En las condiciones que se verifica el teorema de Kelvin, los tubos de vorticidad se mueven con el fluido. (Teorema de Helmholtz)

Imaginar un tubo vortice y que dibujamos un circuito cerrado sobre la pared del tubo Puesto que el

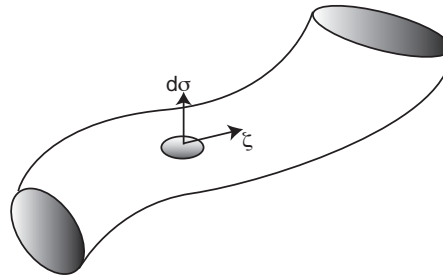


Figura 3.3:

²En el caso de fluido homeotrópico, esta función es la entalpía del fluido, pues $T\nabla S = \nabla H - (1/\rho)\nabla p$. Si el fluido es homeotrópico $\nabla S = 0$ y por tanto $\nabla H = -(1/\rho)\nabla p$ y por tanto $F = H$.

circuito está sobre el tubo, los vectores diferencial de área y vorticidad son ortogonales por lo que

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\zeta} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

Al moverse el fluido, el circuito se moverá a una nueva ubicación. De acuerdo con el teorema de Kelvin la circulación a lo largo de este nuevo circuito será cero, y esto para cualquier circuito del tubo. La situación más general es que el nuevo circuito pertenezca a nuevo un tubo vórtice, por lo que el tubo vórtice se mueve con el fluido. Así por ejemplo, el vórtice generado por las hélices de un avión se mueven de aeropuerto a aeropuerto tras el avión. Desde el punto de vista del avión es el aire el que se mueve y por tanto el tubo vórtice por el generado se mueve con el aire.

3.3.1. Efecto de la baroclinicidad

Hemos visto que pasa si el fluido es barotrópico, vamos a ver ahora la influencia de la baroclinicidad, esto es, la dependencia conjunta de la densidad respecto de la temperatura y la presión. Ahora ya no podemos suponer que las superficies de igual presión sean superficies de igual densidad. Teniendo en cuenta la expresión (3.4),

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int \boldsymbol{\zeta} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l}$$

Aplicando el teorema de Stokes a la integral del segundo miembro

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = - \oint \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

en donde hemos tenido en cuenta que el rotacional del producto de una función por un vector es igual al producto vectorial del gradiente de la función por el vector más la función por el rotor del vector y que el rotor del gradiente de una función es nulo. Teniendo en cuenta la ecuación de estado, la anterior expresión la podemos poner como

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \oint \frac{R}{p} \nabla T \times \nabla p \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.5)$$

Así pues la inclinación de las superficies isotermas respecto de las superficies isobaricas provoca un cambio en la circulación.

Vamos a aplicar estos resultados al estudio de los vientos de ladera. Imaginemos una ladera de una montaña, ver figura 3.4, debido al calentamiento diurno la ladera se calienta de tal forma a una altura h respecto del valle la temperatura en la cercanías de la ladera será mayor que la temperatura

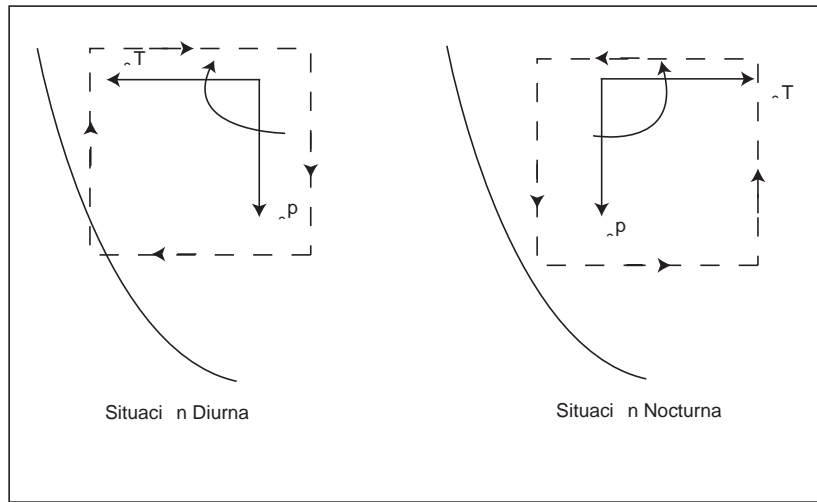


Figura 3.4:

a la misma altura pero lejos de la ladera, esto provoca un gradiente de temperaturas que va hacia la ladera. Por otra parte como la presión aumenta hacia abajo, las superficies de igual presión y temperatura no son paralelas. Si elegimos un circuito vertical, la cantidad

$$-\frac{R}{p} \nabla T \times \nabla p$$

es un vector ortogonal al plano vertical apuntando hacia el interior que induce una circulación en la dirección de la flechas. Esto da lugar a un viento que va desde el valle hacia la montaña. La situación durante la noche es la contraria y se provoca un viento hacia el valle. Este mismo tipo de fenómeno ocurre en la brisa de mar. Durante el día la temperatura de la tierra aumenta respecto de la temperatura del mar debido a la enorme inercia térmica de este último, esto provoca la que las superficies de igual temperatura se inclinen hacia el mar provocando un viento similar al anterior en el caso nocturno. Fenómenos de este tipo a gran escala tenemos por ejemplo los monzones.

Ejemplo 3.1 Aplicar la ecuación (3.5) a un circuito horizontal y demuestra que

$$-\oint \frac{R}{p} \nabla T \times \nabla p \cdot d\sigma = -\frac{Rf^2}{g} \left(\frac{\partial v_g}{\partial z} \times v_g \right)$$

SOLUCIÓN

Puesto que el circuito y por tanto el área que barre son horizontales

$$-\oint \frac{R}{p} \nabla T \times \nabla p \cdot d\sigma = -\oint \frac{R}{p} \nabla_z T \times \nabla_z p \cdot d\sigma$$

De la definición de viento geostrófico

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\rho f} \mathbf{k} \times \nabla_z p$$

Derivando respecto de z

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = -\frac{1}{\rho^2 f} \frac{\partial \rho}{\partial z} \mathbf{k} \times \nabla_z p + \frac{1}{\rho f} \mathbf{k} \times \nabla_z \frac{\partial p}{\partial z}$$

Teniendo en cuenta, que de la ecuación de estado

$$\frac{1}{p} \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla \rho + \frac{1}{T} \nabla T,$$

la ecuación de la hidrostática

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

y la propia definición del viento geostrófico, se llega a

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{v}_g + \frac{g}{f T} (\mathbf{k} \times \nabla_z T) \quad (3.6)$$

multiplicando vectorialmente por \mathbf{k} obtenemos,

$$\nabla_z T = \frac{f}{g} \frac{\partial T}{\partial z} (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_g) - \mathbf{k} \times \frac{f T}{g} \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \nabla_z T) = -\nabla_z T$$

Multiplicando en la ecuación del viento geostrofico vectorialmente por \mathbf{k} obtenemos

$$\nabla_z p = -\rho f (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_g)$$

Sustituyendo

$$-\frac{R}{p} \nabla_z T \times \nabla_z p = -\frac{R}{p} \left(\frac{f}{g} \frac{\partial T}{\partial z} (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_g) - \mathbf{k} \times \frac{f T}{g} \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} \right) \times (-\rho f (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_g)) =$$

$$= -\frac{f^2}{g} (\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z}) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_g) = -\frac{f^2}{g} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} \times \mathbf{v}_g \right)$$

Ejemplo 3.2 Calcular la aceleración que se produce en una situación de brisa marina suponiendo que las superficies isobáricas sean horizontales y que la diferencia de temperaturas entre el mar y la tierra es de 10° . Elegir un circuito de 10 km de largo por 1 km de alto y que la presiones en la base y cima del circuito son de 1000 y 900 mb respectivamente.

SOLUCIÓN

Considerar el circuito de la figura, 3.5. Del teorema de la circulación

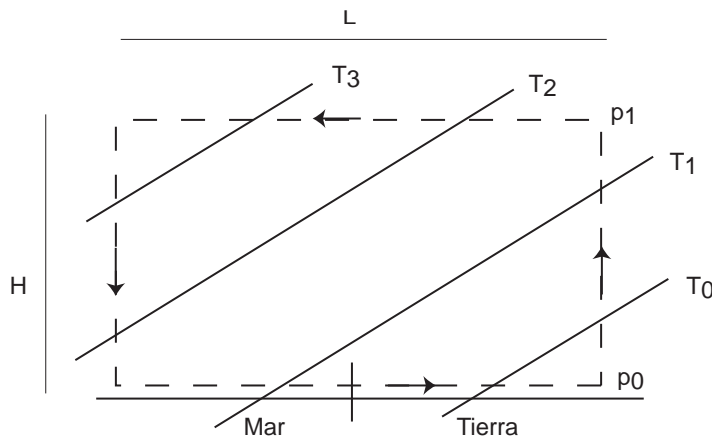


Figura 3.5:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = - \oint \frac{1}{\rho} dp = - \oint RT d \log p$$

La integral de la derecha a lo largo de los brazos horizontales es nula, pues la presión se mantiene constante. A lo largo de los brazos verticales la podemos poner como

$$\begin{aligned} - \oint RT d \log p &= - \left[R \bar{T}_2 \log \left(\frac{p_1}{p_0} \right) + R \bar{T}_1 \log \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \right] = - \left[-R \bar{T}_2 \log \left(\frac{p_0}{p_1} \right) + R \bar{T}_1 \log \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \right] = \\ &= R(\bar{T}_2 - \bar{T}_1) \log \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \end{aligned}$$

siendo \bar{T}_2 la temperatura media sobre tierra y \bar{T}_1 la temperatura media sobre el mar.

En cuanto a la circulación

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \bar{v} 2(h + L)$$

de donde

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{R(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{2(h+L)} \log\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

dando valores,

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = \frac{287 \times 10}{2 \times 21 \times 10^3} \times \log\left(\frac{1000}{900}\right) = 7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

aceleración que al cabo de una hora produce una velocidad de 25 m/s. Obviamente esto no se observa en la realidad. El problema es que estamos despreciando los efectos de la disipación viscosa y obviamente el propio movimiento tiende a disminuir el gradiente térmico y por tanto la circulación.

3.4. Ecuación de conservación de la vorticidad

Considerar la ecuación de conservación del momento

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \psi + \nu [\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{2}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})]$$

donde hemos supuesto que las fuerzas de volumen dependen de un potencial. Teniendo en cuenta que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}$$

tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \psi + \nu [\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{2}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})]$$

Tomando el rotacional de la anterior expresión y teniendo en cuenta que, el rotacional del gradiente es cero, que se puede intercambiar la derivada temporal y la derivada espacial y que $\text{ROT}(\nabla^2 \mathbf{v}) = \nabla^2(\text{ROT} \mathbf{v})$, obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}$$

Es fácil demostrar que

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\zeta}) = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\zeta} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta}$$

en donde se ha tenido en cuenta que $\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = 0$, sustituyendo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta} = -\boldsymbol{\zeta} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\zeta$$

obtenemos

$$\frac{D\zeta}{Dt} = -\zeta(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\zeta \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \zeta \quad (3.7)$$

que nos expresa la ecuación de conservación de la vorticidad. Vamos a ir interpretando cada uno de los términos que aparecen en la anterior ecuación

- $-\zeta(\nabla \cdot \mathbf{v})$: Este término representa la variación de la vorticidad a cuenta de la divergencia del fluido. Si existe divergencia, las masas de aire tienden a expandirse y por tanto por la ley de conservación del momento angular tienden a disminuir su velocidad angular y por tanto la vorticidad, de aquí el signo menos que aparece en el término.
- $(\zeta \cdot \nabla)\mathbf{v}$: Este término recibe el nombre de ‘stretching’ y ‘tilting’, esto es de estiramiento e inclinación. Vamos a analizar con más detalle el origen de estos apellidos. Escribamos este término en cartesianas

$$(\zeta \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\zeta_x \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial z})(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k})$$

fijémonos en lo que pasa por ejemplo en la dirección \mathbf{k}

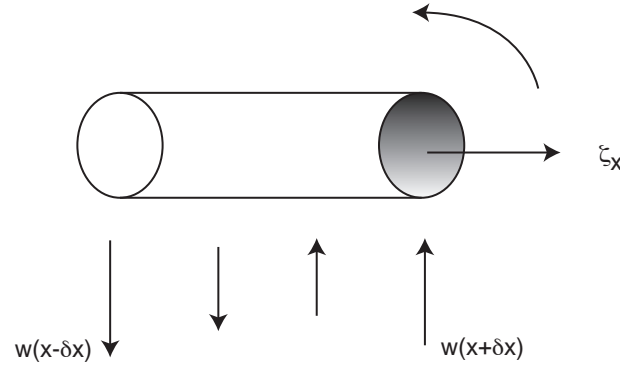
$$(\zeta \cdot \nabla)\mathbf{v}|_z = (\zeta_x \frac{\partial}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial z})w = \zeta_x \frac{\partial w}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial z}$$

El último término representa lo que hemos denominado ‘stretching’. Puesto que $\frac{\partial w}{\partial z}$ da cuenta de la velocidad a la que se están separando dos partículas en la dirección de eje z , si tuviésemos un tubo situado a lo largo del eje z , este se estaría estirando o contrayendo a cuenta de este término. Al estirarse, por conservación de la masa, tendería a disminuir su radio y a aumentar su velocidad de rotación aumentando por tanto su vorticidad³. Los otros dos términos

$$\zeta_x \frac{\partial w}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial w}{\partial y}$$

corresponden con lo que hemos denominado ‘tilting’. Imaginemos un tubo girando a lo largo del eje x , (figura 3.6) cuya velocidad de giro viene medida por ζ_x . Puesto que $\frac{\partial w}{\partial x}$ es distinto de cero, la velocidad vertical en un extremo del tubo será diferente de la velocidad vertical en el

³En realidad este término de estiramiento no tiene ninguna influencia pues aparece otro término de estiramiento, pero con el signo cambiado, en la expresión del término divergente, de tal forma que combinando ambos términos (estiramiento y divergencia) solo tiene influencia la variación de la sección del tubo vórtice

**Figura 3.6:**

otro extremo y esto hará que el tubo tienda a inclinar su eje de rotación y por tanto aportar vorticidad en la dirección vertical. Lo mismo sucede con la componente y .

- $\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$ Este término representa la creación o destrucción de vorticidad por baroclinicidad del que ya hemos hablado en la sección anterior.
- $\nu \nabla^2 \zeta$: Este término representa la difusión de vorticidad por viscosidad. Al igual la viscosidad difunde momento lineal difunde vorticidad.

Analizando con cuidado la ecuación de conservación de la vorticidad vemos que salvo en el término baroclino, en el resto de los términos aparece como factor la vorticidad. Esto significa que estos términos tienden a hacer variar la vorticidad pero no pueden crearla, pues si ζ es cero, dichos términos se anulan.

3.5. Vorticidad y circulación en sistemas de referencia no inerciales

Vamos a analizar la influencia que tiene sobre los anteriores teoremas el hecho de situarnos en un sistema de referencia no inercial que rota respecto del sistema de referencia inercial con velocidad angular constante Ω , como es el caso de la Tierra.

Vamos a ver en primer lugar como cambiar el concepto de circulación y el teorema de Kelvin para tener en cuenta que el sistema de referencia es no inercial. Como sabemos la velocidad absoluta es igual a la velocidad relativa más la de arrastre,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \Omega \times \mathbf{r}$$

de tal forma que la circulación absoluta la podemos poner como

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{l} + \oint (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

El primer término del segundo miembro representa la circulación relativa y el segundo término representa la circulación debida al movimiento del observador, esto es la circulación debida a la rotación de la Tierra. Apliquemos el teorema de Stokes a este segundo término

$$\oint (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\partial V} [\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

el integrando lo podemos poner como

$$\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{r} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} = 3\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

por lo que

$$\oint (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\partial V} 2\boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial V} 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

La cantidad $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$ la podemos poner como $\Omega \cos \alpha$, siendo α el ángulo que forman la normal al circuito (respecto del cual estamos calculando la circulación) y el vector de rotación de la Tierra, sustituyendo

$$\oint (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 2\Omega \int_{\partial V} \cos \alpha d\sigma = 2\Omega \int_{\partial V} \sin \phi d\sigma$$

Siendo ϕ la latitud. Ahora bien la integral no representa otra cosa que la proyección del área del circuito sobre el ecuador, representemos este área por Σ_p , tenemos

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{l} + 2\Omega \Sigma_p$$

de donde

$$\oint \mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} - 2\Omega \Sigma_p$$

y por tanto

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{l} = \frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} - 2\Omega \frac{D\Sigma_p}{Dt}$$

del teorema de la circulación 3.4 tenemos

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v}_r \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot d\boldsymbol{\sigma} - 2\Omega \frac{D\Sigma_p}{Dt} \quad (3.8)$$

que constituye la expresión del teorema de Bjerknes. Vemos de esta expresión que la circulación re-

lativa cambia debido a los efectos de la baroclinicidad y a modificaciones del área proyectada del circuito, si ésta disminuye la circulación aumenta y viceversa, este hecho no es otra cosa que un reflejo de la ley de conservación del momento angular. Al disminuir el área del circuito disminuye el momento de inercia y por tanto para que se mantenga el momento angular ha de aumentar la velocidad de rotación. La proyección del área puede cambiar, bien porque cambia el área propiamente dicha, bien porque varía el ángulo que forma con el eje de rotación de la Tierra. Esta proyección es máxima en el polo y mínima en el ecuador. Supongamos que tenemos un circuito horizontal (respecto de la superficie de la Tierra), en una latitud ϕ , la proyección de este área sobre el eje de rotación de la Tierra vale $\Sigma \cos \alpha = \Sigma \sin \phi$, siendo ϕ la latitud del lugar. Si los efectos baroclinos son despreciables, el teorema de Bjerknes nos dice que la variación de la circulación se debe a la variación del área proyectada. Si esta parcela, que ocupa un cierto área, la trasladamos a otra latitud superior su circulación habrá variado en una cantidad

$$\Delta \Gamma = -2\Omega(\Sigma_2 \sin \phi_2 - \Sigma_1 \sin \phi_1)$$

Si el área del circuito no cambia

$$\Delta \Gamma = -2\Omega \Sigma (\sin \phi_2 - \sin \phi_1)$$

Si la latitud $\phi_2 > \phi_1$, esto está más al norte, la circulación disminuye y por tanto la burbuja, si inicialmente no tenía circulación, adquiere una circulación anticiclónica según viaja hacia el Norte.

Teniendo en cuenta, por otra parte, que

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r) + (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

se obtiene

$$\frac{D}{Dt} \oint \mathbf{v} d\mathbf{l} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{l} = \oint \frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} d\mathbf{l} + \oint 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r) d\mathbf{l} + \oint (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) d\mathbf{l}$$

El término centrífugo se puede poner como el gradiente de un potencial y por tanto no contribuye a la integral, de donde

$$\oint \frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} d\mathbf{l} = \oint \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{l} - \oint 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r) d\mathbf{l}$$

y por tanto

$$\oint \frac{D\mathbf{v}_r}{Dt} d\mathbf{l} = \oint \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \oint 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r) d\mathbf{l} \quad (3.9)$$

que es otra expresión del teorema de Bjerknes.

Veamos ahora como cambia la expresión de la conservación de la vorticidad cuando estamos en un sistema de referencia no inercial. De la ecuación del movimiento en un sistema de referencia no

inercial,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\psi - 2(\Omega \times \mathbf{v}) + F$$

donde \mathbf{v} representa ahora la velocidad relativa y F representa la fuerza de rozamiento,

$$F = \nu \left[\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{2}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]$$

La derivada masica la podemos poner como

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \zeta \times \mathbf{v}$$

sustituyendo,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \zeta \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\psi - 2(\Omega \times \mathbf{v}) + F$$

Pasando el término de Coriolis al primer miembro,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right) + ((2\Omega + \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\psi + F$$

Aplicando ahora el operador $\nabla \times$ al igual que hacíamos en la sección anterior y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \Omega = 0$ se obtiene, al igual que en el caso inercial, solo que sustituyendo ζ por $2\Omega + \zeta$, la expresión

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(2\Omega + \zeta) = -(2\Omega + \zeta)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + ((2\Omega + \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times F \quad (3.10)$$

Teniendo en cuenta que Ω no depende explícitamente del tiempo podemos poner

$$\frac{\partial(2\Omega + \zeta)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(2\Omega + \zeta) = -(2\Omega + \zeta)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + ((2\Omega + \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times F$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{D(2\Omega + \zeta)}{Dt} = -(2\Omega + \zeta)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + ((2\Omega + \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times F \quad (3.11)$$

que es la expresión de conservación de la vorticidad en un sistema de referencia inercial que rota con velocidad angular constante Ω . La cantidad ζ recibe el nombre de vorticidad relativa, mientras que 2Ω recibe el nombre de vorticidad planetaria. Recuerdese que a todo movimiento de rotación se le asocia una vorticidad igual a dos veces la velocidad angular de rotación. Una burbuja de aire estacionaria respecto de un observador en el sistema de referencia no inercial, tiene vorticidad relativa nula

mientras que su vorticidad absoluta proviene del movimiento de rotación que realiza en torno al eje de rotación de la Tierra esto es de la vorticidad planetaria.

3.5.1. Ecuaciones aproximadas para flujo a gran escala

Estamos interesados en calcular la ecuación de conservación de la vorticidad en el caso de movimientos a gran escala, los cuales se pueden considerar cuasihorizontales. En este caso la componente de la vorticidad más importante es la componente vertical. Por esta razón nos vamos a fijar en la componente \mathbf{k} de la ecuación 3,11. Vamos a ir viendo término a término

- Divergencia

$$-\mathbf{k} \cdot (\zeta + 2\Omega)(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -(\zeta + 2\Omega_z)(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -(\zeta + 2\Omega \sin \phi)(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

donde hemos tenido en cuenta que $\Omega = \Omega \cos \phi \mathbf{j} + \Omega \sin \phi \mathbf{k}$

- Tilting

$$\mathbf{k} \cdot ((\zeta + 2\Omega) \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \left[(\zeta + 2\Omega)_x \frac{\partial}{\partial x} + (\zeta + 2\Omega)_y \frac{\partial}{\partial y} + (\zeta + 2\Omega)_z \frac{\partial}{\partial z} \right] (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k})$$

para desarrollar la anterior expresión debemos de tener en cuenta que estamos en coordenadas esféricas y que en estas coordenadas

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \phi} = -\mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \lambda} = -\cos \phi \mathbf{k}$$

Desarrollando obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot ((\zeta + 2\Omega) \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left[(\zeta + 2\Omega)_x \frac{\partial}{\partial x} + (\zeta + 2\Omega)_y \frac{\partial}{\partial y} + (\zeta + 2\Omega)_z \frac{\partial}{\partial z} \right] w \\ &\quad - 2(\zeta + 2\Omega)_x \frac{u}{r} - 2(\zeta + 2\Omega)_y \frac{v}{r} = \\ &\quad \xi \frac{\partial w}{\partial x} + (\eta + 2\Omega \cos \phi) \frac{\partial w}{\partial y} + (\zeta + 2\Omega \sin \phi) \frac{\partial w}{\partial z} - 2\xi \frac{u}{r} \\ &\quad - 2(\eta + 2\Omega \cos \phi) \frac{v}{r} \end{aligned}$$

siendo ξ y η las componentes horizontales de la vorticidad.

Combinado ambos términos y teniendo en cuenta que la divergencia de \mathbf{v} en esféricas vale

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v \tan \phi}{r}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} -\mathbf{k} \cdot (\zeta + 2\Omega)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{k} \cdot ((\zeta + 2\Omega) \cdot \nabla) \mathbf{v} = & -(\zeta + 2\Omega \sin \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v \tan \phi}{r} \right) \\ & + \xi \frac{\partial w}{\partial x} + (\eta + 2\Omega \cos \phi) \frac{\partial w}{\partial y} + (\zeta + 2\Omega \sin \phi) \frac{\partial w}{\partial z} \\ & - 2\xi \frac{u}{r} - (\eta + 2\Omega \cos \phi) \frac{v}{r} \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} -\mathbf{k} \cdot (\zeta + 2\Omega)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \cdot ((\zeta + 2\Omega) \cdot \nabla) = & -(\zeta + 2\Omega \sin \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & + 2\Omega \cos \phi \frac{\partial w}{\partial y} \\ & - \left(2\xi \frac{u}{r} + (\eta + 2\Omega \cos \phi) \frac{v}{r} - (\zeta + 2\Omega \sin \phi) \frac{v \tan \phi}{r} \right) \end{aligned}$$

En consonancia con lo que se hizo para obtener las ecuaciones del movimiento a gran escala en el capítulo anterior, despreciaremos los términos de esfericidad (aquellos que contienen $1/r$) así como el término $2\Omega \cos \phi (\partial w / \partial y)^4$. Resultando

$$-\mathbf{k} \cdot (\zeta + 2\Omega)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \cdot ((\zeta + 2\Omega) \cdot \nabla) = -(\zeta + 2\Omega \sin \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

El primer término del segundo miembro representa el efecto combinado del estiramiento y la divergencia y el segundo el 'tilting'. Teniendo en cuenta el resto de los términos de la ecuación 3.11, la ecuación de conservación de la componente vertical de la vorticidad resulta

$$\frac{D(\zeta + f)}{Dt} = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + (\nabla \times \mathbf{F})_z \quad (3.12)$$

donde $f = 2\Omega \sin \phi$ es el factor de Coriolis.

⁴Despreciar este término tiene deficiente justificación. Una de ellas es, que para que las ecuaciones del movimiento a gran escala sea compatible con una ley de conservación del momento angular, los términos que contienen $\Omega \cos \phi$ no han de tenerse en cuenta. Remitimos al lector al libro de 'Dynamic meteorology'

Vamos a valorar cada uno de los términos que aparecen en la anterior ecuación para movimientos a escala sinóptica, para los cuales podemos considerar los siguientes valores típicos: $U \sim 10$ m/s, $W \sim 10^{-2}$ m/s, $L \sim 10^6$ m, $H \sim 10^4$ m, $\delta p \sim 10$ hPa, $\rho \sim 1$ kg/m³, $\delta \rho / \rho \sim 10^{-2}$, para el factor de Coriolis tomaremos un valor correspondiente a una latitud de unos 45° , $f = f_0 \sim 10^{-4}$ s⁻¹, $\beta = \partial f / \partial y \sim 10^{-11}$. Tomaremos como tiempo de escala el tiempo de escala adventivo $L/U \sim 10^5$ s, porque los patrones de vorticidad tienden a moverse a velocidades comparables con la velocidad del viento. Usando estos valores, la vorticidad relativa ζ (despreciando efectos de esfericidad) vale

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \leq \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

donde con el signo de desigualdad queremos indicar que el valor de ζ es menor igual en orden de magnitud. Comparando con la vorticidad planetaria

$$\frac{\zeta}{f} \lesssim \frac{U}{f_0 L} = Ro \sim 10^{-1}$$

vemos pues que la vorticidad relativa es del orden del número de Rossby respecto de la vorticidad planetaria, siendo un orden de magnitud más pequeña que esta para movimientos a gran escala. Podemos por tanto despreciar ζ frente a f_0 a la hora de evaluar el término de divergencia

$$(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \approx f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Teniendo en cuenta estos resultados, los diferentes términos que aparecen en la ecuación 3.12 toma los siguientes valores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, u \frac{\partial \zeta}{\partial x}, v \frac{\partial \zeta}{\partial y} &\sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2} \\ w \frac{\partial \zeta}{\partial z} &\sim \frac{WU}{HL} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2} \\ v \frac{Df}{Dt} &\sim U\beta \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2} \\ f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &\sim \frac{f_0 U}{L} \sim 10^{-9} \text{ s}^{-2} \\ \left(\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) &\sim \frac{WU}{HL} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2} \\ \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &\sim \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\delta p}{L^2} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

En los tres últimos términos, dado que se pueden compensar los terminos entre parentesis, los valores obtenidos son un limite para el orden de magnitud.

En primer lugar, podemos decir que, dada la pequeñez de los terminos anteriores, los movimientos a gran escala se desarrollan conservando la vorticidad. En segundo lugar podemos ver que tal y como está el término divergencia no se compensa con ninguno de los otros términos, para que esto ocurra la divergencia horizontal

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

debe de ser menor o igual que 10^{-6} , por tanto

$$\left| \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{f_0} \right| \lesssim Ro^2$$

y

$$\left| \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{\zeta} \right| \lesssim Ro$$

lo que significa que la divergencia horizontal en movimientos a gran escala debe de ser muy pequeña, del orden del número de Rossby frente a la vorticidad relativa. En tercer lugar vemos que los términos de 'tilting' y baroclino son un orden de magnitud menor que el resto de los términos por lo que en una primera aproximación podemos escribir para la ley de conservación de la vorticidad la ecuación

$$\frac{D(\zeta + f)}{Dt} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.13)$$

donde podemos observar que la variación de vorticidad se debe a la compresión o expansion de las burbujas en su movimiento.

3.5.2. La ecuación de conservacion de vorticidad en coordenadas isobaricas

Para encontrar la ecuación de conservacion de la vorticidad en coordenadas isobáricas, partiremos de la ecuación del movimiento en coordenadas isobáricas obtenido en el capítulo anterior,

$$\frac{D\mathbf{v}_h}{Dt} = -\nabla_p \phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h + F \quad (3.14)$$

que podemos poner en componentes como

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v}_h \cdot \nabla_p)u + \omega \frac{\partial u}{\partial p} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + f v + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v}_h \cdot \nabla_p)v + \omega \frac{\partial v}{\partial p} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} - f u + F_y\end{aligned}$$

Derivando parcialmente en la primera respecto de y a p constante y en la segunda respecto de x a p constante y restando la primera de la segunda, se obtiene

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_h \cdot \nabla_p)\zeta_p + \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial x} \nabla_p v - \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial y} \nabla_p u \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) + \omega \frac{\partial \zeta_p}{\partial p} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p - \beta v$$

siendo

$$\zeta_p = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p$$

la vorticidad vertical en coordenadas isobáricas. Ahora el término baroclino ha desaparecido. La cantidad

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial x} \nabla_p v - \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial y} \nabla_p u \right)$$

se puede poner como

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial x} \nabla_p v - \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial y} \nabla_p u \right) = \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p$$

Así mismo

$$\beta v = v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{Df}{Dt}$$

por lo que sustituyendo ambas expresiones, obtenemos

$$\frac{D(\zeta_p + f)}{Dt} = -(\zeta_p + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) + (\nabla \times F)_z \quad (3.15)$$

siendo

$$\frac{D(\zeta_p + f)}{Dt} = \frac{\partial(\zeta_p + f)}{\partial t} + (\mathbf{v}_h \cdot \nabla_p)(\zeta_p + f) + \omega \frac{\partial(\zeta_p + f)}{\partial p}$$

3.5.3. Cordenadas isentrópicas

El tratamiento es similar al caso anterior obteniendose la expresión

$$\frac{D(\zeta_\theta + f)}{Dt} = -(\zeta_\theta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_\theta + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + (\nabla \times F)_z \quad (3.16)$$

siendo

$$\zeta_\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_\theta$$

Si el movimiento es isentrópico $\dot{\theta} = 0$ y lo mismo sucede con el termino viscoso por lo que

$$\frac{D(\zeta_\theta + f)}{Dt} = -(\zeta_\theta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_\theta$$

lo que significa que en coordenadas isentrópicas la vorticidad solo cambia por convergencia horizontal supuesto que los movimientos sean isentrópicos.

Ejercicio 3.1 Mostrar que

$$\zeta_p = \zeta_\theta - \left(\nabla_\theta p \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \right) \cdot \mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Siguiendo las pautas seguidas en el capítulo 2 para obtener las ecuaciones del movimiento en otros sistemas de coordenadas podemos poner

$$\varphi(x, y, p, t) = \varphi(x, y, \theta(x, y, p, t), t).$$

Derivando parcialmente respecto de x ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_p}, \quad (3.17)$$

expresión similar se obtiene si derivamos respecto de y . Tomando v y u como φ , derivando respecto de x e y respectivamente y restando llegamos a

$$\zeta_p = \zeta_\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y_p} \right).$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

tenemos que

$$\zeta_p = \zeta_\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y_p} \right).$$

Haciendo $\varphi = p$ en la expresión 3.17,

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x_\theta} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_p}$$

tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_p} = -\frac{\partial p}{\partial x_\theta}$$

por lo que

$$\zeta_p = \zeta_\theta + \left(-\frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_\theta} + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y_\theta} \right).$$

Es fácil de ver que el término entre parentesis se puede escribir como

$$\left(\nabla_\theta p \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} \right) \cdot \mathbf{k}$$

por lo que queda demostrado la proposición.

Vorticidad potencial

Podemos todavía obtener una ecuación de conservación más simple. Obtuvimos en el capítulo anterior que en coordenadas isentrópicas la ecuación de continuidad toma la forma

$$\frac{D}{Dt} \left(\log \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_\theta \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0$$

si el movimiento es isentropico $\dot{\theta} = 0$, por lo que

$$\frac{D}{Dt_\theta} \left(\log \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_\theta \cdot \mathbf{v}_h = 0$$

que podemos poner como

$$\frac{\partial}{\partial t_\theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_\theta \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \nabla_\theta \cdot \mathbf{v}_h = 0$$

Teniendo en cuenta que $(\partial p / \partial \theta) = (\partial \theta / \partial p)^{-1}$, podemos poner

$$\frac{\partial}{\partial t_\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \nabla_\theta \cdot \mathbf{v}_h = 0$$

Multiplicando esta expresión por $\zeta_\theta + f$ y la ecuación de conservación de la vorticidad potencial por $(\partial\theta/\partial p)$ y sumando se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t_\theta} \left[(\zeta_\theta + f) \frac{\partial\theta}{\partial p} \right] + \mathbf{v} \cdot \nabla_\theta \left[(\zeta_\theta + f) \frac{\partial\theta}{\partial p} \right] = 0$$

o

$$\frac{D}{Dt_\theta} \left[(\zeta_\theta + f) \frac{\partial\theta}{\partial p} \right] = 0 \quad (3.18)$$

que es la ecuación de conservación de la vorticidad potencial definida por la ecuación

$$Z_\theta = (\zeta_\theta + f) \frac{\partial\theta}{\partial p} \quad (3.19)$$

Vemos pues que en coordenadas isentrópicas y supuesto el movimiento isentrópico la vorticidad potencial se conserva a lo largo de las trayectorias de las partículas.

Ertel, partiendo de la expresión de conservación de la vorticidad y de la ecuación de continuidad (al igual que se ha hecho antes), demuestra que dada una cierta función $\Theta(\alpha, p)$, siendo α el volumen específico, se verifica, en condiciones de no viscosidad, que

$$\frac{D}{Dt} [\alpha \nabla \Theta \cdot (\zeta + 2\Omega)] = \alpha (\zeta + 2\Omega) \cdot \nabla \frac{D\Theta}{Dt}$$

Podemos elegir como Θ a la temperatura potencial θ . Si el movimiento es isentrópico se verifica que $D\theta/Dt = 0$, por lo que

$$\frac{D}{Dt} [\alpha \nabla \theta \cdot (\zeta + 2\Omega)] = 0$$

que es otra expresión de conservación de la vorticidad potencial,

$$Z = \alpha \nabla \theta \cdot (\zeta + 2\Omega) \quad (3.20)$$

Podemos considerar a esta expresión como una fórmula general que toma la forma (3.19) cuando se expresa en coordenadas isentrópicas.

Suponer que tenemos un pequeño cilindro de masa ΔM entre dos superficies isentrópicas. Supongamos que el movimiento se hace de forma adiabática, en estas condiciones, estas superficies son superficies materiales de tal forma que el cilindro habrá pasado a ser un nuevo cilindro entre dos superficies isentrópicas. Durante este proceso la masa del cilindro no ha variado y su vorticidad po-

tencial tampoco, por lo que

$$\frac{D(\Delta M(\zeta_\theta + f) \frac{\partial \theta}{\partial p})}{Dt} = 0 = \frac{D(\rho \Sigma \Delta z(\zeta_\theta + f) \frac{\Delta \theta}{\Delta p})}{Dt} = - \frac{D(\rho \Sigma \Delta z(\zeta_\theta + f) \frac{\Delta \theta}{\rho g \Delta z})}{Dt} = \frac{D(\Sigma(\zeta_\theta + f) \Delta \theta)}{Dt}$$

como $\Delta \theta$ se mantiene constante, la cantidad

$$\Sigma(\zeta_\theta + f),$$

que también podemos escribir como

$$\frac{1}{\Delta p}(\zeta_\theta + f),$$

se conserva. Si ρ es constante, también es constante la cantidad

$$\frac{1}{\Delta z}(\zeta_\theta + f)$$

Apliquemos este teorema al caso de una masa de aire que atraviesa una cadena montañosa situada en la dirección norte-sur. La masa de aire la atraviesa bien de este a oeste, bien de oeste a este. Antes de tratar este problema vamos a analizar que le pasa a una burbuja que se mueve de este a oeste cuando la forzamos a moverse hacia el norte o hacia el sur moviéndose a una altura constante. Suponer pues, un cilindro con eje vertical que se mueve paralelo al plano horizontal y siguiendo un paralelo. En estas condiciones, puesto que la altura del cilindro se mantiene constante, en el movimiento a lo largo de un paralelo la ecuación de conservación de la vorticidad potencial se escribe

$$\frac{\zeta + f}{h} = \frac{f_0}{h}$$

Suponer que producimos una perturbación a nuestra burbuja de tal forma que ahora se dirija hacia el norte. En este caso f tiende a aumentar. Para que se conserve la vorticidad potencial, ζ tiene que disminuir (h se mantiene constante por hipótesis), como inicialmente era cero se debe de hacer negativa y por tanto la burbuja toma una curvatura anticiclónica que tiende a restituir su posición latitudinal inicial. Si hacemos una perturbación dirigiendo la burbuja hacia el Sur, f disminuye, ζ se hace positiva para compensar la disminución de f y la burbuja toma curvatura ciclónica que tiende a llevar la burbuja hacia su posición latitudinal inicial. Suponer que hacemos lo mismo con una burbuja que va de este a oeste, al mover la burbuja hacia el norte aumenta f y la burbuja toma curvatura anticiclónica, lo que pasa ahora es que esta curvatura anticiclónica no se opone al movimiento hacia el norte si seguimos con la perturbación es posible que la burbuja se mueva en dirección contraria a la que traía. El sistema es inestable. Vamos a analizar el mismo experimento realizado antes solo que

ahora vamos a hacer atravesar a la burbuja una cadena montañosa. Vamos a suponer que el proceso es adiabático. La base del cilindro sigue la adiabática θ_0 mientras que la cima sigue la adiabática $\theta_0 + \delta\theta$. Nuestro cilindro anterior al llegar a la montaña tiende a subir a lo largo de ella (La cadena se supone que es muy grande en la dirección Norte-Sur como para que el cilindro la rodee) así pues las adiabáticas siguen el perfil de la montaña. La adiabática próxima al suelo tiende a seguir el perfil del terreno mientras que la adiabática de la cima debido a la compresibilidad del aire tiende a deformarse menos que la adiabática superficial. Ver la figura 3.7. La consecuencia de esta deformación de las líneas de corriente es que la burbuja antes de llegar a la montaña tiende a extirarse aumentando su altura h , esto provoca que $\zeta + f$ tiendan a aumentar y la burbuja se dirige hacia el norte (aumento de ζ) lo que provoca también un aumento de f que limita de alguna manera el aumento de ζ . Según se produce el paso por la montaña la altura h entre las adiabáticas provoca una disminución $\zeta + f$ lo que se consigue disminuyendo ζ , esto es, cambiando la curvatura a anticiclónica lo que obliga a la burbuja a caminar hacia el sur. Este proceso se mantendrá mientras la burbuja siga subiendo. Una vez pasada la montaña, la burbuja vuelve a aumentar de tamaño cambiando la curvatura y se dirige hacia el norte. Una vez alcanzado el nivel original la burbuja tiene una cierta componente norte que por inercia hace que la burbuja cruce su latitud original, como f va aumentando debe disminuir ζ cambiando la curvatura de la burbuja, cuando cruce la latitud original la burbuja tiene una cierta componente sur que por inercia hace que la burbuja siga disminuyendo su latitud y por tanto f lo que provoca un cambio de curvatura y así sucesivamente lo que da lugar a un movimiento oscilatorio una vez pasada la montaña.

Que pasa si la burbuja viene de este a oeste? Como en el caso anterior, antes de llegar a la montaña una burbuja en forma de cilindro vertical empieza a sentir su presencia aumentando ligeramente de tamaño, lo que hace que aumente $\zeta + f$ y por tanto si tenía $\zeta = 0$ debe de tomar una curvatura inicial ciclónica y la burbuja tiende a caminar hacia el sur. Una vez llegada a la montaña la burbuja se contrae disminuyendo h haciendo que $\zeta + f$ disminuya lo cual se consigue disminuyendo f y disminuyendo ζ . Esta disminución de ζ hace que la burbuja vaya tomando una circulación anticiclónica de tal forma que la burbuja se dirige hacia el oeste cuando alcanza la cima de la montaña. Según atraviesa la montaña aumenta h y por tanto $\zeta + f$ lo que se consigue aumentando f , esto es dirigiéndose hacia el norte y aumentando ζ esto es adquiriendo vorticidad ciclónica lo que hace que una vez alcanzado el nivel original la burbuja se encamina hacia el oeste. La variación del parámetro de Coriolis con la latitud induce un comportamiento muy diferente para flujos hacia el este o desde el este. Estos procesos suelen darse en las grandes cadenas montañosas como son las Montañas Rocosas o el Tibet.

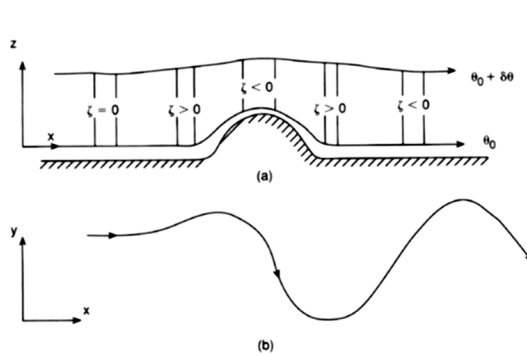


Figura 3.7: Flujo del oeste sobre una barrera montañosa. a) Profundidad de una columna de igual incremento de temperatura potencial. c) trayectoria de una partícula

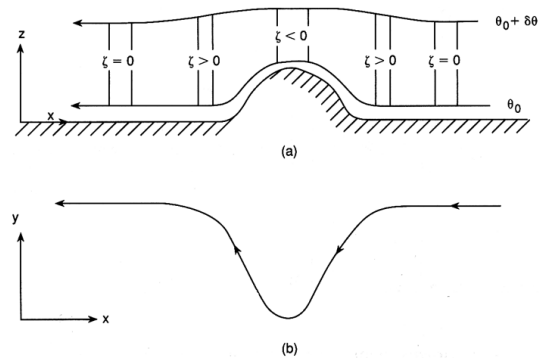


Figura 3.8: Flujo del este sobre una barrera montañosa. a) Profundidad de una columna de igual incremento de temperatura potencial. c) trayectoria de una partícula

3.6. Ondas largas (teoría de Rossby)

Vamos a aplicar la teoría anteriormente desarrollada al estudio de las ondas largas, tal y como fué propuesto por Carl Rossby.

Las observaciones aerológicas muestran la existencia en latitudes medias e inmersas en la corriente de vientos del oeste en la parte superior de la troposfera, una serie de ondas largas (esto es de una longitud de onda grande) con dos longitudes de onda marcadamente diferentes. Así tenemos las ‘ondas largas’ u ‘ondas principales’ formadas por una vaguada fría y una dorsal cálida, con un movimiento normalmente hacia el oeste, relativamente lento. Se observa por otra parte las ‘ondas cortas’ o ‘menores’ que muestran una estructura de isolíneas desfasada respecto de la estructura de isolíneas de las ondas largas. Estas ondas cortas se mueve más rápidamente que las ondas largas. Como en una mapa meteorológico realizado en un cierto instante determinado aparecen conjuntamente (lo que vemos es el efecto conjunto de ambas), para poder analizarlas por separado se suele construir mapas meteorológicos con valores promedios de 4 o 5 días, de tal forma que únicamente nos muestren los efectos de las ondas largas más lentas. Por esta razón a las ondas largas se las denomina también ‘ondas medias’.

Se puede observar en este tipo de mapas, cuyo esquema se muestra en la figura 3.9, que el número de ondas largas a lo largo del hemisferio norte es del orden de 3 a 5. Normalmente se observa la formación de ciclones superficiales entre la vaguada fría y la dorsal cálida. Como se verá más adelante, esta zona corresponde con una zona de máxima divergencia en niveles superiores de la troposfera. Superpuestas a las ondas largas, aparecen las ondas cortas que Bjerness llamó ‘ondas ciclónicas’ dada su íntima relación con los ciclones superficiales. Puesto que las ondas cortas viajan más rapidamen-

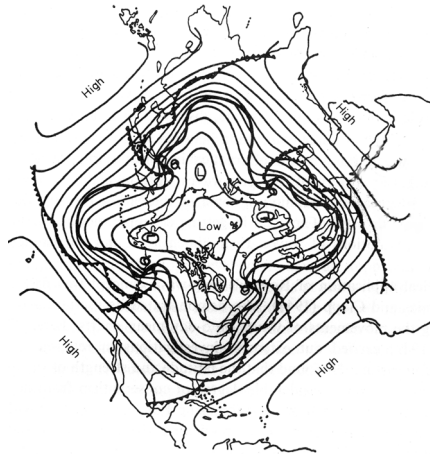


Figura 3.9: Carta circumpolar esquemática, mostrando un patrón simple de 4 ondas largas. Las líneas finas son líneas de contorno de la superficie de 500 mb. La línea gruesa representa la intersección con la superficie de 500 mb del 'frente polar'. Se han representado también las líneas del frente en superficie

te que las largas, los ciclones individuales asociados se mueven respecto de las ondas largas y son conducidos o guiados de alguna manera por el flujo de gran escala asociado a las ondas largas.

Una vez presentadas las ondas largas vamos a desarrollar una sencilla teoría propuesta por Rossby. Es bien sabido que la atmósfera presenta hacia los 600 mb una zona de no divergencia. Por debajo de este nivel, en los ciclones, la atmósfera es convergente y por encima divergente, lo contrario sucede en los anticiclones. Se sabe, así mismo, que el viento horizontal alcanza un máximo en un cierto nivel de la atmósfera. Debido al gradiente térmico presente entre el polo y el ecuador el viento va aumentando en altura hasta que alcanza un máximo, a partir de aquí, dado que el contraste térmico entre el ecuador y el polo se debilita e invierte, el viento disminuye en intensidad. Supongamos que el nivel de no divergencia y este nivel de máximo viento coinciden. De acuerdo con estas hipótesis tenemos

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}_h = -\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p} = 0$$

Teniendo en cuenta estas dos hipótesis, junto con la condición de no viscosidad, la ecuación de conservación de la vorticidad (3.13) se reduce a,

$$\frac{D(\zeta_p + f)}{Dt} = 0.$$

Así mismo en este nivel de viento máximo se verifica que

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial z} = 0$$

por lo que la ecuación de conservación de la vorticidad resulta ser

$$\frac{D(\zeta_p + f)}{Dt} = 0 = \frac{\partial \zeta_p}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_p (\zeta_p + f)$$

Llamemos $\beta = \partial f / \partial y$, que supondremos constante, tenemos

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta_p}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta_p}{\partial y} + v \beta = 0$$

Supongamos ahora que la componente zonal del viento es constante

$$u = U$$

y que

$$v = v(x, t)$$

en estas condiciones

$$\zeta_p = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta_p}{\partial y} = 0$$

por lo que la ecuación de conservación de la vorticidad toma la forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + U \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0$$

Supongamos ahora que $v(x, t)$ es de la forma

$$v(x, t) = A \cos\left[\frac{2\pi}{L}(x - ct)\right]$$

esto es una onda con amplitud A , longitud de onda L y velocidad de fase c . Sustituyendo en la ecuación de conservación de la vorticidad, obtenemos la relación de dispersión,

$$c = U - \beta \frac{L^2}{4\pi^2} \quad (3.21)$$

que es la famosa ecuación de Rossby, que nos da la velocidad a la que se mueven las ondas como función de la longitud de onda. Podemos observar en primer lugar que la velocidad de fase depen-

de efectivamente de la longitud de onda, esto significa que las ondas son dispersivas. Según vemos, cuanto mayor es la longitud de onda L , menor es la velocidad de fase, esto justifica el porque las ondas largas son más lentas que la ondas cortas. Es posible, así mismo, que para una cierta longitud de onda dada por

$$L_S = 2\pi\sqrt{\frac{U}{\beta}}$$

la onda se haga estacionaria. Para longitudes de onda más larga incluso c se puede hacer negativa, en este caso se dice que la onda es retrógrada. El parámetro fundamental que controla la existencia de estas ondas, es β , esto es la variación de la vorticidad planetaria con la latitud. Ya vimos en la sección anterior como en una corriente del oeste, una perturbación que haga salir a la burbuja de su latitud, provoca a cuenta de la variación de la f que la burbuja haga una serie de meandros que no son otra cosa que las ondas largas de Rossby.

Vemos pues que la teoría de Rossby, en la forma sencilla que hemos presentado, es sorprendentemente exitosa, pese a las hipótesis tan drásticas que se han empleado. El verdadero significado de estos resultados es que la parte básica del movimiento atmosférico ha sido representado bastante bien por un modelo muy sencillo. En un capítulo posterior desarrollaremos de forma algo más rigurosa la teoría de las ondas de Rossby, aunque los resultados esencialmente será los mismos.

Capítulo 4

Ondas en la atmósfera

4.1. Importancia

El análisis de las ondas en el estudio de los procesos que tienen lugar en la atmósfera tiene especial importancia entre otras cosas por

- Existen multitud de fenómenos en la atmósfera que tienen lugar en forma de ondas, así por ejemplo, tenemos: ondas largas de Rossby que son fácilmente distinguibles en un mapa sinóptico a escala planetaria, ondas gravitatorias internas que son fácilmente observables en las llamadas calles de nubes o en nubes lenticulares.
- Los movimientos ondulatorios representan soluciones analíticas de las ecuaciones movimiento donde se han linealizado los términos no lineales que aparecen en las mismas. Se pueden estudiar por técnicas matemáticas estandar.
- Como son soluciones de las ecuaciones del movimiento aparecerán cuando se hace una integración numérica de las mismas. Algunas de estas ondas (las más rápidas) crean dificultades a la hora de obtener soluciones numéricas por tanto se deben de buscar algunos mecanismos para filtrar dichas ondas antes de resolver el problema numérico.
- Ciertas ondas pueden tener especial importancia en la dinámica de la atmósfera pues transportan importantes cantidades de energía y momento.
- Bajo algunas condiciones pueden crecer rápidamente en amplitud, empezando a actuar entonces los términos no lineales, que pueden provocar la pérdida de la coherencia de la onda dando lugar a un proceso en cascada que degenera al final en turbulencia con una transformación de energía cinética en calor.

- Tienen una importancia vital en análisis de los problemas que surgen a la hora de inicializar los modelos de predicción numérica. Para inicializar estos modelos es necesario dar los valores que alcanzan las variables que intervienen en el mismo en la malla de discretización empleada. Como ésta es mucho más fina que los valores observacionales (y estos además son imperfectos) tenemos que interpolar lo que significa que los valores así evaluados no coinciden con los valores reales y esto provoca la aparición de ondas (por ejemplo la atmósfera real puede estar en equilibrio y los valores nuestros no) que debemos de tener en cuenta.

Debido a la gran cantidad de tipos de ondas que existen en la atmósfera y dado que existe algún parámetro que controla que tipo de onda se va a generar, vamos a estudiar cada tipo de onda por separado aunque previamente vamos a analizar que se entiende por onda.

4.2. Concepto de onda

Como todo concepto primario es muy difícil definirlo. Siguiendo la definición dada por Scales & Snieder ¹ podemos considerar a una onda como un imbalance que se propaga de forma organizada. Considerar el caso de un tubo en U, parcialmente lleno de agua. De acuerdo con la ley de vasos comunicantes el fluido en las dos ramas alcanza el mismo nivel. Suponed que producimos un desnivel en el fluido, por ejemplo presionando con un émbolo en una de las ramas. Este proceso hace que la energía potencial del fluido aumente respecto de la energía potencial en estado de reposo. Una vez desnivelado el sistema, la energía cinética es cero. En esta situación se produce un ' imbalance ' entre la energía potencial y la energía cinética. Si soltamos el embolo se produce in intercambio de este ' imbalance ' entre la energía cinética y potencial. En el caso que nos ocupa, de un fluido no limitado como en el caso anterior, este imbalance se propaga a lo largo del seno del fluido produciendo una onda. Otra de las características de las ondas es que este imbalance es un imbalance 'organizado'. Los efectos no lineales hacen que este balance se desorganice dando lugar como decíamos antes a la formación de turbulencia.

Como hemos dicho antes, la propagación de la onda se produce como efecto del intercambio entre energía cinética y energía potencial, que significa esto, pues que se establece un 'toma' y 'daca' entre una fuerza recuperadora (representado por la energía potencial) y la inercia del sistema (representado por la energía cinética). La fuerza recuperadora tiende a llevar al sistema a su posición de equilibrio y la inercia tiende a persistir en el estado de movimiento. En el caso de ondas gravitatorias la fuerza recuperadora es la gravedad, en el caso de ondas sonoras la fuerza recuperadra es la compresibilidad del fluido, en el caso de ondas inerciales la fuerza de Coriolis, etc.

¹ Scales J.A. & R. Snieder, 'What is a whave'. Nature, **401**, 21 octubre 1999, pp: 739–740

4.3. La ecuación de ondas: soluciones

Una ecuación representativa de un movimiento ondulatorio viene dado por la expresión

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

siendo ϕ alguna magnitud característica del fluido, por ejemplo su densidad. Esta ecuación es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, lineal y de tipo hiperbólico. La linealidad de las ecuaciones nos dice que si tenemos varias soluciones la suma de estas soluciones es también una solución. Así pues, una manera de encontrar soluciones generales consiste en buscar soluciones particulares y después superponerlas, pues debido a la linealidad de la ecuación de ondas su suma será una solución general. Existen otras formas de obtener soluciones de la ecuación 4.1, entre ellas tenemos la factorización de la función $\psi(x, t)$ en dos funciones, una que depende de x y la otra que depende de t y el método de D'Alembert que exponemos a continuación.

Suponiendo que c no depende ni de la posición ni del tiempo se puede reescribir la ecuación 4.1 de la siguiente manera

$$\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0$$

Hagamos el cambio de variable

$$\xi = x + ct \quad \eta = x - ct$$

tal que

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$$

por lo que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

de donde la ecuación de ondas toma la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

cuya solución es

$$\psi = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

siendo f_1 y f_2 dos funciones arbitrarias (con derivadas contiuas hasta segundo orden), a determinar

en función de las condiciones iniciales. En términos de x, t , la solución se escribe

$$\psi = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

Para interpretar estas soluciones, suponed que $f_1 = 0$, tendremos que $\psi(x, t) = f_2(x - ct)$. Esta solución significa que la función ψ va a tener el mismo valor en todos aquellos puntos x, t tal que $x - ct = \text{cte.}$, o bien $x = \text{cte.} + ct$. Si en $t = 0$ el campo ϕ toma el valor ϕ_0 despues de un tiempo t el campo ϕ toma el mismo valor en el punto $x = ct$. Podemos decir por tanto que la perturbación ϕ se propaga a lo largo del eje $+x$ con una velocidad c . La solución f_2 representa al perturbación viajando en la dirección del eje $-x$.

4.3.1. El problema de Cauchy

El problema de Cauchy consiste en ereolver la ecuación de ondas, en las que se fijan las condiciones iniciales, se supone implícitamente que las fronteras están lo suficientemente lejos de la región de interés para que no influyan en el problema. Supongamos que la anterior ecuación tenga en el instante $t = 0$ el valor

$$\psi(x, 0) = F(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = G(x)$$

tendremos

$$f_1(x) + f_2(x) = F(x)$$

Así mismo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial(x+ct)} \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x-ct)} \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = c \frac{\partial f_1}{\partial(x+ct)} - c \frac{\partial f_2}{\partial(x-ct)}$$

de donde en el instante inicial

$$G(x) = c f_1'(x) - f_2'(x)$$

integrando esta última ecuación

$$\int_0^x G(x') dx' + C = c f_1(x) - c f_2(x),$$

siendo C una constante. Eliminado f_1 y f_2 a partir de las condiciones iniciales

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left(F(x) + \frac{1}{c} \int_0^x G(x') dx' + \frac{C}{c} \right)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left(F(x) - \frac{1}{c} \int_0^x G(x') dx' - \frac{C}{c} \right)$$

De donde

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \left(F(x + ct) + F(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(x') dx' \right) \quad (4.2)$$

Esta expresión nos dice que la perturbación en el punto x en el instante t se ve influenciada por el valor de la perturbación original F en los puntos $x - ct$ y $x + ct$ y de su derivada G a lo largo del segmento $(x - ct, x + ct)$. Ver la figura 4.1

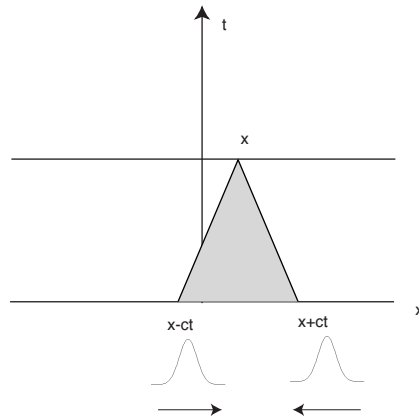


Figura 4.1:

Si suponemos que $G = 0$ tendremos que

$$\psi = f_1(x + ct) + f_2(x - ct) = \frac{1}{2} (F(x + ct) + F(x - ct))$$

o lo que es lo mismo la perturbación inicial se rompe en dos mitades una de ellas viaja a lo largo del eje $+x$ y la otra viaja a lo largo del eje $-x$. La constancia de la forma de la perturbación o pulso inicial es una de las características de las ondas no dispersivas, en las que c no depende de k . Se ha de hacer notar que no se han impuesto condiciones frontera a la ecuación de ondas. Se ha supuesto que las fronteras están lo suficientemente lejanas para que las ondas no se reflejen y vuelvan a la región de interés.

4.3.2. Algunas características de las ondas

Como comentamos anteriormente, la solución general que acabamos de obtener la podemos encontrar buscando soluciones particulares y superponiéndolas. Una solución particular a la anterior ecuación viene dada por la expresión

$$\psi = a \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right]$$

basta sustituir en la ecuación de ondas para ver que la verifica. La cantidad

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$$

recibe el nombre de fase de la onda. En los puntos de igual fase la perturbación ψ toma el mismo valor. El parámetro λ es la longitud de onda y la perturbación toma los mismos valores en los puntos separados por esta distancia. Normalmente se suele trabajar con el recíproco de la longitud de onda, que recibe el nombre de número de ondas

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

de tal forma que la fase toma la forma

$$k(x - ct)$$

Como vimos antes, la cantidad c representa la velocidad a la que se mueven los planos de igual fase y recibe el nombre de velocidad de fase. La fase la podemos poner como

$$kx - kct$$

La cantidad $kc = \omega$ recibe el nombre de frecuencia de oscilación de la onda. En cada punto x la perturbación oscila con un periodo dado por $T = 2\pi/\omega$. En términos de k, ω la perturbación sinusoidal la podemos poner como

$$\psi = a \sin(kx - \omega t)$$

Suponer que la perturbación toma la forma

$$\psi(x, y, z, t) = a \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = a \sin(lx + my + nz - \omega t) \quad (4.3)$$

El lugar geométrico de los puntos de igual fase en un instante $t = t_0$ dado viene dado por la expresión

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t_0 = \text{cte}$$

que representa un plano orientado según el vector $\mathbf{k} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$. Así pues, la ecuación 4.3 representa una onda plana (las superficies de igual fase son planos) que viaja con velocidad c en la dirección \mathbf{k} . Llamemos $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$, ($k = |\mathbf{k}| = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$) al vector unitario en la dirección de propagación de la onda, la fase la podemos poner como

$$\phi = (k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = k(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - (\omega/k)t) = k(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - ct)$$

como antes $c = \omega/k$. El vector velocidad viene dado por la expresión

$$\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{k}} = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}$$

La longitud de onda será

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Si mantenemos fijo, por ejemplo, las variables y, z . La onda plana 4.3 representa una onda viajando a lo largo del eje x

$$\psi = a \sin(lx - \omega t + \alpha)$$

siendo $\alpha = my + nz$ que se mantiene constante. Esta onda presenta una longitud de onda dada por $\lambda_x = 2\pi/l$ y una velocidad de fase $c_x = \omega/l$. Puesto que l es menor que k la longitud de onda en la dirección x es mayor que la longitud de onda en la dirección de propagación de la onda plana que es $\hat{\mathbf{k}}$. Así mismo la velocidad de fase será mayor.

Para ver la relación entre los parametros de las ondas en la dirección de los ejes y los parametros generales de la onda plana, imaginemos una onda plana que solo depende de x, y que viaja formando

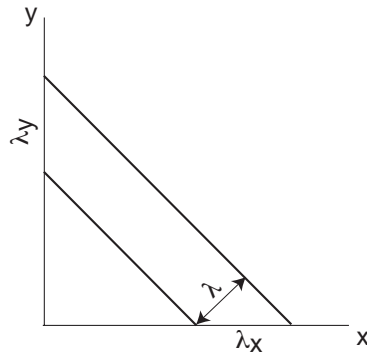


Figura 4.2:

un cierto ángulo θ respecto del eje x . De la figura 4.2 tenemos

$$\lambda = \lambda_x \cos \theta, \quad \lambda = \lambda_y \sin \theta$$

de donde

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_x^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda_y^2} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Así pues

$$\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

O bien puesto que $\lambda = 2\pi/k$,

$$l^2 + m^2 = k^2$$

ecuación que podíamos haber deducido directamente de la definición del número de ondas k como módulo del vector de ondas \mathbf{k} .

4.4. Ondas dispersivas: Velocidad de grupo

La onda plana monocromática definida anteriormente en la que hemos supuesto que ω es constante es una onda no dispersiva. En general las ondas son dispersivas esto es la velocidad de fase c depende del número de ondas. Esto es lo que sucede por ejemplo cuando un rayo de luz atraviesa un prisma, la velocidad de fase depende de la longitud de onda y los rojos caminan a una velocidad diferente de los azules lo que provoca la dispersion del haz. Así mismo la onda plana definida anteriormente es una onda que tiene una extensión infinita tanto en el tiempo como en el espacio. Lo usual es tener una perturbación finita, esto es una perturbación que ocupa una extensión finita en el espacio y en el tiempo. Cuando se tira una piedra en un estanque vemos una onda o varias ondas que se propagan hasta que mueren en la frontera del tanque. Tienen una vida finita y una extensión finita. La maravilla es, que por el teorema de Fourier y debido a la linealidad de las ecuaciones de onda, esta onda finita la podemos por como una superposición de ondas planas, cada una de ellas de extensión infinita

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)] d\mathbf{k}$$

la función $f(\mathbf{k})$ nos da la contribución de cada onda plana de número de onda \mathbf{k} a la perturbación ψ . Si cada una de la ondas que forma parte del anterior paquete de ondas tiene el mismo comportamiento esto es la velocidad de fase de cada onda es la misma, la onda finita viajará sin descomponerse a la velocidad de fase de cada una de las ondas que la componen. Ahora bien, si cada onda que entra dentro del paquete de ondas viaja a una velocidad diferente éste tenderá a desfigurarse según se propaga en el espacio, pues si bien en un instante dado todas están en fase, con el curso del tiempo se produzcan desfases entre ellas y en aquellas zonas donde el despase sea π tenderán a anularse y donde no haya desfase tenderán a reforzarse. La pregunta es a que velocidad avanza el paquete o grupo de ondas que forma nuestra onda finita. Vamos a realizar nuestro estudio sobre una onda

unidimensional que viaja a lo largo del eje x para la cual podemos escribir,

$$\psi(x, t) = \int f(k) \exp[i(kx - \omega t)] dk$$

Vamos a suponer tambien que la función $f(k)$ alcanza un máximo para un cierto valor k_0 . Sea Δx la ‘extensión’ del pulso finito, esto es la distancia a lo largo de la cual ψ es notoriamente distinta de cero. Ver la figura 4.3

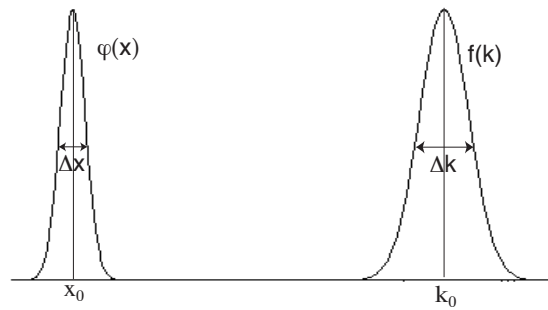


Figura 4.3:

A lo largo de la anchura Δk , las fases de cada onda individual no deben de cambiar demasiado (o sea que tenemos que combinar ondas de fases similares), pues si no, la combinación de todas ellas se anula por interferencia y no tendríamos pulso. Podemos considerar que ψ solo toma valores significativos si $\exp i\phi$, siendo $\phi = (kx - \omega t)$ la fase, realiza menos de una oscilación dentro del intervalo Δk , o lo que es lo mismo, si

$$\Delta\phi = \Delta k \cdot \frac{d\phi}{dk} \lesssim 1$$

Podemos caracterizar el centro del pulso, por el hecho que la fase permanezca estacionaria en la región Δk ² y por tanto todas ellas se refuerzan

$$\frac{d\phi}{dk} = 0$$

por lo que

$$x - t \frac{d\omega}{dk} = 0$$

²Podemos caracterizar el extremo del pulso por el hecho que la fase cambie una cierta cantidad, por ejemplo la unidad, por lo que tendríamos que en el centro del pulso $\Delta k(x_0 - t \cdot d\omega/dk) = 0$ y en el extremo $\Delta k(x_1 - t \cdot d\omega/dk) = 1$ de donde, restando, obtenemos $\Delta k \Delta x \sim 1$, que no es otra cosa que el principio de indeterminación

lo que implica que el centro del paquete de ondas se mueve de forma lineal con velocidad

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

que se conoce con el nombre de *velocidad de grupo*. Teniendo en cuenta que $\omega = ck$, obtenemos

$$v_g = k \frac{dc}{dk} + c$$

de tal forma que si c no depende de k , medio no dispersivo, la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase. Vamos a demostrar con algo más de rigor las anteriores conclusiones, para ello vamos a introducir el método de la fase estacionaria

4.4.1. El método de la fase estacionaria

Tenemos que resolver la integral

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp i(kx - \omega(k)t) dk$$

que podemos poner como

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp i t(k(x/t) - \omega(k)) dk$$

que para x/t fijo, esto es para un observador moviéndose con la velocidad fija, podemos poner como

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp i t \psi(k) dk$$

Para valores de t suficientemente grandes el término exponencial oscila fuertemente y a no ser que la fase $\psi(k)$ tenga derivada nula en algún punto la integral se anula. Esto significa que la perturbación $f(x, t)$ se destruye por interferencia. Si la perturbación $f(x, t)$ se tiene que mantener finita necesariamente la fase debe de alcanzar un valor estacionario (o sea debe de anularse en algún punto). Vamos a aprovechar algunos resultados de la teoría de variable compleja. Por el teorema de Cauchy si la fase $\psi(k)$ es una función analítica (continua con derivada continua hasta orden infinito), la anterior integral es independiente del camino dentro del plano complejo, esto significa que podemos ir de $-\infty$ a $+\infty$ por el eje real o mediante cualquier camino del plano complejo. Si la derivada de $\psi(z)$ no es nula en ningún punto, y por ejemplo es positiva en todos los puntos, podemos tomar un camino en el plano complejo, que tenga una parte imaginaria positiva, esto es elevamos el camino. De esta for-

ma $i t \psi(z)$ contendrá un término de la forma $\exp(-t\delta)$ que al hacerse t lo suficientemente grande se hace muy pequeño, por lo que la integral se hace muy pequeña también. Ahora bien si $\psi'(z)$ se hace cero en algún punto k_0 , significa que la función $\psi'(z)$ cambia de signo alrededor de dicho punto. En los puntos cercanos al punto de cambio de signo, esto es en los punto cercanos al punto k_0 se tiene que

$$\psi(k) = \psi(k_0) + \frac{1}{2} \psi''(k_0)(k - k_0)^2 + ..$$

por lo que

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp i t \psi(k_0) \prod \exp \left\{ \frac{1}{n!} i t \frac{d^n \psi}{d k^n} \Big|_{k_0} (k - k_0)^n \right\} dk$$

Ahora bien, para k diferente de k_0 , y con t suficientemente elevado, la parte del productorio oscila fuertemente por lo que la integral se anula, únicamente para puntos cercanos a k_0 la integral se hace distinta de cero. Vamos a suponer que en estas condiciones $F(k) \approx F(k_0)$ y que únicamente nos quedamos con el término de orden 2, por lo que

$$f(x, t) = F(k_0) \exp i t \psi(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} i t \psi''(k_0)(k - k_0)^2 \right\} dk$$

que se puede ver que vale³,

$$f(x, t) = F(k_0) \exp i t \psi(k_0) \left(\sqrt{\frac{2\pi}{t \psi''(k_0)}} \right) \exp i \frac{\pi}{4}$$

Así pues se ve que ahora el pulso $f(x)$ se mantiene diferente de cero y decrece en amplitud como $t^{-1/2}$. La exigencia de que la fase $\psi(k)$ alcance un valor estacionario, esto es que

$$0 = \frac{d\psi}{dk} = \frac{d\omega(k)}{dk} - x/t = 0$$

Así pues el pulso no se anula en los puntos en los que

$$x/t = \frac{d\omega(k)}{dk} \Big|_{k_0}$$

así pues el pulso viaja con velocidad $\omega'(k)$, como queríamos demostrar.

Para comprender mejor estos conceptos imaginad que el paquete de ondas lo forman dos ondas con números de ondas muy próximos (recordar que la fase debe de variar poco a lo largo del paquete

³Una demostración más completa, utilizando el método del steepest descend se puede ver en <http://www.math.ohio-state.edu/~gerlach/math/BVtypset/BVtypset.html>, ver también el libro de James Lighthill, "Waves in fluids", Cambridge Univ. Press

de ondas). La perturbación ψ valdrá

$$\psi = A_1 \cos(kx + \omega t) + A_2 \cos((k + \delta k)x + (\omega + \delta \omega)t)$$

que podemos poner como

$$\psi = [A_1 + A_2 \cos(x\delta k + t\delta \omega)] \cos(kx + \omega t) - A_2 \sin(x\delta k + t\delta \omega) \sin(kx + \omega t)$$

escribiendo

$$A \cos \alpha = A_1 + A_2 \cos(x\delta k + t\delta \omega)$$

$$A \sin \alpha = A_2 \sin(x\delta k + t\delta \omega)$$

tenemos

$$\psi = A \cos(kx + \omega t + \alpha)$$

en donde el ángulo de fase α vale

$$\tan \alpha = \frac{A_2 \sin(x\delta k + t\delta \omega)}{A_1 + A_2 \cos(x\delta k + t\delta \omega)}$$

y la amplitud A

$$A^2 = (A_1^2 + A_2^2) \left[1 + 2 \frac{A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2} \cos(x\delta k + t\delta \omega) \right]$$

Si tomamos $A_1 = A_2$, tenemos para la amplitud y la fase

$$A = 2A_1 \cos\left[\frac{1}{2}(x\delta k + t\delta \omega)\right], \quad \alpha = \frac{1}{2}(x\delta k + t\delta \omega)$$

por lo que la perturbación ψ vale

$$\psi = 2A_1 \cos\left[\frac{1}{2}(x\delta k + t\delta \omega)\right] \cos(kx + \omega t)$$

que es una onda que se mueve con velocidad $c = \omega/k$ pero con una amplitud modulada en forma de onda que a su vez se mueve con velocidad

$$v_g = \frac{\delta \omega}{\delta k}$$

que es la velocidad de grupo introducida anteriormente. Esta velocidad de grupo nos da la velocidad

a la que se mueve la perturbación formada como superposición las dos ondas planas cada una de las cuales se mueve con velocidad de fase próxima a ω/k . Este proceso se ve ilustrado en la figura 4.4.

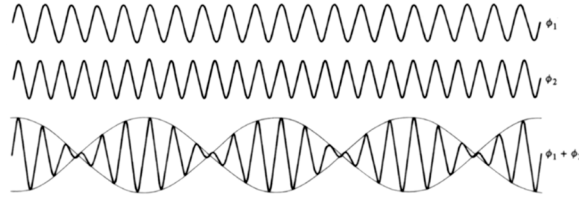


Figura 4.4: Figura que ilustra como dos ondas con velocidades de fase próximas se combinan para dar una nueva onda cuya amplitud tiene forma de onda que viaja a la velocidad de grupo. Las ondas elementales pueden viajar mas o menos de prisa que la velocidad de grupo. Si viajan mas deprisa veremos como las ondas elementales se mueve en el interior de la envolvente

Ejercicio 4.1 Evaluar la forma que adquiere un paquete de ondas gaussiano que en el instante $t = 0$ tiene la forma $\psi(x, 0) = \Re A \exp[-x^2/4(\Delta x_0)^2] \exp i k_0 x$ (figura 4.5)

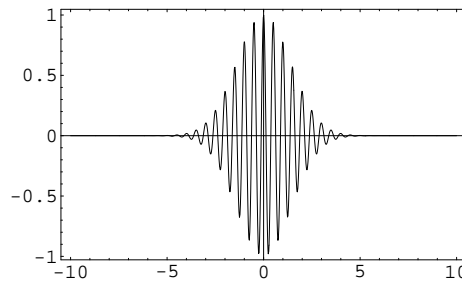


Figura 4.5: Forma de un paquete de ondas gaussiano.

SOLUCIÓN De la teoría de transformada de Fourier, la función de amplitud $f(k)$ toma la forma

$$f(k) = \int \psi(x, 0) \exp(-i k x) dx = (4\pi)^{1/2} \Delta x_0 A \exp[-(\Delta x_0)^2 (k - k_0)^2]$$

que también tiene una forma gaussiana, con un valor máximo en k_0 . Llevando esta expresión a la ecuación que define el paquete de ondas, en cualquier instante t se tiene que

$$\psi(x, t) = \Re \frac{\Delta x_0 A}{\pi^{1/2}} \int \exp[-(\Delta x_0)^2 (k - k_0)^2] \exp[i(kx - \omega(k)t)] dk$$

Desarrollando $\omega(k)$ en serie en torno a k_0

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_0 (k - k_0)^2 + \dots$$

siendo $\omega_0 = \omega(k_0)$. Teniendo en cuenta que

$$c_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$$

es la velocidad de grupo y llamando

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_0,$$

quedandonos únicamente con términos de segundo orden

$$\omega(k) = \omega_0 + c_g(k - k_0) + \alpha(k - k_0)^2$$

Llevando esta expresión de ω a la integral e integrando resulta,

$$\psi(x, t) = \Re \frac{A\Delta x_0}{\Delta x} \exp[-(x - c_g t)^2 / (2\Delta x)^2] \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$$

siendo $\Delta x^2 = \Delta x_0^2 + i\alpha t$ y que define la dispersión creciente del paquete de ondas. Como vemos la onda es una onda plana cuya amplitud tiene una forma gaussiana, cuyo centro viaja con la velocidad de grupo c_g y que se va dispersando con el tiempo. Esto se puede ver mejor si tomamos el valor cuadrático, que como sabemos es proporcional a la energía

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{A^2}{[1 + \alpha^2 t^2 / (\Delta x_0^4)]^{1/2}} \exp[-(x - c_g t)^2 / (2\Delta x_0)^2 (1 + \alpha^2 t^2 / (\Delta x_0^4))]$$

Como vemos el centro del paquete se mueve con la velocidad de grupo, el término de segundo grado no tiene influencia sobre este hecho. El término cuadrático α nos da la velocidad a la que se dispersa el paquete que viene definida por la relación

$$|\Delta x| = \Delta x_0 \left[1 + \frac{\alpha^2 t^2}{\Delta x_0^4} \right]^{1/2}$$

a la vez que la amplitud del mismo se reduce en la misma proporción, de tal forma que la área bajo la curva ψ^2 permanece constante. Físicamente esto significa que la energía del pulso se mantiene constante

4.5. Ondas en medios no homogéneos

Hasta el momento se ha supuesto que las características del medio se mantenían constantes, esto es se ha supuesto un medio homogéneo e invariante temporalmente. Pero, ¿qué sucede si las propiedades del medio cambian tanto en el espacio como en el tiempo? En este caso no podemos tomar a c como constante en la ecuación de ondas. No obstante si c no varía muy rápidamente como función de la posición y el tiempo, podemos todavía utilizar como función de onda una expresión similar a la de una onda plana.

$$\psi(x, t) = A(x, t) \exp i\theta(x, t)$$

siendo $A(x, t)$ la amplitud de la onda y $\theta(x, t)$ la fase. Esta hipótesis recibe en la literatura científica el nombre de aproximación WKB. La magnitud $\theta(x, t)$ recibe el nombre en óptica de Eikonal (del griego imagen). La hipótesis de que c no varía demasiado, permite poner localmente

$$\theta(x, t) = \theta(x_0, t_0) + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \omega(t - t_0)$$

siendo

$$\mathbf{k} = \nabla \theta$$

y

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

de tal forma que la onda se comporta localmente como plana. Contrariamente a lo que pasaba en medios homogéneos estas relaciones son locales, lo que significa que los números de ondas l, m, n y la frecuencia, así como la velocidad de fase son función de la posición y el tiempo. De la definición de \mathbf{k} como el gradiente de una función, está claro que $\nabla_x \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ y por lo tanto la integral

$$\int_A^B \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}$$

es independiente del camino, \mathbf{k} es un campo conservativo.

De las anteriores definiciones es fácil de ver que

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla_x \omega = 0$$

Supongamos que el medio es dispersivo, esto significa que la fase satisface una relación de dis-

persión

$$\omega = \Omega(l(x, y, z, t), m(x, y, z, t), n(x, y, z, t), x, y, z, t)$$

donde ω depende de x, y, z, t directamente e implícitamente a través de la dependencia de los números de onda. Como abemos la velocidad de grupo viene dada por la expresión

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k})$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

se tiene que

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} \right\}$$

Ahora bien como el rotor de \mathbf{k} es nulo se tiene que

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial y}, \quad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial z}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial m} \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial n} \frac{\partial l}{\partial z} \right\}$$

y teniendo en cuenta la definición de velocidad de grupo se tiene

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + u_g \frac{\partial l}{\partial x} + v_g \frac{\partial l}{\partial y} + w_g \frac{\partial l}{\partial z} \right\}$$

reordenando

$$\frac{\partial l}{\partial t} + u_g \frac{\partial l}{\partial x} + v_g \frac{\partial l}{\partial y} + w_g \frac{\partial l}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

o lo que es lo mismo

$$\left. \frac{Dl}{Dt} \right|_{\mathbf{v}_g} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

Similares ecuaciones se obtienen para m y n por lo que

$$\left. \frac{D\mathbf{k}}{Dt} \right|_{\mathbf{v}_g} = -\nabla_x \Omega$$

que nos indica como varía con el tiempo el vector de ondas (esto es la dirección de avance local de la fase) por un observador que se mueve a la velocidad de grupo. Una consecuencia muy interesante de

las anteriores ecuaciones es que podemos escribir

$$u_g = \dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial l} \quad (4.4)$$

$$\dot{l} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (4.5)$$

que no son otra cosa que las ecuaciones de Hamilton, en la cual la velocidad de grupo representa la velocidad de la partícula, $\Omega(l, m, n, x, y, z)$ el Hamiltoniano y l, m, n los momentos. Así pues podemos identificar al movimiento del paquete de ondas con el movimiento de una partícula que viaja con la velocidad de grupo. Se invierte así la trayectoria usual en mecánica cuántica, en la que se asocia a una partícula una onda, aquí asociamos a una onda una partícula. Se define el rayo como la trayectoria seguida por dicha partícula, cuyas ecuaciones del movimiento viene dada por las ecuaciones de Hamilton 4.4 y 4.5. Como la solución de estas ecuaciones serán en general una curva, dichas ecuaciones nos proporcionan por tanto como se curvan los rayos, esto es como se *refractan*. Sabemos también que la energía se mueve con la velocidad de grupo, así pues los rayos representan como se mueve la energía.

Otra cuestión interesante es >Cuanto varía la frecuencia siguiendo el movimiento de la partícula, esto es moviendonos con la velocidad de grupo, la respuesta es, teniendo en cuenta la ecuación de dispersión

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_i} \frac{Dk_i}{Dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \frac{Dx_i}{Dt} = 0$$

en la que se ha tenido en cuenta las ecuaciones de Hamilton vistas anteriormente. Así pues la frecuencia se conserva siguiendo a la partícula, esto es moviendonos a la velocidad de fase, esto equivale de alguna manera a la conservación del Hamiltoniano de la mecánica.

4.6. Ondas sonoras

Las ondas sonoras constituyen el único caso en que la fuerza recuperadora no es debida a un agente externo si no que se debe a las propias características del fluido: su compresibilidad. Aunque no tienen importancia práctica en meteorología merece la pena su estudio debido a que son las ondas materiales más rápidas que viajan en el seno del fluido. Si estas ondas no son filtradas apropiadamente debemos de tenerlas en cuenta a la hora de diseñar el método de integración numérica de las ecuaciones, pues el intervalo de tiempo que debemos de emplear es menor que el tiempo que tarda la onda más rápida en ir de un punto a otro de la red utilizada para discretizar, en el espacio, las ecuaciones del movimiento (criterio de Courant, Friedrichs, Lewy), si no ciertas bandas del espectro

se amplifican y la integración ‘explota’. Si tenemos ondas muy rápidas debemos de emplear intervalos de integración muy pequeños lo que se puede alargar de forma exponencial el tiempo de ejecución de los programas numéricos.

Las ecuaciones de Navier–Stokes soporta todos los tipos de ondas que vamos a estudiar (en realidad las soportan el fluido descrito por las ecuaciones). Ahora bien, nos interesa aislar, para su estudio, cada tipo de onda por separado. Para ello, adaptaremos las ecuaciones generales a cada tipo de problema, analizando previamente que propiedades del fluido son importante a la hora de soportar el tipo de ondas bajo estudio. Así tenemos, por ejemplo, que en el caso de ondas sonoras no es importante considerar efectos gravitatorios por lo que consideraremos que el campo gravitatorio es nulo. Así mismo los efectos de las fuerzas no inerciales son despreciables por lo que no tendremos en cuenta los efectos de la fuerza de Coriolis. Vamos a suponer que los procesos de expansión–compresión que tiene lugar en las ondas sonoras se producen de forma adiabática. Así mismo, vamos a suponer que el fluido en equilibrio está en reposo y que las ondas sonoras constituyen una pequeña perturbación, tal que, las magnitudes que intervienen en el proceso se separan muy poco de sus valores de equilibrio. Suponed que en este estado de equilibrio, la presión en el fluido es p_0 (dado que suponemos despreciables los efectos gravitatorios, podemos considerar que p_0 no depende de z), la densidad ρ_0 y la temperatura T_0 . Provocamos ahora una perturbación que viaja en la dirección del eje x , podemos suponer sin pérdida de generalidad que las magnitudes que intervienen en el problema solo dependen de dicha coordenada. Puesto que el estado perturbado apenas si se separa del estado sin perturbar: $p(x, t) = p_0 + p'(x, t)$, $p' \ll p_0$; $T(x, t) = T_0 + T'(x, t)$, $T' \ll T_0$; $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho'(x, t)$, $\rho' \ll \rho_0$. Supondremos que nuestro fluido es un gas perfecto por lo que tendremos,

$$p = \rho RT$$

Ecuacion que, teniendo en cuenta que la perturbación es muy pequeña y que en el estado de equilibrio también se verifica la ecuación de los gases perfectos $p_0 = \rho_0 RT_0$, podemos linealizar, resultando

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}.$$

Puesto que estamos suponiendo que el proceso es adiabático, la temperatura potencial se mantiene constante durante el proceso,

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} = \theta_0 = \text{cte.}$$

Linealizando esta ecuación al igual que hizimos antes obtenemos,

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{R}{c_p} \frac{p'}{p_0}$$

lo que sustituido en la ecuación de estado resulta

$$\frac{1}{\gamma} \frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0}$$

siendo $\gamma = c_p / c_v$. Llamemos $c^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, la ecuación de estado resulta

$$\rho' = \frac{1}{c^2} p'$$

La ecuación del movimiento en la dirección x viene dada por la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

teniendo en cuenta nuestra hipótesis de que los términos perturbativos son muy pequeños, podemos considerar que en el primer miembro el término cuadrático

$$u \frac{\partial u}{\partial x}$$

es mucho más pequeño que el término lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

y que el segundo término lo podemos linealizar de la siguiente manera

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0(1 + \rho'/\rho_0)} \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x} \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial p'}{\partial x} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

por lo que la ecuación del movimiento resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

teniendo en cuenta la ecuación de estado obtenida previamente

$$\rho' = \frac{1}{c^2} p'$$

resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

Por otra parte tenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{DIV}\mathbf{v} = 0$$

que teniendo en cuenta nuestras hipótesis podemos linealizar obteniendo la expresión

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Derivando esta ecuación respecto de t y la ecuación el movimiento respecto de x y combinandolas resulta la expresión

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0$$

que es la ecuación de ondas: La velocidad de fase vale c , de acuerdo con su definición dada anteriormente, vale

$$c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0} = \sqrt{\gamma RT}$$

así pues la velocidad de fase de las ondas sonoras es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura del gas. Dando valores para el aire se obtiene un valor de c de unos 340 m/s, que es la mayor velocidad de fase de ondas materiales que se desarrollan en la atmósfera.

4.7. Ondas gravitatorias externas

Vamos a considerar en esta sección el caso de ondas que se propagan en un fluido con las siguientes características.

- La densidad ρ es constante
- Está limitado por una frontera inferior fija mientras que la frontera superior o bien considera libre o bien existe otro fluido cuya densidad es mucho menor que la del fluido que estamos considerando.
- El fluido se puede considerar no viscoso y no conductor.
- El fluido está en el campo gravitatorio y es precisamente la gravedad la fuerza restauradora que provoca el movimiento ondulatorio.

- En equilibrio la velocidad es nula y la presión corresponde con la presión
- Podemos ignorar los efectos de rotación de la Tierra. hidrostática.
- El estado de movimiento del fluido se separa poco de su condición de equilibrio, de tal forma que podemos despreciar términos de segundo orden allá donde aparezcan.
- El movimiento se desarrolla en el plano (x, z)

Consideremos en primer lugar las ecuaciones del movimiento sin tener en cuenta los efectos de rotación de la Tierra y la viscosidad

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\end{aligned}$$

Siguiendo nuestras hipótesis, la presión p la podemos separar en dos términos

$$p = p_0(z) + p'(x, z, t)$$

tal que $p' \ll p_0(z)$ siendo $p_0(z)$ la presión de equilibrio que por hipótesis es hidrostático

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho g$$

Así mismo podemos ignorar los efectos no lineales, puesto que u y w son pequeños. En estas condiciones las ecuaciones del movimiento se simplifican, resultando

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z}\end{aligned}$$

donde tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas. Puesto que el fluido tiene densidad constante se verifica la ecuación de divergencia nula

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Por lo que tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas. Podemos eliminar de las dos primeras ecuaciones la presión p' . Para ello derivamos parcialmente en z la ecuación en u y parcialmente en x la

ecuación de w y restando

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

el término entre paréntesis es la componente η de la vorticidad. Por lo que tenemos

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Puesto que al principio el sistema está en equilibrio, $\eta = 0$ y por tanto es cero siempre. La ecuación de no divergencia nos permite introducir la función corriente $\psi(x, z, t)$ tal que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

sustituyendo en la ecuación de vorticidad $\eta = 0$ obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 z} = 0 \quad (4.6)$$

que es la ecuación de Laplace. Antes de intentar una solución de esta ecuación debemos de fijar cual son las condiciones de contorno. En general, en todo problema de mecánica de fluidos, se cumple la condición cinemática que las velocidades normales a un lado y otro de la frontera han de ser iguales. En este caso tenemos una frontera inferior fija⁴ y por tanto se debe verificar que la componente vertical de la velocidad a la profundidad h sea nula,

$$w(x, -h) = 0 \quad (4.7)$$

En la frontera superior, la velocidad vertical debe de coincidir con la velocidad a la que se mueve la superficie

$$w(x, \eta) = \frac{D\eta}{Dt} \quad (4.8)$$

siendo $\eta(x, t)$ la ecuación de la superficie libre del fluido. Así mismo se debe de cumplir en la frontera la condición dinámica de continuidad del esfuerzo realizado a uno y otro lado, si no es así, aparecerían fuerzas infinitas (recordad que la fuerza es la divergencia del esfuerzo, y si este no es continuo la fuerza se hace infinita). Esta condición se expresa poniendo que la presión en la frontera superior,

⁴Mas que fija, deberíamos decir de profundidad constante. Si el fondo tuviese una cierta pendiente, la velocidad normal al fondo es cero pero no la componente vertical de la velocidad, pues si el fluido puede moverse a lo largo del fondo (estamos suponiendo que no es viscoso), la componente vertical de la velocidad es distinta de cero. Suponiendo que la ecuación de la superficie del fondo es $z - h_b(x, y) = 0$ (suponed momentaneamente que el origen se elige en un cierto nivel por debajo del fondo), el vector gradiente vale $\mathbf{n} = \nabla(z - h_b(x, y)) = (1, -\partial h_b/\partial x, -\partial h_b/\partial y)$ y la componente normal de la velocidad es, $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (w - u\partial h_b/\partial x - v\partial h_b/\partial y)$, que tiene que valer cero. Por lo tanto $w(h_b) = u\partial h_b/\partial x + v\partial h_b/\partial y$.

esto es en la superficie libre del fluido, es igual a la presión en el exterior, que supondremos constante.

$$p(x, \eta) = p_0(\eta) + p'(x, \eta) = p_{\text{ext}} = \text{cte.} \quad (4.9)$$

Vamos a buscar, ahora, una solución particular de la ecuación de Laplace en forma de onda

$$\psi(x, z, t) = \Phi(z)e^{ik(x-ct)}$$

que se propaga a lo largo del eje x con una amplitud que depende de z . Vamos a suponer que el origen de las z 's lo fijamos en la superficie libre del fluido en reposo. Sustituyendo obtenemos

$$\Phi''(z) - k^2\Phi(z) = 0$$

que admite como soluciones

$$\Phi(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

por lo que

$$\psi(x, z, t) = (Ae^{kz} + Be^{-kz})e^{ik(x-ct)}$$

De donde

$$w(x, z, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mathcal{R} \left(ik(Ae^{kz} + Be^{-kz})e^{ik(x-ct)} \right)$$

En el fondo, $z = -h$, de acuerdo con la condición frontera (4.7), la velocidad vertical es nula, por lo que

$$Ae^{-kh} + Be^{kh} = 0, \quad B = -Ae^{-2kh}$$

y por tanto

$$w(x, z, t) = -Ak \sinh[k(z+h)] \sin[k(x-ct)]$$

Así mismo,

$$u(x, z, t) = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\mathcal{R} \left(k(Ae^{kz} + Be^{-kz})e^{ik(x-ct)} \right) = -Ak \cosh[k(z+h)] \cos[k(x-ct)]$$

De la ecuación del movimiento para w

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho \frac{\partial w}{\partial t} = k^2 c A \sinh kz \cos[k(x-ct)]$$

integrando

$$p' = -Ak c \rho \cosh[k(z+h)] \cos[k(x-ct)] + cte(x, t)$$

Cuando el sistema está en equilibrio, $A = 0$ y $p' = 0$ por lo que la constante de integración vale cero y por tanto

$$p' = -Ak c \rho \cosh[k(z + h)] \cos(k(x - ct))$$

Podemos poner la constante A en términos de la amplitud de la onda en superficie. Parece obvio pensar que la anterior variación en la presión está asociadas a una perturbación de la superficie libre del fluido de la forma,

$$\eta = a \cos(k(x - ct))$$

teniendo en cuenta la condición frontera 4.8, linealizando la ecuación obtenemos,

$$w(\eta, x, t) = \frac{D\eta(x, t)}{Dt} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

bajo la hipótesis que η no es muy grande, podemos suponer que esta igualdad es válida en $z = 0$,

$$w(0, x, t) = akc \sin(k(x - ct))$$

de donde

$$-Ak \sinh[k(0 + h)] \sin[k(x - ct)] = akc \sin(k(x - ct))$$

y por tanto

$$A = -ac \frac{1}{\sinh kh}$$

por lo que las expresiones para u , w y p' resultan

$$\begin{aligned} w(x, z, t) &= a\omega \frac{\sinh[k(z + h)]}{\sinh kh} \sin[k(x - ct)] \\ u(x, z, t) &= a\omega \frac{\cosh[k(z + h)]}{\sinh kh} \cos(k(x - ct)) \\ p'(x, z, t) &= a \frac{\omega^2}{k} \rho \frac{\cosh[k(z + h)]}{\sinh kh} \cos(k(x - ct)) \end{aligned}$$

siendo $\omega = kc$

Por último, aplicando la condición frontera dinámica 4.9, tenemos que, en $z = \eta$ se verifica:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp'}{Dt} = w \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial t} + u \frac{\partial p'}{\partial x} + w \frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho g w + \frac{\partial p'}{\partial t} = 0$$

Puesto que la amplitud de la onda no es muy grande podemos suponer que esta ecuación se cumple en $z = 0$ o sea

$$\rho g A k \sinh kh \sin(k(x - ct)) - A k^2 c^2 \rho \cosh kh \sin(k(x - ct)) = 0$$

de donde

$$A k \sin(k(x - ct))(g \sinh kh - k c^2 \cosh kh) = 0$$

y por tanto

$$c^2 = g k^{-1} \tanh kh$$

que es la relación de dispersion. La frecuencia ω vale

$$w = kc = k \sqrt{g k^{-1} \tanh kh} = \sqrt{g k \tanh kh}$$

Estas ecuaciones nos muestran que las ondas gravitatorias externas son dispersivas con una velocidad de grupo dada por la ecuación

$$c_g = \frac{\partial w}{\partial k} = \frac{c}{2} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right]$$

Existen dos límites interesantes, en el caso de aguas someras, se supone que $kh \ll 1$, esto es la profundidad del fluido es mucho menor que la longitud de onda, en este caso $\tanh kh \approx kh$ por lo que

$$c^2 = gh$$

y las ondas son no dispersivas. En el límite opuesto $kh \gg 1$, esto es aguas muy profundas, $\tanh kh \approx 1$ y por tanto

$$c^2 = g k^{-1}$$

y las ondas son dispersivas. En este caso la velocidad de grupo es 1/2 de la velocidad de fase. Resulta interesante el caso de aguas someras, imaginad que llega una onda a la playa formando un cierto ángulo con ella, dado que la velocidad de fase aumenta con la profundidad h , la zona del frente de ondas más cercana a la playa viaja con una velocidad menor que la zona del frente de ondas más lejana a la playa (se supone que cuanto más lejos estamos de la playa más profundo es el mar o lago), de tal forma que se produce una refracción del frente de ondas llegando este paralelo a la playa, que es lo que se observa normalmente.

4.7.1. Energías cinética y potencial

Vamos a calcular cuanto valen las energías cinética y potencial en un volumen que se extiende a lo largo de una longitud de onda y una unidad de anchura en el plano horizontal y una altura h en la vertical. La energía cinética vale

$$E_c = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_V \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dV$$

teniendo en cuenta las expresiones de u y w obtenidas previamente,

$$E_c = \int_0^\lambda \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \left[\left(\frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh kh} \right)^2 \sin^2[k(x-ct)] + \left(\frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh kh} \right)^2 \cos^2[k(x-ct)] \right] dx dz$$

Las integrales en x valen lo mismo

$$\int_0^\lambda \cos^2[k(x-ct)] dx = \int_0^\lambda \sin^2[k(x-ct)] dx = \frac{1}{2} \lambda$$

por lo que

$$E_c = \frac{1}{4} \rho a^2 \omega^2 \lambda \frac{1}{\sinh^2 kh} \int_{-h}^0 (\sinh^2[k(z+h)] + \cosh^2[k(z+h)]) dz$$

Teniendo en cuenta que $\sinh^2[k(z+h)] + \cosh^2[k(z+h)] = \cosh[2k(z+h)]$, tenemos

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{4} \rho a^2 \omega^2 \lambda \frac{1}{\sinh^2 kh} \int_{-h}^0 \cosh[2k(z+h)] dz = \frac{1}{4} \rho a^2 \omega^2 \lambda \frac{1}{\sinh^2 kh} \frac{1}{2k} \sinh[2k(z+h)] \Big|_{-h}^0 = \\ &= \frac{1}{4} \rho a^2 \omega^2 \lambda \frac{1}{\sinh^2 kh} \frac{1}{2k} \sinh(2kh) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión del seno hiperbólico del ángulo doble, $\sinh(2kh) = 2 \cosh kh \sinh kh$, obtenemos

$$E_c = \frac{1}{4} \rho a^2 \omega^2 \lambda \frac{1}{\sinh^2 kh} \frac{1}{k} \cosh kh \sinh kh$$

Puesto que según hemos visto

$$\omega^2 = g k \tanh kh$$

sustituyendo

$$E_c = \frac{1}{4} \rho a^2 g \lambda$$

De tal forma que la energía cinética por unidad de área horizontal $\Sigma = \lambda \cdot 1$ vale,

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} \rho a^2 g = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle$$

siendo

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \eta^2 dx = \frac{1}{2} a^2$$

el valor cuadrático medio de la elevación η de la onda en el intervalo de una longitud de onda

Tomando como cero de energía potencial la energía potencial del fluido en reposo, la energía potencial por unidad de área horizontal del fluido perturbado vale

$$\langle E_p \rangle = \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \int_{-h}^\eta \rho g z dz - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \int_{-h}^0 \rho g z dz \right) = \rho g \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \eta^2 dx = \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2 \rangle$$

donde vemos que las energía cinética y potencial valen lo mismo, lo que es consecuencia del principio de equipartición de la energía. La energía total vale

$$E = E_p + E_c = \rho g \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho g a^2$$

Merece la pena calcular cual es el flujo de energía a lo largo del eje x . El trabajo realizado por la fuerzas exteriores a una parcela del fluido dada se debe por un lado a la gravedad y a las fuerzas de presión. Las fuerzas gravitatorias no producen trabajo en la dirección horizontal así pues sólo nos interesa el trabajo realizado por las fuerzas de presión. La velocidad a la que realizan trabajo estas fuerzas vale

$$\int_{\partial V} p \mathbf{v} \cdot d\sigma$$

estando la integral extendida a todo el área que encierra a la parcela del fluido. Si suponemos que la parcela tiene forma de cubo, la integral extendida a una de las caras representará el flujo de trabajo realizado por las fuerzas de presión. El trabajo neto representa la divergencia es este flujo. Así pues, debemos de evaluar la integral anterior sobre una cara normal al eje x que tenga de altura la altura del fluido y anchura unidad

$$W = \int_{\Sigma} p u \cdot d\sigma = \int (p + p') u d\sigma = 1 \cdot \int_{-h}^0 (p_0 - \rho g z + p') u dz = p_0 \int_{-h}^0 u dz - \int_{-h}^0 u z dz + \int_{-h}^0 p' u dz$$

Si nos fijamos no en el valor instantáneo, si no en el valor medio

$$\langle W \rangle = p_0 \int_{-h}^0 \langle u \rangle dz - \int_{-h}^0 \langle u \rangle z dz + \int_{-h}^0 \langle p' u \rangle dz$$

ahora bien, si el intervalo temporal comprende varios ciclos $\langle u \rangle = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \int_{-h}^0 \langle p' u \rangle dz = \langle \cos^2[k(x - ct)] \rangle \frac{\rho a^2 \omega^3}{k \sinh^2 kh} \int_{-h}^0 \cosh^2(k(z + h)) dz \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho a^2 \omega^3}{k \sinh^2 kh} \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{4k} \sin 2kh \right) = \frac{1}{2} \frac{\rho a^2 \omega^3}{k \sinh^2 kh} \frac{1}{4k} \sin 2kh \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \end{aligned}$$

em pleando la expresión de dispersión obtenemos

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

Teniendo en cuenta la expresión para la velocidad de grupo, la anterior expresión se puede poner como

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \rho g a^2 c_g = \langle E \rangle c_g$$

donde hemos hecho uso del valor de la energía calculado previamente. Así pues vemos que el flujo de energía es la velocidad de grupo por la energía total por unidad de volumen⁵. Esto significa que la energía total se transmite a la velocidad de grupo. Esta es una característica de la velocidad de grupo. La fase viaja con la velocidad de fase c mientras que la energía fluye con la velocidad de grupo c_g .

Antes de terminar esta sección merece la pena que analicemos el problema de nuevo pero ahora suponiendo que la presión perturbada es también hidrostática, esto es

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

teniendo en cuenta que $p(x, z, t) = p_0(z) + p'(x, z, t)$ y que la presión de referencia también verifica la ecuación

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho g$$

es por lo que

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = 0$$

y por tanto,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} = 0$$

Puesto que p' no depende de z (la perturbación en la presión es la misma en todas las profundidades, lo que contrasta con el caso anterior donde la perturbación iba disminuyendo con la profundidad)

⁵Al igual que el flujo de masa que atraviesa una cierta superficie es la masa por la unidad de volumen por la velocidad normal a la superficie, el flujo de energía es la energía por unidad de volumen por la velocidad a la que se mueve esta

podemos poner

$$p'(x, t) = \rho g \eta(x, t)$$

y por tanto $p(z) = p_0(z) + \rho g \eta(x, t) = p_{00} - \rho g z + \rho g \eta$ siendo p_{00} la densidad del fluido que permanece encima de nuestro fluido y que supondremos constante. La cantidad $\eta - z$ representa la profundidad del fluido desde la superficie hasta la profundidad $-z$ y η representa la altura de la superficie respecto de su valor medio. Llevando la expresión de p' a la expresión de conservación de la componente u obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}$$

Esta ecuación nos indica que la aceleración horizontal se debe a la diferencia de profundidades (y por tanto presiones) que tiene el fluido entre dos puntos situados a una misma profundidad z a cuenta de la deformación de la superficie.

Necesitamos otra ecuación para poder integrar. De la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Teniendo en cuenta el teorema de Taylor–Prudman, (estamos suponiendo que todas las presiones son hidrostáticas) si inicialmente u no depende de z , sigue sin depender en el curso del movimiento (basta mirar en la ecuación del movimiento y darse cuenta que el miembro de la derecha sólo depende de x), por lo que podemos integrar la ecuación de continuidad entre $-h$ y η ,

$$w_\eta - w_{-h} = - \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz = -(h + \eta) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Puesto que en el fondo, supuesto de profundidad constante, $w_{-h} = 0$

$$w_\eta = - \frac{\partial u}{\partial x} (h + \eta)$$

Suponiendo que η es muy pequeño

$$w_\eta = -h \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ahora bien

$$w_\eta = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

ignorando términos de segundo orden

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x}$$

Combinando con la ecuación de conservación del momento

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

que es una ecuación de ondas para η cuya velocidad de fase es $c = \sqrt{gh}$, esto es la velocidad de fase de aguas poco profundas. Así pues la aproximación de aguas poco profundas ($hk \ll 1$) equivale a utilizar la aproximación hidrostática. Recordad que la aproximación de aguas poco profundas equivale a tomar la escala de la perturbación horizontal (la longitud de onda) mucho mayor que la escala vertical (la altura del fluido), así pues podemos pensar que la aproximación hidrostática también es válida en estas condiciones.

Resulta interesante estudiar como alcanza la condición de equilibrio una perturbación un poco especial, en vez de excitar las ondas gravitatorias con una perturbación de tipo sinusoidal vamos a excitar la ondas con una perturbación tipo escalón, vease la figura 4.6, cuya ecuación viene dada por la expresión

$$\eta = -\eta_0 \text{sgn}(x)$$

siendo $\text{sgn}(x)$ la función signo de x , esto es una función que vale -1 cuando x es negativa y +1 cuando x es positiva. Vimos en la primera sección que la solución general encontrada para las ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

eran dos ondas de amplitud 1/2 de la perturbación inicial viajando en las direcciones positiva y negativa con velocidad c , según acabamos de ver la ecuación de ondas que rige el movimiento para el sistema de aguas poco profundas, ecuación 4.10, es de este tipo por lo que debemos de pensar que se forman dos ondas viajando, una hacia el lado positivo y la otra hacia negativo, del eje x con velocidad $c = \sqrt{gh}$, cuya ecuación será

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{2} (\eta_0 \text{sgn}(x + ct) + \eta_0 \text{sgn}(x - ct))$$

Esto aparece representado como un triángulo en la figura. Efectivamente si $x > ct$ también $x > -ct$ y por tanto ambos términos del segundo miembro tendrán el mismo signo y por tanto para $x > ct$ tendremos que $\eta = -\eta_0$ y el frente de ondas no ha llegado todavía. Lo mismo sucede para $x < -ct$. En este caso ambos términos son negativos y por tanto $\eta = \eta_0$. Para $x < ct$ y $x > -ct$ los dos términos

tienen signo opuesto y por tanto $\eta = 0$. 4.6. Puesto que la perturbación tiene una extensión infinita la

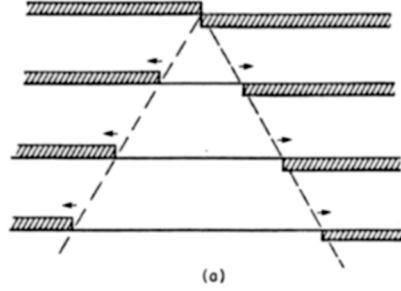


Figura 4.6: Propagación de una perturbación tipo escalón. La línea discreta marca la trayectoria del frente de onda que viaja con una velocidad c . Una vez pasada la perturbación la superficie fluido toma la altura 0 estableciéndose un régimen estacionario con velocidad $g\eta_0/c$.

energía potencial es también infinita, ahora bien la energía potencial por unidad de área es finita. En la zona no perturbada esta energía potencial (por unidad de área) vale (lo hacemos para $x > 0$ solo),

$$E_p = \int_{-h}^{-\eta_0} \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g ((-\eta_0)^2 - h^2) = \frac{1}{2} \rho g (\eta_0^2 - h^2)$$

y la energía potencial respecto del estado de reposo vale por tanto $(1/2)\rho g \eta_0^2$. La energía cinética en la zona no perturbada vale 0 y en la zona donde ya ha pasado la perturbación vale

$$E_c = \int_h^0 \frac{1}{2} \rho u^2 dz = \frac{1}{2} \rho u^2 h$$

puesto que u no depende de z . De acuerdo con la ecuación del movimiento,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial(x-ct)} \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial(x-ct)}$$

y que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial(x-ct)} \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial(x-ct)}$$

se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial(x-ct)} = \frac{g}{c} \frac{\partial \eta}{\partial(x-ct)}$$

de donde

$$u(x - ct) = \frac{g}{c} \eta(x - ct)$$

De la misma manera

$$u(x + ct) = -\frac{g}{c} \eta(x + ct)$$

Teniendo en cuenta la expresión para η , tenemos

$$u(x, t) = -\frac{g}{2c} (\eta_0 \operatorname{sgn}(x + ct) - \eta_0 \operatorname{sgn}(x - ct))$$

Como antes, en la zona $x > ct$, se verifica también que $x > -ct$ por lo que los términos entre paréntesis tiene el mismo signo y por tanto $u = 0$. Cuestión similar ocurre para $x < -ct$. En la zona intermedia, $-ct < x < ct$, ambos términos tienen signos opuestos $(-, +)$ y se obtiene que

$$u = \frac{g\eta_0}{c}.$$

Como por la ecuación de continuidad la velocidad u no depende de x en la zona por donde ya ha pasado la onda, tendremos que en esta zona

$$E_c = \frac{1}{2} \rho h u^2 = \frac{1}{2} \rho h \left(\frac{g}{c} \eta_0 \right)^2$$

y de la expresión de la velocidad de la fase, $c = \sqrt{gh}$, se tiene

$$E_c = \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2$$

que coincide con la energía potencial inicial, así pues la onda convierte la energía potencial inicial en energía cinética a la vez que la perturbación se aleja al infinito.

4.8. Ondas inercia-gravedad

Vamos a introducir en nuestro estudio anterior la posibilidad que actúen fuerzas no inerciales como es la fuerza de Coriolis. Extendiendo las anteriores ecuaciones del movimiento a un dominio 3D, hidrostático, de densidad homogénea (aplicable por tanto la teoría de aguas poco profundas) y

con fuerzas inerciales, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - f u \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Antes de resolver nuestro problema vamos a ver el efecto de las fuerzas no inerciales suponiendo que las fuerzas de presión son nulas, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -f u\end{aligned}$$

Suponiendo que $u = u_0 \exp i\omega t$, $v = v_0 \exp i\omega t$, se obtiene como ecuación de dispersión

$$\omega = \pm f$$

por lo que el periodo vale $\tau = \pi/\Omega \sin \phi = 1/2$ día pendulo. Así, pues bajo la acción de las fuerzas inerciales el viento oscila en torno a su posición de equilibrio con un periodo de medio día pendulo.

Volviendo a nuestro problema, para establecer la ecuación de ondas, podemos eliminar entre las dos ecuaciones del movimiento y la ecuación de continuidad las variables u y v , para ello basta con derivar respecto de x la ecuación en u y respecto de y la ecuación en v , derivar respecto de t la ecuación de continuidad y sustituir, obteniendo fácilmente la expresión

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + f h \zeta = 0$$

siendo ζ la vorticidad,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Esta ecuación de ondas es muy similar a la obtenida antes cuando no había rotación, pero incluyen una nueva variable, la vorticidad. Necesitamos pues una ecuación adicional. Para obtenerla derivamos en las ecuaciones del movimiento la segunda por x la primera por y , restando obtenemos

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -f \operatorname{div}_z \mathbf{v}_z$$

que no es otra cosa que la ecuación de conservación de la vorticidad obtenida en el capítulo anterior una vez linealizada. Teniendo en cuenta la expresión de la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

la anterior expresión la podemos poner como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{h} \right) = 0$$

que expresa la ecuación de conservación de la vorticidad potencial linealizada. La cantidad

$$Q(x, y, t) = \frac{f}{h} \left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{h} \right) = \frac{\zeta}{h} - \frac{\eta f}{h^2}$$

recibe el nombre de vorticidad potencial perturbada. De la ecuación de conservación de la vorticidad potencial, se tiene

$$Q(x, y, t) = Q(x, y, 0)$$

ecuación que nos va a permitir obtener la solución al problema del ajuste geostrófico de Rossby.

4.8.1. Ajuste Geostrófico

Como veremos más adelante la atmósfera a gran escala se encuentra en equilibrio cuasigeostrófico (equilibrio entre el campo de vientos y de masas). Supongamos que en una región finita del espacio se produce un desequilibrio en este balance. La atmósfera va a reaccionar de tal manera que asimile este desequilibrio y alcance un nuevo equilibrio cuasigeostrófico. Vamos a analizar cual es el mecanismo mediante el cual la atmósfera alcanza este nuevo estado de equilibrio. Suponed que podemos modelizar nuestro sistema mediante la teoría de aguas poco profundas en su forma linealizada, cuyas ecuaciones se obtuvieron en la sección anterior. Inicialmente producimos un desajuste en el campo de alturas consistente en una función escalón, al igual que hicimos para analizar el ajuste en el caso de ondas gravitatorias, de tal forma que en el instante inicial, $t = 0$, se tiene

$$u = v = 0, \quad \eta = -\eta_0 \text{sgn}(x)$$

siendo $\text{sgn}(x)$ la función signo de x , que vale -1 para $x < 0$ y +1 para $x > 0$. Antes de analizar la respuesta transitoria a esta perturbación vamos a analizar cual el estado estacionario resultante. A partir de las ecuaciones del movimiento, una vez alcanzado el estado estacionario, $(\partial u / \partial t) = (\partial v / \partial t) = 0$,

tendremos

$$f u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad f v = g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

que no son otra cosa que las ecuaciones del viento geostrófico. Estas ecuaciones no las podemos resolver, pues verifican la ecuación de continuidad de forma idéntica y por tanto la ecuación de continuidad no añade una nueva información. Para resolver el problema debemos acudir a la memoria que tiene el fluido via la conservación de la vorticidad. Si derivamos las anteriores expresiones por y y x y restamos obtenemos la expresión de la vorticidad en condiciones estacionarias,

$$\zeta = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)$$

que nos relaciona la vorticidad con el campo de alturas en el equilibrio geostrófico. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de conservación de la vorticidad potencial, tenemos

$$\frac{g}{f^2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \frac{\eta}{h} = \left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{h} \right)_0 = \frac{\eta_0}{h} \text{sgn}(x)$$

reordenando

$$c \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \eta f^2 = f^2 \eta_0 \text{sgn}(x)$$

siendo $c = \sqrt{gh}$. Puesto que el miembro de la derecha no depende de x , el de la izquierda tampoco por lo que

$$c \frac{d^2 \eta}{dx^2} - f^2 \eta = f^2 \eta_0 \text{sgn}(x)$$

cuya solución es

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \begin{cases} -1 + e^{-x/R_d} & \text{para } x > 0 \\ 1 - e^{x/R_d} & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

siendo $R_d = \sqrt{gh}/f$ el radio de deformación de Rossby. La figura 4.7 nos muestra una gráfica de η

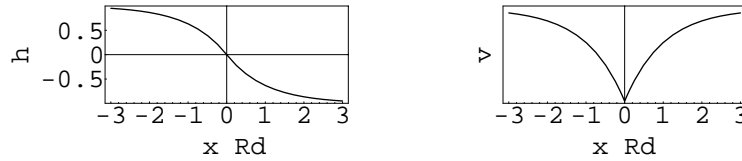


Figura 4.7:

como función de x . Para $x \gg R_d$, apenas si ha variado el desequilibrio inicial y por tanto no llega

el proceso de ajuste. Para $x < R_d$ por el contrario es la región del espacio donde llega el proceso de ajuste geostrofico. El radio de Rossby de deformación, R_d es inversamente proporcional a f . En un planeta que gira muy rápidamente, f grande, el radio es muy pequeño y por lo tanto el proceso de ajuste alcanza a regiones muy pequeñas, mientras que si f es pequeño el proceso de ajuste alcanza regiones mayores. Venus, por ejemplo, es un planeta con una velocidad de rotación muy pequeña y la célula de Hadley tropical puede llegar hasta el polo. La Tierra en cambio es un planeta con una velocidad de rotación relativamente alta y la célula de Hadley llega hasta una latitud relativamente baja. Tomando $h = 10000\text{m}$, $f = 10^{-4} \text{ 1/s}$, tenemos que $R_d \approx 3000\text{Km}$. Una vez resuelto el problema para η , de las ecuaciones del viento geostrofico obtenemos

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{gh}{f R_d} \exp(-|x|/R_d) \end{aligned}$$

que se muestra en la figura 4.7. Observese que en el estado estacionario los campos u, v estan en equilibrio con cualquier distribución de alturas, de todas ellas, la conservación de la vorticidad nos ha elegido una y ha fijado cual la distribución final de velocidades quedando el problema determinado.

Resulta interesante analizar los cambios de energía que han tenido lugar en el proceso. La energía potencial por unidad de área viene dada por la expresión

$$\int_0^\eta \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g \eta^2$$

de tal forma que la energía potencial puesta en juego en el instante inicial por unidad de anchura y vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2 dx$$

y la variación de energía potencial entre el estado inicial y final vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \rho g \eta^2 dx = \frac{3}{2} \rho g \eta_0^2 R_d$$

En el caso de no rotación $f = 0, R_d \rightarrow \infty$, toda la energía potencial acumulada inicialmente se convierte en energía cinética en forma de ondas gravitatorias resultado al final una superficie plana. En el caso de rotación solo la cantidad anterior es convertida en energía cinética. Una parte de esta energía cinética permanece en la zona de ajuste y otra parte se radia en forma de ondas gravitatorias. La

energía cinética en el estado estacionario por unidad de anchura vale

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \rho h v^2 dx = \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2 R_d$$

Comparando con la cantidad de energía potencial puesta en juego inicialmente vemos que solamente 1/3 va a parar a la energía cinética del estado estacionario. Los dos tercios restante se propagan como ondas gravitatorias.

4.8.2. Transitorios

Una vez calculado el estado estacionario, calculemos como evoluciona el sistema hasta alcanzar este estado. Vamos a buscar soluciones en forma de ondas planas viajeras, construyendo la solución general como superposición de estas ondas planas e imponiendo al final las condiciones de contorno, Así pues supondremos que el campo de velocidades y la deformación en el instante t es de la forma,

$$u = \hat{u} \exp[i(lx + my - \omega t)]$$

$$v = \hat{v} \exp[i(lx + my - \omega t)]$$

$$\eta = \hat{\eta} \exp[i(lx + my - \omega t)]$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento

$$-i\omega \hat{u} + i g l \hat{\eta} - f \hat{v} = 0$$

$$-i\omega \hat{v} + i g m \hat{\eta} + f \hat{u} = 0$$

$$-i\omega \hat{\eta} + i h l \hat{u} + i h m \hat{v} = 0$$

que en forma matricial podemos poner como

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & i g l \\ f & -i\omega & i g m \\ i h l & i h m & -i\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = 0$$

Para que este sistema de ecuaciones lineales tenga solución distinta de la trivial es neceseraio que el determinante de la matriz de coeficientes sea cero, lo que nos conduce a la ecuación de dispersión

$$\omega[\omega^2 - f^2 - g h(l^2 + m^2)] = 0$$

que tiene como soluciones, $\omega = 0$ y

$$\omega = \pm \sqrt{f^2 + ghk^2}$$

siendo $k^2 = l^2 + m^2$ el número de ondas. Esta ecuación la podemos poner como

$$\omega = \pm k \sqrt{\frac{f^2}{k^2} + gh}$$

de donde la velocidad de fase vale

$$c = \pm \sqrt{\frac{f^2}{k^2} + gh}$$

La solución $\omega = 0$ nos conduce a la solución estacionaria $\partial u / \partial t = \partial v / \partial t = 0$ lo que sustituido en las ecuaciones del movimiento nos lleva a

$$\begin{aligned} 0 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v \\ 0 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - f u \\ 0 &= -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

que son las ecuaciones del viento geostrófico.

Las otras dos soluciones son ondas viajeras que reciben el nombre de ondas inercia-gravedad u ondas de *Poincaré* (En realidad se llaman ondas de Poincaré aquellas ondas inercia-gravedad que se desarrollan en un canal de anchura W ilimitado). La figura 4.8 nos muestra la relación de dispersión de las ondas de inercia gravedad. Tenemos dos límites, en el caso en que $f = 0$ o límite de no rotación,

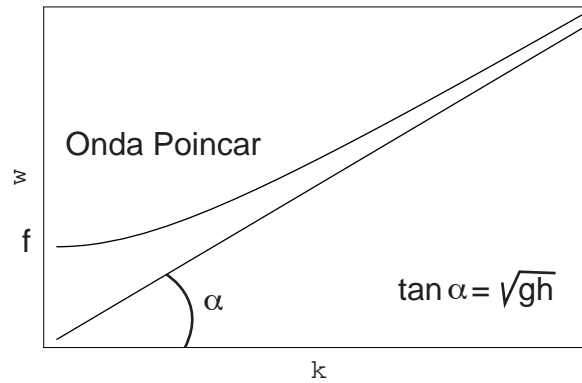


Figura 4.8: Relación de dispersión de las ondas de inercia gravedad

la frecuencia vale $\omega = \sqrt{gh}k$ y la velocidad de fase $c = \sqrt{gh}$ reproduciendo los resultados obtenidos previamente. Parecido resultado se obtiene si $k^2 \gg f^2/gh$ que equivale, de acuerdo con la definición del radio de Rossby a $kR_d \gg 1$ (ondas cuya longitud de onda es muy corta comparado con el radio de Rossby, pero con longitud de onda mucho más grande que la profundidad para que sea válida la teoría de aguas poco profundas, esto es $h \ll \lambda \ll R_d$) tal que la fuerza de Coriolis no tenga ninguna importancia. En el límite opuesto tenemos el caso en que $k^2 \ll f^2/gh$, ($kR_d \ll 1$) esto es ondas gravitatorias de longitud de onda muy larga como para sentir los efectos de la rotación de la Tierra hasta el punto que estos se hacen dominantes. El resultado es el movimiento ciclostrofico obtenido en el capítulo anterior.

Se puede demostrar que si la perturbación inicial es la función escalón, la perturbación en un instante t , vale

$$\eta = -\frac{2\eta_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{k \sin kx \cos \omega t}{k^2 + R_d^{-2}} dk$$

siendo $\omega^2 = f^2 + k^2 c^2$. La expresión para u toma la forma

$$u = \begin{cases} \frac{g\eta_0}{\pi c} J_0(f(t^2 - x^2/c^2)) & \text{para } |x| < ct \\ 0 & \text{para } |x| > ct \end{cases}$$

4.9. Ondas de Kelvin

Antes de pasar a estudiar un tipo especial de ondas inercia-gravedad (las ondas de Rossby) vamos a tratar de revolver el problema de las ondas de Kelvin que son ondas de inercia-gravedad que se desarrollan en presencia de una frontera. Para realizar este análisis supongamos que a lo largo del eje y hemos puesto una frontera (ver la figura 4.9).

Resulta evidente que a lo largo de este eje la componente u es cero. Vamos a suponer que esta componente es cero en todo el dominio (podemos pensar que la perturbación la producimos paralela al eje y). Bajo esta hipótesis la fuerza de Coriolis paralela al eje y es por tanto cero y las ecuaciones del movimiento quedan

$$\begin{aligned} 0 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

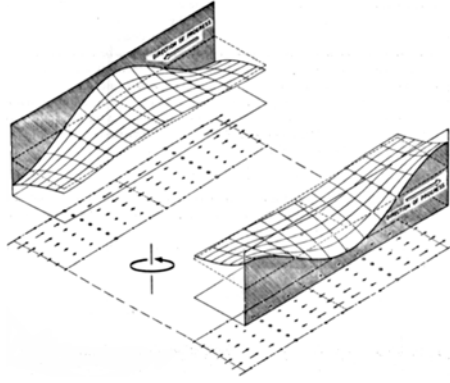


Figura 4.9: Geometría de una onda Kelvin en el hemisferio norte ($f > 0$) que se desarrolla en un canal que es mucho más ancho que el radio Rossby de la deformación.

Eliminando v , tenemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

con $c^2 = gh$. Como hemos visto antes, la solución general de esta ecuación es

$$\eta(x, y, t) = F(x, y + ct) + G(x, y - ct)$$

de donde

$$v(x, y, t) = -\frac{c}{h} (F(x, y + ct) - G(x, y - ct))$$

Como del balance geostrófico tenemos que

$$f v = g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

se debe de verificar que

$$f \frac{c}{h} F = -g \frac{\partial F}{\partial x}$$

y

$$f \frac{c}{h} G = +g \frac{\partial G}{\partial x}$$

Lo cual demuestra que si $f > 0$, la onda F disminuye con x y la onda G aumenta. Si el eje x va hasta el infinito, **solo** la onda F puede existir, esto es solo puede existir la onda que viaja en la dirección y negativa. Resolviendo la anterior ecuación tendremos

$$F(x, y + ct) = F(0, y + ct) \exp(-x/a)$$

siendo $a = \sqrt{gH}/f$ el radio de deformación de Rossby. La onda en la dirección y es una onda gravitatoria pura y el efecto de la rotación es que la amplitud de esta onda vaya amortiguándose a lo largo del eje x con una distancia de escala igual al radio de deformación de Rossby.

Desde un punto de vista meteorológico, estas ondas pueden aparecer a lo largo del Ecuador, pues este actúa como una especie de pared vertical, tendiendo a inhibir aquellos movimientos que tienden a atravesarlo.

4.10. Ondas Planetarias de Rossby

Las ondas deducidas anteriormente tienen una frecuencia mayor que la vorticidad planetaria f y por tanto un periodo menor que medio día péndulo. Resulta que los movimientos a escala planetaria presentan un periodo muy grande del orden de varios días. Nos preguntamos si existe alguna otra solución en forma de ondas al problema anterior cuya frecuencia sea mayor que la solución estacionaria ($\omega = 0$) y mucho menor que la frecuencia de Poincaré y que justifique de alguna forma la presencia de las ondas planetarias de muy baja frecuencia. La respuesta es sí, pero, para que exista dicha solución, es necesario considerar la dependencia con la latitud del parámetro de Coriolis f . Hasta el momento se ha considerado que $f = 2\omega \sin \phi$ es constante. Ahora bien, como vemos, de su definición, f depende de la latitud. Podemos considerar que las variaciones en la latitud no son muy importantes de tal forma que podamos desarrollar f en serie y escribir

$$f = f_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) = f_0 + \beta_0(y - y_0)$$

siendo $\beta_0 = (\partial f / \partial y) = 2(\Omega/a) \cos \phi_0$ el llamado *factor beta*. Valores típicos de f_0 y β son 8×10^{-5} (1/s) y 2×10^{-11} 1/(m s) respectivamente. El marco cartesiano donde se supone que f es constante recibe el nombre de *plano f* y el marco cartesiano donde se incluye el factor β recibe el nombre de *plano beta*. El próximo paso sería retener el resto de los factores de esfericidad, que por ahora se han ignorado. La hipótesis de f constante es válida siempre que la escala de los movimientos meridianos sea tal que el número $\beta L / f_0 \ll 1$. Vamos a suponer en nuestro análisis que debemos de retener el término perturbativo en f . Las ecuaciones del movimiento toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - (f_0 + \beta_0 y)v &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (f_0 + \beta_0 y)u &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Reordenando esta ecuación,

$$\begin{aligned} f_0 v &= +g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \beta_0 y v \\ f_0 u &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t} - \beta_0 y u \end{aligned}$$

En condiciones de equilibrio geostrófico en una latitud ϕ_0 , los dos últimos términos de las dos anteriores ecuaciones son idénticamente cero. Suponiendo que no nos desviamos mucho del equilibrio geostrófico, esto es estamos en un equilibrio cuasigesotrófico (al igual que la atmósfera en procesos a gran escala, podemos considerar que los dos últimos términos son pequeños frente a los otros dos. Para resolver esta ecuación podemos hacer como se hace en teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. Buscamos una solución de orden cero, esto es una solución donde intervienen sólo los términos mas grandes y sustituimos el resultado en los terminos más pequeños de la ecuación perturbada y así sucesivamente. La solución de orden cero de la anterior ecuación es el viento geostrófico, substituyendo en el segundo miembro donde pone u, v la solución del viento geostrófico resulta,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{f_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\beta_0 g}{f_0^2} y \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ v &= +\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{f_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - \frac{\beta_0 g}{f_0} y \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

Llevando estas soluciones a la ecuación para la evolucion temporal de η se obtiene

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R_d^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - \beta_0 R_d^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

esta ecuación tiene los coeficientes constantes y podemos suponer una solución de la forma

$$\eta = \hat{\eta} \exp(i(lx + my - \omega t))$$

sustituyendo se obtiene la siguiente relación de dispersión

$$\omega = -\beta_0 R_d^2 \frac{l}{1 + R_d^2 k^2} \quad (4.13)$$

siendo $k^2 = l^2 + m^2$. Estas ondas reciben el nombre de *ondas planetarias* o *ondas de Rossby* en honor de Carl-Gustaf Rossby que las propuso como método para explicar el movimiento de las patrones de tiempo (altas y bajas) de latitudes medias. Si $\beta_0 = 0$, $\omega = 0$ y se obtienen la solución estado-

estacionaria de la que hemos partido. Existen dos límites en la anterior ecuación según que $R_d^2 k^2$ sea mucho mayor o menor que 1. Si se toma el límite $R_d^2 k^2 = 4\pi^2 R_d^2 / L^2 \ll 1$, la longitud de onda es mucho mayor que el radio de deformación de Rossby y por tanto

$$\omega = -\beta_0 R_d^2 l \quad (4.14)$$

Si $1 \ll R_d^2 k^2$ la longitud de onda es menor que el radio de deformación, en cuyo caso

$$\omega = -\beta_0 \frac{l}{k^2} \quad (4.15)$$

Puesto que el número de ondas es inversamente proporcional a la longitud de onda tendremos para los dos casos anteriores que

$$\begin{aligned} \omega &\sim -\beta_0 \frac{R_d^2}{L} = -\beta_0 L \frac{R_d^2}{L^2} & L \gg R_d \\ \omega &\sim -\beta_0 L & L \ll R_d \end{aligned}$$

En cualquier caso la frecuencia de oscilación es menor que $\beta_0 L$ que por hipótesis es mucho menor que la frecuencia f_0 . Así pues la frecuencia de oscilación es mucho menor que la frecuencia asociada a la vorticidad planetaria y por tanto capaz de describir las ondas planetarias observadas.

Sigamos indagando las propiedades de estas ondas, la velocidad de fase en la dirección zonal viene dada por la expresión

$$c_x = \frac{\omega}{l} = -\beta_0 R^2 \frac{1}{1 + R^2 k^2} \quad (4.16)$$

por lo que c_x es siempre negativa, por lo que la fase de las ondas planetarias solo se pueden mover en la dirección este \rightarrow oeste. La componente c_y vale

$$c_y = \frac{\omega}{m} = -\beta_0 R^2 \frac{l/m}{1 + R^2 k^2} \quad (4.17)$$

que puede ser positiva o negativa de acuerdo con el signo de l/m . Así pues la fase de las ondas Rossby solo puede viajar en las direcciones noroeste, oeste o suroeste.

Las líneas de ω constante en el plano l, m son círculos definidos mediante la expresión

$$\left(l + \frac{\beta_0}{2\omega}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{\beta_0^2}{4\omega^2} - \frac{1}{R^2}\right) \quad (4.18)$$

cuyos centros están a lo largo del eje l en la posición $l_0 = \beta_0/2\omega$ por lo que para que el radio del círculo

sea real se debe de cumplir que

$$\omega_{\max} = \frac{\beta_0 R}{2}$$

que es el límite superior de las frecuencias de las ondas de Rossby. La velocidad de grupo definida por el gradiente de ω en el plano l, m es ortogonal a la superficie $\omega = \text{constante}$ y por tanto es perpendicular a los círculos anteriores. La figura 4.10 nos muestra la dirección de propagación de la onda así como la dirección de la velocidad de grupo en el plano l, m .

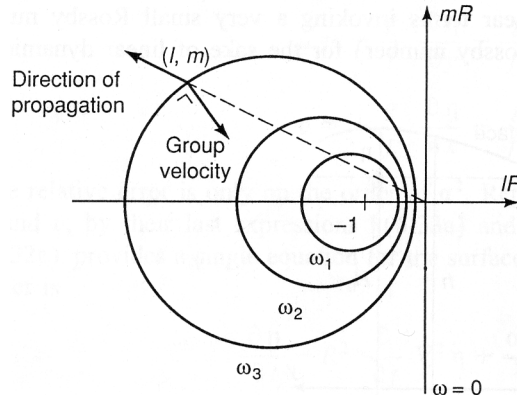


Figura 4.10:

Vamos a ver como la variación de la vorticidad planetaria f con la latitud ϕ junto con la conservación de la vorticidad potencial da lugar a la formación de las ondas planetarias de Rossby. Para ello partiremos de la ecuación de conservación de la vorticidad potencial en una atmósfera barotrópica,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0$$

derivando,

$$\frac{1}{h} \frac{D(\zeta + f)}{Dt} - \frac{\zeta + f}{h^2} \frac{Dh}{Dt} = 0$$

puesto que $f = f_0 + \beta_0 y$ obtenemos

$$\frac{1}{h} \frac{D(\zeta + f_0 + \beta_0 y)}{Dt} - \frac{\zeta + f_0 + \beta_0 y}{h^2} \frac{Dh}{Dt} = 0$$

de donde, puesto que $v = Dy/Dt$

$$h \frac{D\zeta}{Dt} + h\beta_0 v - (\zeta + f_0 + \beta_0 y) \frac{Dh}{Dt}$$

Poniendo ahora $h = h_0 + \eta$ con $\eta \ll h_0$ y bajo la hipótesis que

$$\zeta + \beta_0 y \ll f_0$$

obtenemos

$$h_0 \frac{D\zeta}{Dt} + h_0 \beta_0 v - f_0 \frac{D\eta}{Dt} = 0$$

En la filosofía de la linealización la parte adventiva de la derivada másica es mucho menor que la variación temporal local, por lo que la anterior expresión resulta

$$h_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0 \beta_0 v - f_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

La vorticidad relativa vale

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Al igual que hicimos antes, sustituyamos el campo de velocidades u, v por su correspondiente campo de velocidades en equilibrio geostrófico, por lo que

$$v = \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad u = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

por lo que

$$\zeta = \frac{g}{f_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = \frac{g}{f_0} \nabla^2 \eta$$

sustituyendo

$$\frac{g h_0}{f_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta + \frac{g h_0}{f_0} \beta_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

reordenando

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{g h_0}{f_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - \frac{g h_0}{f_0^2} \beta_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

introduciendo el radio de la deformación de Rossby $R_d^2 = g h_0 / f_0$, obtenemos

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R_d^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - R_d^2 \beta_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4.19)$$

que es la misma ecuación que obtuvimos anteriormente para describir las ondas de Rossby (ecuación 4.12).

La figura 4.11 nos puede ilustrar el origen de estas ondas. Considerar una cadena de partículas situadas a lo largo de un cinturón latitudinal. Suponer que se induce una perturbación en esta cade-

na (por ejemplo al pasar a lo largo de una cadena montañosa) de tal forma que la cadena latitudinal adquiere una forma sinusoidal (línea gruesa en la figura). En la zona marcada con + ha disminuido la

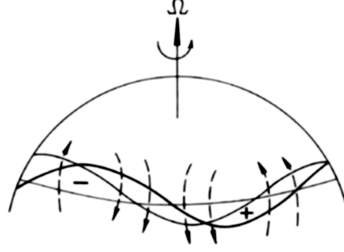


Figura 4.11: Ilustración del desarrollo de ondas Rossby

vorticidad planetaria f y por tanto aumenta la vorticidad relativa ζ dando lugar a un flujo ciclónico (líneas a trazos). Por el contrario en la zona marcada con -, aumenta la vorticidad planetaria y por tanto disminuye la vorticidad relativa desarrollándose una circulación anticlónica. En la zona donde se desarrolla la circulación ciclónica las partículas tienden a moverse en la dirección norte al este de la vaguada y hacia el sur en el oeste de la vaguada, lo contrario sucede en la dorsal. Como resultado de este proceso la oscilación se está moviendo hacia el este (línea sinusoidal fina)

4.10.1. Ondas Rossby topográficas

Vamos a suponer ahora que la profundidad de nuestro fluido está variando muy lentamente en la dirección y y de tal forma que podamos escribir

$$h = h_0 + \eta + \alpha_0 y$$

La cantidad α_0 es muy pequeña, tal que

$$\frac{\alpha_0 L}{h_0} \ll 1$$

siendo L una longitud característica del movimiento.

Partiendo como antes del principio de conservación de la vorticidad potencial

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0$$

derivando

$$h \frac{D(\zeta + f)}{Dt} - (\zeta + f) \frac{Dh}{Dt} = 0$$

poniendo $h = \eta + h_0 + \alpha_0 y$, teniendo en cuenta que ahora que f es constante llegamos a que

$$h_0 \frac{\partial \zeta}{\partial t} - f \frac{\partial \eta}{\partial t} - f \alpha_0 v = 0$$

bajo la aproximación geostrófica

$$\zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 \eta, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

y despreciando términos adventivos, obtenemos

$$\frac{g h_0}{f} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - f \frac{\partial \eta}{\partial t} - \alpha_0 g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

que reordenado nos da

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R_d^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta + \frac{\alpha_0 g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4.20)$$

donde hemos introducido el radio de la deformación de Rossby. Esta ecuación es similar a la ecuación de Rossby (ecu. 4.19) obtenida en la sección anterior, unicamente que ahora aparece la cantidad $-\alpha_0 g/f$ en vez de $\beta_0 R_d^2$. La relación de dispersión que se obtiene es similar

$$\omega = \frac{\alpha_0 g}{f} \frac{l}{1 + R_d^2 k^2}$$

siendo $k^2 = l^2 + m^2$. Si α_0 fuese cero estas ondas no aparecerían. Dado que es la pendiente quien determina la aparición o no de estas ondas reciben el nombre de ondas topográficas. La velocidad de fase en la dirección x vale

$$c_x = \frac{\omega}{l} = \frac{\alpha_0 g}{f} \frac{1}{1 + R_d^2 k^2}$$

de tal forma que en el hemisferio norte $f > 0$ estas ondas se propagan dejando a la zona menos profunda a la derecha. Al igual que antes podemos escribir la relacion de dispersión en la forma

$$\left(R_d l - \frac{\alpha_0 g}{2f \omega R_d} \right)^2 + (R_d m)^2 = \left(\frac{\alpha_0 g}{2f \omega R_d} \right)^2 - 1$$

que es la ecuación de una circunferencia en el plano l, m . Para que esta circunferencia tenga sentido es necesdario que el radio sea positivo y por tanto que exista una frecuencia máxima dada por la ecuación

$$\omega_{\max} = \left| \frac{\alpha_0 g}{2f R_d} \right|$$

lo que implica que si el forzamiento genera ondas a frecuencias superiores al anterior umbral no se

pueden generar ondas topográficas.

4.11. Efectos de la estratificación. Ondas gravitacionales internas

En la sección anterior con objeto de simplificar el problema se consideró que la densidad era constante y la distribución de presiones hidrostática. Vamos a considerar ahora que la densidad es una función de la altura que es lo que sucede en la atmósfera y también en el océano aunque en menor medida. Vimos en la sección anterior como la existencia de una discontinuidad en la densidad daba lugar a ondas en la superficie del fluido. Cabría pensar también que cuando la densidad varía con la altura aparecerán ondas gravitatorias internas. Vamos a ver como aparecen este tipo de ondas. Para ello vamos a suponer que tenemos una atmósfera en reposo térmicamente estable, esto significa de acuerdo con lo visto en el capítulo primero que la entropía y por tanto la temperatura potencial aumentan con la altura, esto es $\partial\bar{\theta}(z)/\partial z > 0$, siendo $\bar{\theta}(z)$ la distribución de temperatura potencial de la atmósfera en reposo. En estas condiciones, suponer que desplazamos una burbuja de su posición de equilibrio a la altura z a una nueva altura $z + \delta z$ suponiendo que este proceso sea adiabático y el entorno permanezca en equilibrio. En la nueva posición la burbuja sufre una fuerza arquimediana que viene dada por la diferencia entre el peso y el empuje

$$f = -\rho_b g + \rho_a g$$

siendo f la fuerza por unidad de volumen, ρ_b la densidad de la burbuja que hemos desplazado y ρ_a la densidad del ambiente, esto es la densidad del aire que rodea a la burbuja en el sitio a donde la hemos desplazado. Puesto que $f = \rho_b \ddot{z}$, tenemos

$$\rho_b \ddot{z} = -g(\rho_b - \rho_a)$$

suponiendo que las presiones de la burbuja y el ambiente son iguales y empleando la ecuación de estado obtenemos

$$\ddot{z} = -g \frac{T_a - T_b}{T_a}$$

o bien, en términos de la temperatura potencial

$$\ddot{z} = -g \frac{\theta_a - \theta_b}{\theta_a}$$

Puesto que la temperatura potencial de la burbuja ha permanecido constante durante el proceso y la temperatura potencial del ambiente varía con la altura tenemos

$$\theta_a(z + \delta z) = \theta_0(z) + \left(\frac{\partial \theta_a}{\partial z} \right) \delta z, \quad \theta_b(z + \delta z) = \theta_b(z) = \theta_0$$

puesto que desde el punto donde parten la temperatura potencial de la burbuja se hace igual a la del ambiente, tenemos

$$\delta \dot{z} = -g \frac{1}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta_a}{\partial z} \right) \delta z$$

que es la ecuación de un oscilador cuya frecuencia viene dada por

$$N^2 = g \frac{1}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta_a}{\partial z} \right)$$

Así pues la burbuja oscila en torno a su posición de equilibrio con frecuencia N , denominada frecuencia de Brunt–Vaisala. La fuerza restauradora de este oscilador es la fuerza arquimediana. En términos de la densidad potencial definida por la expresión

$$\sigma = \rho \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\gamma}$$

la frecuencia de Brunt-Vaisala se puede expresar como

$$N^2 = -\frac{g}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}$$

4.11.1. Importancia de la estratificación. El número de Froude

Suponer que un fluido estratificado con una frecuencia de Brunt–Vaisala fluye horizontalmente con una velocidad característica U encuentra un obstáculo con una altura H y una longitud L . El tiempo que tarda en cruzar este obstáculo es del orden de $T = L/U$. Si la velocidad vertical característica es W el desplazamiento vertical de la burbuja en este tiempo es $\Delta z = WT = WL/U$ y la correspondiente variación de la densidad será

$$\Delta \rho = \left(\frac{d\rho}{dz} \right) \Delta z = \frac{\rho_0 N^2}{g} \frac{WL}{U}$$

estas variaciones de densidad dan lugar a una variaciones de presión del orden de

$$\Delta P = gH\Delta \rho = \frac{\rho_0 N^2 HLW}{U}$$

este gradiente de presiones provocará variaciones de la velocidad del fluido del orden de (ecc. de Bernoulli)

$$U^2 = \frac{\Delta P}{\rho_0} = \frac{N^2 H L W}{U}$$

de donde

$$\frac{W/H}{L/U} = \frac{U^2}{N^2 H^2} = \left(\frac{U}{NH} \right)^2$$

la cantidad

$$Fr = \frac{U}{NH}$$

recibe el nombre de número de Froude. Si $Fr \ll 1$ la convergencia vertical medida por W/H no puede compensar la divergencia horizontal y por tanto ésta debe de cancelarse internamente, esto es los términos $\partial u / \partial x$ y $\partial v / \partial y$ deben de compensarse entre sí. Esto significa que el fluido tenderá a ‘esparramarse’. El número de Froude es pequeño si N es muy grande, esto es, si la estratificación es importante. Por tanto una conclusión sería: si la estratificación es importante los movimiento verticales tienden a estar inhibidos. Este número es completamente análogo al número de Rossby

$$Ro = \frac{U}{\Omega L}$$

donde se ha sustituido la velocidad angular de rotación Ω por la frecuencia de Brunt-Vaisala y la longitud de escala horizontal L por la vertical H . En un fluido que rota las escalas pertinentes son la frecuencia con la que gira y la escala horizontal. En un fluido estratificado estas escalas se sustituyen por la frecuencia asociada a la estratificación y la escala vertical.

4.11.2. Ondas gravitatorias internas

Para analizar este tipo de ondas consideremos un fluido estratificado en equilibrio estable lo que implica que $(\partial \bar{\theta}(z) / \partial z) > 0$, siendo $\bar{\theta}(z)$ la distribución de temperatura potencial en equilibrio con la altura. Se supone que este fluido se perturba tal forma que no se separa demasiado de su estado de equilibrio y podemos linealizar las ecuaciones del movimiento. Vamos a suponer por ahora ausencia de rotación y para facilitar el resultado supondremos que el problema es bidimensional. Tendremos dos ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \end{aligned}$$

Supondremos que en el estado de equilibrio nuestro fluido tiene una distribución de densidad $\bar{\rho}(z)$, presión $\bar{p}(z)$ temperatura $\bar{T}(z)$ que cumplen la ecuación de los gases perfectos

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$$

y la ecuación hidrostática

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g$$

Vamos a dividir el campo de densidades en reposo en dos partes $\bar{\rho}(z) = \rho_0 + \delta\rho(z)$, siendo ρ_0 la densidad media y $\delta\rho(z)$ nos mide la variación de la densidad con la altura. Vamos a suponer que la escala de los movimientos es tal que $\delta\rho \ll \rho_0$. El fluido en movimiento tiene una densidad ρ tal que

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' = \rho_0 + \delta\rho + \rho'$$

supondremos que $\rho' \ll \bar{\rho}$. Vamos a suponer que en los términos inerciales (términos donde aparece la aceleración) podemos aproximar la densidad ρ por ρ_0 . Separemos como antes los campos de presión y temperatura en dos partes, la de equilibrio y la perturbada $p = \bar{p}(z) + p'(t, x, z)$; $p' \ll \bar{p}(z)$, $T = \bar{T}(z) + T'(t, x, z)$; $T' \ll \bar{T}$. Las ecuaciones del movimiento las podemos poner

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} \\ \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} - (\bar{\rho} + \rho')g \end{aligned}$$

habida cuenta que

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g$$

la ecuación vertical del movimiento resulta

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g$$

Supongamos por otra parte que nuestro fluido es incompresible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Resulta que ahora, contrariamente a lo que pasaba para las ondas gravitatorias externas, nuestro fluido está estratificado, esto es la densidad varía con la altura por lo que no se puede aplicar el teorema de Taylor–Proudman y la anterior ecuación no admite una integral sencilla pues la velocidad hori-

zontal u depende también de z . Hasta el momento tenemos 3 ecuaciones y 4 variables (u, w, ρ', p'). Necesitamos otra ecuación más. Tenemos la ecuación de estado

$$p = \rho RT$$

que habida cuenta que en estado de equilibrio $\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$ podemos aproximar por la expresión

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'}{\bar{T}}$$

La introducción de esta nueva ecuación ha introducido una nueva incógnita la temperatura por lo que se necesita otra ecuación, la ecuación de calor

$$\rho c_p \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\theta}{T} Q$$

Supondremos que los movimientos son adiabáticos. Así mismo separaremos la temperatura potencial θ en dos partes $\theta = \bar{\theta}(z) + \theta'(t, x, z)$. Bajo la hipótesis de la linealidad, la ecuación de calor resulta

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0$$

De la definición de temperatura potencial

$$\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R/c_p}$$

obtenemos

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} = \frac{T'}{\bar{T}} - \frac{R}{c_p} \frac{p'}{\bar{p}}$$

Combinándola con la ecuación de estado tenemos

$$\frac{\theta'}{\bar{\theta}} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \left(1 - \frac{R}{c_p} \right) \frac{p'}{\bar{p}} = -\frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido vale $c^2 = \gamma p / \bar{\rho}$, tenemos

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{p'}{\bar{\rho} c^2}$$

de donde

$$\rho' = -\bar{\rho} \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{p'}{c^2}$$

Vamos a suponer que el segundo término del miembro de la derecha es mucho más pequeño que el primer término. Esto significa que las fluctuaciones de densidad están determinadas por las fluctuaciones térmicas (darse cuenta que en ρ' hemos descontado las variaciones de densidad debidas a la altura que las hemos incluido en el término $\delta\rho(z)$) y no por las fluctuaciones de presión (esto equivale a lo que hacíamos al principio de esta sección cuando decíamos que las presiones de la burbuja y el entorno eran las mismas). Así pues tenemos

$$\rho' = -\bar{\rho} \frac{\theta'}{\bar{\theta}}$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento vertical se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

que constituyen nuestro sistema de ecuaciones del movimiento. Eliminando p' de las dos primeras ecuaciones (derivando la primera por z y la segunda por x y restando) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{g}{\bar{\theta}} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x} \right)$$

que no es otra cosa que la ecuación de conservación de la vorticidad en la que el miembro de la derecha representa la generación de vorticidad por baroclinicidad, contrariamente a lo supuesto en las ondas gravitatorias externas en las que la vorticidad era cero en el seno del fluido. Eliminando u y θ' de las otras dos ecuaciones, suponiendo que N^2 sea constante, la siguiente ecuación para w ,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Puesto que N se ha supuesto constante podemos buscar soluciones a la anterior ecuación de la forma

$$w = \hat{w} \exp[i(lx + nz - \omega t)]$$

Sustituyendo obtenemos la siguiente ecuación

$$\omega^2(l^2 + n^2) - N^2 l^2 = 0$$

de donde obtenemos la relación de dispersión

$$\omega = \pm N \frac{l}{\sqrt{l^2 + n^2}}$$

que representan dos ondas una viajando en un sentido y la otra en sentido opuesto. Vamos a elegir el signo positivo por facilidad. Teniendo en cuenta que el número de ondas $k = \sqrt{l^2 + n^2}$ la anterior ecuación toma la forma

$$\omega = N \frac{l}{k} = N \cos \theta$$

siendo θ el ángulo que forma la dirección en la que viaja la fase con el eje x. Así pues la frecuencia de la onda depende de la dirección de propagación. Tengase en cuenta que en las ondas gravitatorias externas la onda solo se propagaba en la dirección horizontal. Ahora, debido a la extratificación, las ondas se pueden propagar en cualquier dirección. Puesto que $\cos \theta \leq 1$ la frecuencia de las ondas está limitada por la frecuencia de Brunt – Vaisala. Debido a que la divergencia del campo de velocidades es cero, al igual que sucede con el campo electromagnético, estas ondas son transversales, esto es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$$

siendo \mathbf{k} el vector de ondas. Así pues los planos de igual fase viajan perpendicularmente al movimiento real de las partículas. Podemos interpretar ahora el ángulo θ que aparece en la relación de dispersión como el ángulo existente entre el movimiento de las partículas y el eje vertical, ver la figura 4.12. La máxima frecuencia se obtiene cuando las partículas se mueven en la vertical y el ángulo

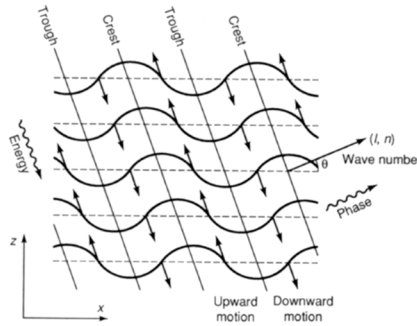


Figura 4.12:

θ vale cero en cuyo caso $\omega = N$. Este caso corresponde con un valor de $n = 0$ lo que significa que no hay dependencia con la altura de u y w . Tenemos columnas de fluido moviéndose arriba y abajo con fases diferentes de acuerdo con su posición horizontal.

Puesto que ω depende del número de ondas estas ondas son dispersivas la velocidad de grupo viene dada por el gradiente de ω en el espacio de fases,

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial l} \mathbf{i}_x + \frac{\partial \omega}{\partial n} \mathbf{i}_z$$

sustituyendo la expresión de ω se obtiene

$$\mathbf{c}_g = \frac{Nn}{k^3} (n\mathbf{i}_x - l\mathbf{i}_z)$$

que en términos de la frecuencia de oscilación vale

$$\mathbf{c}_g = \frac{\omega n}{lk^2} (n\mathbf{i}_x - l\mathbf{i}_z)$$

mientras que la velocidad de fase vale

$$\mathbf{c} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} = \frac{\omega}{k^2} (l\mathbf{i}_x + n\mathbf{i}_z)$$

Multiplicando escalarmente ambas velocidades se obtiene

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}_g = 0$$

lo que nos indica que ambas son ortogonales. La velocidad de grupo se mueve en la dirección en la que se mueven las partículas. Así mismo las componentes de ambas velocidades son iguales y de sentido contrario de tal forma que podemos considerar que ambas velocidades dan lugar a un triángulo rectángulo, formando la velocidad de fase un ángulo θ respecto de la horizontal, situación que vemos ilustrada en la figura 4.13 El hecho que ambas velocidades \mathbf{c} y \mathbf{c}_g sean perpendiculares

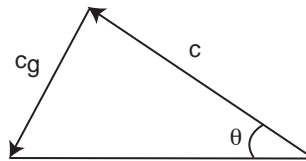


Figura 4.13:

y con componentes perpendiculares de signo contrario se ilustra en la figura 4.14 donde se muestra

un paquete de ondas moviéndose en la dirección descendente y hacia la izquierda mientras que los planos de igual fase (PP') se mueven hacia arriba y hacia la izquierda. Las crestas de onda aparecen

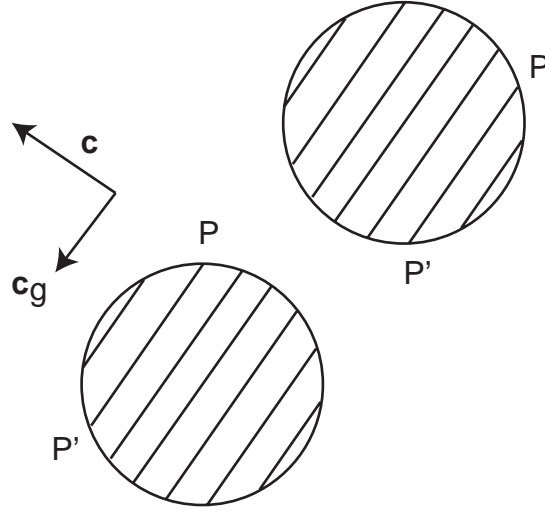


Figura 4.14:

continuamente por una de los bordes del grupo, desapareciendo por el borde opuesto propagándose a lo largo del interior del grupo.

4.11.3. Ondas de montaña

Las ondas gravitatorias se puede excitar de diversas formas, vamos a considerar es este apartado la situación en que las ondas gravitatorias son excitadas por la topografía. Para ello vamos a considerar que tenemos un viento de velocidad constante en la dirección $+x$ que es lanzado sobre una terreno ondulado. Vamos a suponer que las ondulaciones son muy pequeñas, en el sentido que la altura de la ondulación es mucho menor que su anchura. Para facilitar el problema supondremos que las ondulaciones son de la forma $h = H \cos lx$, siendo l el número de ondas $l = 2\pi/L$ con $L \gg H$.

Puesto que el problema de las ondas gravitatorias lo hemos resuelto con un viento en equilibrio nulo, supondremos que nuestro sistema de referencia se mueve con el viento, o dicho de otra manera la topografía viene hacia nosotros con velocidad $-U$, por lo tanto la superficie de la misma toma como expresión en el sistema de referencia móvil

$$z = h(x + Ut) = H \cos[l(x + Ut)] = H \cos(lx - \omega t)$$

siendo $\omega = -Ul$ una cantidad negativa. La condición frontera inferior viene dictada por el hecho que

las partículas del fondo tienen una velocidad

$$w_0 = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$$

que linealizada vale

$$w_0 = \frac{\partial h}{\partial t} = H\omega \sin(lx - \omega t) = -HUl \sin(lx - \omega t)$$

De la solución general obtenida en la sección anterior

$$w_0 = \text{Re}(\hat{w} \exp(lx - \omega t))$$

se debe de verificar que

$$\hat{w}_r = 0, \quad \hat{w}_i = -HUl$$

y la relación de dispersión

$$\omega^2 = N^2 \frac{l^2}{l^2 + n^2} = U^2 l^2$$

puesto que $\omega = -Ul$. Así pues tendremos

$$w = -HlU \sin(lx + nz - \omega t) \quad (4.21)$$

De la relación de dispersión,

$$n^2 = \frac{N^2}{U^2} - l^2$$

Esta ecuación da lugar a dos posibilidades, a) que $n^2 > 0$ y por tanto tengamos raíces reales y que $n^2 < 0$ y tengamos raíces imaginarias en cuyo caso la onda se amortiguaría según nos alejamos de la frontera.

Ondas radiantes

Vamos a considerar el caso de raíces reales, para ello es necesario que $N^2 > U^2 l^2 = \omega^2$, esto es la frecuencia de oscilación vertical ha de ser mayor que la frecuencia con la que aparecen las crestas o las vaguadas del terreno. En este caso

$$n = \pm \sqrt{\frac{N^2}{U^2} - l^2}$$

De las dos raíces solo es posible la raíz positiva pues la fuente de energía de estas ondas está en la superficie y por tanto el flujo de energía debe de ser hacia arriba lo que implica que la componente

vertical de la velocidad de grupo es positiva

$$c_{gz} = \frac{-\omega n}{k^2} = \frac{Uln}{k^2} > 0$$

siendo $k^2 = l^2 + n^2$, necesariamente $n > 0$.

La componente horizontal de la velocidad de grupo respecto de la superficie vale

$$c_{gx} = \frac{\omega n^2}{lk^2} + U = U \frac{l^2}{k^2}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\omega = -Ul$. Si llamamos θ al ángulo que forma en el espacio de fases la normal al frente de ondas

$$\cos \theta = \frac{l}{k}$$

así pues

$$\begin{aligned} c_{gx} &= U \cos^2 \theta \\ c_{gz} &= U \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbf{c}_g = U \cos \theta (\cos \theta \mathbf{i}_x + \sin \theta \mathbf{i}_z)$$

que es paralelo al vector (l, n) . En el sistema relativo la velocidad de fase vale

$$\mathbf{c} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} = -\frac{Ul}{k^2} (l\mathbf{i}_x + n\mathbf{i}_z) = -U \cos \theta (\cos \theta \mathbf{i}_x + \sin \theta \mathbf{i}_z) = -\frac{U}{k^2} \mathbf{k}$$

y en el fijo

$$\mathbf{c} = \frac{Un}{k^2} (n\mathbf{i}_x - l\mathbf{i}_z) = U \sin \theta (\sin \theta \mathbf{i}_x - \cos \theta \mathbf{i}_z)$$

La figura 4.15 nos muestra la disposición de estas ondas. Debido a los aumentos de presión que existen a sotavento de las crestas, el aire siente este aumento antes de llegar a las mismas y tiende a desviarse antes de alcanzar la cresta.

Ondas estacionarias

En el caso en que $N^2/U^2 < l^2$, la estratificación es débil. Ahora el número de ondas n es imaginario, pogamos este número en la forma $n = \pm ia$. Ahora la onda solo se propaga en la dirección x , en la dirección z se produce un amortiguamiento de la misma. En el marco que se mueve con el viento la

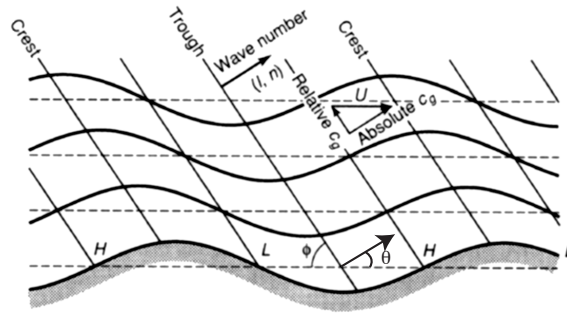


Figura 4.15: Caso de ondas radiantes

componente vertical vale

$$w = -lUHe^{-az} \sin(lx - \omega t)$$

en el marco fijo, tenemos que sustituir x por $x - Ut$, por lo que

$$w = -lUHe^{-az} \sin(lx - (lU + \omega)t)$$

ahora bien dado que $\omega = -lU$ se tiene

$$w = -lUHe^{-az} \sin(lx)$$

que es una onda estacionaria que sigue las ondulaciones del terreno y se amortigua con la altura. En este caso no hay flujo de energía pues ω es cero en el marco fijo. Las altas presiones están en el fondo de los valles y las bajas presiones en la cima de las dorsales. La figura 4.16 nos ilustra la disposición de las ondas.

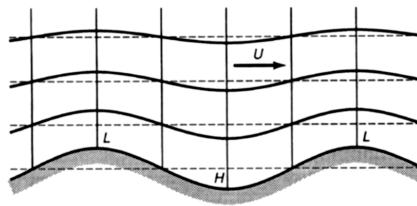


Figura 4.16: Caso de ondas atrapadas

4.11.4. Obstaculo Aislado

Para terminar esta sección vamos a analizar que pasa cuando un tenemos un obstaculo. Lo que vamos a suponer es que podemos expandir en serie de Fourier la función matemática que representa el obstáculo,

$$h(x) = \sum_l h_l \sin(lx)$$

Podemos pensar ahora que la solución al problema se consigue como superposición de ondas generadas por cada modo de la descomposición anterior, esto es podemos suponer que

$$w(x, z, t) = \Re \left\{ \sum_l w_l(x, z, t) \right\} = \Re \left\{ \sum_l \hat{w}_l(z) \exp[i(lx - \omega t)] \right\}$$

teniendo en cuenta la expresión 4.21, cada modo \hat{w}_z lo podemos poner como

$$\hat{w}_l(z) = i l U h_l \exp[inz]$$

de donde

$$w = - \sum_l h_l l U \sin(lx + nz - \omega t).$$

Como antes

$$n = \left(\frac{N^2}{U^2} - l^2 \right)^{1/2}$$

Un perfil ampliamente utilizado es el perfil lorentziano dado por

$$h(x) = h_m \frac{a^2}{a^2 + x^2}$$

siendo h_m la altura máxima del obstaculo y a la semianchura. Para una montaña estrecha, $Ua^{-1} \gg N$ el perfil es dominado por ondas cuyo número de ondas son mayores que N/U y las ondas se van debilitando con la altura como en el caso anterior cuando n era imaginario. En el caso de una montaña ancha $Ua^{-1} \ll N$ dominan las ondas con número de ondas menores que N/U y las ondas se propagan con la altura. Se verifica así mismo que los perfiles verticales se reproducen con un periodo $2\pi U/N$. La figura 4.17 nos muestra ambos casos.

Hasta el momento se ha considerado que la frecuencia de Brunt–Vaisala y el viento medio son constante con la altura. En realidad ambas variables son función de la altura. Scorer ha demostrado que es precisamente la variación de estas variables con la altura la que permite la existencia de ondas atrapadas a sotavento del obstaculo. Dicho investigador introdujo el llamado parámetro de Scorer

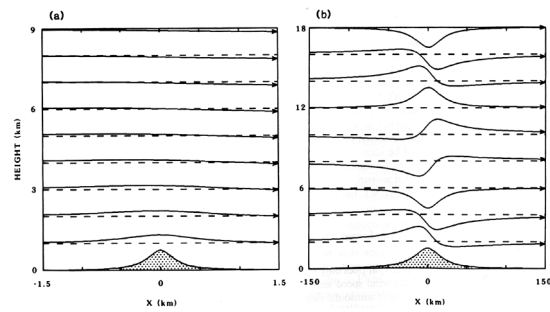


Figura 4.17: Ondas de montaña, a) Obstáculo estrecho $Ua^{-1} \gg N$, b) Obstáculo ancho $Ua^{-1} \ll N$. Obsérvese la escala horizontal.

definido por la expresión

$$S^2 = \frac{N^2}{U^2} - \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dz^2}$$

que controla la forma de las ondas. La figura 4.18 nos muestra un caso de ondas atrapadas.

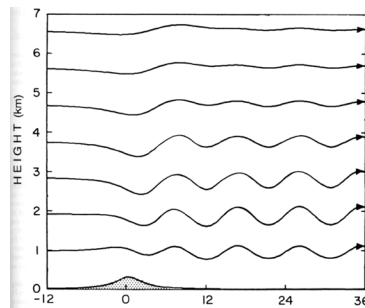


Figura 4.18: Líneas de corriente de ondas atrapadas sobre un obstáculo simple cuando la variación vertical del parámetro de Scorer permite la aparición de estas ondas